JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL MONTEL

Sur quelques propriétés des différences divisées

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 219-231.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_219_0>

Sur quelques propriétés des différences divisées ;

PAR M. PAUL MONTEL.

1. Le théorème des accroissements finis a été étendu par Weierstrass aux fonctions d'une variable complexe. J'ai donné une généralisation de ce résultat au cas d'une différence divisée d'ordre arbitraire (¹). Je me propose d'indiquer ici quelques applications de cette nouvelle formule qui conduit, en particulier, aux différentes extensions de la formule des accroissements finis obtenues par Darboux, Jensen, M. Curtiss, M. Cinquini. Elle permet aussi, dans certains cas, la détermination de l'ordre de multivalence d'une fonction holomorphe. Enfin, elle se rattache à la notion de multivalence locale.

2. On appelle différence divisée d'une fonction $F(z)$, pour les deux valeurs z_0 et z_k, et l'on note $d_k F(z_0)$, le quotient

$$d_k F(z_0) = \frac{F(z_k) - F(z_0)}{z_k - z_0}.$$

Cette différence divisée est dite du premier ordre. On obtient par itération les différences divisées d'ordre supérieur au moyen des égalités

$$\begin{gathered} d_1 d_2 F = d_1(d_2 F), \\ d_1 d_2 d_3 F = d_1 d_2(d_3 F) = d_1[d_2(d_3 F)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

Cette expression est commutative par rapport aux indices des opé-

(¹) *Sur une formule de Darboux et les polynomes d'interpolation* (*Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa*, série II, vol. I, 1932, p. 371-384).

rateurs d comme il résultera aussitôt de son expression au moyen de déterminants. Introduisons en effet les expressions $\Delta_p(\mathrm{F})$ et δ_p du mémoire cité :

$$\Delta_p(f) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^{p-1} & f(z_0) \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{p-1} & f(z_1) \\ . & .. & .. & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_p & z_p^2 & \dots & z_p^{p-1} & f(z_p) \end{vmatrix},$$

$$\delta_p = \Delta_p(z^p) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^p \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^p \\ . & .. & .. & \dots & .. \\ 1 & z_p & z_p^2 & \dots & z_p^p \end{vmatrix}.$$

On a évidemment

$$d_1 f = \frac{\Delta_1}{\delta_1},$$

supposons que l'on ait établi l'égalité

$$d_1 d_2 \dots d_{p-1} f = \frac{\Delta_{p-1}}{\delta_{p-1}},$$

et montrons qu'elle reste vraie en remplaçant p par $p+1$; posons $d_p f(z) = g(z)$. On peut écrire

$$\frac{1}{(z_0 - z_p)\dots(z_{p-1} - z_p)} \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^{p-1} & f(z_0) \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{p-1} & f(z_1) \\ . & .. & .. & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_{p-1} & z_{p-1}^2 & \dots & z_{p-1}^{p-1} & f(z_{p-1}) \\ 1 & z_p & z_p^2 & \dots & z_p^{p-1} & f(z_p) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & z_0 + z_p & \dots & z_0^{p-1} + z_0^{p-2} z_p + \dots + z_p^{p-1} & g(z_0) \\ 0 & 1 & z_1 + z_p & \dots & z_1^{p-1} + z_1^{p-2} z_p + \dots + z_p^{p-1} & g(z_1) \\ . & . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & z_{p-1} + z_p & \dots & z_{p-1}^{p-1} + z_{p-1}^{p-2} z_p + \dots + z_p^{p-1} & g(z_{p-1}) \\ 1 & z_p & z_p^2 & \dots & z_p^{p-1} & f(z_p) \end{vmatrix}$$

ou

$$\frac{1}{(z_0 - z_p)\dots(z_{p-1} - z_p)} \Delta_p(f) = \Delta_{p-1}(g),$$

comme on le voit après simplification du second déterminant. De même,

$$\frac{1}{(z_0 - z_p)\dots(z_{p-1} - z_p)} \delta_p = \delta_{p-1}$$

et

$$\frac{\Delta_p(f)}{\delta_p} = \frac{\Delta_{p-1}(g)}{\delta_{p-1}} = d_1 d_2 \ldots d_{p-1} g = d_1 d_2 \ldots d_p f.$$

