JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

HENRI MILLOUX

Fonctions méromorphes. - Contribution à l'étude des ensembles de points où ces fonctions sont proches d'une valeur donnée

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 179-198.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_179_0>

Fonctions méromorphes. — Contribution à l'étude des ensembles de points où ces fonctions sont proches d'une valeur donnée;

PAR H. MILLOUX.

1. Dans la théorie des fonctions entières ou méromorphes, on rencontre souvent des fonctions qui sont voisines d'une valeur fixe en un ensemble de points qu'on peut qualifier d'anormal, par exemple sur une courbe traversant franchement le domaine d'étude. Il est utile de connaître les propriétés résultant de cette distribution anormale : cet article est écrit dans ce but.

Nous nous proposons, étant donnée une fonction $\varphi(z)$ méromorphe dans le cercle unité, d'étudier l'ensemble des points situés dans le cercle $|z| = r$, en lesquels la fonction $\varphi(z)$ diffère d'une valeur donnée a de moins de ε [pour les grandes valeurs de a, on substitue à la différence $\varphi(z) - a$ la distance des images de $\varphi(z)$ et de a sur la sphère de Riemann].

Du fait de la méthode employée, nous sommes amenés à affecter cet ensemble d'une mesure, que nous appelons mesure radiale (*voir* la définition du n° **2**). Elle n'est ni linéaire ni superficielle.

Nous comparons la valeur de cette mesure radiale à l'indice caractéristique de la fonction φ, au nombre des pôles de cette fonction dans le cercle unité, etc. Dans cette étude, la formule de Jensen sous la forme donnée par R. Nevanlinna, est souvent employée.

Puis nous faisons varier a, et déduisons des propriétés établies que la mesure radiale ne dépasse pas une certaine puissance de ε, puissance dépendant de certaines propriétés globales de la fonction φ, sauf peut-être pour un groupe de valeurs a, très proches d'une valeur qu'on peut appeler exceptionnelle. D'ailleurs, dans le cas d'existence de ce groupe exceptionnel, la fonction φ est partout proche de ce groupe, sauf aux environs des pôles.

2. Mesure radiale d'un ensemble plan. — Soit E un ensemble de points situés à distance finie dans le plan. Imaginons une suite de cercles contenant à leur intérieur tous les points de l'ensemble E, et soit d la somme des diamètres de tous ces cercles. Nous appellerons *mesure radiale de l'ensemble* E la borne inférieure de toutes les quantités d, la suite de cercles variant de toutes les façons possibles.

Voici quelques propriétés évidentes d'une telle mesure :

Si l'ensemble E est contenu dans un cercle de rayon R, sa mesure radiale est au plus égale à $2R$.

La mesure radiale d'un nombre fini de points est nulle.

Si E *est un domaine quarrable d'aire* S, *sa mesure radiale est au moins égale à* $2\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. En effet, il ne peut être enfermé dans des cercles dont la somme des aires est inférieure à S, c'est-à-dire dont la somme des carrés des rayons est inférieure à $\frac{S}{\pi}$, donc dont la somme des rayons est inférieure à $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. L'égalité a lieu dans le cas où E est l'ensemble des points intérieurs à un cercle.

Si E est une courbe rectifiable de longueur l, sa mesure radiale est au plus égale à l; il suffit de le vérifier pour une ligne polygonale; c'est une conséquence des deux remarques suivantes : d'une part la mesure radiale d'un segment de droite est la longueur de ce segment; d'autre part la mesure radiale d'un ensemble somme est au plus égale à la somme des mesures radiales des ensembles composants. Si E est une courbe issue du centre d'un cercle de rayon 1, aboutissant à la frontière du cercle, sa mesure radiale est au plus égale à 1; il y a égalité pour le rayon, d'où le terme choisi pour la dénomination d'une telle mesure.

Cette définition une fois posée, nous nous proposons d'effectuer la recherche suivante :

Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z| = \mathrm{R}$. On désigne par $\mu(r, a)$ la mesure radiale de l'ensemble de points intérieurs au cercle $|z| = r < \mathrm{R}$, en lesquels on a l'inégalité $|\varphi(z) - a| \leqq \varepsilon$. Comparer cette mesure radiale μ, d'une part aux mesures analogues où a est remplacé par d'autres valeurs, d'autre part à r, ε et $\mathrm{T}(\mathrm{R}, \varphi)$ indice de R. Nevanlinna de la fonction méromorphe.

3. Reprenons une étude faite dans un précédent mémoire ([1]), en rappelant d'abord un théorème dû à M. H. Cartan :

Soit n points P_i. L'ensemble des points M pour lesquels on a l'inégalité

$$\Sigma \log \mathrm{MP}_i \leqq n \log h$$

peut être enfermé dans des cercles dont la somme des rayons ne surpasse pas $2eh$. Autrement dit, la mesure radiale de cet ensemble ne surpasse pas $4eh$.

Soit maintenant $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z| = 1$. On suppose que dans le cercle $|z| = r$, *l'ensemble des points* Q *en lesquels $|\varphi(z)|$ est inférieur ou égal à ε a une mesure radiale μ* (évidemment inférieure à $2r$).

