JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. BUHL

Sur la génération des équations de Monge-Ampère

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 71-88.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__71_0>

Sur la génération des équations de Monge-Ampère;

PAR A. BUHL,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

L'honneur d'écrire un article, dans un volume spécialement publié pour rendre hommage à M. Edouard Goursat, me semble pouvoir être encore augmenté en traitant, non d'un sujet quelconque, mais des répercussions de première importance que peut avoir, très directement, l'œuvre du Maître sur les Théories actuelles de la Gravifique et de la Mécanique ondulatoire.

J'ai déjà exprimé des idées analogues dans un Mémoire intitulé *Les Théories einsteiniennes et les Principes du Calcul intégral* inséré ici-même en 1922. Je reprends ces idées en les rapprochant, avec la plus grande facilité, des travaux les plus connus dus à M. Goursat.

Les identités fondamentales du Calcul intégral, (1) et (9), conduisent aussi bien aux équations de Monge-Ampère, et à toute l'immense géométrie qu'elles représentent, qu'aux équations électromagnétiques, généralisant le type maxwellien, d'où découlent immédiatement le Calcul différentiel absolu et la Gravifique.

De telles généralisations font merveilleusement apparaître l'admirable unité de la Science et ont, de ce fait, une valeur éducative de premier ordre.

L'identité (1) comme l'a rappelé M. Maurice Fréchet au début de son *Arithmétique de l'Infini* (*Actualités scientifiques*, 1934, fasc. 144) est à la base de la Théorie des Fonctions de lignes selon M. Vito Volterra : *La ligne est une courbe plane fermée et le nombre est son aire.* Que cette correspondance entre un objet, la ligne, et un nombre soit généralisée en une correspondance entre éléments quelconques et nous parvenons à l'Analyse générale. On voit quelles conséquences on prépare en prenant pour points de départs de simples identités telles (1) et (9).

En résumé, on met indéniablement, dans des identités telles que (1) et (9), la notion de *mesure*. Il semble alors qu'une intelligence suffisamment vaste puisse en faire sortir l'ensemble des phénomènes mesurables.

1. Formules stokiennes. — Ces formules ne sont que des identités pouvant se déduire de transformations et d'associations linéaires de transformations de l'identité fondamentale

$$\int_C X\,dY = \iint_A dX\,dY, \tag{1}$$

laquelle peut être généralisée, dans l'espace à n dimensions, entre intégrales $(n-1)$-uples et n-uples. On commence par obtenir ainsi la petite formule de Green-Riemann

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dx\,dy, \tag{2}$$

puis la *formule de Stokes pour espaces à canaux*

$$\int_C U\,dP + V\,dQ = \iint_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial P} & \dfrac{\partial}{\partial Q} \\ U & V \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma, \tag{3}$$

à peine distincte de (2) au point de vue logique, mais déjà grosse, d'ailleurs comme (2), d'immenses conséquences. Dans un espace à *canaux*, ou fait des *tubes* de la congruence $P(x, y, z) = \text{const.}$ et $Q(x, y, z) = \text{const.}$, on considère des cloisons S transversales, en projections *canales* les unes des autres. Chaque cloison S a une frontière C et naturellement toutes ces C sont aussi en projections *canales*. Alors, pour toutes les S, les deux membres de (3) sont invariants. *Le principal rôle de la formule* (3) *est d'associer des congruences, avec invariances intégrales transversales, à d'innombrables questions de Physique théorique*. Ainsi ces invariances ne supposent point la *continuité* des cloisons S; celles-ci peuvent être considérées comme des fronts d'ondes susceptibles de s'émietter en corpuscules conservant cependant chacun un caractère ondulatoire.

Dans la suite logique des choses, il faut, après (3), placer la formule de Stokes ordinaire

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma \tag{4}$$

qui donne une intégrale double invariante pour toutes les cloisons S de même frontière C. La formule (4) est trop connue pour que nous ayons à nous livrer aux moindres réflexions à son égard.

Après (4), nous parvenons à la formule beaucoup plus originale

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq \tag{5}$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & R & S & T \end{vmatrix} dx\,dy,$$

en laquelle P, Q, R, S, T sont des fonctions dont chacune peut contenir x, y, z, p, q. Elle donne une intégrale double invariante pour toutes les cloisons S ayant même contour C *et même ensemble de plans tangents (ou de normales) le long de* C.

