JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. VINCENSINI

Sur les domaines vectoriels des corps convexes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 373-383.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__373_0>

Sur les domaines vectoriels des corps convexes;

PAR P. VINCENSINI.

Introduction.

Considérons un corps convexe quelconque C, de l'espace euclidien à n dimensions, comme le support de l'ensemble des vecteurs ayant pour origine et pour extrémité deux points arbitraires du corps.

Menons par un point fixe O de l'espace les vecteurs équipollents aux vecteurs de l'ensemble précédent; les extrémités de ces vecteurs remplissent une certaine région convexe de l'espace, admettant O pour centre de symétrie, et que l'on appelle le *domaine vectoriel du corps* C.

Les premières recherches relatives aux relations existant entre un corps convexe et son domaine vectoriel sont dues à M. Rademacher [1], qui, se plaçant dans le cas particulier du plan, a déterminé les limites supérieure et inférieure du rapport des surfaces d'un corps convexe quelconque et de son domaine vectoriel.

Les résultats de M. Rademacher ont été repris par M. T. Estermann [2] qui les a étendus à l'espace à trois dimensions, puis par M. Ganapathi [3] qui a donné les expressions générales des limites du rapport des volumes d'un corps convexe quelconque et de son domaine

[1] *Rapport annuel de l'Association allemande de Mathématiques*, t. XXXIV, 1925, p. 64.

[2] *Sur le domaine vectoriel d'un corps convexe* (*Math. Zeitschrift*, t. 28, 1928).

[3] *Sur les domaines vectoriels* (*Math. Zeitschrift.*, t. 38, 1934).

vectoriel dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. M. Ganapathi a en outre appliqué la notion de domaine vectoriel d'un corps convexe à l'établissement de nouvelles inégalités isopérimétriques.

Ayant eu a exposer les recherches précédentes dans une séance du séminaire de M. Hadamard au Collège de France, j'ai été amené à compléter la théorie sur certains points, et je me permets d'indiquer ici quelques-uns des résultats obtenus.

Tout d'abord, la convexité même du domaine vectoriel d'un corps convexe, sauf dans le cas où la frontière est analytique, ne semble pas évidente; je donne de cette convexité une démonstration générale.

Il y a ensuite un point important qui n'a pas été abordé par les auteurs cités, c'est l'étude de l'existence et de la détermination de corps convexes admettant un domaine vectoriel *donné à priori* $\Big($autres que le corps évident résultant du domaine vectoriel, lui-même par une homothétie de rapport $\frac{1}{2}\Big)$.

Après avoir indiqué quelques propriétés générales se rattachant à la notion de domaine vectoriel, j'examine la question précédente pour les domaines vectoriels plans admettant en chaque point frontière une droite d'appui unique variant d'une façon continue avec le point d'appui, la frontière possédant en chacun de ses points un rayon de courbure déterminé. L'extension des résultats à l'espace à trois dimensions est immédiate.

L'introduction de la notion de *série linéaire prolongeable de corps convexes* m'a permis d'indiquer un moyen pour construire tous les corps convexes dont la frontière admet en chaque point une courbure finie admettant un domaine vectoriel donné jouissant de la même propriété.

I. — Démonstration de la convexité du domaine vectoriel d'un corps convexe.

Je commence par indiquer un mode très simple de génération du domaine vectoriel d'un corps convexe de l'espace euclidien à n dimensions.

Soient C un corps convexe quelconque, D son domaine vectoriel de centre O. Amenons par une translation C à avoir l'un de ses points frontières en O, puis déplaçons C par translation, de façon que le point O ne cesse de rester sur la frontière du corps et coïncide successivement avec tous les points de cette frontière. La portion d'espace balayée dans ces conditions par C est précisément D.

Chacune des ∞^{n-1} positions de C a au moins un point frontière sur la frontière de D, et tout point de D appartient à l'un au moins des ∞^{n-1} corps C. Il est clair d'ailleurs que si l'on déplace (toujours par translation) C de manière que O devienne pour le corps un point intérieur, tous les points de C seront des points intérieurs de D; nous n'insistons pas sur la démonstration rigoureuse de ce point, qui est immédiate.