Dans le mémoire cité, nous avons représenté cette expression $\frac{\Delta_p(f)}{\delta_p} = Q_p(f)$ par une intégrale. On peut pour cela opérer de la manière suivante, en supposant que le polygone de convexité ayant pour sommets $z_0, z_1, \ldots, z_p$ soit tout entier à l'intérieur de la région d'holomorphie de la fonction $f(z)$. On a

$$(z_0 - z_1)\, d_1 f(z_0) = \int_{z_1}^{z_0} f'(z)\, dz = \int_0^1 f'[z_1 + t_1(z_0 - z_1)](z_0 - z_1)\, dt_1,$$

en posant

$$z = z_1 + t_1(z_0 - z_1) = t_1 z_0 + (1 - t_1) z_1,$$

donc

$$d_1 f(z_0) = \int_0^1 f'[t_1 z_0 + (1 - t_1) z_1]\, dt_1 = g(z_0).$$

De même

$$d_2 d_1 f(z_0) = d_2 g(z_0) = \int_0^1 g'[t z_0 + (1 - t) z_2]\, dt.$$

Or

$$g'(z_0) = \int_0^1 f''[t_1 z_0 + (1 - t_1) z_1]\, t_1\, dt_1,$$

$$g'[t z_0 + (1 - t) z_2] = \int_0^1 f''[t_1 t z_0 + (1 - t_1) z_1 + t_1(1 - t) z_2]\, t_1\, dt_1$$

et

$$\begin{aligned} d_2 d_1 f(z_0) &= \int_0^1 \int_0^1 f''[t_1 t z_0 + (1 - t_1) z_1 + t_1(1 - t) z_2]\, t_1\, dt_1\, dt \\ &= \int_0^1 dt_1 \int_0^1 f''[t_1 t z_0 + (1 - t_1) z_1 + t_1(1 - t) z_2]\, d(t_1 t), \end{aligned}$$

et, en faisant le changement de variable $t_1 t = t_2$,

$$d_2 d_1 f(z_0) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} f''[t_2 z_0 + (1 - t_1) z_1 + (t_1 - t_2) z_2]\, dt_2.$$

De proche en proche, on démontrerait ainsi la formule

$$
\begin{aligned}
& d_p d_{p-1} \ldots d_1 f(z_0) \\
& = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \ldots \\
& \times \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)}[t_p z_0 + (1-t_1) z_1 + (t_1 - t_2) z_2 + \ldots + (t_{p-1} - t_p) z_p]\, dt_p.
\end{aligned}
$$

L'argument qui figure dans $f^{(p)}$ est une combinaison linéaire des nombres $z_0, z_1, \ldots, z_p$ dont les coefficients sont positifs et ont pour somme l'unité : il représente l'affixe ξ d'un point du polygone de convexité de sommets $z_0, z_1, \ldots, z_p$.

L'intégrale multiple qui figure dans cette formule peut être considérée comme étendue au volume d'un polyèdre de l'espace à p dimensions dont $t_1, t_2, \ldots, t_p$ seraient les coordonnées cartésiennes. L'expression de ce volume est

$$
d_1 d_2 \ldots d_p \left(\frac{z^p}{p\,!} \right) = \frac{1}{p\,!} \frac{\Delta_p(z^p)}{\delta_p} = \frac{1}{p\,!}.
$$

La valeur moyenne de $f^{(p)}(\xi)$ dans ce volume est donc

$$
p\,! \frac{\Delta_p(f)}{\delta_p} = \lim_{n=\infty} \frac{\omega_1 f^{(p)}(\xi_1) + \omega_2 f^{(p)}(\xi_2) + \ldots + \omega_n f^{(p)}(\xi_n)}{\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n},
$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ désignant des éléments de volume. Comme ces nombres sont positifs, la fraction du second membre représente l'affixe d'un point du domaine de convexité correspondant aux valeurs de $f^{(p)}(\xi)$ lorsque ξ parcourt le domaine (D) dans lequel $f(z)$ est définie. La limite Z_p de ce nombre est donc aussi l'affixe d'un point de ce domaine de convexité. On peut donc écrire

$$
(1) \qquad Q_p = \frac{\Delta_p(f)}{\delta_p} = \frac{Z_p}{p\,!},
$$

Z_p désignant un point du domaine de convexité (S_p) correspondant à l'ensemble des valeurs de $f^{(p)}(z)$ lorsque z décrit le domaine (D) de définition de $f(z)$. C'est l'extension de la formule de Weierstrass que nous avions en vue. Celle-ci correspond au cas où p est égal à l'unité. On suppose que le polygone de convexité de sommets $z_0, z_1, \ldots, z_p$

est intérieur à (D), ce qui arrive en particulier toujours lorsque le domaine (D) est convexe.