La formule (5), quand elle se réduit à l'identité $0 = 0$, permet d'accéder, avec une aisance sans égale, aux équations de Monge-Ampère et aux travaux de M. Édouard Goursat. Mais l'invariance que nous venons d'indiquer donne aussi à l'intégrale double des propriétés de *courbure* fondamentales et extrêmement remarquables. Toute la théorie de la courbure des surfaces peut d'abord être rattachée à la formule (5) qui, parmi beaucoup de particularisations, donne la célèbre formule d'Ossian Bonnet

$$\int_C d\omega - \int_C \frac{ds}{\rho_g} = \iint_S \frac{d\sigma}{R_1 R_2}. \tag{6}$$

Celle-ci, appliquée à un triangle *géodésique* (ρ_g infini), donne la formule de Gauss

$$A + B + C - \pi = \iint_S \frac{d\sigma}{R_1 R_2} \tag{7}$$

qui semble bien être la meilleure des ouvertures quant à l'étude de la Géométrie non euclidienne ([1]). Dans le cas du triangle sphérique, dont S peut représenter l'aire, on a la formule d'Albert Girard

$$S = R^2(A + B + C - \pi). \tag{8}$$

Pourquoi insister ici sur la filiation (5), (6), (7), (8), alors que l'on peut construire, de même, tant d'autres choses à partir de (5)? C'est à cause de développements récents, *Sur la mesure des grandeurs*, publiés par M. Henri Lebesgue, développements en lesquels l'éminent géomètre s'exprime comme suit, au sujet de la formule (8) : « Il est un peu triste de constater que des jeunes gens, ayant terminé le cycle des études qui leur confèrent les grades nécessaires pour enseigner dans les classes secondaires, puissent ne jamais avoir entendu parler du magnifique théorème d'Albert Girard. Quand on le leur fait connaître, ils sont toujours émerveillés de la beauté du résultat et stupéfaits qu'on ne leur ait pas parlé plus tôt d'une propriété indispensable pour bien comprendre le postulatum d'Euclide ([2]). »

Bravo ! Voilà qui est bel et bon. Mais les élèves formés par le Cours de Calcul infinitésimal, que j'ai l'honneur de professer à la Faculté des Sciences de Toulouse, ne sont pas dans le triste cas signalé par M. Lebesgue. Ils connaissent la magnifique formule (8) et savent remonter, par généralisations successives, aux non moins magnifiques formules (7), (6) et (5).

De plus, en remontant au delà de (5), il y a lieu, je crois, de s'émerveiller encore davantage. Au delà de (5), il y a, très directement, (1) et rien que (1). C'est par transformations de (1) et associations

---

([1]) Pour l'établissement de (6) à partir de (5), *voir* A. Buhl, *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles*, 1920, Chap. III, collection *Scientia*, Gauthier-Villars. *Voir* aussi pour la filiation (6), (7), (8), G. Darboux, *Surfaces*, 1894, t. III, Chap. VI.

([2]) *L'Enseignement mathématique*, 1934, t. XXXIII p. 197.

linéaires des transformées [1] que l'on démontre (5); il en est d'ailleurs de même de (2), (3) et (4).

Faut-il rappeler encore une formule (10) toujours liée, très directement, aux travaux de M. Goursat. On part, cette fois, de l'identité

$$\iint_S X\,dY\,dZ = \iiint_V dX\,dY\,dZ \tag{9}$$

qui, par transformations et associations linéaires, donne

$$\iint_S M_{ij}\,dx_i\,dx_j = -\iiint_V \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{\frac{\partial F}{\partial x_4}} \tag{10}$$

avec

$$M_{ij} = -M_{ji}.$$

C'est, par excellence, la formule électromagnétique selon les idées de Maxwell généralisées par M. Th. De Donder. En se réduisant à l'identité $0 = 0$, elle donne effectivement, dans l'espace-temps, deux systèmes de quatre équations chacun [2].

De plus la formule (10) subsiste lorsque, dans le déterminant, on remplace les ∂ de la seconde ligne par des D plus généraux; d'où une dérivation partielle *généralisée* qui conserve *les formules stokiennes* et, par ailleurs, *la règle de dérivation des produits*.

