JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH PÉRÈS

Sur diverses décompositions d'un noyau de Fredholm

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 1-14.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur diverses décompositions d'un noyau de Fredholm;

PAR JOSEPH PÉRÈS.

Le début du présent article (nos **1-5**) avait été écrit en 1913, mais je ne l'avais pas publié. Il se rattache aux points de vue étudiés par M. Volterra dans sa théorie de la composition. J'y ai ajouté (n° **6**) quelques mots pour faire un rapprochement avec les travaux que M. Goursat a consacrés à l'équation de Fredholm et, enfin (nos **7-12**), l'exposé d'une méthode pour établir la décomposition si importante, due à M. Goursat, d'un noyau principal en noyaux canoniques.

La méthode en question ne fait aucun appel à la théorie de la réduction des substitutions et me semble assez directe et assez simple.

1. Soient deux équations de Fredholm homogènes associées

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0, \tag{1}$$

$$\psi(y) - \int_a^b \psi(\xi)\, K(\xi, y)\, d\xi = 0, \tag{1'}$$

qui, en utilisant les notations de la composition de seconde espèce [1], peuvent s'écrire

$$(\overset{\circ}{\mathrm{I}}{}^{0} - \overset{\circ}{\mathrm{K}})\overset{\circ}{\varphi} = 0, \tag{1}$$

$$\overset{\circ}{\psi}(\overset{\circ}{\mathrm{I}}{}^{0} - \overset{\circ}{\mathrm{K}}) = 0. \tag{1'}$$

Nous dirons que l'expression

$$(\overset{\circ}{\mathrm{I}}{}^{0} - \overset{\circ}{\mathrm{K}}),$$

où $\overset{\circ}{\mathrm{I}}{}^{0}$ est l'unité de composition [2], est un *binome de Fredholm*.

Nous donnerons d'abord quelques résultats concernant la décomposition d'un binome de Fredholm en produit de composition de binomes analogues [3].

2. Tous les noyaux considérés seront supposés tels que les théorèmes de Fredholm leur soient applicables. Pour abréger nous dirons que le binome $\overset{\circ}{\mathrm{I}}{}^{0} - \overset{\circ}{\mathrm{K}}$ est *régulier* si les équations homogènes (1) et (1′) n'ont d'autre solution que zéro. Dans le cas contraire le binome sera dit *singulier*.

Si l'équation (1) a n solutions linéairement distinctes [il en est alors

---

[1] Rappelons que, étant donnés deux noyaux $\mathrm{K}(x, y)$, $\mathrm{H}(x, y)$, M. Volterra définit leur *produit de composition* (de seconde espèce) $\overset{\circ}{\mathrm{K}}\overset{\circ}{\mathrm{H}}$ par la formule

$$\overset{\circ}{\mathrm{K}}\overset{\circ}{\mathrm{H}} = \int_a^b \mathrm{K}(x, \xi)\,\mathrm{H}(\xi, y)\,d\xi$$

(*cf.* V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Chap. XII). Pour écrire (1) et (1′) en utilisant cette notation il est indispensable, comme nous le faisons dans le texte, de noter x et y respectivement les variables des fonctions inconnues φ et ψ.

[2] $\overset{\circ}{\mathrm{I}}{}^{0}$ est un symbole qui, composé par un noyau quelconque, reproduit ce noyau : on a donc, par définition

$$\overset{\circ}{\mathrm{I}}{}^{0}\overset{\circ}{\mathrm{K}} = \overset{\circ}{\mathrm{K}}\overset{\circ}{\mathrm{I}}{}^{0} = \mathrm{K}(x, y).$$

[3] Dans un Mémoire récent (*Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa*, 1936), j'ai utilisé des décompositions du même type pour des binomes de Volterra.

de même de (1')], nous dirons que le binome est de *rang* n. On peut dire qu'un binome régulier est de *rang* zéro.