Nous avons supposé dans ce qui précède que les points $z_0, z_1, \ldots, z_p$ étaient distincts. On peut aussi admettre que k d'entre eux viennent se confondre. Il faudra alors remplacer les k lignes correspondantes des déterminants Δ et δ par les lignes obtenues en maintenant l'une d'elles sans changement et en remplaçant chacune des $k-1$ autres par celles que l'on en déduit en substituant aux éléments de cette ligne les dérivées d'ordres, $1, 2, \ldots, (k-1)$ par rapport à la variable qui y figure. On obtient ainsi en particulier

$$(z_1-z_0)^p Q(z_0, z_0, \ldots, z_1, z_1) = f(z_1) - f(z_0) - \frac{(z_1-z_0)}{1} f'(z_0) - \ldots \\ - \frac{(z_1-z_0)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(z_0),$$

d'où l'on déduit l'extension de la formule de Weierstrass à celle de Cauchy :

$$f(z_1) = f(z_0) + \frac{(z_1-z_0)}{1} f'(z_0) + \ldots + \frac{(z_1-z_0)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(z_0) + \frac{(z_1-z_0)^p}{p!} Z_p.$$

3. J'indiquerai maintenant quelques applications de la formule de Weierstrass qui dérivent toutes de la remarque simple suivante. Désignons par (Σ_p) le domaine couvert par les valeurs de $f^{(p)}(z)$ lorsque z appartient à (D). Le domaine de convexité déduit de (Σ_p) a été désigné par (S_p). Si l'on mène par le point Z_p une droite arbitraire (L), les points de (Σ_p) ne peuvent être tous d'un même côté de cette droite, sinon (S_p) serait tout entier de ce côté et ne pourrait contenir le point Z_p. Il y a donc des points $f^{(p)}(z)$ situés sur la droite elle-même, ou situés de chaque côté de cette droite. J'ajoute que si le domaine (D) est simplement connexe, il y a toujours des points $f^{(p)}(z)$ sur la droite (L) car, si les points $f^{(p)}(z_1)$ et $f^{(p)}(z_2)$ sont de part et d'autre de (L), à un arc de courbe joignant z_1 et z_2 et situé dans (D), correspond un arc de courbe décrit par le point $f^{(p)}(z)$ qui rencontre nécessairement la droite (L) dans (S_p).

Appliquons la remarque qui précède à la droite (L) menée par le point Z_p perpendiculaire à la direction OZ_p. On désigne par O le point origine et l'on suppose que Z_p ne soit pas nul. Il existe un point $f^{(p)}(\xi)$

situé sur (L) ou du côté de (L) qui ne contient pas le point O; on a, en ce point,

$$|f^{(p)}(\xi)| \geqq |Z_p|,$$

on en déduit la formule

$$Q_p(z_0, z_1, \ldots, z_p) = \frac{\lambda}{p!} f^{(p)}(\xi), \tag{2}$$

λ désignant un nombre complexe dont le module ne dépasse pas l'unité. Cette formule convient aussi lorsque Z_p est nul : il suffit de faire $\lambda = 0$ et de prendre ξ arbitrairement dans (D).

On obtient ainsi une extension de la formule classique de Darboux qui correspond à $p = 1$. On voit que cette formule de Darboux est une conséquence presque immédiate de celle de Weierstrass ([1]).

Prenons maintenant comme droite (L) la parallèle à l'axe des quantités imaginaires pures menée par Z_p. Si, comme nous le supposerons dorénavant, (D) est simplement connexe, il existe sur cette droite un point ξ pour lequel on peut écrire

$$\mathcal{R}Q(z_0, z_1, \ldots, z_p) = \frac{1}{p!} \mathcal{R} f^{(p)}(\xi)$$

ou

$$Q(z_0, z_1, \ldots, z_p) = \frac{1}{p!} [\mathcal{R} f^{(p)}(\xi) + iC], \tag{3}$$

C désignant un nombre réel. Cette formule a été établie par M. S. Osaki en suivant une autre voie ([2]).