Les dérivées en D *ne sont pas permutables* et, à leur non permutabilité, peut correspondre la notion de *courbure* dans un espace de Riemann. C'est là le nœud essentiel de la Gravifique d'Einstein.

Ainsi les identités (1) et (9) contiennent, à l'état latent, les *courbures* des surfaces ordinaires et de l'espace riemannien, *les équations de Monge-Ampère* et *les ondes*, puis *la Gravifique*. C'est dire que la notion d'étendue mesurable, intégrable, est la base de tout. S'il y a un monde physique, il nous a imposé la notion d'étendue et, en retour, quand nous croyons avoir épuré l'étendue, et sa mesure par continuité

---

[1] Pour cette démonstration, *voir* A. BUHL, *loc. cit.*, Chap. I.

[2] TH. DE DONDER, *La Gravifique einsteinienne*, 1921, Gauthier-Villars.

et par intégration, en des formules aussi simples que (1) et (9), celles-ci sont toujours propres aux reconstructions phénoménales les plus diverses.

La Mécanique ondulatoire, avec ses espaces abstraits, à la Hilbert, beaucoup plus généraux que les espaces de Riemann, dépend du même esprit de reconstruction. Pour le comprendre, il suffit d'analyser l'étendue avec des notions de *structure fine*.

Prenons (1) et l'aire A de frontière C. L'aire A est un assemblage de rectangles $dX\, dY$ qu'on obtient en effectuant un quadrillage, de plus en plus ténu, par des parallèles aux axes de coordonnées. C'est donner à la courbe C une structure fine constituée par une succession d'éléments infiniment petits alternativement parallèles à OX et à OY. Un changement de variables peut remplacer le quadrillage rectiligne et orthogonal par un réseau quelconque d'où, le long de C, une autre structure fine. Une première propriété de l'aire A est d'être invariante par rapport à ces changements de structure et il y a ici quelque chose de fondamental dans la notion d'aire. Une foule de modalités phénoménales peuvent paraître se modifier, avec évanouissement plus ou moins complet de notions différentielles (incertitudes de Heisenberg), alors que l'aire, le volume, etc., subsistent. Le monde des structures fines, très incomplètement saisissable par lui-même, l'est, du moins, par de tels invariants. Voilà pourquoi, même dans ce monde des structures fines, les identités telles que (1) et (9) gardent un rôle fondamental.

Si l'on veut aller plus loin, on peut emprunter, à un quadrillage quelconque, des *canaux* en lesquels on transportera certains éléments du contour C, ou de sa structure fine, en conservant d'autres invariances. Nous aurons alors l'émiettement corpusculaire dans un espace à canaux ou la trajectoire corpusculaire à structure fine, toutes choses que l'on peut rattacher à l'étude de la formule (3).

Toutefois nous laisserons ces sujets dont le développement ne peut s'accorder avec la brièveté du présent écrit [1]. Nous avons voulu

---

[1] *Voir* A. Buhl : *Structures analytiques et Théories physiques* (*Mém. des Sciences physiques*, dirigé par H. Villat et J. Villey, fasc. XXII) et *Gravifiques, Groupes, Mécaniques* (*Mém. des Sciences mathématiques*, dirigé par H. Villat, fasc. LXII).

simplement faire pressentir avec quelle facilité les travaux de M. Édouard Goursat peuvent conduire à toutes les formes de la Physique théorique actuelle.

La formule (10) a été étudiée par M. Goursat [1], sinon exactement sous cette forme du moins sous une forme équivalente, à propos des formes différentielles bilinéaires

$$\Omega = A_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

2. De certaines associations d'ondes. — Nous n'avons point, non plus, à rappeler ici comment la notion d'onde correspond, dans le domaine des équations aux dérivées partielles, à la notion de *caractéristique*. Il s'agit de remarques encore plus proches des principes, notamment des identités telles que (1) ou (9), et qui dépendent des formules stokiennes elles-mêmes plutôt que des équations aux dérivées partielles qu'on peut en tirer.

Prenons d'abord la formule de Stokes ordinaire (4). La cloison S peut se déformer *continûment* d'une manière quelconque; elle peut notamment être parcourue par une *arête vive* fermée qui se confondrait, au début, avec le contour C et irait, en se rétrécissant, jusqu'à n'être plus qu'un point sur S. Évidemment, le long de cette arête vive, la cloison S, sans cesser d'être continue, perdrait la continuité de la distribution des plans tangents ou la continuité de α, β, γ, c'est-à-dire la continuité des dérivés partielles, du premier ordre, de z.