3. Soit alors un produit de composition de n binomes

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{\mathrm{K}}_1)(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{\mathrm{K}}_2)\ldots(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{\mathrm{K}}_p) \tag{2}$$

(où l'on ne peut en général pas changer l'ordre des facteurs), ces binomes ayant les rangs respectifs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$. Il est clair qu'en effectuant les compositions ce produit se met sous forme d'un binome

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{\mathrm{K}}),$$

dont le rang sera désigné par n. Je dis que l'on a les inégalités

$$n \leqq \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_p, \tag{3}$$

$$\omega_1 \leqq n, \qquad \omega_2 \leqq n, \qquad \ldots, \qquad \omega_p \leqq n. \tag{4}$$

Pour s'en rendre compte, il suffit évidemment de traiter le cas où l'on compose deux binomes

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{\mathrm{K}}_1)(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{\mathrm{K}}_2) = (\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{\mathrm{K}}).$$

Or désignons par

$$\varphi_i^{(j)}(x), \quad \psi_i^{(j)}(y) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \omega_i)$$

des systèmes de fonctions fondamentales du noyau K_i ($i = 1, 2$) (¹).

L'équation homogène

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{\mathrm{K}})\overset{\circ}{\varphi} = 0 \tag{5}$$

ou bien

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{\mathrm{K}}_1)(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{\mathrm{K}}_2)\overset{\circ}{\varphi} = 0$$

(¹) Les $\varphi_i^{(j)}$ pris pour les diverses valeurs de l'indice j sont linéairement indépendantes et donnent par combinaison linéaire toutes les solutions de l'équation (1) formée avec le noyau K_i; de même pour les $\psi_i^{(j)}$ et l'équation (1').

Quand nous aurons à distinguer entre les deux sortes de fonctions fondamentales [solutions respectives de (1) ou de (1')], nous parlerons des fonctions fondamentales *en* x ou *en* y.

entraîne d'abord

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_2)\overset{\circ}{\varphi} = C^{(1)}\varphi_1^{(1)} + C^{(2)}\varphi_1^{(2)} + \ldots + C^{(\omega_1)}\varphi_1^{(\omega_1)}, \tag{6}$$

où les C sont des constantes arbitraires. C'est une équation de Fredholm non homogène de noyau K_2. La condition connue d'existence des solutions (orthogonalité du second membre avec les fonctions $\psi_2^{(j)}$) peut entraîner la valeur zéro pour quelques-unes des constantes C (ou même pour toutes ces constantes). La solution de (6) introduit d'ailleurs ω_2 nouvelles constantes arbitraires. De toutes façons le *rang* n du noyau K ne peut dépasser $\omega_1 + \omega_2$ et l'on a forcément

$$\omega_2 \leqq n.$$

Pour prouver que l'on a aussi $\omega_1 \leqq n$, on reprendra le raisonnement précédent sur l'équation associée de (5), laquelle s'écrit

$$\overset{\circ}{\psi}(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_1)(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_2) = 0.$$

4. Le résultat sur lequel nous voulons attirer l'attention est le suivant : *il n'y a pas, entre les nombres* $n, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, *d'autres relations générales que les inégalités* (3) *et* (4) *précédentes.*

On a en effet le théorème suivant :

Soit un binome $(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K})$ *de rang* n *et* p *nombres* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ *choisis de façon quelconque de manière à satisfaire les inégalités* (3) *et* (4), *on peut toujours trouver* p *binomes*

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_1), \quad (\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_2), \quad \ldots, \quad (\overset{\circ}{1}_0 - \overset{\circ}{K}_p)$$

de rangs respectifs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ *et tels que l'on ait identiquement*

$$(\overset{\circ}{1}_0 - \overset{\circ}{K}) = (\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_1)(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_2), \quad \ldots, \quad (\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_p).$$