Cela étant, soient M_1 et M_2 deux points distincts quelconques de D, C_1 et C_2 deux des ∞^{n-1} positions de C (avec O pour point frontière) qui viennent d'être définies, contenant l'une M_1 et l'autre M_2.

Désignons par m_1 le point C_1 homologue de M_2 dans la translation qui amène C_2 sur C_1, par m_2 le point de C_2 homologue de M_1 dans la translation inverse, et par O_1 l'homologue, dans C_1, du point O considéré comme appartenant à C_2. Pendant la translation $\overrightarrow{O_1 O}$ qui amène C_1 sur C_2, O reste sur une corde de C_1, donc dans C_1. Il en résulte que tous les points de la région balayée par C_1 dans la translation précédente sont à l'intérieur de D (ou sur sa frontière). Le segment de droite $m_1 M_1$, intérieur à C_1 en vertu de la convexité du corps, reste à l'intérieur de D, et balaie le parallélogramme $m_1 M_1 M_2 m_2$ au cours de cette même translation.

Tout les points du parallélogramme précédent appartiennent donc à D, et il en est ainsi en particulier des points de la diagonale $M_1 M_2$.

Il est établi que si M_1 et M_2 sont deux points quelconques de D, tous les points du segment $M_1 M_2$ sont dans D; D est bien *convexe*.

La génération du domaine vectoriel d'un corps convexe qui est à la base de la démonstration précédente, permettrait de retrouver simplement un certain nombre de résultats connus, sur lesquels nous ne reviendrons pas.

II. — Domaines vectoriels des corps d'une série linéaire.

Considérons l'hypersphère Σ de rayon 1, ayant pour centre un point fixe O de l'espace euclidien à n dimensions. Soit C un corps convexe (à n dimensions) de l'espace, limité par une hypersurface S convexe et fermée, douée d'un hyperplan tangent variant d'une façon continue lorsque le point de contact décrit S. P étant un point quelconque de S, désignons par ω le point de Σ tel que les hyperplans tangents à S et Σ en P et ω soient parallèles et *également situés*, c'est-à-dire situés de telle façon que l'on puisse, par une translation, réaliser la coïncidence des demi-espaces limités aux hyperplans et contenant respectivement S et Σ.

La distance algébrique p du point O à l'hyperplan tangent à S en P (la direction positive sur la normale à l'hyperplan étant celle qui va du demi-espace contenant S vers le demi-espace complémentaire) est une certaine fonction du point ω, $p(\omega)$, définie et continue en chaque point de Σ (fonction d'appui de C). C est défini par la connaissance de sa fonction d'appui. ω' désignant le point diamétralement opposé à ω sur Σ, la fonction d'appui du domaine vectoriel de C est

$$\pi(\omega) = p(\omega) + p(\omega').$$

Envisageons deux corps convexes C et C_1, de fonctions d'appui respectives $p(\omega)$ et $p_1(\omega)$. H et H_1 étant deux hyperplans d'appui de C et C_1, parallèles et également situés, désignons par $\mathfrak{T}$ un hyperplan parallèle à H et H_1, situé entre H et H_1, et dont le rapport des distances à H et H_1 est un nombre fixe. Lorsque H et H_1 enveloppent respectivement C et C_1, $\mathfrak{T}$ enveloppe comme l'on sait un certain corps convexe. Les différents corps convexes obtenus en faisant varier le rapport ci-dessus constituent la *série linéaire définie par* C et C_1. La fonction d'appui du corps général de la série linéaire définie par C et C_1 est

$$\overline{p}(\omega) = \lambda p(\omega) + \mu p_1(\omega) \qquad [\lambda, \mu \geqq 0, \ \lambda + \mu = 1];$$

nous désignerons ce corps par $C_{\lambda,\mu}$.