Dans le cercle de centre O, dont le rayon r_1 est compris entre r et 1, et sera fixé ultérieurement, la fonction $\varphi(z)$ s'annule en n points qu'on désigne par $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$. On sait que

$$\mathrm{N}\left(1, \frac{1}{\varphi}\right) = \int_0^1 \frac{n(t, 0)}{t}\, dt$$

en admettant que la fonction φ n'a pas de zéro à l'origine. D'où l'inégalité

$$\mathrm{N}\left(1, \frac{1}{\varphi}\right) \geqq \int_{r_1}^1 \frac{n\, dt}{t} = -n \log r_1. \tag{1}$$

([1]) H. Milloux. *Remarques sur la théorie des fonctions méromorphes* (*Proceedings of the Phys. Math. Soc. of Japan*, 3e série, vol. 12, n° 1) *voir* p. 16-18. La démonstration du lemme de la page 18 contient une inexactitude n'entraînant dans la suite que des modifications de constantes numériques sans intérêt. Cette démonstration est rectifiée ici, précisée et complétée par l'examen d'un cas particulier présentant de l'importance pour la suite de cette étude.

D'après le théorème, qui vient d'être rappelé, de M. H. Cartan, et d'après la propriété des points Q, en l'un de ces points au moins, l'on a

$$\Sigma \log P_i Q \geqq n \log \frac{\mu}{4e}. \tag{2}$$

Faisons tourner le plan autour de l'origine, de façon à rendre l'affixe a de ce point Q, réelle et positive (inférieure à r, rappelons-le). La formule

$$Z = \frac{r_1(z-a)}{r_1^2 - az}$$

transforme le cercle $|z| = r_1$ en le cercle $|Z| = 1$; $\varphi(z)$ en $\Phi(Z)$ s'annulant aux points P'_i. L'origine nouvelle est désignée par Q'; la fonction Φ ne s'y annule pas, mais son module y est inférieur à ε.

Cherchons d'abord une limite supérieure de $N\left(1, \frac{1}{\Phi}\right)$; cette quantité est égale à

$$-\Sigma \log P'_i Q' = -\Sigma \log |Z_i| = -\Sigma \log \frac{r_1 |z_i - a|}{|r_1^2 - az_i|}.$$

On minore la dernière fonction en remplaçant le dénominateur par son maximum $2r_1^2$; la fraction devient alors $\frac{P_i Q}{2r_1}$ d'où

$$N\left(1, \frac{1}{\Phi}\right) < -\Sigma \log \frac{P_i Q}{2r_1} \leqq n \log \frac{8er_1}{\mu}$$

en vertu de (2).

En vertu de (1), cette dernière quantité est au plus égale à

$$N\left(1, \frac{1}{\varphi}\right) \frac{\log \frac{8er_1}{\mu}}{\log \frac{1}{r_1}}.$$

Et l'on déduit *a fortiori* la limitation désirée

$$N\left(1, \frac{1}{\Phi}\right) < T\left(1, \frac{1}{\varphi}\right) \frac{\log \frac{8er_1}{\mu}}{\log \frac{1}{r_1}}. \tag{3}$$

4. La comparaison de $T\left(1, \frac{1}{\Phi}\right)$ et de $T\left(1, \frac{1}{\varphi}\right)$ exige maintenant celle de $m\left(1, \frac{1}{\Phi}\right)$ et de $\mathrm{T}\left(1, \frac{1}{\varphi}\right)$. Désignons par $z = r_1 e^{iu}$ et $\mathrm{Z} = e^{iv}$ deux points frontières homologues dans la transformation (z, Z). Le calcul de $\frac{dv}{du}$ donne $\frac{r_1^2 - a^2}{r_1^2 + a^2 - 2ar_1 \cos u}$ et cette quantité est comprise entre $\frac{r_1 - a}{r_1 + a}$ et son inverse. Comparons

$$m\left(1, \frac{1}{\Phi}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \frac{1}{|\Phi(e^{iv})|} \, dv$$

et

$$m\left(r_1, \frac{1}{\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \frac{1}{|\varphi(r_1 e^{iu})|} \, du.$$

Les valeurs de φ et de Φ étant égales aux points homologues, on en déduit

$$m\left(1, \frac{1}{\Phi}\right) < m\left(r_1, \frac{1}{\varphi}\right) \max \left|\frac{dv}{du}\right| < \frac{r_1 + a}{r_1 - a} m\left(r_1, \frac{1}{\varphi}\right) < \frac{r_1 + a}{r_1 - a} \mathrm{T}\left(r_1, \frac{1}{\varphi}\right)$$

et *a fortiori*

$$m\left(1, \frac{1}{\Phi}\right) < \frac{r_1 + a}{r_1 - a} \mathrm{T}\left(1, \frac{1}{\varphi}\right). \tag{3'}$$

5. L'addition des inégalités (3) et (3′) donne une limitation de $\mathrm{T}\left(1, \frac{1}{\Phi}\right)$. Nous allons la simplifier en choisissant la quantité r_1 comprise entre r et 1. Prenons la demi-somme. Remarquant que $\log \frac{1}{r_1}$ est supérieur à $1 - r_1 = \frac{1 - r}{2}$, que $\frac{r_1 + a}{r_1 - a}$ est inférieur à $\frac{4}{1 - r}$ que μ est inférieur à $2r$, on constate que l'on a *a fortiori* l'inégalité

$$\mathrm{T}\left(1, \frac{1}{\Phi}\right) < \mathrm{T}\left(1, \frac{1}{\varphi}\right) \frac{2 \log \frac{k}{\mu}}{1 - r}, \tag{4}$$

k est une constante numérique, qu'on peut prendre égale à $8e^3$.