Ici encore nous traiterons d'abord le cas de $p = 2$. L'identité à satisfaire

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}) = (\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_1)(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_2)$$

s'écrit, en effectuant,

$$K - K_1 = (\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_1)\overset{\circ}{K}_2$$

ou, encore,

$$(7)\qquad K_2(x,y)-\int_a^b K_1(x,\xi)\,K_2(\xi,y)\,d\xi = K(x,y)-K_1(x,y).$$

C'est une équation de Fredholm pour déterminer le noyau K_2 quand on a adopté une valeur de K_1 (équation de Fredholm où y joue le rôle de paramètre). Le choix de K_1 doit d'ailleurs être fait de façon que l'équation (7) ne soit pas impossible. Il en sera ainsi si les fonctions fondamentales en y du noyau K_1 [1] appartiennent aussi au noyau K, puisque, dans ces conditions, on aura

$$\int_a^b \psi(\xi)\,K_1(\xi,y)\,d\xi = \int_a^b \psi(\xi)\,K(\xi,y)\,d\xi,$$

$\psi(y)$ étant l'une quelconque de ces fonctions fondamentales.

Nous choisirons donc, dans le système de fonctions fondamentales en y du noyau K, ω_1 fonctions

$$(8)\qquad \psi^{(1)}(y),\quad \psi^{(2)}(y),\quad \ldots,\quad \psi^{(\omega_1)}(y)$$

et nous leur associerons, ce qui ne présente pas de difficultés, ω_1 fonctions

$$(9)\qquad \Phi^{(1)}(x),\quad \Phi^{(2)}(x),\quad \ldots,\quad \Phi^{(\omega_1)}(x),$$

de manière à former un système biorthogonal

$$\bar{\psi}^{(i)}\bar{\Phi}^{(k)} = \int_a^b \psi^{(i)}(\xi)\,\Phi^{(k)}(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq k, \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Nous prendrons enfin pour noyau K_1 :

$$K_1 = \sum_i^{\omega_1} \Phi^{(i)}(x)\,\psi^{(i)}(y),$$

qui est évidemment de rang ω_1 avec les sytèmes de fonctions fonda-

---

[1] *Cf.* note du n° **3**. On a, pour l'une de ces fonctions $\psi(y)$,

$$\bar{\psi}(\bar{1}^0 - \bar{K}_1) = 0.$$

mentales (9) et (8) et qui est tel que l'équation (7) ait des solutions en $K_2(x, y)$ ([1]).

$K_2(x, y)$ étant une solution particulière de (7), toute autre solution s'obtiendra en lui ajoutant

$$(10)\qquad \Phi^{(1)}(x)\,r^{(1)}(y) + \Phi^{(2)}(x)\,r^{(2)}(y) + \ldots + \Phi^{(\omega_1)}(x)\,r^{(\omega_1)}(y),$$

où les $r(y)$ sont des fonctions arbitraires de y. Il reste à vérifier que l'on peut disposer de ces fonctions de façon que $\overset{\circ}{1} - \overset{\circ}{K}_2$ ait le rang ω_2.

Or les fonctions fondamentales en x du noyau K_2, c'est-à-dire les fonctions $u(x)$ qui vérifient l'équation

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_2)\overset{\circ}{u} = 0$$

doivent être aussi fonctions fondamentales de K. Si $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots,$ $\varphi^{(n)}(x)$ désignent un système de fonctions fondamentales de K, on doit avoir

$$u = \alpha^{(1)}\varphi^{(1)} + \alpha^{(2)}\varphi^{(2)} + \ldots + \alpha^{(n)}\varphi^{(n)},$$

où les α sont des constantes convenablement choisies.