Soient dès lors $\pi(\omega)$ et $\pi_1(\omega)$ les fonction d'appui des domaines vectoriels D et D_1 de C et C_1 supposés centrés en O; on a

$$\pi(\omega) = p(\omega) + p(\omega'),$$
$$\pi_1(\omega) = p_1(\omega) + p_1(\omega').$$

D et D_1 déterminent une série linéaire de corps convexes (admettant tous O pour centre de symétrie) dont le corps générateur $D_{\lambda\mu}$ a pour fonction d'appui

$$\bar{\pi}(\omega) = \lambda\pi(\omega) + \mu\pi_1(\omega),$$

soit

$$\bar{\pi}(\omega) = [\lambda p(\omega) + \mu p_1(\omega)] + [\lambda p(\omega') + \mu p_1(\omega')]$$

ou encore

$$\bar{\pi}(\omega) = \bar{p}(\omega) + \bar{p}(\omega').$$

On voit que $D_{\lambda\mu}$ n'est autre que le domaine vectoriel du corps $C_{\lambda\mu}$ de la série linéaire définie par C et C_1. On peut donc énoncer ce résultat :

Les domaines vectoriels des corps d'une série linéaire de corps convexes sont les éléments d'une nouvelle série linéaire, deux corps correspondants dans les deux séries étant déterminés par la même valeur du rapport fixant chaque corps dans la série à laquelle il appartient.

Si C et C_1 sont deux corps convexes ayant même domaine vectoriel D, le théorème précédent montre que tous les corps de la série linéaire déterminée par C et C_1 *ont aussi* D *pour domaine vectoriel.*

La connaissance de deux corps convexes admettant un domaine vectoriel donné entraîne donc la connaissance de ∞^1 corps admettant ce même domaine vectoriel. Mais on voit aussitôt que la connaissance *d'un seul* corps C ayant un domaine vectoriel donné D entraîne celle de ∞^1 corps admettant D pour domaine vectoriel; il suffit d'adjoindre à C l'homothétique $\overline{D}$ de D dans une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de prendre les corps de la série linéaire déterminée par C et $\overline{D}$.

Nous allons montrer dans la suite comment, sans connaître d'avance aucun corps admettant un domaine vectoriel D donné *a priori* $\Big($autre que l'homothétique de D dans une homothétie de rapport $\frac{1}{2}\Big)$ on peut, dans l'espace à deux ou trois dimensions, et moyennant une hypothèse convenable sur la frontière de D, construire tous les corps ayant le domaine vectoriel voulu. L'étude de cette question exige quelques indications sur le *prolongement des séries linéaires de corps convexes.*

III. — Séries linéaires prolongeables.

Considérons deux corps convexes C et C_1 de l'espace euclidien à n dimensions et deux hyperplans d'appui H et H_1 des deux corps, parallèles et également situés. Définissons un hyperplan $\mathfrak{T}$ parallèle à H et H_1 par le rapport algébrique m de ses distances (comptées à partir de $\mathfrak{T}$) à H et H_1. Pour une valeur *négative* fixe quelconque de m, $\mathfrak{T}$ est entre H et H_1 et enveloppe, lorsque H et H_1 varient, l'un des corps convexes de la série linéaire dont les éléments extrêmes sont C et C_1.

Pour une valeur *positive* de m le corps enveloppé peut être convexe ou non. En général, pour m positif suffisamment voisin de zéro (pour $\mathfrak{T}$ suffisamment voisin de H), ou pour m suffisamment grand (pour $\mathfrak{T}$ suffisamment voisin de H_1), le corps obtenu sera convexe, mais il cessera de l'être dès que m atteindra une certaine valeur en croissant à partir de zéro (ou en décroissant à partir de $+\infty$).

Nous dirons que la série linéaire déterminée par C et C_1 est *prolongeable*, dans le sens $C \rightarrow C_1$ par exemple, s'il existe des hyperplans parallèles à H et H_1 pour lesquels le rapport des distances à H et H_1 est constant, situés par rapport à H_1 dans le demi-espace ne contenant pas H, et enveloppant des corps convexes par rapport auxquels ils sont situés comme H et H_1 par rapport à C et C_1.