Il y a quelque chose d'analogue et de plus intéressant encore pour la formule (5). Il faut alors imaginer, au lieu de l'arête vive précédente, un contour singulier Γ, moins apparent, qui, à partir de C, va se rétrécissant, jusqu'à s'évanouir en un point, et tel que, le long de ce contour Γ, les continuités de z, p, q soient conservées, mais non celles de r, s, t et, si l'on veut, des dérivées d'ordre supérieur au second. *La présence de Γ n'altère en rien la formule* (5). Or Γ est, par définition, une *onde*, une onde *de nature différentielle* sur le front de laquelle des dérivées du second ordre changent brusquement de valeur. Le front Γ

---

[1] Éd. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff*, 1922, p. 149-151, Hermann. *Voir* analyse dans *L'Enseignement mathématique*, 22e année, 1921-1922, p. 316. *Voir* aussi E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, 1922, Chap. VII, Hermann.

qui, jusqu'ici, est *linéaire* peut devenir *superficiel*. Il n'y a qu'à imaginer une infinité de cloisons S issues de C et, bien entendu, toutes tangentes entre elles le long de C; sur chacune il pourra y avoir un front linéaire Γ, l'ensemble de ces fronts formant une même surface Σ en forme de canal.

Les cloisons S, ainsi considérées, propagent l'intégrale double *invariante* (5) et, transversalement à ces cloisons S, des surfaces Σ peuvent propager, sur les S, des ondes de nature différentielle. Il y a là une curieuse association phénoménale de propagations à *discontinuités différentielles* et de propagations *à invariances intégrales*. Les S et les Σ peuvent encore former des espaces *à canaux* ou *à tubes de congruence* qui s'introduisent, de manières fort diverses, en Physique théorique.

On voit qu'ici, à côté de l'étude des équations de Monge-Ampère, il faut placer l'étude des intégrales

$$\iint_S [K(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D]\, dx\, dy, \tag{11}$$

où le crochet, sous les signes d'intégration, n'est pas nul. Quand à K, A, B, C, D, ce sont des fonctions dont chacune peut contenir x, y, z, p, q.

Les intégrales (11) peuvent donner lieu aux phénomènes précédents quand elles prennent la forme du second membre de (5), c'est-à-dire quand

$$\left\{\begin{aligned} K &= T_p - S_q, \\ A &= q(R_p - S_z) + Q_p - S_y, \\ B &= q(R_q - T_z) - p(R_p - S_z) + Q_q - T_y + S_x - P_p, \\ C &= p(T_z - R_q) + T_x - P_q, \\ D &= p(Q_z - R_y) + q(R_x - P_z) + Q_x - P_y. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Ces équations entraînent le nouveau système

$$\left\{\begin{aligned} & X^2(A) + XY(B) + Y^2(C) + D_z - X(D_p) - Y(D_q) = 0, \\ & X^2(K) + X(B_q - C_p) + Y(C_q) + 2C_z - D_{qq} = 0, \\ & XY(K) - X(A_q) - Y(C_p) - B_z + D_{pq} = 0, \\ & X^2(K) + Y(B_p - A_q) + X(A_p) + 2A_z - D_{pp} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial p} X(K) + \frac{\partial}{\partial q} Y(K) + K_z + B_{pq} - A_{qq} - C_{pp} = 0. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Ce dernier a été formé directement, par M. Goursat [1], pour exprimer que l'équation de Monge-Ampère

$$K(rt-s^2)+Ar+Bs+Ct+D=0 \tag{14}$$

était de la forme de Bäcklund

$$\begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & R & S & T \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Par X et par Y, il faut entendre respectivement

$$\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}.$$

Cette analyse, qui devait conduire l'illustre auteur à une théorie complète des transformations de Bäcklund [2], avait en outre, une signification physique profonde. Si le premier membre de l'équation (14) se réduit à

$$D=-pF-qG+H,$$

les fonctions F, G, H ne contenant ni p ni q, le système (13) se réduit à

$$F_x+G_y+H_z=0. \tag{16}$$

Or (16) est le lemme de la divergence évanouissante, fondamental en Physique théorique. Les équations générales d'Einstein proviennent de l'évanouissement d'une divergence généralisée dans un espace de Riemann. Les opérateurs hermitiques et les intégrales multiples sur lesquelles ils opèrent entraînent également des généralisations de (16). M. Édouard Goursat a fait quelque chose d'analogue, dès 1902, en créant le système (13); les généralités physiques ainsi

(1) *Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2, t. IV, 1902).