Appliquons la formule de Jensen-Nevanlinna

$$\mathrm{T}(1, \Phi) = \mathrm{T}\left(1, \frac{1}{\Phi}\right) + \log |\Phi(\mathrm{Q}')|$$

$\mathrm{T}(1, \Phi)$ étant positif ou nul, il résulte de cette formule que $\mathrm{T}\left(1, \frac{1}{\Phi}\right)$

dépasse — $\log|\Phi(Q')|$, donc $\log\frac{1}{\varepsilon}$ et, d'après l'inégalité (4), $T\left(1, \frac{1}{\varphi}\right)$ dépasse $\dfrac{(1-r)\log\frac{1}{\varepsilon}}{2\log\frac{k}{\mu}}$.

6. Résumons l'étude faite à partir du n° 3.

THÉORÈME I. — *Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z|=1$, et ne s'annulant pas à l'origine. Si, dans le cercle $|z|=r$, l'ensemble des points où le module de la fonction est inférieur à ε a une mesure radiale μ, on a l'inégalité*

$$T\left(1, \frac{1}{\varphi}\right) > \frac{(1-r)\log\frac{1}{\varepsilon}}{2\log\frac{k}{\mu}}, \tag{5}$$

k est une constante numérique.

7. Si la fonction φ s'annule à l'origine, l'inégalité (5) peut être en défaut, comme le montre l'exemple de $\varphi = z$: le premier membre est nul, tandis que le second est différent de o, car μ est égal à 2ε.

Recherchons les changements nécessaires dans le cas où $\varphi(z)$ s'annule p fois à l'origine. Posons $\varphi(z) = z^p\psi(z)$. Sur le cercle $|z|=1$, les modules de φ et de ψ sont égaux : d'où

$$m\left(1, \frac{1}{\varphi}\right) = m\left(1, \frac{1}{\psi}\right).$$

Quant aux indices N, ils sont aussi égaux : en effet

$$N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) = \int_0^r \frac{n(t, 0) - n(0, 0)}{t}\,dt + n(0, 0)\log r,$$

quantité égale à $N\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + p\log r$.

D'où l'égalité requise pour $r=1$. Donc $T\left(1, \frac{1}{\psi}\right)$ et $T\left(1, \frac{1}{\varphi}\right)$ sont égaux.

D'autre part, partons de l'hypothèse que $|\varphi(z)|$ est inférieur à ε en des points de mesure radiale μ, intérieurs au cercle $|z|=r$. Écartons de ces points ceux qui sont intérieurs au cercle $|z| = \frac{\mu}{4}$, et dont la mesure radiale est au plus $\frac{\mu}{2}$; l'ensemble restant a donc une mesure radiale comprise entre $\frac{\mu}{2}$ et μ. En tout point de cet ensemble, $|\varphi(z)|$ est inférieur à ε, et par suite $|\psi(z)|$ est inférieur à $\varepsilon\left(\frac{4}{\mu}\right)^p$. D'où le

THÉORÈME I'. — *Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z| = 1$, pour laquelle l'origine est un zéro d'ordre p au plus. Si, dans le cercle $|z| = r$, l'ensemble des points où $|\varphi(z)|$ est inférieur à ε a une mesure radiale μ, on a l'inégalité*

$$T\left(1, \frac{1}{\varphi}\right) > \frac{(1-r)\left[\log\frac{1}{\varepsilon} - p\log\frac{4}{\mu}\right]}{2\log\frac{k}{\mu}}. \tag{5'}$$

8. L'inégalité (5) peut être interprétée ainsi : si l'origine n'est ni un pôle ni un zéro pour la fonction φ, la formule de Jensen-Nevanlinna s'écrit

$$T(r, \varphi) = T\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) + \log|\varphi(0)|.$$

Par suite, *dans les conditons précisées au théorème* I, *et si de plus la fonction φ n'admet pas l'origne comme pôle, on a l'inégalité*

$$\log|\varphi(0)| < T(1, \varphi) - \frac{(1-r)\log\frac{1}{\varepsilon}}{2\log\frac{k}{\mu}} \tag{6}$$

et cette inégalité est encore vraie lorsque $\varphi(0)$ est nulle.

L'inégalité (6) présente les deux inconvénients suivants : elle élimine le cas où φ admet l'origine comme pôle : d'autre part, imaginons que la fonction φ dépende continûment d'un paramètre, et que lorsque ce paramètre tend vers une valeur déterminée, un pôle P tende vers l'origine; alors $T(1, \varphi)$ qui est supérieur ou égal à $N(1, \varphi)$ lequel est supérieur ou égal à $\log\frac{1}{\overline{OP}}$ tendrait vers l'infini (il y a discontinuité lorsque P est en O) d'où une application illusoire de l'inégalité (6).

Nous allons lever ces difficultés en présentant (6) sous forme de l'une de ses conséquences.

9. Soit p le nombre des pôles de la fonction φ dans le cercle $|z| = 1$. P_i désignant l'un de ces pôles, et M un point intérieur au cercle $|z| = \frac{1}{2}$, la quantité $\Sigma \log MP_i$ est supérieure ou égale à $p \log h$ (d'après le théorème de M. H. Cartan) sauf pour un ensemble de points M de mesure radiale au plus égale à $4eh$. Le cercle $|z| = \frac{1}{2}$ a pour mesure radiale 1. Pour fixer les idées, prenons $4eh = \frac{1}{2}$, de sorte que pour un ensemble de points M de mesure radiale au moins égale à $\frac{1}{2}$, situés dans le cercle $|z| = \frac{1}{2}$, $\Sigma \log MP_i$ est au moins égal à $-kp$, k désignant une constante numérique positive.

