JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ARNAUD DENJOY

Sur une fonction réelle de Minkowski

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 105-151.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_105_0>

Sur une fonction réelle de Minkowski;

PAR ARNAUD **DENJOY**.

Au cours d'un exposé que je faisais en décembre 1931 au séminaire de M. Hadamard (sur ma Note du 24 avril 1931 relative à l'ordination des ensembles) ([1]), M. Hadamard signala à l'assistance la définition de la fonction $?x$ de Minkowski. Le sujet m'intéressa immédiatement. Je m'en suis beaucoup occupé depuis. J'ai montré que la fonction de Minkowski fait partie d'une vaste classe rattachée aux fonctions fuchsiennes. La nécessité d'uniformiser dans le plan complexe les fonctions minkowskiennes pour leur assurer des limites bien déterminées sur l'axe réel, conduit à introduire un réseau de coupures aboutissant à l'axe réel sans diviser le demi-plan complexe. Ces configurations mettent en évidence des modes de développements canoniques des nombres réels par des suites de fractions qui sont les points d'aboutissement des coupures et qui, dans le cas de $?x$, sont des nombres rationnels.

C'est un fragment de mes recherches, entièrement limité au champ réel de la variable indépendante, que je voudrais présenter ci-après, en juste hommage à M. Hadamard, dont l'érudition si vaste et toujours si opportunément présente m'a suggéré ce remarquable sujet d'étude.

Dans la définition de la fonction $?x$ et de ses généralisations immédiates, que je désigne par $\chi(x)$, $\chi(x, \alpha)$, le développement de la variable indépendante en fraction continue ordinaire (ou normale) joue un rôle fondamental. Mais, inversement, les propriétés dont

---

([1]) *Comptes rendus*, t. **192**, 1931, p. 1011.

jouissent les fonctions minkowskiennes exigent, pour être conçues et exprimées sous la forme la plus simple, que la notion du développement des nombres en fraction continue reçoive certaines extensions très précises. Celles-ci éclairent d'une vive lumière cette sorte de calcul progressif dont l'importance pour la philosophie du nombre est si considérable.

L'expression d'un nombre positif y quelconque sous la forme $\Sigma(-1)^n \alpha^{\sigma_n}(1-\alpha)^{\sigma'_n} (0 < \alpha < 1)$, les entiers σ_n et σ'_n croissant à tour de rôle quand n croît, avec $\sigma'_0 = 0$, détermine une suite d'entiers a_0, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ qui sont les quotients incomplets d'un nombre x; x est la fonction inverse de $y = \chi(x, \alpha)$ [5].

Les propriétés des développements d'un nombre réel x en fraction continue normale, en particulier l'effet d'une substitution modulaire effectuée sur x, entraînent de remarquables propriétés correspondantes pour $\chi(x, \alpha)$. Inversement, les propriétés de $\chi(x, \alpha)$ révèlent la nature du développement en fraction continue normale d'un nombre réel. On est amené à regarder celui-ci comme une condensation d'un développement « canonique complet » dont tous les quotients sont uniquement égaux à zéro ou à 1, et se répartissent en doublets successifs identiques à 0,1 ou à 1,0 [14].

1. En vue de changer par une transformation continue croissante les nombres algébriques du second degré en des nombres rationnels (et les nombres rationnels en des fractions du système de numération binaire), Minkowski conçut la fonction $?x$. Cette fonction est ainsi définie que, si $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ sont deux fractions *adjacentes* ($pq' - qp' = \pm 1$) à dénominateurs positifs, le nombre $?\left(\frac{p+p'}{q+q'}\right)$ est la *moyenne arithmétique* de $?\left(\frac{p}{q}\right)$ et de $?\left(\frac{p'}{q'}\right)$.

$$?\left(\frac{p+p'}{q+q'}\right) = \frac{1}{2}?\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{1}{2}?\left(\frac{p'}{q'}\right) \tag{1}$$

$\frac{p+p'}{q+q'}$ est appelée la *médiante* de $\frac{p}{q}$ et de $\frac{p'}{q'}$. La construction progressive de l'ensemble des fractions rationnelles par la formation des médiantes des fractions déjà connues, donne naissance aux suites de Farey.

Il suffit de connaître $?\left(\frac{0}{1}\right)$, $?\left(\frac{1}{1}\right)$ pour en déduire $?x$ pour toute valeur rationnelle de x, entre zéro et 1. Il n'y a ensuite aucune difficulté à compléter par continuité la fonction pour toute valeur irrationnelle du segment $(0, 1)$.

Si l'équation fonctionnelle (1) est vérifiée par une fonction $y(x)$, elle l'est aussi par toute combinaison linéaire $Ay + B$ à coefficients A, B indépendants de x. Minkowski pose

$$?\left(\frac{0}{1}\right) = 0, \qquad ?\left(\frac{1}{1}\right) = 1.$$

2. J'ai été conduit à considérer plus généralement une fonction $\varkappa(x, \alpha)$ telle que, si $pq' - qp' = 1$, le nombre $\varkappa\left(\frac{p+p'}{q+q'}, \alpha\right)$ divise le segment $\left[\varkappa\left(\frac{p'}{q'}\right), \varkappa\left(\frac{p}{q}\right)\right]$ $\left(\frac{p'}{q'}\right.$ est inférieur à $\left.\frac{p}{q}\right)$ dans un rapport invariable, celui des deux nombres $1 - \alpha$ et α. α est supposé *positif*, *inférieur à* 1. α sera appelé la *base* de la fonction $\varkappa$. Donc,

$$(\mathrm{I}) \quad \varkappa\left(\frac{p+p'}{q+q'}, \alpha\right) = \alpha\varkappa\left(\frac{p'}{q'}, \alpha\right) + (1-\alpha)\varkappa\left(\frac{p}{q}, \alpha\right) \qquad (pq' - qp' = 1).$$

L'équation (1) correspond à $\alpha = 1 - \alpha = \frac{1}{2}$. Mais la fonction que je considère se définit sur le champ de tous les nombres réels. Il suffit, pour qu'elle s'obtienne par l'équation (I), de pouvoir regarder un entier quelconque $\frac{n}{1}$ comme la médiante de deux fractions.

$\frac{n}{1}$ est la médiante de $\frac{n-1}{1}$ et de $\frac{1}{0}$, et aussi de $\frac{-1}{0}$ et de $\frac{n+1}{1}$.

La fraction $\frac{1}{0}$, qui s'introduit dès la théorie la plus élémentaire des fractions continues comme constituant la réduite fictive de rang -1 commune à tous les nombres, *doit être admise au même titre que toute fraction irréductible* $\frac{p}{q}$. Donc, dans la formule (I), *le dénominateur q sera toujours un entier non négatif, pouvant être nul.*

Au contraire, *la fraction* $\frac{-1}{0}$ *doit être ici absolument bannie du système des fractions rationnelles.*

Dès lors, quel que soit n entier, $\frac{n}{1}$ est, comme toute fraction $\frac{p}{q}$, médiante de ses deux seules réduites pénultièmes possibles, $\frac{n-1}{1}$ la et $\frac{1}{0}$.

La fonction $\varkappa(x, \alpha)$ que la condition (I) ne saurait définir qu'à une substitution linéaire $A\varkappa + B$ près, est entièrement déterminée par les conditions

$$\varkappa\left(\frac{0}{1}, \alpha\right) = 1, \qquad \varkappa\left(\frac{1}{0}, \alpha\right) = 0, \tag{2}$$

indépendantes de α. On déduit de (I), en faisant $\frac{p}{q} = \frac{1}{0}$, $\frac{p'}{q'} = \frac{n-1}{1}$

$$\varkappa(1, \alpha) = \alpha, \qquad \varkappa(n, \alpha) = \alpha^n \qquad (n \text{ entier quelconque}).$$

$\varkappa(x, \alpha)$ est positif quel que soit x. $\varkappa(x, \alpha)$ décroît de $+\infty$ à zéro quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$. La base de $\varkappa$ est la valeur de $\varkappa$ pour $x = 1$. Sur l'intervalle $0, 1$, la fonction $?x$ est identique à

$$?x = 2 - 2\varkappa\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

3. Considérons la transformation modulaire *à coefficients entiers*

$$x' = \frac{px + p'}{qx + q'},$$

où q *n'est jamais négatif*, et *si* $q = 0$, $q' = 1$. Nous montrerons l'existence de formules

$$\varkappa\left(\frac{px+p'}{qx+q'}, \alpha\right) = A\varkappa(x, \alpha) \qquad + B \qquad \text{si } pq' - qp' = \quad 1, \tag{II}$$

$$\varkappa\left(\frac{px+p'}{qx+q'}, \alpha\right) = C\varkappa(x, 1-\alpha) + D \qquad \text{si } pq' - qp' = -1. \tag{III}$$

Mais, sauf avec la transformation $x' = x + 1$, pour laquelle

$$\varkappa(x+1, \alpha) = \alpha\varkappa(x, \alpha) \qquad \text{quel que soit } x, \tag{IV}$$

l'axe réel *doit être divisé en une infinité d'intervalles sur chacun desquels les couples respectifs* A, B *ou* C, D *sont indépendants de* x, tandis que *ces coefficients varient discontinument ensemble aux extrémités de chacun de ces intervalles.*

Il est évidemment tout à fait naturel de rechercher si ces *points séparateurs* ne sont pas en relation étroite avec un certain développement en fraction continue de $-\frac{q'}{q}$, pôle de x' [et discontinuité des premiers membres de (II) et (III)].