(2) *Le problème de Bäcklund* (*Mémorial des Sc. math.*, dirigé par H. Villat, fasc. VI, 1925).

atteintes sont celles qui sont brièvement résumées dans la première moitié du présent paragraphe.

3. Type de Bäcklund et type de Lie. — L'équation de Monge-Ampère (15), dite *du type de Bäcklund*, malgré sa généralité déjà très grande, n'est pas cependant *la plus* générale. Comme le remarque M. Goursat ([1]), on peut, suivant les idées de Sophus Lie, rechercher des surfaces sur lesquelles on ait, à la fois

$$(17)\quad \begin{cases} \mathrm{I}\,dx + \mathrm{J}\,dy + \mathrm{L}\,dz + \mathrm{M}\,dp + \mathrm{N}\,dq = 0, \\ \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz + \mathrm{S}\,dp + \mathrm{T}\,dq = 0. \end{cases}$$

Alors, comme on doit avoir identiquement

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

il s'ensuit que les surfaces cherchées sont les surfaces intégrales de l'équation

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \mathrm{I} & \mathrm{J} & \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{S} & \mathrm{T} \end{vmatrix} = 0$$

qui est construite, on le voit, de manière fort analogue à (15), mais à partir du système de *caractéristiques* (17). Il est commode, pour désigner (18), de dire que c'est l'équation de Monge-Ampère *du type de Lie*. Dans mon opuscule de 1920, cité plus haut, j'insistais sur l'analogie (15)-(18), la rapprochant, dans le domaine géométrique, des équations de la Physique théorique qui contenaient déjà couramment des constructions par déterminants *symboliques* imaginés à l'instar de déterminants ordinaires. Or, depuis 1920, cet état de choses n'a fait que croître et embellir. Et avec quels prodigieux développements ! Raison de plus pour y insister à nouveau et rappeler que les méthodes d'opérateurs de la Mécanique quantique auraient pu naître, tout aussi bien, dans le domaine de la Géométrie.

([1]) *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, 1896, t. I, p. 49-51.

Au fond ce sont toujours les raisons rappelées précédemment qui jouent. Si l'évanouissement d'une divergence (issue, par exemple, de la formule de Green) conduit aux équations de la Physique théorique, l'évanouissement du crochet, situé sous l'intégrale double (11), conduit aux équations de Monge-Ampère indépendamment de tout problème géométrique donné. Il y a là *création* de tout un univers *géométrique* avec problèmes inclus qui peuvent être très importants, très longs, très difficiles à étudier mais qui cependant ne sont plus que des sous-univers. Et l'univers primitif et fondamental est toujours né de l'identité (1).

Il semble que les équations de Monge-Ampère qui ont donné lieu jusqu'ici à des théories étendues appartiennent, en grosse majorité, au type de Bäcklund. C'est naturel; le type le plus maniable a le plus donné. C'est immédiatement clair pour les équations *à intégrale intermédiaire*. Ainsi, sur les surfaces développables, sur les surfaces réglées à plan directeur Oxy, sur les surfaces réglées à directrice rectiligne Oz, les expressions

$$p\,dq, \quad \frac{p}{q}\,dz, \quad (z-px-qy)\,d\left(\frac{y}{x}\right)$$

sont respectivement des différentielles exactes.

L'équation de Laplace

$$(19) \qquad r+t=0$$

appartient à un domaine plus élevé comme n'ayant pas d'intégrale intermédiaire. Cette équation (19) a, au point de vue de la théorie des surfaces, un intérêt qui m'a toujours semblé un peu négligé; c'est l'équation des surfaces dont les asymptotiques donnent, en projection sur Oxy, un réseau *orthogonal*. Sur ces surfaces, $p\,dy - q\,dx$ est une différentielle exacte; l'équation (19) est donc du type de Bäcklund.