Si tous les hyperplans parallèles à H et H_1 situés dans le demi-espace indiqué, dont le rapport des distances à H et H_1 est constant, enveloppent des corps convexes par rapport auxquels ils sont situés comme H et H_1 par rapport à C et C_1, nous dirons que la série linéaire envisagée est *indéfiniment prolongeable dans le sens* $C \rightarrow C_1$.

Ainsi, si C_1 est homothétique direct de C dans une homothétie de centre O et de rapport λ supérieur à 1, le prolongement indéfini de la série $[C, C_1]$ est possible dans le sens $C \rightarrow C_1$.

Dans le sens inverse, on ne peut prolonger la série que jusqu'au point O, enveloppé par l'hyperplan $\mathfrak{T}$ parallèle à H et H_1 situé, par rapport à H, dans le demi-espace ne contenant pas H_1 et tel que le rapport de ses distances à H et H_1 soit égal à $\frac{1}{\lambda}$. Si le rapport des distances de $\mathfrak{T}$ à H et H_1 dépasse la valeur $\frac{1}{\lambda}$, $\mathfrak{T}$ continue à envelopper un corps convexe C_2 (homothétique de C dans une homothétie de rapport négatif), mais la série définie par C et C_2 *ne prolonge pas* la série définie par C_1 et C (C n'appartient pas à la série définie par C_1 et C_2); cela est dû à ce que les hyperplans d'appui $\mathfrak{T}$ et H (ou H_1) *ne sont pas également situés*.

Si O est à l'infini, c'est-à-dire si les corps C et C_1 se déduisent l'un de l'autre par une translation, la série [C, C_1] est infiniment prolongeable dans les deux sens, et l'on démontre aisément que c'est là le seul cas où une série linéaire de corps convexes puisse être indéfiniment prolongée dans les deux sens.

Deux corps convexes dont les frontières sont deux hypersurfaces parallèles, déterminent une série indéfiniment prolongeable dans le sens qui va de la frontière intérieure vers la frontière extérieure.

Des exemples simples de séries prolongeables sont fournis par un corps convexe quelconque C et l'homothétique Δ dans le rapport $\frac{1}{2}$ de son domaine vectoriel D. Le prolongement peut être effectué dans le sens $C \rightarrow \Delta$, *au moins jusqu'au corps* C_1 *symétrique de* C *par rapport au centre de* Δ.

En nous bornant à la considération de couples de corps convexes de l'espace à deux ou trois dimensions, doués d'une frontière *admettant en chaque point une courbure finie*, nous allons montrer que le prolongement de la série linéaire déterminée par un tel couple est possible dans les deux sens. La démonstration nous conduira même à la construction de séries linéaires indéfiniment prolongeables dans un sens.

Nous raisonnerons dans le plan, l'extension des résultats à l'espace à trois dimensions ne présentant aucune difficulté.

Soient C et C_1 deux corps convexes jouissant de la propriété énoncée. En déplaçant au besoin l'un d'eux par translation (ce qui ne modifie pas les corps de la série linéaire définie par C et C_1), nous pouvons amener l'origine O d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy à être intérieure aux deux corps. Ceux-ci seront alors définis tangentiellement par les deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x\cos\varphi + y\sin\varphi = p\ (\varphi), \\ x\cos\varphi + y\sin\varphi = p_1(\varphi), \end{cases}$$

où $p(\varphi)$ et $p_1(\varphi)$ (fonctions d'appui de C et C_1) sont deux fonctions que, pour plus de simplicité, nous supposerons analytiques, de période 2π, vérifiant les conditions

$$\begin{aligned} &p\ (\varphi) > 0, \qquad p\ (\varphi) + p''(\varphi) > 0, \\ &p_1(\varphi) > 0, \qquad p_1(\varphi) + p_1''(\varphi) > 0, \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2} + \varphi$ est l'angle que font avec l'axe Ox deux tangentes T et T_1 aux frontières des deux corps C et C_1, parallèles et également situées.