([1]) J'ai donné cette extension de la formule de Darboux dans le mémoire précédemment cité. Comme M. Paul Johansen me l'a obligeamment signalé, cette extension se trouve déjà dans un mémoire de Jensen [*Sur une expression simple du reste dans la formule d'interpolation de Newton* (*Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres du Danemark*, 1894)]. Jensen ne fait pas usage des déterminants $\Delta(f)$.

Pour le cas des variables réelles, on retrouve ainsi une formule de Schwarz [*Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires* (*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, vol. XVII; *Gesammelte math. Abhandlungen*, t. II, p. 207)].

La formule initiale de Darboux concernant le théorème des accroissements finis se trouve dans le Mémoire : *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable* (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 291).

([2]) *On the theory of multivalent functions* (*Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku*, vol. II, sec. A, 1935, p. 167-188).

Considérons enfin la droite (L) passant par les points O et Z_p si ce dernier nombre n'est pas nul. Il y a sur cette droite un point $f^{(p)}(\xi)$ pour lequel on peut écrire

$$(4) \qquad \arg Q(z_0, z_1, \ldots, z_p) = \arg f^{(p)}(\xi)$$

ou

$$Q(z_0, z_1, \ldots, z_p) = \mu \frac{f^{(p)}(\xi)}{p\,!},$$

μ désignant un nombre réel, et cette formule convient aussi au cas où Z_p est nul.

Dans les formules (2), (3), (4) que nous venons d'établir figurent des quantités indéterminées λ, C, μ à côté de la valeur ξ. Les deux dernières sont réelles tandis que la première est un point du cercle-unité. En réalité, on peut aussi, dans le cas de la formule (2), choisir ξ de manière que λ décrive une courbe. Il suffit de remarquer que le point $f^{(p)}(\xi)$ peut être pris sur la droite (L) perpendiculaire à OZ_p. On a alors

$$Z_p = f^{(p)}(\xi)e^{i\theta}\cos\theta,$$

θ désignant l'angle que fait OZ_p avec l'axe qui joint l'origine au point $f^{(p)}(\xi)$. *Le nombre λ est alors sur la circonférence de rayon $\frac{1}{2}$ dont le centre est le point d'affixe $\frac{1}{2}$.*

On peut dire aussi que le point Z_p est sur la circonférence dont le diamètre a pour extrémités les points O et $f^{(p)}(\xi)$.

4. Supposons que le domaine (D) soit convexe. Si le domaine de convexité (S_p) ne contient pas l'origine, ou, ce qui revient au même, si le domaine (Σ_p) est contenu dans un demi-plan ne contenant pas l'origine, la fonction $f(z)$ est multivalente d'ordre p au plus dans le domaine (D), comme l'a montré M. S. Osaki dans son mémoire cité. En effet, si $f(z)$ prenait la même valeur en $p+1$ points distincts, on aurait, pour ces points, $\Delta_p(f) = 0$, $\delta_p \neq 0$, donc

$$Z_p = p\,!\frac{\Delta_p}{\delta_p} = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. On peut toujours être ramené au cas où le demi-plan est celui des parties réelles positives; donc : si

$\mathcal{R} f^{(p)}(z) > 0$ et le domaine (D) est convexe, la fonction $f(z)$ est multivalente d'ordre p au plus dans (D).

En particulier, lorsque $p = 1$, la fonction est univalente. On retrouve le théorème de M. J. Wolff et de M. K. Noshiro (¹).

5. Lorsque le domaine (Σ_p) est convexe, il se confond avec (S_p); dans ce cas, la formule des variables réelles est applicable sans modification : on a toujours $Z_p = f^{(p)}(\xi)$ et

$$Q_p(z_0, z_1, \ldots, z_p) = \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!}.$$

Or, si l'on prend dans le domaine (D) des domaines circulaires assez petits (γ_p), les domaines (σ_p) correspondant aux valeurs de $f^{(p)}(z)$ pour les points z de (γ_p) seront convexes, sauf dans le voisinage de points isolés, comme nous allons le voir. L'égalité précédente sera donc applicable lorsque $z_0, z_1, \ldots, z_p$ seront intérieurs à de tels cercles (γ_p).