Remarquons d'autre part que, pour toute fonction fondamentale, du noyau K, l'équation

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K})\overset{\circ}{\varphi} = 0,$$

entraîne

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_2)\overset{\circ}{\varphi} = A^{(1)}\Phi^{(1)} + \ldots + A^{(\omega_1)}\Phi^{(\omega_1)},$$

les A étant des constantes. Soient en particulier $A_i^{(s)}$ les constantes définies par les équations

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_2)\varphi^{(i)} = A_i^{(1)}\Phi^{(1)} + A_i^{(2)}\Phi^{(2)} + \ldots + A_i^{(\omega_1)}\Phi^{(\omega_1)},$$

il est immédiat que les fonctions fondamentales $u(x)$ du noyau K_2 seront données par

$$u(x) = \alpha^{(1)}\varphi^{(1)} + \alpha^{(2)}\varphi^{(2)} + \ldots + \alpha^{(n)}\varphi^{(n)},$$

([1]) Il y a évidemment un arbitraire dans le choix du noyau K_1, mais il nous suffit d'avoir montré qu'on peut obtenir un noyau ayant les propriétés indiquées dans le texte.

les constantes α vérifiant le système linéaire

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha^{(1)}A_1^{(1)}+\alpha^{(2)}A_2^{(1)}+\ldots+\alpha^{(n)}A_n^{(1)}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \alpha^{(1)}A_1^{(\omega_1)}+\alpha^{(2)}A_2^{(\omega_1)}+\ldots+\alpha^{(n)}A_n^{(\omega_1)}=0. \end{array}\right.$$

Pour que le noyau K_2 soit de rang ω_2, il faut et il suffit que le déterminant principal du système (11) soit d'ordre $(n-\omega_2)$ [on a

$$0 \leqq n-\omega_2 \leqq \omega_1 \leqq n$$

d'après les inégalités admises dans l'énoncé du théorème]. Or, quand on modifie K_2 en lui ajoutant l'expression (10), le coefficient général $A_i^{(s)}$ augmente de

$$\bar{r}^{(s)}\bar{\varphi}^{(i)}=\int_a^b r^{(s)}(\xi)\,\varphi^{(i)}(\xi)\,d\xi.$$

Les fonctions $\varphi^{(i)}$ étant linéairement indépendantes, il est bien clair que ces expressions peuvent, par un choix convenable des $r^{(s)}$, prendre des valeurs arbitraires. Il en est donc de même des $A_s^{(i)}$ et il est donc possible de choisir leurs valeurs pour que le déterminant principal du système (11) soit d'ordre $n-\omega_2$.

5. Le théorème énoncé au début du n° **4** est ainsi établi pour $p=2$ (cas de deux binomes). Le cas général en résulte par récurrence.

Choisissons un nombre n' vérifiant les inégalités

$$n' \geqq n-\omega_1, \qquad n' \geqq \omega_2, \qquad \ldots, \qquad n' \geqq \omega_p$$

et

$$n' \leqq n, \qquad n' \leqq \omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_p,$$

inégalités compatibles d'après les précédentes (3) et (4). Nous pouvons, d'après le n° **4**, obtenir pour $\mathring{1}^0-\bar{\bar{K}}$ une décomposition du type

$$\bar{1}^0-\bar{\bar{K}}=(\bar{1}^0-\bar{\bar{K}}_1)(\bar{1}^0-\bar{\bar{K}}'),$$

où les deux facteurs ont des rangs ω_1 et n'. Il reste à mettre $(\bar{1}^0-\bar{\bar{K}}')$ sous la forme

$$(\bar{1}^0-\bar{\bar{K}}')=(\bar{1}^0-\bar{\bar{K}}_2)(\bar{1}^0-\bar{\bar{K}}_3)\ldots(\bar{1}^0-\bar{\bar{K}}_p)$$

et l'on est ainsi ramené à établir le théorème pour le cas où le nombre des binomes est seulement $p - 1$.

Bien entendu les décompositions envisagées ne sont pas déterminées de façon unique.

Signalons un cas particulier, dont l'étude directe est d'ailleurs très simple : un binome régulier étant mis sous la forme d'un produit de composition de p binomes, on peut affirmer que chacun de ces binomes est régulier (les déterminants des équations de Fredholm correspondantes sont tous différents de zéro).