10. Choisissons l'un de ces points M; soit ζ son affixe. La transformation

$$Z = \frac{z - \zeta}{1 - z\bar{\zeta}}$$

fait correspondre les cercles $|z| = 1$ et $|Z| = 1$. $\varphi(z)$ se transforme en $\Phi(Z)$. Que sont devenues les hypothèses du théorème I?

$\Phi(0)$ n'est pas infinie. Cherchons une limite supérieure de $T(1, \Phi)$. Soit P'_i les homologues des pôles P_i. Dans la transformation, le rapport $\frac{MP_i}{OP'_i}$ est compris entre deux constantes numériques. Par suite

$$N(1, \Phi) = \Sigma \log \frac{1}{OP'_i} \leqq k - \Sigma \log MP_i \leqq k + kp.$$

Dans cette dernière expression, k est une constante numérique positive qui n'a pas nécessairement la même valeur partout où elle figure.

D'autre part le rapport $\frac{m(1, \Phi)}{m(1, \varphi)}$ est compris entre les extrema de $\left|\frac{dv}{du}\right|$: u et v sont les arguments correspondants de deux points homologues sur les frontières. Dans le cas présent, $\left|\frac{dv}{du}\right|$ que nous avons précédemment calculé, est compris entre deux constantes numériques. Il en est de même du rapport étudié, d'où résulte que

$$T(1, \Phi) \leqq km(1, \varphi) + kp + k.$$

Enfin examinons les changements à apporter à r, ε et μ. Dans la transformation, $1 - r$ est remplacé par $1 - R$, et le rapport de ces quantités est encore compris entre deux constantes numériques. ε n'a pas changé. Quant à μ, du fait que le rapport de deux distances homologues est compris entre deux constantes numériques, il est changé en $\alpha\mu$ (α étant aussi compris entre deux constantes numériques).

De toutes ces considérations résulte le

Corollaire I. — *Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe ayant p pôles dans le cercle $|z| = 1$, et telle que dans le cercle $|z| = r$ l'ensemble des points où $|\varphi(z)|$ est inférienr à ε a une mesure radiale μ.*

Alors dans le cercle $|z| = \frac{1}{2}$ il existe un ensemble de points M *de mesure radiale au moins égale à $\frac{1}{2}$ en chacun desquels on a*

$$\log|\varphi(M)| < km(1, \varphi) + kp + k - \frac{k(1-r)\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{k}{\mu}}, \tag{7}$$

k est une constante numérique qui n'a pas nécessairement partout la même valeur.

11. Nous nous servirons surtout du corollaire I. Mais précisons que le problème peut se généraliser de la façon suivante : l'ensemble des points M peut avoir une mesure radiale littérale α, et être situé dans le cercle $|z| = \rho$ (inférieur à 1). Cette dernière extension a son importance : on peut imaginer une suite de fonctions méromorphes $\varphi_n(z)$ ayant un nombre maximum fixe de pôles, et de plus en plus petites dans un ensemble de points de mesure radiale fixe, cet ensemble étant soit fixe lui-même, soit variable avec n. On retombe alors sur les applications bien connues des familles normales ou quasi normales de fonctions méromorphes. Les considérations précédentes vont permettre d'apporter de larges précisions aux résultats de ces applications.

Écartons des pôles P_i un ensemble, de mesure au plus égale à μ', de façon que les points M restant satisfassent à l'inégalité

$$\Sigma \log \mathrm{MP}_i \geqq p \log \frac{\mu'}{4e}.$$

Nous considérerons par la suite des points M situés dans le cercle $|z| = \rho$. Soit ζ l'affixe de l'un de ces points. Effectuons, comme plus haut, la transformation $Z = \frac{z-\zeta}{1-z\bar{\zeta}}$. Le rapport $\frac{\mathrm{OP}'_i}{\mathrm{MP}_i}$ est compris entre

$$\frac{1}{1+\rho} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-\rho},$$

et l'on a, *a fortiori*

$$\mathrm{N}(1, \Phi) = \sum \log \frac{1}{\mathrm{OP}'_i} < p \log \frac{8e}{\mu'}.$$

Si u et v désignent les arguments respectifs de deux points homologues des frontières ($|z| = |Z| = 1$), le rapport $\left|\frac{dv}{du}\right|$ est compris entre $\frac{1-\rho}{1+\rho}$ et son inverse, de sorte que

$$m(1, \Phi) \leqq \frac{1+\rho}{1-\rho} m(1, \varphi).$$

Recherchons la traduction dans le plan Z de l'ensemble de points où la fonction φ a son module inférieur à ε : si z et z' désignent deux points intérieurs au cercle $|z| = 1$, Z et Z' leurs homologues, le rapport $\frac{Z-Z'}{z-z'}$ est égal à $\frac{1-\rho^2}{(1-z\bar{\zeta})(1-z'\bar{\zeta})}$; et si z et z' sont situés dans le cercle $|z| = r$, ce rapport est compris entre $\frac{1-\rho^2}{(1-r\rho)^2}$ et $\frac{1-\rho^2}{(1+r\rho)^2}$. Par suite, l'ensemble des points Z où le module de Φ est inférieur à ε a une mesure radiale au moins égale à $\frac{\mu(1-\rho^2)}{(1+r\rho)^2}$, quantité supérieure à $\frac{\mu(1-\rho)}{2}$.