Il en est effectivement ainsi. *Les points de discontinuité des* A, B ou *des* C, D *sont les réduites des développements possibles de* $-\frac{q'}{q}$ *quand on admet les quotients incomplets nuls, les quotients incomplets entiers négatifs* (sauf pour le quotient initial) *étant seuls exclus.*

Définition de la fonction inverse de $\times(x, \alpha)$.

4. x étant un nombre réel quelconque, les entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, positifs à l'exception éventuellement du premier, et formant la suite des quotients incomplets du développement *normal* de x, sont fournis par la succession de conditions :

$$a_0 \leqq x \leqq a_0 + 1 \quad \text{ou} \quad x = a_0 + \frac{1}{x_1} \quad \text{avec} \quad 1 \leqq x_1 \leqq \frac{1}{0},$$

$$a_1 \leqq x_1 \leqq a_1 + 1 \quad \text{ou} \quad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2} \quad \text{avec} \quad 1 \leqq x_2 \leqq \frac{1}{0},$$

. . . .

Pareillement, la base α étant fixée ($0 < \alpha < 1$), soit y un nombre positif donné. A y correspond une suite d'entiers $a_0, a_1, \ldots$ (a_0 quelconque, $a_n \geqq 1$ pour $n \geqq 1$) fournie par les conditions successives :

$$\alpha^{a_0+1} \leqq y \leqq \alpha^{a_0} \quad \text{ou} \quad y = \alpha^{a_0}(1 - y_1) \quad \text{avec} \quad 0 \leqq y_1 \leqq 1 - \alpha,$$

$$(1-\alpha)^{a_1+1} \leqq y_1 \leqq (1-\alpha)^{a_1} \quad \text{ou} \quad y_1 = (1-\alpha)^{a_1}(1 - y_2) \quad \text{avec} \quad 0 \leqq y_2 \leqq \alpha,$$

$$\alpha^{a_2+1} \leqq y_2 \leqq \alpha^{a_2} \quad \text{ou} \quad y_2 = \alpha^{a_2}(1 - y_3) \quad \text{avec} \quad 0 \leqq y_3 \leqq 1 - \alpha,$$

. . . .

Ayant défini à partir de y les entiers $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ et corrélativement les nombres $y_1, y_2, \ldots, y_n$ avec

$$0 \leqq y_n \leqq \alpha \quad \text{si } n \text{ est pair}, \qquad 0 \leqq y_n \leqq 1 - \alpha \quad \text{si } n \text{ est impair},$$

nous déterminons l'entier a_n par les conditions

$$\alpha^{a_n+1} \leqq y_n \leqq \alpha^{a_n} \quad \text{ou} \quad y_n = \alpha^{a_n}(1 - y_{n+1}) \quad \text{avec} \quad 0 \leqq y_{n+1} \leqq 1 - \alpha$$

si n est *pair*, et

$$(1-\alpha)^{a_n+1} \leqq y_n \leqq (1-\alpha)^{a_n} \qquad \text{ou} \qquad y_n = (1-\alpha)^{a_n}(1-y_{n+1}) \qquad \text{avec} \quad 0 \leqq y_{n+1} \leqq \alpha$$

si n est *impair*.

Ou bien les opérations se poursuivent indéfiniment, ou bien elles s'arrêtent à un certain rang fini. On trouve

$$y = \alpha^{a_0} - \alpha^{a_0}(1-\alpha)^{a_1} + \alpha^{a_0+a_2}(1-\alpha)^{a_1} - \alpha^{a_0+a_2}(1-\alpha)^{a_1+a_3} + \ldots.$$

Posons

$$\sigma_n = a_0 + a_2 + \ldots + a_{2m} \quad + \ldots \qquad (2m \quad \leqq n),$$
$$\sigma'_n = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2m+1} + \ldots \qquad (2m+1 \leqq n).$$

Dès lors

$$(3) \qquad y = \alpha^{\sigma_0} - \alpha^{\sigma_1}(1-\alpha)^{\sigma'_1} + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha^{\sigma_{n-1}}(1-\alpha)^{\sigma'_{n-1}} + (-1)^n \alpha^{\sigma_{n-1}}(1-\alpha)^{\sigma'_{n-1}} y_n$$

avec

$$0 \leqq y_n \leqq \alpha \qquad \text{ou} \qquad 0 \leqq y_n \leqq 1-\alpha,$$

selon que n est pair ou impair. Si la suite a_n est indéfinie, on a la série convergente

$$(4) \qquad y = \Sigma(-1)^n \alpha^{\sigma_n}(1-\alpha)^{\sigma'_n}.$$

Telle est la forme sous laquelle peut se développer tout nombre positif y. Observons qu'aux deux suites finies $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, 1$ et $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1$ correspond le même nombre y.

Enfin, remarquons que la convergence de la série (4) est assurée pour α même complexe vérifiant $|\alpha| \leqq 1$, $|1-\alpha| \leqq 1$, $|\alpha||1-\alpha| < 1$.

Selon l'usage, adoptons la notation abrégée

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Les deux nombres $x = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ et y donné par la formule (4), définis l'un et l'autre par la suite d'entiers $a_0, a_1, \ldots$, sont liés entre eux par une relation que nous écrivons :

$$(5) \qquad y = \varkappa(x, \alpha).$$

Donc

$$\varkappa(x, \alpha) = \Sigma(-1)^n \alpha^{\sigma_n}(1-\alpha)^{\sigma'_n} \tag{V}$$

si $x = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$.

On vérifie aisément que la fonction définie par (V) vérifie la condition (I).

Il est manifeste que le développement de y sous la forme (4) se détermine progressivement d'une façon aussi naturelle et aussi simple que le développement de x sous la forme $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$.

En même temps on conçoit la solidarité profonde qui doit unir les propriétés de la fonction $\varkappa(x, \alpha)$ à celles du développement d'un nombre en fraction continue.

Les fractions continues à quotients incomplets nuls.

5. Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ un développement indéfini où les α_n sont des nombres quelconques. Le sens numérique de ce développement est identique à celui de la suite de ses réduites

$$\rho_n = \frac{p_n}{q_n} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

p_n et q_n étant successivement définis par les relations

$$\text{(6)} \quad \begin{cases} p_{-1} = 1, & q_{-1} = 0 \quad \left(\text{réduite préalable fictive } \rho_{-1} = \dfrac{1}{0}\right), \\ p_0 = \alpha_0, & q_0 = 1, \\ p_n = \alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}, & q_n = \alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{cases}$$

Des équations (6) on tire

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}, \tag{7}$$

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n \alpha_n. \tag{8}$$

La relation (7) montre que *deux réduites consécutives sont inégales.*

Nous imposerons à un développement en fraction continue les conditions suivantes :

Première condition. — *Les numérateurs et les dénominateurs des réduites sont entiers.*

D'après (8), *les α_n doivent être tous entiers*. D'après (7), *deux réduites consécutives sont deux fractions adjacentes*.

DEUXIÈME CONDITION. — *Les q_n sont non négatifs.*

D'après (7), *la réduite de rang impair surpasse la réduite de rang pair.*

TROISIÈME CONDITION. — *Les réduites successives d'une même parité de rang ne présentent pas les deux sens de variation.*

D'après (8), cette troisième condition entraîne que *les α_n doivent être non négatifs*. Mais rien ne s'oppose à ce que certains d'entre eux soient nuls, et nous les admettrons ainsi. Nous qualifierons de *général* tout développement en fraction continue contenant au moins un quotient incomplet α_n non initial nul.

Dans un développement général, les q_n d'une même parité de rang ne décroissent jamais. Les q_{2i} d'indice pair sont tous positifs. Les q_{2i+1} d'indice impair sont nuls pour $i=0, 1$, jusqu'à $i=r-1$, si $\alpha_1=\alpha_3=\ldots=\alpha_{2r-1}=0$, et seulement jusqu'à $i=r-1$, si $\alpha_{2r+1}\geqq 1$. Si $q_{2i+1}=0$, il résulte de (7) que $p_{2i+1}=1$. La fraction $\frac{-1}{0}$ n'apparaît donc jamais parmi les réduites du développement $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$.

Si $\alpha_n=0$, nous trouvons $\rho_n=\rho_{n-2}$.