Ceci porte à se demander s'il y a des surfaces dont le réseau des lignes de courbure, toujours orthogonal sur la surface même, donne aussi, par projection sur Oxy, un réseau plan orthogonal. Cette fois, l'équation de Monge-Ampère est

$$(20) \qquad (p^2-q^2)s = pq(r-t).$$

Or, on reconnaît sans peine que cette équation (20) admet l'intégrale intermédiaire

$$p^2 + q^2 = f(z).$$

Il s'agit de *moulures* et l'on retombe dans l'élémentaire. Il est d'ailleurs bien simple d'expliquer le résultat géométriquement.

Les *surfaces minima* ont encore une équation de Monge-Ampère du type de Bäcklund car, sur ces surfaces,

$$\frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

est une différentielle exacte (Lagrange, Legendre).

Pour les *surfaces à courbure totale constante*, l'équation de Monge-Ampère

$$(21) \qquad \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{k^2},$$

appelle une conclusion analogue. On peut ici ramener le système (12) à

$$T_p - S_q = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \qquad P_y - Q_x = \frac{1}{k^2},$$

avec R nul, T et S ne contenant que p et q, cependant que P et Q, ne contiennent que x et y. Alors

$$2S = \frac{-q}{1 + p^2 + q^2}, \qquad 2T = \frac{p}{1 + p^2 + q^2}, \qquad 2P = \frac{y}{k^2}, \qquad 2Q = -\frac{x}{k^2}$$

si bien que, sur les surfaces à courbure totale constante,

$$(22) \qquad \frac{x\,dy - y\,dx}{k^2} + \frac{q\,dp - p\,dq}{1 + p^2 + q^2}$$

est une différentielle exacte. Rappelons que c'est précisément la théorie des surfaces en question qui a donné naissance au problème et aux transformations de Bäcklund. Le résultat (22) peut être varié de diverses manières. Il permet de remplacer l'équation (21) par

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{qs - pt}{1 + p^2 + q^2} + \frac{x}{k^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{qr - ps}{1 + p^2 + q^2} - \frac{y}{k^2}\right).$$

Si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à la surface, on peut encore remplacer (22) par

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{k^2} - \gamma^2 \, d \operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha}{\beta}$$

et établir que, sur les surfaces à courbure totale constante, on a

$$\sigma = k^2 \int_c \gamma \, d \operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha}{\beta}, \qquad 2\sigma' = k^2 \int_c \gamma^2 \, d \operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha}{\beta},$$

pour un contour c enfermant, sur la surface, une aire gauche σ dont la projection est σ' sur le plan Oxy; observer que, pour ces intégrales, tout point de σ, où le plan tangent est parallèle à Oxy, est point singulier. Finalement formules à rapprocher de (6).

Terminons par un problème déjà envisagé depuis longtemps [1], et qui recèle d'assez grandes difficultés malgré sa simplicité apparente. Il s'agit de déterminer les surfaces dont *un* système de lignes asymptotiques se projette, sur le plan Oxy, suivant la famille de courbes

$$y' = f(x, y). \tag{23}$$

On a l'équation de Monge-Ampère

$$r + 2fs + f^2 t = 0. \tag{24}$$

Pour la ramener, si possible, au type de Bäcklund, multiplions-la par un facteur $\lambda(x, y)$ et formons le système (12) avec P, Q, R identiquement nuls et S, T réduits simplement à $S(x, y)$, $T(x, y)$. Ce système (12) sera

$$\lambda = -S_y, \qquad 2\lambda f = S_x - T_y, \qquad \lambda f^2 = T_x$$

et l'on peut commencer à y satisfaire en prenant arbitrairement $S(x, y)$, d'où λ et le système

$$T_x = -f^2 S_y, \qquad T_y = S_x + 2f S_y.$$

---

[1] A. Buhl, *Sur les surfaces dont un système de lignes asymptotiques se projette suivant une famille de courbes donnée* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, 31, 1903). — *Lignes asymptotiques et lignes de courbure* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 9, t. VIII, 1929. Volume II, publié pour les Jubilés de MM. Paul Appell et Émile Picard).

qui donne

$$\frac{\partial}{\partial x}(S_x + 2fS_y) + \frac{\partial}{\partial y}(f^2 S_y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(25) \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y} + f^2\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial S}{\partial y} = 0.$$

En somme on n'aboutit qu'à cette équation (25) pour déterminer S; ensuite on remonte immédiatement à T et à λ. Donc l'équation (24) est encore du type de Bäcklund et s'y ramène effectivement par la considération de (25) qui est évidemment plus compliquée que l'équation initiale (24); mais ceci arrive constamment dans ce genre de questions. On peut toutefois observer que, pour résoudre le problème initial, il faut étudier, aussi généralement que possible, les intégrales de l'équation (24) tandis que, pour réduire (24) au type de Bäcklund, il suffira de trouver une solution particulière de (25).