Enfin, la quantité $1-r$ devant être remplacée par son homologue, remarquons que si $|z|$ est inférieur à r, $|Z|$ l'est à $\frac{r+\rho}{1-r\rho}$; donc l'homologue de $1-r$ est au moins égal à $\frac{(1-r)(1-\rho)}{1-r\rho}$.

Tous ces résultats conduisent au corollaire suivant :

Corollaire I′ (extension du corollaire I). — *Soit* $\varphi(z)$ *une fonction méromorphe ayant* p *pôles dans le cercle* $|z|=1$, *et telle que dans le cercle* $|z|=r$, *l'ensemble des points où* $\varphi(z)$ *est inférieur à* ε *a une mesure radiale* μ.

Alors, dans le cercle $|z|=\rho$, *en exceptant un ensemble de points entourant les pôles, et de mesure radiale au plus égale à* μ', *on a l'inégalité*

$$(7') \qquad \log|\varphi(z)| < \frac{1+\rho}{1-\rho} m(1, \varphi) + p \log \frac{8e}{\mu'} - \frac{(1-r)(1-\rho)\log\frac{1}{\varepsilon}}{2(1-r\rho)\log\frac{k}{\mu(1-\rho)}},$$

k est une constante numérique positive.

On constate par exemple que si une suite de fonctions méromorphes $\varphi_n(z)$ ayant p pôles fixes dans le cercle $|z|=1$ satisfait à l'inégalité $|\varphi_n(z)| < \varepsilon_n$, ε_n tendant vers 0 avec $\frac{1}{n}$ en un ensemble de points de mesure radiale indépendante de n, situés dans un domaine complètement intérieur au cercle $|z|=1$; et si de plus ces fonctions sont telles que $m(1, \varphi_n)$ est uniformément borné, alors $\varphi_n(z)$ tend vers 0 en tout domaine complètement intérieur au cercle $|z|=1$, en exceptant les environs des pôles. On reconnaît une des propriétés des familles normales (P. Montel).

12. Remarquons, au sujet des corollaires I et I′, que le rôle de r dans les inégalités (7) et (7′) semble artificiel, et dû au mode de recherche employé ici. Prenons, pour expliquer ce caractère artificiel, le cas simple de fonctions holomorphes de module inférieur ou égal à un; p est nul, de même que $m(1, \varphi)$. L'inégalité (7) n'est intéressante qu'autant que les points où la fonction est très petite ne sont pas trop rapprochés de la frontière : si l'on fait $r=1$, l'inégalité (7) est inopérante; et cependant si $|\varphi|$ est inférieur à ε sur un arc de cercle $|z|=1$ on sait trouver une limitation de $|\varphi|$; par exemple $|\varphi|$ est inférieur à une certaine puissance de ε dans le cercle $|z|=\frac{1}{2}$ (rappelons, dans cet ordre d'idées, le théorème de Painlevé).

On aperçoit ainsi que le vrai rôle de r n'est pas mis en valeur dans l'inégalité (7′) : il y aurait lieu d'effectuer une étude plus serrée aux environs du cercle $|z|=1$, peut-être sur d'autres bases. La considération des distances non euclidiennes (et par suite des mesures radiales non euclidiennes) rendrait sans doute quelques services [1].

13. Jusqu'à présent, nous avons considéré des fonctions méromorphes très petites sur un ensemble de points, c'est-à-dire très voisines sur cet ensemble de la valeur fixe zéro. Nous allons considérer maintenant le cas de valeurs pouvant varier.

Remplaçons $\varphi(z)$ par $\varphi(z)-a$, a étant une constante, en supposant que $\varphi(z)$ est voisin de a de moins de ε en module sur un ensemble de mesure radiale μ. Tenant compte de ce que

$$\overset{+}{\log}|\varphi-a| \leqq \overset{+}{\log}|\varphi| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2,$$

l'inégalité (7) se transforme en

$$(8)\qquad \log|\varphi(\mathrm{M})-a| < km(1,\varphi) + k\overset{+}{\log}|a| + kp + k - \frac{k(1-r)\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{k}{\mu}}$$

(partout k est une constante numérique positive). Cette inégalité (8) est valable pour les points M situés dans le cercle $|z|=\frac{1}{2}$, à l'exception d'un ensemble de points entourant éventuellement les pôles, mais dont la mesure radiale n'excède pas $\frac{1}{2}$.

Supposons maintenant que la fonction φ soit également voisine de la valeur b de moins de ε en module, en un ensemble de points jouissant des mêmes propriétés que l'ensemble relatif à a. Nous en déduirons une inégalité du type (8) pour les points M′ du cercle $|z|=\frac{1}{2}$, à

(1) Lorsque les points où $|\varphi|$ est inférieur à ε approchent un point déterminé de la circonférence, on peut effectuer utilement une représentation conforme. Miss Cartwright a repris une étude effectuée par M. Montel, sur des fonctions bornées dans un angle de sommet O, et proches de chacune de deux valeurs α et β en des ensembles de points, très particuliers, tendant vers O. Cette étude a des analogies nettes avec la question que nous posons. Elle pourrait être complétée avec les méthodes utilisées dans cet article. [Miss Cartwright, *Some generalizations of Montel's theorem* (*Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, t. **31**, Part I, p. 26-30); *voir* aussi le commentaire de M. G. Valiron dans le *Zentral Blatt* de 1935.]