Si $\alpha_n=\alpha_{n+1}=0$, nous trouvons $\rho_n=\rho_{n-2}$, $\rho_{n+1}=\rho_{n-1}$. Dans la suite des quatre réduites consécutives ρ_{n-2}, ρ_{n-1}, ρ_n, ρ_{n+1}, les deux dernières reproduisent les deux premières. *On ne perd pas de réduite, ni dans les rangs pairs, ni dans les rangs impairs, en supprimant dans le développement* $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ *un* COUPLE QUELCONQUE DE QUOTIENTS NULS CONSÉCUTIFS.

Si, le développement étant supposé indéfini, tous les α_n étaient nuls à partir d'un certain rang $k+1$ inclus, les réduites seraient donc celles d'un développement fini. $\rho_{k+2i}=\rho_k$, $\rho_{k+2i-1}=\rho_{k-1}$ $(i\geqq 1)$. ρ_n oscille donc indéfiniment de ρ_{k-1} à ρ_k quand n croît. ρ_n ne tend pas vers une limite. Nous exclurons ce cas. Nous dirons qu'un développement est réduit s'il ne présente aucun couple de quotients nuls consécutifs. Considérons un développement réduit indéfini. La suite des ρ_n d'une même parité d'indices tend vers une limite. Je dis que la limite est la même pour les deux parités.

En effet, si pour une valeur m le produit $q_m q_{m+1} \neq 0$, il en résulte $q_n q_{n+1} > 0$ pour $n > m$, et les formules (6) montrent que $q_n + q_{n+1}$ croît au moins d'une unité avec $\frac{n}{2}$ dès $n > m$. $\frac{1}{q_n q_{n+1}} = |\rho_n - \rho_{n+1}|$ tend donc vers zéro. La limite des deux suites de réduites est bien la même.

Si $q_n q_{n+1}$ est constamment nul, c'est que q_{2i+1} est constamment nul. Donc $\alpha_{2i+1} = 0$ quel que soit $i \geqq 0$, d'où $\alpha_{2i} \geqq 1$, le développement étant réduit. D'ailleurs $q_{2i} = 1$. On a le développement

$$(\alpha_0, 0, \alpha_2, 0, \alpha_2 n, \ldots)$$

dont les réduites sont

$$\left(\frac{1}{0}\right), \quad \frac{\alpha_0}{1}, \quad \frac{1}{0}, \quad \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{1}, \quad \frac{1}{0}, \quad \frac{\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4}{1}, \quad \frac{1}{0}, \quad \ldots.$$

Ce développement converge vers $\frac{1}{0}$. Donc :

Tout développement général réduit, infini vers la droite, a une valeur limite déterminée $\left(\text{qui peut être } \frac{1}{0}\right)$.

6. Montrons, sauf pour le dernier cas considéré ($\alpha_{2i+1} = 0$, quel que soit $i \geqq 1$), l'équivalence des développements de cette sorte avec les développements normaux.

Si $\alpha_n = 0$, on trouve :

$$\begin{aligned}
p_n &= p_{n-2}, \\
q_n &= q_{n-2}, \\
p_{n+1} &= \alpha_{n+1} p_{n-2} + p_{n-1} = (\alpha_{n+1} + \alpha_{n-1}) p_{n-2} + p_{n-3}, \\
q_{n+1} &= \ldots.
\end{aligned}$$

Donc les deux développements

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, 0, \alpha_{n+1}) \quad \text{et} \quad (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1} + \alpha_{n+1})$$

ont leurs deux dernières réduites identiques. Il en résulte que les deux développements

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, 0, \alpha_{n+1}, \ldots) \quad \text{et} \quad (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1} + \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots),$$

dont les réduites de rang m sont désignées respectivement par ρ_m et

ρ'_m vérifient

$$\rho_m = \rho'_m \quad \text{pour} \quad m \leqq n-2,$$
$$\rho_{m+2} = \rho'_m \quad \text{pour} \quad m \geqq n-1.$$

Donc la valeur limite du développement n'a pas été modifiée par cette transformation. Considérons cependant les réduites ρ_{n-1} et ρ_n. Celle-ci vaut $\rho_{n-2} = \rho'_{n-2}$. Mais $\rho_{n-1} = \dfrac{\alpha_{n-1} p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_{n-1} q_{n-1} + q_{n-2}}$ ne figure pas dans la suite ρ'_m (en supposant $\alpha_{n-1} \neq 0$).

Ainsi *le remplacement de la succession* α_{n-1}, o, α_{n+1} *par* $\alpha_{n-1} + \alpha_{n+1}$ *laisse dans le second développement toutes les réduites* ρ_m *pour* $m < n-1$ *et pour* $m > n-1$, *mais la réduite* ρ_{n-1} *est supprimée*. Cette contraction du développement donné fait donc disparaître une réduite, la réduite de rang $n-1$. Elle n'en aurait fait disparaître aucune si, en même temps que α_n, α_{n-1} (ou α_{n+1}) avait été nul. Nous avions déjà observé ce fait.

Cela posé, la transformation d'un développement général donné (D) à quotients non négatifs, mais pouvant être nuls, en un développement normal (D′) de même valeur est aisée à effectuer.

Nous commençons par supprimer dans le développement $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ tous les couples de quotients nuls consécutifs, afin d'obtenir un développement réduit.

Cela fait, donnons à l'élément initial le rang zéro et formons une première tranche s'étendant exclusivement jusqu'au premier quotient positif de rang impair $2j+1$ $(j \geqq 0)$. Ce sera la tranche T_0. Elle est formée d'un nombre impair $2j+1$ de quotients

$$(\alpha_0, 0, \alpha_2, 0, \ldots, 0, \alpha_{2j}) \quad \text{avec} \quad \alpha_{2j+1} \geqq 1 \quad (j \geqq 0).$$

Nous remplaçons T_0 par la somme $\alpha_0 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2j}$ que nous désignons par a_0. α_{2j+1}, premier quotient positif de rang impair commencera la tranche T_1. Celle-ci s'étendra exclusivement jusqu'au premier quotient positif ultérieur de rang pair, soit α_{2r+2} $(r > j)$, lequel commencera T_2. T_1 sera α_{2j+1}, o, α_{2j+3}, ..., o, α_{2r+1} $(\alpha_{2i+1} \geqq 1$ si $j \leqq i \leqq r)$. On remplacera T_1 par $\alpha_{2j+1} + \ldots + \alpha_{2r+1}$ que nous désignerons par a_1.

Et ainsi de suite. Une tranche finira et la tranche suivante commencera à chaque couple de quotients positifs consécutifs, le premier de ces deux quotients terminant la première tranche, le deuxième quotient commençant la seconde tranche. Une tranche T_k sera formée d'une suite $\alpha_t, o, \alpha_{t+2}, o, \ldots, o, \alpha_{t+2s} (s \geqq o)$, les α_{t+2i} étant tous positifs $(o \leqq i \leqq s)$ et α_{t+2s+1} étant aussi positif.

Cette tranche T_k sera remplacée par un quotient unique

$$a_k = \alpha_t + \alpha_{t+2} + \ldots + \alpha_{t+2s}.$$

L'application de la règle conduit à distinguer plusieurs cas :

1° Le développement donné (D) : $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ se décompose en *une infinité de tranches* du type défini. Le développement donné est remplacé par une fraction continue indéfinie (D′) : $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$.

La $n^{\text{ième}}$ réduite de ce dernier développement est égale à la réduite du dernier quotient (toujours positif si $n \geqq 1$) de la tranche T_n. Les deux développements, le général et le normal, ayant une infinité de réduites communes, ont la même valeur.

2° Le développement (D) est *fini et se termine par un quotient positif*. (D) se décompose en un nombre fini de tranches. Les deux dernières réduites de (D) et de (D′) sont identiques. La conversion de (D) en fraction normale est faite.

3° Le développement (D) est *fini* et *se termine par un zéro*, sans que tous les quotients de rang impair soient nuls. Supposons que, avec $\alpha_{n-1} \neq o$, $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+3}, \ldots, \alpha_{n+2k+1}$ soient nuls, α_{n+2k+1} étant le dernier quotient de (D). Alors la tranche $\alpha_n, o, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_{n+2k}, o$ vaut $\frac{1}{o}$ et $(D) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$. En particulier

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, o) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

4° Le développement (D) est *fini*, *se termine par un zéro*, et *tous ses quotients de rang impair sont nuls*. Alors (D) vaut $\frac{1}{o}$.

5° (D) est *illimité* et, après une avant-dernière tranche T_m, il vient une suite *indéfinie*

$$\alpha_n, \quad o, \quad \alpha_{n+2}, \quad o, \quad \ldots, \quad \alpha_{n+2i}, \quad o, \quad \ldots,$$

les α_{n+2i} étant tous positifs $(i > o)$.

Nous considérons tous ces quotients comme formant une tranche unique T_{m+1}. Mais la valeur de T_{m+1} est $\frac{1}{o}$. La valeur du développement général donné est identique à celui de la fraction limitée $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$.

Dans tous les cas, la transformation d'un développement général en un développement normal de même valeur est possible, à moins toutefois que la tranche initiale T_0 ne soit identique au développement total (D), celui-ci ayant alors pour valeur $\frac{1}{0}$.