On peut aussi transformer la question et se servir de (25) pour déterminer f après choix arbitraire de S. Il y a donc des familles de courbes, d'équation (23), particulièrement propices, par choix de la fonction f, à la résolution du problème de Bäcklund pour l'équation (24).

Soit $S = xy$. L'équation (25) est

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x}.$$

Celle-ci admet une intégrale générale définie par

$$(26) \qquad y - (xf)\log x = \Phi(xf)$$

avec Φ désignant une fonction arbitraire du produit xf. Si, par exemple, on prend Φ identiquement nul, on a

$$(27) \qquad f = \frac{y}{x\log x}.$$

Il vient ensuite

$$T_x = -\frac{y^2}{x\log^2 x}, \qquad T_y = y\left(1 + \frac{2}{\log x}\right)$$

et, immédiatement,

$$T = y^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x}\right).$$

Avec S et T, on conclut que, sur les surfaces intégrales de l'équation (24), pour f ayant la forme (27), l'expression

$$xy\,dp + y^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x}\right)dq$$

est une différentielle exacte. Ceci permet d'écrire (24)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[xys + y^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x}\right)t\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[xyr + y^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x}\right)s\right]$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[px + qy\left(1 + \frac{2}{\log x}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[py - \frac{qy^2}{x(\log x)^2}\right],$$

ceci en remplaçant $S\,dp + T\,dq$ par $p\,dS + q\,dT$.

En effectuant les calculs, on retrouve bien (24) avec la forme (27) de f.

Remarquons encore que l'équation (25) est la même que (24) quand

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Ici f est défini par

$$y - xf = \Psi(f). \tag{28}$$

L'apparition, dans ces questions, d'équations telles que (26) et (28) est assez curieuse. On sait que la résolution de telles équations, par rapport à f, relève d'une certaine série de Lagrange (¹).

Dans tous ces exemples, nous ne faisons que rappeler des prototypes très simples de résultats qui peuvent être grandement étendus. Des généralisations se trouvent, d'abord, dans le Mémoire de M. Goursat publié aux *Annales de Toulouse* (1902) et cité plus haut. J'ai essayé d'en étudier d'autres mais, encore une fois, il apparaît comme fort mal aisé de citer des problèmes, *non créés exprès*, qui donnent sûrement des équations de Monge-Ampère, du type de Lie, non réductibles au type de Bäcklund. Ainsi les surfaces applicables sur une

(¹) É. Goursat, *Cours d'Analyse*, 2ᵉ édition, 1910, t. I, p. 480.

surface donnée S, d'équation $z = z(x, y)$ dépendent d'une équation de Monge-Ampère qui est probablement (??) du type général, la réduction au type de Bäcklund ne pouvant être effectuée que pour des surfaces S particulières. Tout ceci paraît appeler de nouvelles recherches.

La réduction générale au type de Bäcklund dépend d'un *système en* λ, initialement considéré par M. Goursat, que l'on déduit de (13) en y remplaçant K, A, B, C, D par $K\lambda$, $A\lambda$, $B\lambda$, $C\lambda$, $D\lambda$. Par λ il faut entendre, en général $\lambda(x, y, z, p, q)$. Pour l'étude de ce système, la réduction de ses cinq équations à deux par dérivations, les opérateurs qui transforment ses solutions en d'autres, le problème géométrique primitif de Bäcklund, la forme *intégrale* d'une équation de Monge-Ampère *quelconque*, le lien de ces questions avec les fonctions de deux variables complexes, je renverrai encore à mon opuscule de la collection *Scientia* (1920) déjà mentionné [1].