6. Les travaux de M. Goursat sur la structure du noyau mettent en évidence de notables décompositions du type précédent, décompositions dans lesquelles les noyaux composants $K_1, K_2, \ldots, K_p$ sont pris orthogonaux deux à deux [1].

L'intérêt de la condition ainsi posée vient de ce que l'égalité

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}) = (\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_1)(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_2)\ldots(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_p) \tag{12}$$

entraîne alors

$$K = K_1 + K_2 + \ldots + K_p; \tag{13}$$

il y a à la fois décomposition du noyau K en une somme et du binome $\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}$ en un produit de composition de binomes, *lesquels sont permutables*.

Si, d'ailleurs, on introduit le paramètre λ qui joue un rôle important dans la théorie de l'équation de Fredholm, une décompostion (12) subsiste, sous la condition qui vient d'être dite, quel que soit λ : on a

$$(\overset{\circ}{1}{}^0 - \lambda\overset{\circ}{K}) = (\overset{\circ}{1}{}^0 - \lambda\overset{\circ}{K}_1)(\overset{\circ}{1}{}^0 - \lambda\overset{\circ}{K}_2)\ldots(\overset{\circ}{1}{}^0 - \lambda\overset{\circ}{K}_p).$$

La permutabilité entre les divers binomes $(\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{K}_i)$ implique d'ailleurs que les fonctions fondamentales (en x ou en y) de K_1, $K_2, \ldots, K_p$ appartiennent toutes au noyau K. Dans le cas général où les binomes ne sont pas permutables, on pouvait seulement affirmer le

---

[1] Rappelons que deux noyaux K_1 et K_2 sont orthogonaux lorsque

$$\overset{\circ}{K}_1\overset{\circ}{K}_2 = \overset{\circ}{K}_2\overset{\circ}{K}_1 = 0.$$

résultat pour les fonctions fondamentales en x du noyau K_p et en y du noyau K_1.

Observons enfin que, dans le cas où $K_1, K_2, \ldots, K_p$ sont orthogonaux deux à deux, les fonctions fondamentales (en x ou en y) de ces divers noyaux sont forcément linéairement indépendantes. Soient en effet

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_p(x)$$

des fonctions fondamentales respectives de $K_1, K_2, \ldots, K_p$, une relation

$$\varphi_1(x) = A\varphi_2(x) + B\varphi_3(x) + \ldots$$

entraînerait

$$\varphi_1 = A\mathring{K}_1\mathring{\varphi}_2 + B\mathring{K}_1\mathring{\varphi}_3 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_1 = 0,$$

puisque

$$\mathring{K}_1\mathring{\varphi}_i = \mathring{K}_1\mathring{K}_i\mathring{\varphi}_i = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq 1.$$

On a alors *l'égalité*

$$n = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_p,$$

au lieu de *l'inégalité* (3).

7. On doit en particulier à M. Goursat la notion fort importante de noyau principal et l'élégante décomposition d'un noyau principal en noyaux canoniques. Nous indiquerons ici comment on peut établir cette décomposition sans faire intervenir la théorie de la réduction des substitutions.

Pour simplifier l'exposé il convient de détacher quelques remarques.

Imaginons données deux suites de $p+1$ fonctions

$$(14) \qquad u_0(x), \quad u_1(x), \quad \ldots, \quad u_p(x),$$

$$(14') \qquad v_0(y), \quad v_1(y), \quad \ldots, \quad v_p(y),$$

qui vérifient respectivement deux chaînes d'équations de Fredholm :

$$(15) \qquad \left\{\begin{array}{l} u_0 - \mathring{K}\mathring{u}_0 = 0, \\ u_1 - \mathring{K}\mathring{u}_1 = -u_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_p - \mathring{K}\mathring{u}_p = -u_{p-1} \end{array}\right.$$

et

$$
(15')\qquad \left\{
\begin{array}{l}
v_0 - \overset{\circ}{v}_0 \overset{\circ}{\bar{\mathrm{K}}} = 0.\\
v_1 - \overset{\circ}{v}_1 \overset{\circ}{\bar{\mathrm{K}}} = -v_0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots,\\
v_p - \overset{\circ}{v}_p \overset{\circ}{\bar{\mathrm{K}}} = -v_{p-1}.
\end{array}
\right.
$$