Considérons la parallèle H à T et T_1, situé par rapport à T_1 dans le demi-plan ne contenant pas T et telle que le rapport de ses distances à T_1 et T soit un nombre fixe m.

L'équation de H est

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \pi(\varphi)$$

avec

$$\pi = \frac{p_1 - mp}{1 - m} \qquad (0 < m < 1).$$

Le rayon de courbure de l'enveloppe de H, compté à partir du point de contact, sur l'axe déduit de la tangente orientée par rotation de $+\frac{\pi}{2}$, a pour expression

$$\pi(\varphi) + \pi''(\varphi) = \frac{(p_1 + p_1'') - m(p + p'')}{1 - m}.$$

H enveloppera une courbe convexe Γ si l'expression précédente garde un signe constant; mais Γ ne fera partie d'une série linéaire prolongeant la série $[C, C_1]$ que si ce signe est $+$ (afin que par rapport aux tangentes parallèles, C, C_1 et Γ soient également situés).

Les expressions $p + p''$ et $p_1 + p_1''$ étant par hypothèse positives, on voit que l'on pourra commencer le prolongement, et le poursuivre jusqu'à ce qu'on ait atteint le corps Γ défini par une valeur de m égale au minimum m_0 du rapport

$$\frac{r_1}{r} = \frac{p_1 + p_1''}{p + p''}$$

des rayons de courbure des frontières de C_1 et C en deux points correspondants.

De même, le prolongement dans le sens $C_1 \rightarrow C$ sera possible jusqu'à un corps Γ_1 défini par une valeur de m (m désigne ici le rapport des distances de H à T et à T_1) égale au minimum du rapport $\frac{r}{r_1}$ des rayons de courbure de C et C_1 en deux points correspondants.

Pour que l'on puisse prolonger *indéfiniment* la série $[C, C_1]$ dans le sens $C \rightarrow C_1$, il faut et il suffit que l'on ait constamment $\frac{r_1}{r} \geqq 1$, c'est-à-dire qu'en un couple quelconque de points correspondants *la courbure de la frontière de* C *soit supérieure à celle de la frontière de* C_1.

Le prolongement indéfini dans les deux sens n'est possible que si l'on a simultanément, pour tous les couples de points correspondants,

$$\frac{r_1}{r} \geqq 1, \qquad \frac{r}{r_1} \quad 1,$$

ce qui entraîne

$$r = r_1,$$

et exige, conformément à une proposition générale énoncée plus haut, que les deux corps C et C_1 se déduisent l'un de l'autre par une translation.

Ce qui précède fournit le moyen de construire autant de séries linéaires que l'on veut, indéfiniment prolongeables dans un sens, à partir de deux corps convexes limités par des contours doués en chaque point d'une courbure finie.

Soient C et C_1 deux tels corps; désignons par $(r_1)_m$ le minimum du rayon de courbure de la frontière de C_1 et par $(r)_M$ le maximum du rayon de courbure de la frontière de C. Si l'on a $(r)_M \leqq (r_1)_m$, la série déterminée par C et C_1 est indéfiniment prolongeable dans le sens $C \rightarrow C_1$; dans le cas contraire, soumettons C à une homothétie de rapport λ $\left[\lambda \leqq \frac{(r_1)_m}{(r)_M}\right]$; le nouveau corps et C_1 définissent une série linéaire indéfiniment prolongeable au delà de C_1.

On se rend facilement compte que l'extension des résultats précédents à l'espace, exige seulement que l'on remplace les courbures des contours frontières par les *courbures totales* des surfaces limitant les corps convexes extrêmes de la série envisagée.

IV. — Corps convexes ayant un domaine vectoriel donné.

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème, posé à la fin du n° II, de la recherche des corps convexes du plan ou de l'espace à trois dimensions admettant un domaine vectoriel donné *a priori*. Nous raisonnerons dans le plan, et nous supposerons les frontières des domaines vectoriels donnés douées d'une courbure finie et non nulle (exception faite pour des points méplats isolés).