l'exception éventuelle d'un ensemble de mesure radiale inférieure à $\frac{1}{2}$. Or le cercle $|z| = \frac{1}{2}$ a pour mesure radiale 1. Il en résulte qu'il existe des points M et M′ communs, satisfaisant en même temps à (8) et à l'inégalité analogue (8′) que l'on obtient en y remplaçant a par b. Ces inégalités (8) et (8′) ne sont compatibles que si la distance $|b - a|$ est suffisamment petite, d'une façon précise si l'on a :

$$(9)\quad \log|b-a| < km(1, \varphi) + kp + k - \frac{k(1-r)\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{k}{\mu}} + \log\left[e^{k\overset{+}{\log}|a|} + e^{k\overset{+}{\log}|b|}\right].$$

Cette condition est compliquée; on la simplifie en introduisant des conditions supplémentaires qu'on apercevra dans l'énoncé du théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z| = 1$, et possédant dans ce cercle p pôles. Soit d'autre part deux quantités a et b dont les modules sont inférieurs à la plus grande des quantités $m(1, \varphi)$ et p. Si l'on a $|\varphi(z) - a| \leqq \varepsilon$ en un ensemble* E; $|\varphi(z) - b| \leqq \varepsilon$ *en un ensemble* E′; E *et* E′ *étant intérieurs au cercle $|z| = r$ et ayant des mesures radiales au moins égales à μ, alors on a l'inégalité*

$$(10)\qquad \log|b-a| < km(1, \varphi) + kp + k - \frac{k(1-r)\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{k}{\mu}}$$

(k constante numérique positive).

Remarque. — Cette propriété élimine le cas où l'une des valeurs a ou b (ou les deux) serait grande. Avant de passer à l'étude de ce cas, et pour interpréter globalement les résultats, introduisons la distance sphérique δ des deux quantités a, b (distance des images sur la sphère de Riemann). Le premier membre de l'inégalité (10) peut être *a fortiori* remplacé par $\log\delta$ (sauf modification, sans intérêt, des constantes numériques du second membre).

14. Aux quantités fixes a et b, de modules quelconques, adjoignons une quantité c satisfaisant aux conditions suivantes :

Condition A. — Précisée par les inégalités

$$|c| \leqq 3, \qquad |a-c| \geqq 1, \qquad |b-c| \geqq 1$$

qui laissent une grande marge dans le choix de c : le domaine possible a une aire au moins égale à 7π.

Condition B. — Soit O′ un point intérieur du cercle $|z| = \frac{1}{2}$. Montrons qu'en plus de la condition A, *on peut imposer à c l'inégalité* $|\varphi(O') - c| \geqq 1$, *et ceci pour des points* O′ *d'un domaine dont l'aire est au moins la moitié de celle du cercle* $|z| = \frac{1}{2}$ $\left(\text{donc au moins } \frac{\pi}{8}\right)$.

Supposons en effet cette propriété non vérifiée. Soit c_0 une valeur particulière de c. Le cercle $|z| = \frac{1}{2}$ est partagé en deux domaines quarrables satisfaisant respectivement aux inégalités

$$|\varphi(z)| - c_0| \leqq 1, \qquad |\varphi(z) - c_0| \geqq 1.$$

Il résulte de l'hypothèse que le premier domaine (appelons-le D) a une aire supérieure à $\frac{\pi}{8}$, et ceci quelle que soit la valeur donnée à c_0. Fixons cette valeur. Je dis que nous pouvons choisir une valeur c_1, satisfaisant toujours à A, et, cette fois, vérifiant l'inégalité $|\varphi(z) - c_1| \geqq 1$ aux points z du domaine D. Effectivement, si l'on peut choisir c_1 de façon que $|c_1 - c_0|$ soit au moins égal à 2, l'inégalité en question est une conséquence immédiate de ce que $|\varphi(z) - c_0|$ est inférieur ou égal à 1 dans D. Or, nous avons vu que le choix de c (condition A) porte sur un domaine d'aire au moins égale à 7π. Retranchant le cercle $|c_1 - c_0| \leqq 2$, il reste encore un domaine d'aire au moins égale à 3π.

En résumé, *non seulement la condition* B *est possible*, *mais encore le choix de c porte sur un domaine d'aire au moins égale à* 3π.

Remarquons enfin que le domaine des points O′, dont l'aire est au moins $\frac{\pi}{8}$, a une mesure radiale au moins égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Condition C. — Le choix de O′ est déjà restreint par la condition B; la condition C impose une servitude supplémentaire. Désignons toujours par P_i les p pôles de la fonction méromorphe φ dans le cercle unité. Rappelons que $\Sigma \log P_i O'$ est supérieur à $p \log h$ sauf pour un ensemble de mesure radiale inférieure à $4eh$. Choisissons h de façon que $4eh$ soit inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d'où h constante numérique); *il existe des points* O' (et même constituant un domaine de mesure radiale numérique), *qui, outre la condition* B, *satisfont à la condition* C :

$$\Sigma \log P_i O' > -kp.$$

15. Ces conditions une fois fixées, et O' choisi, effectuons la représentation conforme du cercle $|z| = 1$ sur le cercle $|Z| = 1$, de façon que le centre de ce dernier cercle corresponde à O'. Soit Φ la fonction transformée de φ. Du fait que O' est dans le cercle $|z| = \frac{1}{2}$, le rapport de deux distances homologues est compris entre deux constantes numériques. D'où l'inégalité

$$N(1, \Phi) = -\Sigma \log |Z_i| < kp.$$

La formule de Jensen-Nevanlinna

$$T(1, \Phi - c) = T\left(1, \frac{1}{\Phi - c}\right) + \log|\Phi(O) - c|$$

donne, d'après la condition B (le log est positif)

$$T\left(1, \frac{1}{\Phi - c}\right) \leqq T(1, \Phi - c) = m(1, \Phi - c) + N(1, \Phi - c).$$