On constate immédiatement, à partir de (15) et (15′), que : *les fonctions u_i sont linéairement indépendantes; de même les v_i.*

Portons alors notre attention sur l'intégrale

$$\overset{\circ}{v}_i \overset{\circ}{u}_j = \int_a^b v_i(\xi)\, u_j(\xi)\, d\xi$$

(nulle quand les fonctions considérées sont orthogonales). En prenant i inférieur à p et tenant compte de l'une des équations (15′), on a

$$\overset{\circ}{v}_i \overset{\circ}{u}_j = -\overset{\circ}{v}_{i+1} \overset{\circ}{u}_j + \overset{\circ}{v}_{i+1} \overset{\circ}{\bar{\mathrm{K}}} \overset{\circ}{u}_j ;$$

d'où, grâce à l'une des (15),

$$\overset{\circ}{v}_i \overset{\circ}{u}_j = \overset{\circ}{v}_{i+1} \overset{\circ}{u}_{j-1}.$$

L'intégrale $\overset{\circ}{v}_i \overset{\circ}{u}_j$ ne dépend donc que de la somme des indices et pour $i+j<p$ elle a la valeur zéro (orthogonalité des fonctions u_j et v_i) [1].

Admettons que, pour $i+j=p$, $\overset{\circ}{v}_i \overset{\circ}{u}_j$ *ait une valeur différente de zéro*, valeur que nous pouvons toujours prendre égale à *un* en multipliant les u_j par un facteur constant.

Pour $i+j$ supérieur à p et égal à $p+r$, on aura

$$\overset{\circ}{v}_i \overset{\circ}{u}_j = \overset{\circ}{v}_p \overset{\circ}{u}_r.$$

Or on peut ajouter à u_r la fonction $\mathrm{A}u_0$ (où A est une constante), à u_{r+1}, la fonction $\mathrm{A}u_1$, etc., sans que les (15) cessent d'être satisfaites : $\overset{\circ}{v}_p \overset{\circ}{u}_r$ augmente alors de A. En modifiant ainsi les diverses fonctions u_r *on pourra toujours faire en sorte que les quantités $\overset{\circ}{v}_i \overset{\circ}{u}_j$, calculées pour $i+j>p$, prennent des valeurs arbitrairement choisies.*

---

[1] Cela résulte aussi des théorèmes de Fredholm.

8. Étant données deux suites (14) et (14′) vérifiant (15) et (15′) et telles que $\overset{\circ}{v}_i\overset{\circ}{u}_j \neq 0$ pour $i+j=p$, on pourra donc supposer, sans restreindre la généralité, que

$$(16)\qquad \begin{cases} \overset{\circ}{v}_i\overset{\circ}{u}_j = 1 & \text{pour} \quad i+j=p \quad \text{et} \quad i+j=p+1, \\ \overset{\circ}{v}_i\overset{\circ}{u}_j = 0 & \text{pour les autres valeurs de } i+j. \end{cases}$$

Le noyau

$$K' = u_0(x)\, v_p(y) + u_1(x)\, v_{p-1}(y) + \ldots + u_p(x)\, v_0(y)$$

est dit alors *noyau canonique* extrait du noyau donné K. Des calculs très simples montrent que les conditions (16) entraînent les conclusions suivantes :

1° *Les systèmes* (15) *et* (15′) *restent vérifiés quand on y remplace* K *par* K′;