Pour le démontrer, rappelons d'abord quelques résultats relatifs à a représentation conforme. Soit

$$g(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$$

une fonction holomorphe et univalente pour $|z| < 1$; on sait que les domaines correspondant aux cercles concentriques à l'origine sont toujours convexes (²) tant que leur rayon ne dépasse pas

$$2 - \sqrt{3} = 0,268\ldots > \frac{1}{4}.$$

D'autre part, lorsque la fonction

$$h(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$$

est holomorphe et bornée en module dans le cercle unité, elle est uni-

---

(¹) J. Wolff, *L'intégrale d'une fonction holomorphe et à partie réelle positive dans un demi-plan est univalente* (*Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 1209). K. Noshiro, *On the theory of schlicht Functions* (*Journal of the Faculty of Science, the Hokkaido Imperial University*, vol. II, 1934, p. 129-155).

(²) *Cf.* P. Montel, *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes*, Paris, Gauthier-Villars, 1933, p. 55.

valente dans l'intérieur d'un cercle de centre origine et de rayon

$$M-\sqrt{M^2-1}=\frac{1}{M+\sqrt{M^2-1}}>\frac{1}{2M},$$

comme l'a montré M. Dieudonné [1].

Soit alors $F(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine (D) et z_0 un point intérieur à (D); on peut écrire

$$F(z)=F(z_0)+(z-z_0)F'(z_0)+\ldots,$$

et, si $F'(z_0)\neq 0$, en posant $z-z_0=r\zeta$, r désignant le rayon d'un cercle (γ) de centre z_0 intérieur à (D),

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{rF'(z_0)}=h(\zeta)=\zeta+b_2\zeta^2+\ldots.$$

Si M est le maximum de $|F(z)|$ dans (γ), on a, pour $|\zeta|<1$,

$$|h(\zeta)|<\frac{2M}{r|F'(z_0)|},$$

et la fonction $h(\zeta)$ est univalente dans le cercle

$$|\zeta|<\frac{r|F'(z_0)|}{4M}.$$

Cette fonction représente sur des domaines convexes tous les cercles de centre origine dont le rayon ne dépasse pas $\frac{r|F'(z_0)|}{16M}$ et, par conséquent, $F(z)$ représente sur un domaine convexe tout cercle de centre z_0 dont le rayon ne dépasse pas la valeur

$$\frac{r^2|F'(z_0)|}{16M},$$

puisque $|z-z_0|=r|\zeta|$.

Appliquons ce résultat à la fonction $f'(z)$ définie dans le domaine (D). Soit (D′), un domaine intérieur à (D) dont la frontière est à la distance r de celle qui limite (D); soit (D_1) un domaine convexe déduit de (D′) comme (D′) a été déduit de (D). Désignons par M_1 le maximum de $|f'(z)|$ dans (D′) et par m_2 le minimum de $|f''(z)|$ dans (D_1).

---

[1] *Idem*, p. 90.

Nous supposerons que $f''(z)$ ne s'annule pas dans (D_1) et que, par conséquent, m_2 est positif. Tout point z_0 de (D_1) est le centre d'un cercle de rayon r intérieur à (D') et la fonction $f'(z)$ représente sur un domaine convexe tout cercle (γ) de centre (z_0) dont le rayon ne dépasse pas le plus petit ρ des deux nombres

$$r \quad \text{et} \quad \frac{r^2 m_2}{16 M_1}.$$

Par conséquent : *le théorème des accroissements finis est applicable à deux points de* (D_1) *dont la distance ne dépasse pas* 2ρ. *Le point* ξ *appartient au cercle ayant pour diamètre le segment limité par les deux points*. Ce résultat contient un théorème de M. D.-R. Curtiss [1].