Or,

$$N(1, \Phi - c) = N(1, \Phi) < kp,$$

$$m(1, \Phi - c) \leqq m(1, \Phi) + \overset{+}{\log}|c| + \log 2 < k + m(1, \Phi).$$

D'après l'étude faite de la représentation conforme, le rapport $\frac{m(1, \Phi)}{m(1, \varphi)}$ est compris entre deux constantes numériques, d'où l'inégalité

$$T\left(1, \frac{1}{\Phi - c}\right) < km(1, \varphi) + kp + k. \tag{11}$$

16. On suppose maintenant que les distances sphériques de $\varphi(z)$ aux quantités a et b sont inférieures à ε respectivement en chacun de deux ensembles de points, intérieurs au cercle $|z| = r$, et de mesures radiales au moins égales à μ. Lorsqu'on opère la transformation (z, Z) le rapport de deux distances homologues est compris entre deux constantes numériques; il en est de même du rapport des distances radiales homologues. Donc après transformation μ devient $k\mu$; $1-r$ devient $k(1-r)$. Ceci concerne la transformation de la variable complexe. φ étant devenue Φ, opérons la première substitution homographique (elle est relative à la quantité a)

$$\psi(Z) = \frac{1}{\Phi - c} - \frac{1}{a - c}. \tag{12}$$

Rappelons que la condition A impose $|c| \leqq 3$ et $|a-c| \geqq 1$. Or, on sait que si deux quantités complexes u_1 et u_2 ont pour distance sphérique δ et si l'on fait subir à la lettre u l'une des transformations homographiques $v = u - \alpha$ (avec $|\alpha| \leqq 3$); $v = \frac{1}{u}$, la distance sphérique δ' qui sépare les images de v_1 et v_2 est telle que le rapport $\frac{\delta}{\delta'}$ est compris entre deux constantes *numériques*, ceci quelles que soient les positions dans le plan complexe de u_1 et u_2. Par une suite de trois combinaisons du même ordre, il en est de même des distances sphériques de deux Φ et des deux ψ correspondants donnés par la substitution (12). Donc lorsque la distance sphérique de $\Phi(Z)$ à a est inférieure à ε sur un ensemble de points du cercle $|Z| = R = 1 - k(1-r)$ de mesure radiale $k\mu$, il correspond pour la fonction ψ l'inégalité $|\psi(Z)| < k\varepsilon$; partout, k désigne une constante numérique positive.

Remarquons encore que l'origine n'est pas un pôle pour la fonction ψ, sans quoi c serait égal à $\psi(O)$ c'est-à-dire $\varphi(O')$, ce qui est contradictoire avec la condition B. Il nous est possible d'appliquer l'inégalité (6) du début du n° **8** à la fonction ψ de sorte que

$$\log|\psi(O)| < T(1, \psi) - \frac{k(1-r)\log\frac{k}{\varepsilon}}{2\log\frac{k}{\mu}}.$$

Or,

$$T(1, \psi) \leqq T\left(1, \frac{1}{\Phi - c}\right) + \overset{+}{\log}\frac{1}{|a-c|} + \log 2.$$

D'après la condition A, le $\overset{+}{\log}$ est nul. Quant au premier terme du dernier membre précédent, l'inégalité (11) le limite, d'où la limitation de $\log|\psi(O)|$; on peut encore remplacer cette quantité par $\log\delta$, δ désignant la distance sphérique de a à $\Phi(O)$, c'est-à-dire $\varphi(O')$. D'où l'inégalité

$$\log\delta[a, \varphi(O')] \leqq km(1, \varphi) + kp + k - \frac{k(1-r)\log\frac{1}{\varepsilon}}{2\log\frac{k}{\mu}}. \tag{13}$$

17. L'inégalité (13) montre que $\varphi(O')$ est relativement proche de a; mais la quantité b jouit des mêmes caractéristiques que a. D'où une inégalité analogue limitant de la même façon $\log\delta[b, \varphi(O')]$. Ces deux limitations ne peuvent être compatibles qu'à la condition que a et b ne soient pas trop éloignés. C'est ce qu'exprime le théorème suivant :

Théorème III. — *Soit $\varphi|z|$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z| = 1$, et possédant dans ce cercle p pôles. Soit deux quantités complexes a et b. Si, dans le cercle $|z| = r$, il existe deux ensembles de points, de mesure radiale au moins égale à μ, en chacun desquels la distance sphérique de $\varphi(z)$ aux quantités respectives a et b, est moindre que ε, alors on a l'inégalité*

$$\log\delta(a, b) < km(1, \varphi) + kp + k\,\frac{k(1-r)\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{k}{\mu}}, \tag{14}$$

$\delta(a, b)$ est la distance sphérique des quantités a et b. k est une constante numérique positive n'ayant pas nécessairement la même valeur partout où elle figure.