Observons enfin que, chaque tranche T_n finie ayant un nombre impair de quotients et le quotient initial de (D) ayant le rang conventionnel zéro, tous les quotients non nuls (et aussi le premier quotient) de T_0 ont un rang pair. Tous les quotients non nuls de T_1 ont un rang impair. Tous les quotients non nuls de T_n ont comme parité de rang la parité de n, donc même parité de rang que le quotient $a_n = (T_n)$ dans le développement normal (D') égal à (D).

Application des développements à quotients nuls.

7. L'emploi des quotients nuls permet de représenter $\frac{1}{0}$. En outre il simplifie diverses transformations d'un développement en fraction continue. Soit x donné,

$$x = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots).$$

1° Développons $\frac{1}{x}$ pour $x > 0$. Supposons $\alpha_0 \geqq 0$. Alors

$$\frac{1}{x} = (0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) \qquad (\alpha_0 \geqq 0). \tag{9}$$

2° Cherchons $-\frac{1}{x}$ pour $x > 1$. Soit $\alpha_0 \geqq 1$. Posons $x = (1, \xi_1)$ avec $\xi_1 > 0$

$$x = (1, \xi_1) = 1 + \frac{1}{\xi_1} \qquad (\xi_1 > 0).$$

Donc

$$-\frac{1}{x} = -1 + \frac{1}{\xi_1 + 1} = (-1, \xi_1 + 1).$$

Or

$$\xi_1 = \frac{1}{x-1} = (0, \alpha_0 - 1, \alpha_1, \ldots),$$

$$-\frac{1}{x} = (-1, 1, \alpha_0 - 1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (-1, 1, x - 1) \qquad (x \geqq 1, \alpha_0 \geqq 1). \tag{10}$$

3° Soit à former $-x$. Supposons $\alpha_1 \geqq 1$, de façon que α_0 soit la partie entière de x (supposé non entier et *fini*).

Soit

$$x = (\alpha_0, x_1) = \alpha_0 + \frac{1}{x_1} \qquad [x_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \ldots) \geqq 1],$$

$-x = -\alpha_0 - \frac{1}{x_1}$. D'après (10),

$$(11) \qquad -x = (-\alpha_0 - 1, 1, \alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots) \quad \text{si} \quad \alpha_1 \geqq 1,$$

ou encore

$$-x = \left(-\alpha_0 - 1, 1, \frac{1}{x - \alpha_0} - 1\right) \quad \text{si} \quad \alpha_0 < x < \alpha_0 + 1.$$

8. Le calcul de $\chi(x, \alpha)$ par les développements généraux de x. — Soit (D) la fraction

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) = x,$$

les α_n étant non négatifs, sauf α_0 quelconque.

Je dis que l'application de la formule (V) à l'expression de x fournie par le développement (D) ne change pas la valeur obtenue pour $\chi(x, \alpha)$.

Posons

$$\begin{aligned}
\tau_n &= \alpha_0 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2i} + \ldots \qquad \text{pour} \quad 2i \leqq n, \\
\tau'_n &= \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2i+1} + \ldots \qquad \text{pour} \quad 2i + 1 \leqq n, \\
\omega_n &= (-1)^n \alpha^{\tau_n} (1 - \alpha)^{\tau'_n}.
\end{aligned}$$

Nous formons la somme, limitée ou non,

$$\eta = \Sigma \omega_n.$$

Si le développement (D) est infini, nous supposons que tous les quotients α_n ne sont pas nuls à partir d'un certain rang. C'est là d'ailleurs la condition nécessaire et suffisante pour que les deux suites formées par les réduites de rang pair et par les réduites de rang impair de (D) aient la même limite x.

La série η est alternée à termes non croissants en valeur absolue et, $\tau_n + \tau'_n$ devenant infiniment grand avec n, ω_n tend vers zéro. La série η est donc toujours convergente.

Si $\alpha_n = 0$, on en tire

$$\tau_n = \tau_{n-1}, \qquad \tau'_n = \tau'_{n-1},$$
$$\omega_{n-1} + \omega_n = 0.$$

Soit (Δ) le développement $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1} + \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots)$ et ω'_n le nombre analogue à ω_n, mais relatif à (Δ). $n-1$ et $n+1$ ayant la même parité, α_{n-1} et α_{n+1} sont dans la même somme τ_{n+p} ou τ'_{n+p} (suivant la parité de n) pour $p \geqq 1$. D'autre part la contraction de (D) en (Δ) ne change ni la parité de rang ni l'ordination des quotients α_{n+p+1} pour $p \geqq 1$. Donc

$$\omega_m = \omega'_m \quad \text{pour } m \leqq n-2 \qquad \text{et} \qquad \omega_{m+2} = \omega'_m \quad \text{pour } m \geqq n-1.$$

D'après $\omega_{n-1} + \omega_n = 0$, il est évident que $\Sigma\omega_m = \Sigma\omega'_m$.

On en conclut que les opérations changeant progressivement (D) en une fraction normale égale à x ne changent pas la somme de la série $\Sigma\omega_n$. Cette somme est donc la même que pour le développement normal de x. Donc

$$\eta = \varkappa(x, \alpha).$$

Développements infinis à gauche.

9. Enfin on peut envisager des développements $(\ldots, \alpha_n, \ldots)$, l'indice n variant de $-\infty$ à $+\infty$, ou simplement de $-\infty$ à un nombre fini m. Soit (D) un tel développement. Définissons-en le sens.

Nous convenons d'écrire, *quel que soit n* :

$$\rho_n = (\ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = \frac{p_n}{q_n}.$$

Nous posons les relations :

$$(6\ bis) \quad \begin{cases} p_{-1} = 1, & q_{-1} = 0 \quad \text{(réduite préalable } \textit{effective}\text{)}. \\ p_0 = a_0, & q_0 = 1, \\ p_n = \alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}, & q_n = \alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases}$$

a_0 étant un nombre donné a priori *quelconque*.

La troisième des relations (6 *bis*) résolue en

$$(6\ ter) \qquad p_{n-2} = -\alpha_n p_{n-1} + p_n, \qquad q_{n-2} = -\alpha_n q_{n-1} + q_n$$

nous donne la suite indéfinie des ρ_n pour $n \leqq -2$ grâce à la connaissance de ρ_0 et de ρ_{-1}. Si nous imposons comme plus haut aux p_n, q_n les conditions (première et deuxième) d'être entiers, les q_n étant non négatifs et à la suite ρ_n la condition (troisième) de n'avoir pas les deux sens de variation pour une même parité de n, on trouve encore que a_0 doit être un entier, d'ailleurs quelconque, et que les α_n *doivent tous être des entiers non négatifs*. Mais, en outre, d'après la seconde des équations (6 *ter*),

$$q_{-2i-1} = q_{-2i+1} = \ldots = q_{-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_{-2i-1}\, q_{-2i} = 0$$

quel que soit $i \geqq 0$. Donc

$$q_{-2i} = q_{-2i+2} = \ldots = q_{-2} = q_0 = 1,$$

et *finalement* $\alpha_{-2i-1} = 0$ *quel que soit* $i \geqq 0$, *avec* $\alpha_{-2i} \geqq 0$.

Par suite,

$$p_{-2i-1} = 1, \qquad p_{-2i-2} = a_0 - \alpha_0 - \alpha_{-2} - \ldots - \alpha_{-2i},$$

$$\rho_{-2i-1} = \frac{1}{0}, \qquad \rho_{-2i-2} = \frac{a_0 - \alpha_0 - \ldots - \alpha_{2i}}{1} \qquad (i \geqq 0).$$

Si tous les quotients α_{-2i} étaient nuls à partir d'une certaine valeur $m+1$ de i, toutes les réduites ρ_{-2i} seraient identiques pour $i > m$. Il serait inutile de conserver cette partie illimitée de zéros consécutifs. (D) serait équivalent à un développement général ayant un quotient initial $a_0 - \alpha_0 - \ldots - \alpha_{-2m}$ et pour quotients suivants :

$$0, \quad \alpha_{-2m}, \quad 0, \quad \alpha_{-2m+2}, \quad \ldots, \quad 0, \quad \alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \ldots.$$

S'il y a une infinité de quotients α_{-2i} non nuls, on peut *réduire* (D) et alors tous les α_{-2i} sont positifs. ρ_{-2i} décroît indéfiniment quand i croît ($i \geqq 0$). Si (D) réduit est aussi illimité à droite, ρ_n tend vers une limite unique x quand n croît. ρ_{2m} croît de $-\infty$ à x quand m croît de $-\infty$ à $+\infty$, et ρ_{2m-1} décroît de $\frac{1}{0}$ (pour $m \leqq 0$) à x.