On peut remplacer les cercles (γ) par des domaines d'une autre forme. Considérons par exemple des ellipses (ε) dont le rapport des axes $\frac{b}{a}$ est constant et égal à $k < 1$. Les points intérieurs à une telle ellipse (ε) sont seuls intérieurs à tous les cercles bitangents extérieurement à cette ellipse. Le plus grand de ces cercles est le cercle osculateur au sommet du petit axe dont le rayon est $\frac{a}{k}$. Si ce nombre est inférieur à ρ, les domaines couverts par les points $f'(z)$ lorsque z appartient à l'un de ces cercles seront tous convexes, et il en sera de même pour le domaine (Σ_1) correspondant aux points communs à tous ces cercles, c'est-à-dire à l'ellipse (ε). Ainsi, lorsque deux points de (D_1) sont à une distance inférieure à $2k\rho$: *le théorème des accroissements finis est applicable en prenant pour* ξ *un point intérieur à une ellipse semblable à une ellipse fixe dont le grand axe a pour extrémités les deux points*. On voit que cette ellipse est aussi aplatie que l'on veut pourvu que l'on prenne deux points assez rapprochés.

Enfin, on peut remplacer les ellipses par des courbes semblables à une courbe convexe fixe dont la courbure reste supérieure à un nombre positif. Un raisonnement semblable au précédent conduit à prouver l'existence d'une grandeur au-dessous de laquelle la proposition est applicable à ces courbes.

---

[1] *On certain Theorems of mean value for Analytic Functions of a complex Variable* (*Annals of Mathematics*, série II, vol. 8, 1907, p. 118-126).

Ces résultats cessent d'être exacts lorsque $f''(z)$ s'annule dans le domaine. Prenons par exemple le cas du cercle (γ) et considérons la fonction $f(z) = \varphi(z^n)$, n désignant un entier, holomorphe autour de l'origine. Si $n > 2$, les dérivées première et seconde s'annulent à l'origine. Traçons un cercle (D_1) assez petit de centre origine dans lequel $f'(z)$ n'ait pas d'autre zéro que l'origine. La fonction $f(z)$ prend la même valeur en tous les sommets d'un polygone régulier de n côtés dont le centre est à l'origine et le rayon arbitrairement petit. Le rapport $d_1 f$ est donc nul pour les extrémités de chaque côté. Le cercle décrit sur ce côté comme diamètre ne contient pas l'origine si l'angle au centre $\frac{2\pi}{n}$ est inférieur à un droit, c'est-à-dire si n est au moins égal à 5. Dans ce cas, le cercle (γ), si petit soit-il, ne contient aucun zéro ξ de $f'(z)$, si l'on reste dans le cercle (D_1).

6. On montrerait de la même manière que, si ρ_p désigne le plus petit des deux nombres

$$r \quad \text{et} \quad \frac{r^2 m_{p+1}}{16 M_p},$$

M_p désignant le module maximum de $f^{(p)}(z)$ dans (D') et m_{p+1} le module minimum supposé positif de $f^{(p+1)}(z)$ dans (D_1); *l'extension du théorème des accroissements finis est applicable à des systèmes de $p+1$ points lorsqu'ils sont intérieurs à un même cercle (γ_p) de rayon au plus égal à ρ_p dont le centre est dans* (D_1)*; le point ξ est un point du cercle* (γ_p). Si l'on prend comme centre du cercle le centre de gravité du système des $p+1$ points, on retrouve un théorème de M. S. Cinquini établi par une autre voie [1].

Ici encore, on pourra remplacer les cercles (γ_p) par des ellipses (ε_p) semblables à une ellipse fixe aussi aplatie que l'on voudra, ou par des courbes convexes semblables dont la courbure n'est jamais nulle.

Les résultats qui précèdent ne sont plus applicables lorsque la dérivée $f^{(p+1)}(z)$ s'annule dans (D_1). Les théorèmes eux-mêmes peuvent être en défaut. Pour s'en assurer, dans le cas des cercles (γ_p),

---

(1) *Sopra une formula di Curtiss* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, série IV, t. 12, 1933-1934, p. 157-171).

on pourra prendre encore une fonction de la forme $\varphi(z^n)$ avec $n > 4p$ et raisonner comme au paragraphe précédent, en prenant cette fois p côtés consécutifs du polygone régulier de n côtés et, pour centre du cercle (γ_p), le milieu de la corde qui joint les extrémités de cette ligne brisée. On peut aussi, comme l'a fait M. Cinquini, avec $n \geqq 4p$, prendre comme centre du cercle (γ_p) le centre de gravité des $p+1$ sommets de la ligne brisée.