2° Comme conséquence immédiate, *on a les égalités*

$$(\overset{\circ}{K} - \overset{\circ}{K}')\overset{\circ}{u}_i = 0,$$
$$\overset{\circ}{v}_i(\overset{\circ}{K} - \overset{\circ}{K}') = 0,$$

quel que soit i;

3° Si l'on forme l'équation de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K'(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi = 0,$$

avec le noyau K′ et le paramètre λ, *les fonctions fondamentales correspondantes sont des combinaisons linéaires des* u_i. Il s'ensuit que la seule valeur fondamentale est $\lambda = 1$, avec la seule fonction fondamentale en x, $u_0(x)$;

4° *Les noyaux* K′ *et* K — K′ *sont orthogonaux.*

9. Considérons alors un noyau L *orthogonal* à K′ et admettons que l'on en ait extrait un noyau canonique L′ défini par les suites

$$U_s(x), \quad V_s(y) \qquad (s = 1, 2, \ldots, q).$$

Il vient

$$\overset{\circ}{L}\overset{\circ}{u}_i = -\overset{\circ}{L}\overset{\circ}{u}_{i-1} + \overset{\circ}{L}\overset{\circ}{K}'\overset{\circ}{u}_i$$

et le dernier terme au second membre disparaît. Donc

$$\overset{\circ}{\mathrm{L}}\overset{\circ}{u}_i = \overset{\circ}{\mathrm{L}}\overset{\circ}{u}_{i-1} = \ldots = \overset{\circ}{\mathrm{L}}\overset{\circ}{u}_0,$$

mais

$$\overset{\circ}{\mathrm{L}}\overset{\circ}{u}_0 = \overset{\circ}{\mathrm{L}}\overset{\circ}{\mathrm{K}}'\overset{\circ}{u}_0 = 0;$$

d'où

$$\overset{\circ}{\mathrm{L}}\overset{\circ}{u}_i = 0$$

et, de même

$$\overset{\circ}{v}_i\overset{\circ}{\mathrm{L}} = 0.$$

Il en suit enfin, par un calcul très simple, l'orthogonalité des u_i et des V_s, des v_i et des U_s, quels que soient les indices

$$\overset{\circ}{\mathrm{V}}_s\overset{\circ}{u}_i = 0, \qquad \overset{\circ}{v}_i\overset{\circ}{\mathrm{U}}_s = 0;$$

d'où enfin l'orthogonalité des noyaux canoniques K′ et L′.

10. Reprenons maintenant un noyau K tel que le binome $\overset{\circ}{1}{}^0 - \overset{\circ}{\mathrm{K}}$ soit singulier et admettons connu un noyau canonique correspondant que nous écrirons (en changeant très légèrement les notations)

$$\mathrm{K}' = u'_0(x)\,v'_{p'}(y) + \ldots + u'_{p'}(x)\,v'_0(y).$$

On peut poser

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}' + \mathrm{K}_1,$$

avec orthogonalité de K_1 et K′ (n° **8**). Si l'on peut trouver un noyau canonique de K_1, soit K″

$$\mathrm{K}'' = u''_0(x)\,v''_{p''}(y) + \ldots + u''_{p''}(x)\,v''_0(y),$$

on aura

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}' + \mathrm{K}'' + \mathrm{K}_2,$$

K′ est orthogonal à $\mathrm{K}'' + \mathrm{K}_2$, de même K″ et K_2 et aussi, d'après le n° **9**, K′ et K″. Les trois noyaux K′, K″, K_2 sont donc orthogonaux deux à deux. Si dans K_2 on peut mettre en évidence un nouveau noyau canonique K‴, on aura de même

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}' + \mathrm{K}'' + \mathrm{K}''' + \mathrm{K}_3,$$

avec orthogonalité deux à deux des noyaux au second membre, et ainsi de suite.