Réciproquement, soit donné un développement (D) à quotients non négatifs, indéfini vers la gauche, et commençant par une suite illimitée de quotients non tous nuls alternant avec une suite de quotients tous nuls. On attribue aux quotients de cette dernière suite l'imparité du rang :

1° Si parmi les quotients de rang impair l'un au moins est positif, on attribue au premier de ceux-ci le rang 1. Dès lors tous les quotients de (D) ont un rang défini. La partie de (D) arrêtée au quotient de rang 0, quotient désigné par α_0, forme une tranche initiale T_0 à laquelle on attribue une valeur entière donnée quelconque a_0, et par convention (T_0) est la réduite $\rho_0 = \frac{a_0}{1}$ de (D). Le développement arrêté à α_{-1} est conventionnellement la réduite $\rho_{-1} = \frac{1}{0}$ de (D). Si l'on remplace T_0 par a_0, (D) devient un développement général fini à gauche, dont la conversion en une fraction continue normale est un problème déjà résolu.

2° Si tous les quotients de rang impair de (D) sont nuls, à tous ces quotients correspond la réduite $\frac{1}{0}$. Nous distinguons deux cas selon que (D) est ou non illimité vers la droite. Dans le premier cas, la suite de rang pair renferme une infinité de quotients non nuls, vers la gauche et vers la droite. On peut attribuer indifféremment le rang 1 à l'un quelconque des quotients de la suite toute nulle. Le développement vaut $\frac{1}{0}$ quels que soient les α_{2n}.

Si (D) est limité à droite, la suite des quotients de rang impair étant toute nulle, on attribue au dernier quotient de cette suite un rang impair négatif, par exemple -1. On supposera donnée la dernière réduite de (D), si elle est de rang pair (et même nul), ou sinon la première réduite ultérieure *fictive* de (D). La valeur de (D), égale à sa dernière réduite, sera $\frac{1}{0}$ ou un certain entier, selon que le dernier quotient de (D) sera de rang impair (ce quotient étant alors nul) ou de rang pair. Dans le premier cas, il n'y a pas d'équivalence de (D) à une fraction normale. Dans le second cas (D) se change en une fraction normale formée d'un seul quotient incomplet.

Nous appellerons *externes gauches* les quotients de T_0, *externes droits* les quotients de T_{m+1}, si T_{m+1} est indéfini vers la droite, ceci exigeant que x soit rationnel, *moyens* les quotients des tranches intermédiaires, ni initiales ni finales.

10. Propriétés des réduites des développements généraux. — Considérons le développement général (D) $(\ldots, \alpha_n, \ldots)$ indéfini bilatéralement, unilatéralement ou pas du tout. Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre x puisse être représenté par une fraction continue générale commençant par les mêmes quotients et ayant les mêmes réduites que (D) jusqu'au rang n inclus

$$x = (\ldots\ldots, \alpha_n, \beta_{n+1}, \ldots).$$

Si (D) est illimité à gauche, ces réduites dépendent d'une même quantité additive $\rho_0 = \frac{a_0}{1}$, qu'il faudra supposer donnée. Pour l'égalité cherchée entre les réduites de x et celles de (D) jusqu'au rang n, il suffit qu'elle soit réalisée pour les deux dernières, ρ_{n-1} et ρ_n. Posons

$$x_{n+1} = (\beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \ldots).$$

La fraction x_{n+1} étant limitée à gauche, son sens numérique est parfaitement défini. On montre, comme dans les éléments, l'égalité

$$x = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}. \tag{12}$$

Mais ici le quotient β_{n+1} pouvant être nul, x_{n+1} n'est pas nécessairement au moins égal à 1 comme dans les fractions continues normales. *x_{n+1} est quelconque non négatif*

$$\frac{0}{1} \leqq x_{n+1} \leqq \frac{1}{0}. \tag{13}$$

Donc x est un point du segment $\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right)$.

Réciproquement, si x appartient au segment $\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right)$, x_{n+1} donné par (12) vérifie la condition (13) et, par suite, x_{n+1} est développable en fraction générale $(\beta_{n+1}, \beta_{n+2} \ldots)$ avec $\beta_m \geqq 0$. Donc, x est égal au développement $(\ldots, \alpha_n, \beta_{n+1}, \beta_{n+2} \ldots)$ dont tous les quotients (sauf éventuellement le premier, s'il existe) sont non négatifs, la partie entière de ce développement, s'il est illimité à gauche, étant déterminée par la valeur de $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ ou de $\frac{p_n}{q_n}$.

Finalement, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un* *développement général de x admettant jusqu'à l'ordre n les mêmes quotients et les mêmes réduites que le développement donné* (D) : $(\ldots, \alpha_n, \ldots)$, *est que x appartienne au segment limité par les deux réduites* $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}$ de (D).

D'ailleurs, si $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$ sont deux fractions adjacentes quelconques (q et $q' \geqq 0$), il est toujours possible de les obtenir, dans ce même ordre, comme les deux dernières réduites d'un développement général. On peut même supposer celui-ci limité bilatéralement et poser, avec $m \geqq 1$:

$$\frac{p}{q} = (a_0, a_1, \ldots, a_m) \qquad (a_0 \text{ quelconque}, a_1, \ldots, a_{m-1} \geqq 1, a_m \geqq 0),$$
$$\frac{p'}{q'} = (a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}).$$

Donc $\frac{p}{q}$ *et* $\frac{p'}{q'}$ *étant adjacentes, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un développement général de x admettant* $\frac{p'}{q'}$, *puis* $\frac{p}{q}$ *pour réduites consécutives est que x appartienne au segment* $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right)$.

Par exemple, si $\frac{p}{q} = \frac{1}{0}, \frac{p'}{q'} = \frac{a_0}{1}$,

$$\frac{p}{q} = (a_0, 0), \qquad \frac{p'}{q'} = (a_0),$$
$$x = (a_0, 0, \beta_2, \beta_3, \ldots) \qquad (\beta_i \geqq 0 \text{ pour } i \geqq 2),$$

x est un nombre quelconque au moins égal à a_0. Même conclusion si $\frac{p}{q} = \frac{a_0}{1}, \frac{p'}{q'} = \frac{1}{0}, x = (a_0 - 1, 0, 1, \beta_3, \ldots)$.

11. Soit (D) un développement $(\ldots, \alpha_n, \ldots)$, indéfini ou non, unilatéralement ou bilatéralement, et dont la réduite terminée par α_n est $\frac{p_n}{q_n}$.

k étant le rang d'un quotient de (D) quelconque, retournons le développement (D) en le développement E : $(\ldots, \beta_n, \ldots)$ avec $\beta_{k-n+1} = \alpha_n$, en sorte que $\beta_1 = \alpha_k$. Soit ρ'_n la réduite de (E) arrêté au quotient β_n.

Si $\alpha_{k+2i}=0$, quel que soit $i \geqq 1$ $\left[\text{la valeur de (D) est alors rationnelle ou } \frac{1}{0}\right]$, le retournement de (D) en (E) donne un nouveau développement général. Sinon, nous limitons obligatoirement (D) à sa réduite $\rho_k=(\ldots, \alpha_{k+1}, \alpha_k)$ et nous posons $\beta_0=0$. (E) est alors $(0, \alpha_k, \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \ldots)$. Nous avons $\rho'_0=\frac{0}{1}$.

Si $\alpha_{k+2i}=0$ quel que soit $i \geqq 1$, (E) indéfini à gauche, nous poserons conventionnellement encore $\rho'_0=\frac{0}{1}$.

Je dis que la valeur du développement (E) est $\frac{q_{k-1}}{q_k}$, comme dans le cas des fractions normales. En effet,

$$q_k = \alpha_k q_{k-1} + q_{k-2},$$

ou

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \left(\alpha_k, \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}}\right),$$

$$\frac{q_{k-1}}{q_k} = \left(0, \alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_k, \frac{q_{h-1}}{q_{h-2}}\right) \qquad (h \leqq k).$$

$\frac{q_{h-1}}{q_{h-2}}$ étant toujours non négatif, on peut faire décroître h indéfiniment, si (D) est illimité vers la gauche. $\left(\text{Pour } h<0, \frac{q_{h-1}}{q_{h-2}} \text{ est alternativement } \frac{0}{1} \text{ et } \frac{1}{0}\right)$. (E) a bien la valeur dite. Si $k \geqq 1$, pour $h=1$, $\frac{q_{h-1}}{q_{h-2}}=\frac{1}{0}$ et même si (E) est illimité vers la gauche [cas où la valeur de (D) est rationnelle],

$$\frac{q_{k-1}}{q_k} = (0, \alpha_k, \ldots, \alpha_1) = \rho'_k.$$

ξ étant un nombre différent de $\frac{q_{k-1}}{q_k}$, considérons $\xi' = \frac{p_k\xi - p_{k-1}}{q_k\xi - q_{k-1}}$.