4. Types divers. — La forme *intégrale*, la plus générale, d'une équation de Monge-Ampère, étant

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq = \iint_S \theta\,dx\,dy,$$

on a le type de Bäcklund pour $\theta(x, y, z, p, q)$ identiquement nul. Si, de plus, la forme différentielle contenue sous l'intégrale de ligne est réductible au produit $u\,dv$, l'équation a une intégrale intermédiaire.

C'est précisément pour l'obtention d'autres cas que les réductions pfaffiennes jouent un rôle essentiel mais, jusqu'ici, il semble bien que ces réductions aient été étudiées beaucoup plus dans l'abstrait qu'en accord avec des considérations physiques. Aussi me semble-t-il intéressant de signaler les équations du type

$$\int_C u\,dv = \iint_S \theta\,dx\,dy.$$

---

(1) Cet opuscule a d'ailleurs été précédé d'une série de Mémoires, relatifs à la formule de Stokes et à ses généralisations, publiés dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* de 1910 à 1915.

Partons toujours de l'identité

$$\int_C X\,dY = \iint_A dX\,dY. \tag{1}$$

Par une première transformation

$$X = X(M, N), \qquad Y = Y(M, N), \tag{29}$$

changeons-la en

$$\int_\varpi P\,dM + Q\,dN = \iint_P \frac{dM\,dN}{\Delta(M, N)}, \qquad \frac{1}{\Delta(M, N)} = \frac{\partial Q}{\partial N} - \frac{\partial P}{\partial M}.$$

Effectuons la seconde transformation

$$M = M(x, y\,z, p, q), \qquad N = N(x, y, z, p, q), \tag{30}$$

laquelle donne l'identité

$$\iint_P \frac{dM\,dN}{\Delta(M, N)} = \iint_\Pi \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ M_x & M_y & M_z & M_p & M_q \\ N_x & N_y & N_z & N_p & N_q \end{vmatrix} \frac{dx\,dy}{\Delta(M, N)}, \tag{31}$$

l'étendue Π correspondant, sur une surface S, d'équation $z = z(x, y)$, à l'étendue P d'un plan à axes OMN. Le contour de P, dans ce plan, a une équation

$$\Phi(M, N) = 0, \tag{32}$$

se rapportant aussi, sur S, au contour de Π, si on lit $M(x, y, z, p, q)$ et $N(x, y, z, p, q)$ pour M et N. Si la surface S varie, sans changement de la fonction Φ en (32), l'intégrale du second membre de (31) se propage invariante sur l'ensemble des surfaces S.

Supposons maintenant que l'intégrale en propagation doive avoir la forme

$$\iint_\Pi \Theta(x, y, z, p, q)\,d\sigma. \tag{33}$$

Les surfaces S ne peuvent plus être quelconques; il faut les remplacer par des surfaces Σ intégrales de l'équation de Monge-Ampère

$$(34) \qquad \frac{1}{\Theta\sqrt{p^2+q^2+1}} \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ M_x & M_y & M_z & M_p & M_q \\ N_x & N_y & N_z & N_p & N_q \end{vmatrix} = \Delta(M, N).$$

Ces équations se placent vraisemblablement après les équations de Monge-Ampère, à intégrale intermédiaire (32), que l'on retrouve quand le second membre Δ est identiquement nul.

Si M et N se réduisent respectivement à $M(x, y, z)$ et $N(x, y, z)$ on a la propagation ordinaire dans un espace formé de canaux ou de tubes de la congruence $M = \text{const.}$, $N = \text{const.}$

Dans le cas général, l'équation (34) correspond certainement à un mode de propagation fort remarquable. Les cloisons II, en propagation avec transport de l'intégrale (33), sont déterminées, sur les surfaces intégrales, par *contact*, tout le long de leur frontière, avec les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (32). Ces surfaces (32), en général, n'engendrent point un canal mais la courbe de contact peut en engendrer un. Il y a donc, dans celui-ci, pendant la propagation, une association de propriétés intégrales et de propriétés différentielles analogue à celle déjà indiquée au paragraphe **2**.

Remarquons enfin que le passage de l'identité (1) aux formules stokiennes, par le jeu de transformations telles que (29) et (30), peut introduire des singularités dont ce qui précède ne tient aucun compte, d'où des complications éventuelles.

Mais le cas simple envisagé est évidemment le premier qui doive être étudié.