11. Nous avons donc à examiner la possibilité de mettre en évidence, dans un noyau K, un noyau canonique. Il faut pour cela que le binome $\mathring{1}^{\circ} - \mathring{K}$ soit singulier.

Posons qu'il en est ainsi. Les fonctions $u_0(x)$, $v_0(y)$ doivent être prises solutions des équations

$$u - \mathring{K}\mathring{u} = 0, \tag{17}$$

$$v - \mathring{v}\mathring{K} = 0, \tag{17'}$$

ce seront des fonctions fondamentales de K. Si l'on peut trouver deux telles solutions fondamentales *non orthogonales entre elles*, on les prendra pour $u_0(x)$ et $v_0(y)$ et le noyau canonique cherché pourra être pris égal à

$$u_0(x)\, v_0(y) \qquad (p = 0).$$

Dans le cas contraire, quelles que soient $u(x)$ et $v(y)$ solutions de (17) et (17'), on pourra résoudre en $u'(x)$ et $v'(y)$ les équations

$$u' - \mathring{K}\mathring{u}' = -u, \tag{18}$$

$$v' - \mathring{v}'\mathring{K} = -v. \tag{18'}$$

Si l'une des fonctions $u'(x)$ définies par (18) n'est pas orthogonale à l'une des fonctions $v(y)$, on prendra ces fonctions pour $u_1(x)$ et $v_0(y)$, on en déduira $u_0(x)$ et $v_1(y)$ et le noyau canonique

$$u_0(x)\, v_1(y) + u_1(x)\, v_0(y) \qquad (p = 1).$$

Sinon on peut affirmer que, quel que soit le choix de $v(y)$, toute fonction $v'(y)$ solution de (18') est aussi orthogonale à toutes les $u(x)$ (¹). On pourra donc introduire des équations

$$u'' - \mathring{K}\mathring{u}'' = -u', \tag{19}$$

$$v'' - \mathring{v}''\mathring{K} = -v' \tag{19'}$$

et, si l'une des u'' n'est pas orthogonale à toutes les v, on aura $p = 2$, etc.

(¹) Parce qu'on doit avoir (*cf.* n° **7**)

$$\mathring{v}'\mathring{u} = \mathring{v}\mathring{u}'.$$

12. Il reste à savoir si le procédé ainsi suivi se termine nécessairement. Envisageons un zéro du déterminant $D(\lambda)$ d'une équation de Fredholm (λ étant le paramètre habituel). Admettons, ce qui ne restreint rien, que ce zéro soit $\lambda = 1$ et que K soit le noyau principal correspondant. Il est élémentaire que K s'exprime de façon bilinéaire au moyen de fonctions de x et de y (que l'on peut toujours prendre linéairement indépendantes) :

$$K = \sum_{1}^{N} {}_i X_i(x) Y_i(y). \tag{20}$$

Mais il clair que des solutions u, u', u'', ..., d'équations (17), (18), (19), ..., sont des combinaisons linéaires des X_i et linéairement indépendantes (nº **7**) : le procédé du nº **11** s'arrêtera donc pour une valeur de p inférieure à N.

La fin est très simple. Chaque noyau canonique a le rang unité, et il introduit le seul pôle $\lambda = 1$. Si le rang du noyau principal est n on aura une décomposition en noyaux orthogonaux

$$K = K' + K'' + \ldots + K^{(n)} + K_n,$$

K', K'', ..., $K^{(n)}$ étant des noyaux canoniques. Le noyau résiduel K_n n'a plus aucun pôle : sa résolvante est fonction entière de λ donnée par le développement en série bien connu. Or cette résolvance doit tendre vers zéro pour $\lambda = \infty$ parce qu'il en est ainsi des résolvantes de K, K', ..., $K^{(n)}$: c'est impossible à moins que K_n ne soit nul. On a donc

$$K = K' + K'' + \ldots + K^{(n)},$$

décomposition du noyau principal de rang n en n noyaux canoniques.