ξ' est la fraction $(\ldots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}, \alpha_k, -\xi)$, calculée par l'application des formules (6 *bis*).

n étant un entier inférieur à k, faisons

$$\xi = (0, \alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_{n+1}).$$

Observons que, d'après les formules (6 *bis*), si tous les α_n et a_0 sont changés simultanément de signes, p_{2i-1}, q_{2i} restent inchangés, p_{2i}, q_{2i-1}

sont simplement changés de signes. Donc toute réduite finie est remplacée par le nombre opposé. D'où

$$-\xi = (0,\ -\alpha_k,\ -\alpha_{k-1},\ \ldots,\ -\alpha_{n+1})$$

et

$$\xi' = (\ldots,\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n,\ \alpha_{n+1},\ \ldots,\ \alpha_k,\ 0,\ -\alpha_k,\ -\alpha_{k-1},\ \ldots,\ -\alpha_{n+1}),$$

$$(14) \qquad \xi' = (\ldots,\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n,\ 0) = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

Posons

$$\frac{\lambda}{\mu} = \xi = (0,\ \alpha_k,\ \alpha_{k-1},\ \ldots,\ \alpha_{n+1}) = \rho'_{k-n} \qquad (n+1 \leqq k),$$

λ et μ étant fournis par le développement de ξ au moyen des formules (6).

Nous tirons de (14), $\varepsilon_{n,k}$ étant entier,

$$p_k\lambda - p_{k-1}\mu = \varepsilon_{n,k}p_{n-1}, \qquad q_k\lambda - q_{k-1}\mu = \varepsilon_{n,k}q_{n-1}.$$

Il suffit de changer n en $n-1$, donc $\frac{\lambda}{\mu}$ en $\frac{\lambda'}{\mu'} = \rho'_{k-n+1}$, et de former le déterminant des quatre premiers membres des égalités écrites pour voir que $\varepsilon_{k,n}\,.\,\varepsilon_{k,n-1} = -1$. Le changement de k en $k-1$ montre que $\varepsilon_{k,n}$ ne dépend que de la parité de $k-n$ et change avec elle. On a

$$(15) \quad p_k\lambda - p_{k-1}\mu = (-1)^{k-n-1}p_{n-1}, \qquad q_k\lambda - q_{k-1}\mu = (-1)^{k-n-1}q_{n-1},$$

si

$$\frac{\lambda}{\mu} = \xi = (0,\ \alpha_k,\ \alpha_{k-1},\ \ldots,\ \alpha_{n+1}) = \rho'_{k-n},$$

ρ'_{k-n} étant dans tous les cas la réduite de (E) défini comme il a été dit par le retournement partiel ou total de (D), total quand la valeur de (D) est rationnelle.

11 *b*. Considérons particulièrement ce dernier cas, le développement étant indéfini dans les deux sens et valant $\frac{p}{q} = \frac{p_s}{q_s} = \rho_s$. Alors, $\alpha_{s+2} = \alpha_{s+4} = \ldots\ 0$, de même que

$$0 = \alpha_{-1} = \alpha_{-3} = \ldots; \qquad (\ldots,\ \alpha_{s-2},\ \alpha_{s-1}) = \frac{p_{s-1}}{q_{s-1}} = \rho_{s-1}.$$

Observons que la condition $\alpha_s > 0$ n'interviendra pas (non plus que $\alpha_1 > 0$). En sorte que α_s n'est pas nécessairement le dernier des quotients moyens (ni α_1 le premier). α_s est ou bien le dernier (α_1 est ou bien le premier), ou bien un quotient ultérieur (antérieur) au dernier (premier) quotient moyen, mais avec la même parité de rang que celui-ci. Dans le retournement de (D) en (E) doublement indéfini, chacune des deux tranches externes de (D) d'un côté déterminé gauche ou droit, devient une tranche extrême du côté opposé au premier. Nous avons

$$\frac{q_{s-1}}{q_s} = (0,\ \alpha_s,\ \alpha_{s-1},\ \ldots,\ \alpha_{n+1},\ \alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ \ldots)$$

et

$$\left(\frac{1}{0}\right)\left(\frac{0}{1}\right)$$

$$\text{(E)} \qquad \frac{q_{s-1}}{q_s} = (\ldots,\ 0,\ \alpha_{s+3},\ 0,\ \ \alpha_{s+1},\ \alpha_s,\ \alpha_{s-1},\ \ldots,\ \alpha_1,\ \ldots).$$

Le second membre est le développement (E) dont le quotient α_{s+1} est regardé comme ayant le rang 0, avec la valeur conventionnelle $\frac{0}{1}$ pour la réduite correspondante.

Cela étant, considérons

$$\xi' = \frac{p_s\xi - p_{s-1}}{q_s\xi - q_{s-1}},$$

et soit $\xi = \frac{\lambda}{\mu} = \rho'_{s-n}$ la réduite du développement (E) arrêtée au quotient $\alpha_{n+1} = \beta_{s-n}$, donc

$$\xi = (\ldots,\ 0,\ \alpha_{s+1},\ \alpha_s,\ \alpha_{s-1},\ \ldots,\ \alpha_{n+2},\ \alpha_{n+1}).$$

Mais, n étant quelconque et non pas assujetti à la condition $n + 1 \leqq s$, nous allons montrer la validité, même pour $n \geqq s$, des formules générales

$$\text{(14 b)} \qquad \xi' = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},$$

$$\text{(15 b)} \qquad p_s\lambda - p_{s-1}\mu = (-1)^{s-n-1}p_{n-1}, \qquad q_s\lambda - q_{s-1}\mu = (-1)^{s-n-1}q_{n-1},$$

établies précédemment seulement pour $n + 1 \leqq s$.

Elles sont visiblement vraies pour $n = s$, d'après $\rho'_0 = \frac{0}{1}$. Soit donc

$n > s$. Si $n - s$ est pair,

$$\ldots = \alpha_{n+2} = \alpha_n = \alpha_{n-2} = \ldots = \alpha_{s+2} = 0,$$

$$\xi = (\ldots, \alpha_{n+3}, 0, \alpha_{n+1}), \qquad \lambda = -(\alpha_{s+1} + \alpha_{s+3} + \ldots + \alpha_{n-1}), \qquad \mu = 1,$$

$$p_s\lambda - p_{s-1}\mu = -p_s(\alpha_{s+1} + \ldots + \alpha_{n-1}) - p_{s-1} = -p_{n-1}$$

et

$$q_s\lambda - q_{s-1}\mu = -q_{n-1}.$$

Si $n - s$ est impair,

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+3} = \ldots = 0, \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \xi = \frac{1}{0}, \qquad \xi' = \frac{p_s}{q_s} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},$$

$$p_s\lambda - p_{s-1}\mu = p_s = p_{n-1}, \qquad q_s\lambda - q_{s-1}\mu = q_s = q_{n-1}.$$

Les formules ($14\,b$) et ($15\,b$) sont donc valables pour toutes les valeurs de n et de s.

Observons que la valeur de ξ' ne change pas quand on remplace s par $s + 2i$, quel que soit i non négatif, à la condition que la réduite de (E) arrêtée au quotient α_{s+1} soit toujours conventionnellement posée égale à $\frac{0}{1}$.

En résumé,

Si le développement doublement indéfini (D)

$$\text{(D)} \qquad \overset{\left(\frac{1}{0}\right)\left(\frac{a}{1}\right)}{(\ldots, 0, \alpha_{-2}, 0,} \quad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_s, \alpha_{s+1}, 0, \alpha_{s+3}, 0, \ldots)$$

se termine par une tranche infinie T_{m+1} *composée de deux suites* α_{s+2i}, α_{s+2i+1} *alternantes avec* $\alpha_{s+2i} = 0$ *quel que soit* $i \geqq 0$; *en sorte que la valeur du développement de* (D) *est un nombre rationnel* $\frac{p}{q} = \frac{p_s}{q_s}$, *et que le retournement*

$$\text{(E)} \qquad \overset{\left(\frac{1}{0}\right)\left(\frac{0}{1}\right)}{(\ldots, 0, \alpha_{s+3}, 0,} \quad \alpha_{s+1}, \alpha_s, \alpha_{s-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, 0, \alpha_{-2}, 0, \ldots)$$

représente encore un nombre rationnel égal à $\frac{q_{s-1}}{q_s}$ *si la réduite de* (E) *arrêtée à* α_{s+1} *est conventionnellement* $\frac{0}{1}$; ceci étant noté, *quel que soit l'entier* n, *si dans* $\xi' = \frac{p_s\xi - p_{s-1}}{q_s\xi - q_{s-1}}$ *on substitue à* ξ *la réduite* $\frac{\lambda}{\mu} = (\ldots,$ $\alpha_{n-3}, \alpha_{n+2}, \alpha_{n+1})$ *de* $\frac{q_{s-1}}{q_s}$ *donné par* (E), *la valeur correspondante de* ξ'

est la réduite

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = (\ldots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1})$$

de $\frac{p}{q}$ *donné par* (D).

En outre, observons que

$$p_s\lambda - p_{s-1}\mu = (-1)^{s-n-1} p_{n-1}, \qquad q_s\lambda - q_{s-1}\mu = (-1)^{s-n-1} q_{n-1}.$$

Les développements en fraction continue canoniques.