18. Le deuxième membre de l'inégalité (14) peut être remplacé par une autre quantité analogue. En effet, soit α une constante complexe dont le module, pour fixer les idées, est inférieur à 1. Si l'on opère la substitution $\varphi_1 = \frac{1}{\varphi - \alpha}$, comme nous l'avons vu plus haut, le rapport des distances sphériques de deux φ et des deux φ_1 correspondants est compris entre deux constantes numériques. On peut appliquer le théorème III à la fonction φ_1, *ce qui donne la limitation* *plus générale*

$$(15)\quad \log\delta(a, b) < km\left(1, \frac{1}{\varphi - \alpha}\right) + kn(1, \varphi - \alpha) + k - \frac{k(1-r)\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{k}{\mu}}.$$

On pourrait lever la restriction $|\alpha| < 1$, mais avec des complications.

19. Étant donnée une fonction $\varphi(z)$ méromorphe dans le cercle $|z| = 1$, soit $E(r, a, \varepsilon)$ l'ensemble des points intérieurs au cercle $|z| = r$, en lesquels la distance sphérique de $\varphi(z)$ à la quantité complexe a est moindre que ε.

Désignons par $\gamma(\varepsilon)$ un cercle de rayon ε tracé sur la sphère de Riemann. On peut tracer sur cette sphère $\frac{k}{\varepsilon^2}$ cercles $\gamma(\varepsilon)$ de façon que la sphère soit entièrement recouverte (k est une constante numérique). D'autre part on peut tracer une autre suite de $\frac{k}{\varepsilon^2}$ des cercles $\gamma(\varepsilon)$ extérieurs les uns aux autres. Si la fonction φ se comportait de la même manière par rapport à toutes les valeurs a pour une quantité ε donnée, il y aurait égalité des mesures superficielles des ensembles $E(r, a, \varepsilon)$ dans le cercle $|z| = r$; du fait du nombre des cercles $\gamma(\varepsilon)$, empiétant ou non sur la sphère de Riemann, on peut dire qu'*en moyenne la mesure superficielle de* $E(r, a, \varepsilon)$, et $kr^2\varepsilon^2$ (k constante numérique). Par suite *la moyenne de la mesure radiale de* $E(r, a, \varepsilon)$ *est au moins* $kr\varepsilon$.

20. Est-il possible de comparer cette valeur moyenne avec les résultats obtenus, principalement avec l'inégalité (14) du théorème III ?

Tout d'abord l'influence réelle de r, lorsque cette quantité est voisine de 1, sur les propriétés de la fonction φ, n'a pas trouvé sa véritable expression au cours de cet article. Nous donnerons à r une valeur fixe $\left(\frac{1}{2}\right)$ et étudierons l'influence de ε, que nous supposerons petit.

Considérons globalement *les fonctions méromorphes* φ *pour lesquelles* $m(1, \varphi)$ *et le nombre* p *des pôles intérieurs au cercle* $|z| = 1$ *sont infé-*

rieurs à A. Et supposons que pour une certaine valeur a, la mesure radiale $\mu(\varepsilon, a)$ des points situés dans le cercle $|z| = \frac{1}{2}$, en lesquels la distance sphérique de $\varphi(z)$ à a est inférieure à ε, soit supérieure à $k\varepsilon^{\frac{k}{A}}$, de sorte que $\dfrac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{k}{\mu}}$ est supérieur à kA. Alors si l'on considère une autre quantité b, la mesure radiale $\mu(\varepsilon, b)$ de définition analogue, ne peut avoir la même limitation inférieure que si b est très voisin de a. D'une façon plus précise, $\log\delta(a, b)$ doit être inférieur à $-\dfrac{k \log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{k}{\mu}}$, quantité elle-même inférieure à $-k$A.

Résumons : *la quantité $k\varepsilon^{\frac{k}{A}}$ est une limite supérieure de la mesure radiale $\mu(\varepsilon, b)$ de l'ensemble des points z où la distance sphérique de $\varphi(z)$ à b est inférieure à ε $\left(|z|\right.$ étant inférieur à $\left.\frac{1}{2}\right)$, sauf peut-être pour des valeurs de b proches d'une valeur exceptionnelle possible a de façon que*

$$\log \delta(a, b) < -k \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{k}{\mu(\varepsilon, a)}} < -k\mathrm{A}.$$

Remarquons que par raison de continuité, si la mesure radiale $\mu(\varepsilon, a)$ surpasse $k\varepsilon^{\frac{k}{A}}$, il en est de même de $\mu(\varepsilon, b)$ lorsque b est suffisamment proche de a.

Ces résultats, comparés à la valeur moyenne minima de la mesure radiale, peuvent être considérés comme satisfaisants; il est naturel que A, borne supérieure de $m(1, \varphi)$ et de p, intervienne dans ce genre de questions.

21. S'il existe une valeur a (ou plutôt un groupe de valeurs de a) exceptionnelle, au sens qui précède, quant à la mesure radiale $\mu(\varepsilon, a)$, on peut appliquer le corollaire I' à la fonction φ; alors, non seulement les mesures radiales $\mu(\varepsilon, b)$ ne sont plus exceptionnelles pour des quantités b ne faisant pas partie du groupe condensé autour de a; mais les ensembles de points z tels que la distance sphérique de $\varphi(z)$ à b est moindre que ε, sont bloqués autour des pôles de la fonction φ. Partout ailleurs la fonction φ est voisine de a, sauf peut-être quand on se rapproche trop de la frontière du cercle $|z| = 1$.