Soit D le domaine vectoriel donné. Donnons-nous par ailleurs un corps convexe *quelconque* Γ, dont la frontière est douée d'une courbure finie et non nulle (les points méplats sont ici exclus), et construisons son domaine vectoriel C. Il est connu, et bien facile d'établir, que le rayon de courbure r_M en un point quelconque M de la frontière de C est la somme des rayons de courbure de la frontière de Γ aux deux points où la tangente est parallèle à la tangente en M à la frontière de C. En effectuant au besoin une homothétie sur Γ, nous pouvons toujours supposer que le maximum de r_M est inférieur au minimum du rayon de courbure de la frontière de D. La série déterminée par les deux corps centrés C et D est alors indéfiniment prolongeable dans le sens C $\rightarrow$ D. Construisons l'un quelconque F des corps de la série prolongée; F est doué d'un centre de symétrie (comme C et D), et D peut-être regardé comme enveloppé par une droite, parallèle à deux droites d'appui parallèles (et également situées) de C et F, comprise entre ces deux droites, le rapport de ses distances aux deux droites d'appui de C et de F, étant un nombre déterminé λ.

Construisons dès lors l'homothétique Φ de F dans une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$; Φ admet F pour domaine vectoriel. Γ et Φ déterminent une série linéaire de corps convexes. Nous avons vu au n° II que les corps d'une série linéaire de corps convexes ont pour domaines vectoriels les éléments de la série déterminée par les domaines vectoriels des corps extrêmes, les corps correspondants dans les deux séries étant relatifs à la même valeur du rapport fixant les éléments des deux séries. Appliquons ce résultat ici.

Γ et Φ déterminent une série linéaire de corps convexes; la série des domaines vectoriels associée est définie par C et F; le corps convexe Δ de la série $[\Gamma, \Phi]$, correspondant au rapport λ qui fixe D dans la deuxième série, *admet* D *pour domaine vectoriel.*

Il est clair que Δ est un corps *distinct* du corps banal constitué par l'homothétique de D dans le rapport $\frac{1}{2}$. Si en effet Δ était centré, comme Φ l'est, il en serait de même de tous les corps de la série $[\Gamma, \Phi]$, ce qui est contraire à l'hypothèse suivant laquelle Γ est *quelconque*.

Nous avons utilisé une série indéfiniment prolongeable, dans l'unique but de donner plus de latitude à la construction, mais il est évident que l'on aurait atteint le résultat voulu en n'astreignant Γ à aucune autre condition que celle d'admettre une frontière douée en chaque point d'une courbure finie; il aurait fallu alors choisir F dans un voisinage convenable de D (*voir* le n° III).

Il est facile de voir qu'en faisant varier le corps Γ qui est à l'origine de la construction qui vient d'être exposée, on obtient *tous les corps convexes* dont la frontière admet en chaque point une courbure finie, ayant un domaine vectoriel D quelconque jouissant de la même propriété.

Soit en effet Δ l'un quelconque de ces corps; adjoignons-lui un corps convexe centré Φ; prolongeons la série $[\Phi, \Delta]$ dans le sens $\Phi \rightarrow \Delta$, ce qui, vu l'hypothèse faite sur la courbure, est possible tout au moins jusqu'à une certaine limite (n° III).

Si Γ est l'un des corps de la série prolongée, la construction précédente, faite à partir de Γ, donne Δ.

En prenant pour D un cercle, et en choisissant Γ dans le champ des corps convexes fermés limités par des courbes ayant en chaque point un rayon de courbure déterminé, on obtient toutes les *orbiformes* (courbes de largeur constante) dont les frontières jouissent de la même propriété.

Si, se plaçant dans l'espace à trois dimensions, on prend pour D une sphère, la même construction donne les corps convexes de l'espace, d'épaisseur constante, limités par des surfaces admettant en chaque point une courbure finie.