12. Soit x un nombre réel donné, $(a_0, a_1, \ldots a_m, \ldots)$ son développement normal, (D) ou $(\ldots, \alpha_n, \ldots)$ un de ses développements généraux, illimité bilatéralement, unilatéralement ou pas du tout, se divisant en tranches T_m équivalant respectivement à a_m. Si un quotient a_m (ou un quotient α_n) vaut au moins 2, soient a'_m et b'_m (α'_n et β'_n), deux entiers positifs ayant pour somme a_m, (α_n). Remplaçons dans la suite a_m (et de même pour la suite α_n) le quotient a_m par la succession a'_m, 0, b'_m (α_n par α'_n, 0, β'_n). Dans le développement obtenu

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a'_m, 0, b'_m, a_{m+1}, \ldots)$$

nous avons une réduite nouvelle, savoir

$$R'_m = \frac{P_{m-1} a'_m + P_{m-2}}{Q_{m-1} a'_m + Q_{m-2}} \qquad \text{si} \quad R_m = \frac{P_m}{Q_m} = (a_0, a_1, \ldots, a_m).$$

Mais la suite des autres réduites de x n'a pas perdu d'élément.

En répétant l'application de la méthode nous pouvons remplacer a_m par la suite alternée 1, 0, 1, ..., 0, 1, le chiffre 1 figurant a_m fois et le chiffre 0, $a_m - 1$ fois. C'est au même résultat qu'aboutirait la transformation de la tranche T_m de (D), tranche α_r, 0, α_{r+2}, 0, ..., α_{r+2s} avec $\alpha_r + \alpha_{r+2} + \ldots + \alpha_{r+2s} = (T_m) = a_m$, la tranche T_m étant supposée préalablement réduite.

La suite des réduites correspondant aux quotients introduits par la transformation de a_m est

$$\frac{P_{m-1}+P_{m-2}}{Q_{m-1}+Q_{m-2}}, \quad \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}, \quad \frac{2P_{m-1}+P_{m-2}}{2Q_{m-1}+Q_{m-2}}, \quad \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}, \quad \ldots,$$
$$\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}, \qquad \frac{a_m P_{m-1}+P_{m-2}}{a_m Q_{m-1}+Q_{m-2}} = \frac{P_m}{Q_m}.$$

Par cette transformation du quotient a_m (ou de la tranche T_m) nous avons donc introduit dans la suite des réduites du développement, toutes les réduites dites *intermédiaires* à $\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}$ et à $\frac{P_m}{Q_m}$, soit $\frac{sP_{m-1}+P_{m-2}}{sQ_{m-1}+Q_{m-2}}$ ($s=1, 2, \ldots, a_{m-1}$) sans faire disparaître aucune réduite du développement initial.

Appliquons la méthode à un développement indéfini de $\frac{1}{0}$ à quotient initial positif. Nous aboutissons à

$$\frac{1}{0}=(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots) \tag{16}$$

dont les réduites successives sont

$$\left(\frac{1}{0}\right), \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{0}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{1}{0}, \quad \ldots, \quad \frac{n}{1}, \quad \frac{1}{0}, \quad \ldots.$$

Supposons x rationnel et égal à $\frac{p}{q}$ irréductible, avec $q \geqq 1$. Soit

$$\frac{p}{q}=(a_0, a_1, \ldots, a_m).$$

On peut faire en sorte que m soit pair ou impair, avec $a_m \geqq 1$.

$$\frac{p}{q}=\left(a_0, a_1, \ldots, a_m, \frac{1}{0}\right)=(a_0, a_1, \ldots, a_m, 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots).$$

Les réduites relatives aux nouveaux quotients introduits sont

$$\frac{p+P_{m-1}}{q+Q_{m-1}}, \quad \frac{p}{q}, \quad \frac{2p+P_{m-1}}{2q+Q_{m-1}}, \quad \frac{p}{q}, \quad \ldots, \quad \frac{rp+P_{m-1}}{rq+Q_{m-1}}, \quad \frac{p}{q}, \quad \ldots.$$

Cette suite comprise entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{P_{m-1}}{P_{m-1}}$ tend vers $\frac{p}{q}$, par valeurs supérieures si m est pair, inférieures si m est impair. Dans le premier cas, le développement illimité à droite de $\frac{p}{q}$ sera dit *supérieur*, dans le second cas il sera dit *inférieur*.

Le développement supérieur de o vient de $\left(0, \frac{1}{0}\right)$, soit

$$\frac{0}{1}=(0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots) \tag{17}$$

dont les réduites successives sont

$$\left(\frac{1}{0}\right),\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{0}{1},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \frac{0}{1},\ \ldots.$$

Le développement inférieur de o vient de $\left(-1,\ 1,\ \frac{1}{0}\right)$,

$$\frac{0}{1} = (-1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ \ldots).$$

dont les réduites successives sont

$$\left(\frac{1}{0}\right),\ \frac{-1}{1},\ \frac{0}{1},\ \frac{-1}{2},\ \frac{0}{1},\ \ldots,\ \frac{-1}{n},\ \frac{0}{1},\ \ldots.$$

Enfin, nous pouvons remplacer a_0 par

$$a_0 - r,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ 1,$$

r étant un entier positif quelconque égal au nombre des o et au nombre des 1 introduits. Nous faisons apparaître, outre la réduite $\frac{1}{0}$ introduite dès les éléments comme réduite fictive préalable universelle, les réduites $\frac{a_0 - 1}{1}$, $\frac{a_0 - 2}{1}$, $\ldots$, $\frac{a_0 - r}{1}$, $\ldots$.

Nous pouvons même substituer à a_0 [ou à la tranche finie ou indéfinie T_0 de (D), tranche telle que $(T_0) = a_0$], la tranche indéfinie $\ldots, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1$ terminée par un quotient 1, dont le rang sera o par définition, pourvu que nous posions conventionnellement la réduite (T_0) de rang o égale à $\frac{a_0}{1}$. Sous cette nouvelle forme, la réduite ρ_{-2r} de x vaut $\frac{a_0 - r}{1}$. Le développement indéfini obtenu fait apparaître commme réduites tous les nombres entiers inférieurs à a_0. Nous obtenons ainsi le *développement canonique complet réduit* de x. Nous qualifions un développement de *canonique* quand tous ses quotients incomplets (sauf éventuellement le premier s'il y en a un) sont uniquement des o ou des 1.

Nous l'appelons *complet* quand il est doublement indéfini dans les deux sens, même vers la droite si x est rationnel, auquel cas on distingue deux développements, l'un supérieur, l'autre inférieur.

Enfin il est dit réduit parce qu'il ne contient pas de couples de quotients incomplets nuls consécutifs. La présence de ces couples de quotients ne se manifestant aucunement dans le système total des réduites du développement, la condition de réduction est d'importance secondaire.

Nous figurons ci-dessous la division en tranches du développement canonique complet réduit, grâce au remplacement d'une virgule par un point et virgule aux extrémités des tranches. Nous devons également mentionner les deux réduites conventionnelles de rang — 1 et 0. Nous obtenons ainsi

$$
\begin{array}{l}
(\ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ \overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{0},\ \overset{\left(\frac{a_0}{1}\right)}{1}}_{T_0};\quad \underbrace{1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1}_{T_1};\\
\underbrace{1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1}_{T_2};\quad \ldots,\ 0,\ 1;\quad \underbrace{1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1}_{T_n};\quad 1,\ 0,\ \ldots)
\end{array}
$$

Le rang du dernier quotient de la tranche moyenne T_n supposée finie est $2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_n + n$. Il a visiblement la parité de n.

Le développement canonique réduit de x est parfaitement déterminé (si x est rationnel, on doit en outre spécifier s'il s'agit d'un développement supérieur ou inférieur) par la condition d'être complet ou quand on indique : 1° si la tranche initiale est infinie ou combien elle contient (un nombre impair) de quotients quand elle est finie; 2° si la tranche infinie droite existe ou non, quand x est rationnel.

13. Propriétés des réduites. — Le développement canonique complet offre ce caractère fondamental que :

Les réduites de tous les développements généraux possibles d'un nombre x figurent parmi les réduites du développement canonique complet de ce nombre.

Car les opérations de dissociation des quotients supérieurs à 1 d'un développement général quelconque réduit conduisent toujours au développement complet. Or, ces opérations ne font jamais disparaître de réduites et chaque opération fait apparaître une nouvelle réduite.

En conséquence, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple de fractions adjacentes $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ forme deux réduites consécutives* *du développement canonique d'un nombre x, est que x soit situé sur le segment limité par ces deux fractions.*

L'ensemble $e(x)$ des réduites du développement canonique complet de x est ainsi constitué :

1° Les réduites *ordinaires* $\frac{P_n}{Q_n}$ du développement normal

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$$

de x (développement supérieur ou inférieur si x est rationnel, selon que la pénultième réduite est supérieure ou inférieure à x);

2° Toutes les réduites *intermédiaires* $\frac{sP_n + P_{n-1}}{sQ_n + Q_{n-1}}$ $(s = 1, 2, \ldots, a_n - 1)$ du développement normal de x;

3° Les entiers $a_0 - r$ inférieurs à la plus petite réduite normale (qui est entière) de x $(r = 1, 2, \ldots)$;

4° Si x est rationnel et vaut $\frac{P_m}{Q_m} = \frac{p}{q}$, la suite $\frac{rp + P_{m-1}}{rq + Q_{m-1}}$.