7. Comme on l'a vu, on peut prendre pour ρ, dans le cas des cercles (γ) et du théorème des accroissements finis, un nombre ne dépendant que de r, M_1, m_2. Il en résulte que, pour toutes les fonctions holomorphes dans (D) pour lesquelles M_1 a une borne supérieure fixe et m_2 une borne inférieure positive fixe, on pourra adopter une valeur de ρ commune. Nous allons voir que ces conditions peuvent encore être réduites.

Soit une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans (D) et auxquelles convient, dans (D_1), une même valeur de ρ. Les fonctions $f'(z)$ sont univalentes dans tout cercle (γ), donc les fonctions $f''(z)$ forment une famille normale dans chaque cercle (γ) et, par conséquent, dans (D_1), puisque l'on peut recouvrir entièrement (D_1) à l'aide d'un nombre fini de tels cercles (γ). Comme chaque fonction $f''(z)$ ne s'annule pas dans (D_1), toute fonction limite de fonctions $f''(z)$ n'a pas de zéro dans (D_1) ou est identiquement nulle. Si l'on fixe la valeur $f''(z_0)$ en un point de (D_1), aucune fonction limite ne sera la constante zéro et le module de toute fonction $f''(z)$ restera supérieur à un nombre positif fixe μ_2.

Réciproquement, si l'on considère toutes les fonctions $f(z)$ pour lesquelles $|f''(z)| \geqq \mu_2$ dans (D) et $f''(z_0)$ est fixe, elles forment une famille normale bornée dans (D_1). Il en sera de même pour les fonctions $f'(z)$ que l'on peut supposer nulles en z_0, puisque l'addition d'une constante à $f'(z)$ ne modifie pas son univalence. On a donc $|f'(z)| \leqq M_1$, M_1 étant un nombre fixe indépendant de la fonction, lorsque z est dans (D′), et l'on pourra adopter une même valeur de ρ dans (D_1) pour toutes les fonctions considérées.

Supposons, par exemple, que (D) soit le cercle unité $|z| < 1$; et (D_1) un cercle concentrique intérieur :

Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

une fonction holomorphe dans le cercle-unité pour laquelle a_2 *est fixe et telle que*

$$|f''(z)| \geqq \mu_2,$$

dans (D), μ_2 *désignant un nombre positif fixe. Il existe un nombre* ρ, *ne dépendant que de* a_2, μ_2, *et du rayon* θ *de* (D_1) *tel que le théorème des accroissements finis soit applicable, dans tout cercle* (γ) *de rayon* ρ *dont le centre est dans* (D_1), *à toute fonction de la famille.*

8. On démontrerait de la même manière que l'on peut adopter une même valeur de ρ_p pour toutes les fonctions holomorphes dans (D) pour lesquelles $|f^{(p+1)}(z)|$ reste, dans (D), supérieur à un nombre positif fixe μ_p et $f^{(p+1)}(z_0)$ est fixe en un point z_0. En particulier, si (D) est le cercle-unité, on peut énoncer la proposition suivante :

Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots$$

une fonction holomorphe dans le cercle-unité (D) *pour laquelle* a_{p+1} *est fixe et*

$$|f^{(p+1)}(z)| \geqq \mu_{p+1},$$

dans (D), μ_{p+1} *désignant un nombre positif fixe. Il existe un nombre* ρ_p *ne dépendant que de* a_{p+1}, μ_{p+1} *et du rayon* θ *de* (D_1) *tel que l'extension du théorème des accroissements finis soit applicable, dans tout cercle* (γ_p) *de rayon* ρ_p *dont le centre est dans* (D_1), *à toute fonction de la famille.*

On peut aussi supposer $|a_{p+1}|$ borné supérieurement par un nombre fixe, au lieu de supposer que a_{p+1} est le même pour toutes les fonctions de la famille.

Les questions que nous venons de traiter dans les deux derniers paragraphes sont étroitement liées à la notion de fonctions *localement univalentes ou multivalentes*, fonctions dont les propriétés sont voisines de celles des fonctions univalentes ou multivalentes [1].

---

[1] *Cf.* Paul MONTEL, *Sur l'univalence ou la multivalence locale* (*Comptes rendus*, t. **203**, 1936, p. 655).