Si a est entier, la réduite maximum du développement canonique complet de a est $a + 1$, si le développement est supérieur. C'est a si le développement est inférieur.

Si x n'est pas entier et si $u = E'(x)$ est sa valeur à une unité près par excès, u est la réduite maximum de tout développement (canonique ou normal ou général, supérieur ou inférieur) de x.

Soit ρ_n une réduite finie du développement canonique complet de x. Si $\alpha_n = 0$, ρ_n est identique à ρ_{n-2}. Mais quand i devient négatif les réduites d'indice impair deviennent $\frac{1}{0}$, et les réduites ρ_{-2i} quand i croît tendent vers $-\infty$. Donc il y a un rang initial où paraît une réduite égale à ρ_n. Supposons que n soit ce rang. Alors $\alpha_n = 1$,

$$\rho_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} + p_{n-2}}{q_{n-1} + q_{n-2}},$$

ρ_n est la médiante de ρ_{n-1} et de ρ_{n-2}.

Donc, *sur trois réduites consécutives, ou bien les deux extrêmes sont identiques, ou bien la troisième est la médiante des deux précédentes, les trois réduites étant alors adjacentes deux à deux.*

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction irréductible *finie $\frac{p}{q}$ soit une réduite du développement canonique complet du nombre réel x, est que x appartienne au segment $\left(\frac{p'}{p'}, \frac{p''}{q''}\right)$ limité aux deux fractions dont $\frac{p}{q}$ est la médiante.*

En effet, si $\frac{p}{q}$ $\left(\text{différent de } \frac{1}{0}\right)$ est une réduite d'un développement canonique complet, les deux fractions $\frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}$ sont aussi les deux fractions immédiatement antérieures à $\frac{p}{q}$ quand celui-ci apparaît pour la première fois dans la suite des réduites. $\frac{p'}{q'}$ et $\frac{p''}{q''}$ sont deux réduites consécutives de x. Donc x est sur le segment $\left(\frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}\right)$.

Réciproquement, si x appartient à ce segment, $\frac{p'}{q'}$ et $\frac{p''}{q''}$ sont deux réduites consécutives du développement canonique complet de x (**10**). Donc la première réduite ultérieure de celui-ci, distincte de $\frac{p'}{q'}$ et de $\frac{p''}{q''}$, est leur médiante $\frac{p}{q}$.

C. Q. F. D.

Génération du développement canonique d'un nombre réel.

14. Du développement normal ou du développement général supposés connus d'un nombre réel donné, nous avons déduit le développement canonique de ce nombre.

Mais, comme on définit un procédé récurrent en vue de calculer la suite des quotients incomplets du développement normal, procédé s'exprimant dans les formules :

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1} \qquad (a_0 \text{ entier}, 1 \leqq x_1),$$

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2} \qquad (a_1 \text{ entier} \geqq 1, 1 \leqq x_2),$$

$$\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

de même il est naturel de chercher s'il n'existe pas une règle fournissant par voie récurrente les éléments successifs d'un développement canonique de x.

Nous allons donner cette règle. Elle présentera de notables avantages sur celle qui préside à la détermination du développement normal. Dans celle-ci, les relations utilisées, du type

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}} \qquad (1 \leqq x_{n+1}),$$

ne sont pas des transformations modulaires directes (ici $pq' - qp' = -1$), et elles dépendent d'un paramètre entier a_n. Au contraire, la règle que nous allons poser fait dériver de x une succession de nombres ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ..., et le passage de ξ_n à ξ_{n+1} s'effectuera par l'une ou l'autre de deux substitutions modulaires directes, indépendantes de n, et qui, dans l'extension de $\varkappa(x, \alpha)$ au plan complexe, correspondent aux deux transformations fondamentales de $\varkappa(x, \alpha)$.

Le nombre réel ξ vérifiant les conditions

$$\frac{0}{1} \leqq \xi \leqq \frac{1}{0},$$

considérons les deux substitutions

$$\text{(VI)} \qquad x = (1, 0, \xi) = 1 + \xi \qquad \text{ou} \qquad x = (0, 1, \xi) = \frac{\xi}{1+\xi}.$$

Quand ξ varie en croissant dans le champ indiqué, le premier nombre x parcourt en croissant le champ $\frac{1}{1} \leqq x \leqq \frac{1}{0}$, le second nombre x parcourt en croissant le segment $\frac{0}{1} \leqq x \leqq \frac{1}{1}$.

Donc, étant donné x différent de 1, vérifiant

$$\frac{0}{1} \leqq x \leqq \frac{1}{0},$$

il existe un nombre ξ et un seul appartenant au même champ et tel que une et une seule des deux équations (VI) soit vérifiée. Si $x = 1$, on a indifféremment

$$1 = \left(0, 1, \frac{1}{0}\right) \qquad \text{et} \qquad 1 = \left(1, 0, \frac{0}{1}\right).$$

x étant un nombre réel quelconque donné, soit α_0 un entier quelconque non supérieur à x, donc $\alpha_0 = a_0 - r$, si $a_0 = \mathrm{E}(x)$ est la valeur de x à une unité près par défaut ($r \geqq 0$). Posons

$$x = (\alpha_0, 0, \xi_1) = \alpha_0 + \xi_1.$$

On a $\frac{0}{1} \leqq \xi_1 = x - \alpha_0$.

Dès lors, d'après $\xi_1 \geqq \frac{0}{1}$, il existe un ξ_2 (et un seul si $\xi_2 \neq 1$) tel que

$$\xi_1 = (0, 1, \xi_2) \quad \text{ou} \quad \xi_1 = (1, 0, \xi_2) \quad \text{avec} \quad \frac{0}{1} \leqq \xi_2 \leqq \frac{1}{0}.$$

Il existe un ξ_3, et un seul, si $\xi_2 \neq 1$, tel que

$$\xi_2 = (0, 1, \xi_3) \quad \text{ou} \quad \xi_2 = (1, 0, \xi_3) \quad \text{avec} \quad \frac{0}{1} \leqq \xi_3 \leqq \frac{1}{0}.$$

Et ainsi indéfiniment, tant que l'on ne trouve pas un ξ_n égal à 1, cas correspondant à celui de x rationnel.

Si $\xi_n = 1$, on a

$$\xi_n = (1, 0, \xi_{n+1}) \quad \text{avec} \quad \xi_{n+1} = \frac{0}{1}$$

et

$$\xi_n = (0, 1, \xi_{n+1}) \quad \text{avec} \quad \xi_{n+1} = \frac{1}{0}.$$

Mais $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ se développent l'un et l'autre par l'application de la règle générale, qui conduit aux expressions respectives (17) et (16).

Si $\xi = \frac{0}{1}$,

$$\xi = (0, 1, \xi_1) \quad \text{avec} \quad \xi_1 = \frac{0}{1}, \qquad \xi_n = (0, 1, \xi_{n+1}) \quad \text{avec} \quad \xi_{n+1} = \frac{0}{1}.$$

Si $\xi = \frac{1}{0}$,

$$\xi_0 = (1, 0, \xi_1) \quad \text{avec} \quad \xi_1 = \frac{1}{0}, \qquad \xi_n = (1, 0, \xi_{n+1}) \quad \text{avec} \quad \xi_{n+1} = \frac{1}{0}.$$

D'où

$$1 = (0, 1, 1, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, \ldots), \tag{18}$$

$$1 = (1, 0, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots), \tag{19}$$

le premier développement étant inférieur, le second supérieur.

Ainsi se trouvent engendrés *les développements canoniques de* x, *finis à gauche, par une suite indéfinie de doublets* 0, 1 *ou* 1, 0, *précédés d'un premier doublet* $a_0 - r$, 0 *dépendant de l'entier non négatif arbitraire* r.

Le développement canonique obtenu présentera en général des couples de zéros consécutifs. On pourra le réduire. Réciproquement, étant donné un développement réduit, indéfini à droite seulement, divisé en tranches dont chacune a un nombre impair de quotients, il faudra compléter la tranche T_0 à droite par un zéro suivi d'un zéro complétant initialement la tranche T_1, et de même introduire un zéro à la fin de toute tranche T_{2p}, suivi d'un zéro commençant la tranche T_{2p+1}. De la sorte un développement canonique réduit limité vers la gauche sera converti en une succession indéfinie de doublets.

15. Voici une application de cette construction aux suites de Farey. Rappelons la formation de ces suites. La suite de rang o ou S_0 étant $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$ et la suite S_{n-1} de rang $(n-1)$ étant supposée définie et formée de fractions croissantes de valeur, deux fractions consécutives de S_{n-1} étant adjacentes, la suite S_n est formée en intercalant entre les fractions de S_{n-1} la suite σ_n de leurs médiantes. $S_n = S_{n-1} + \sigma_n$ (le signe + indique l'addition de deux ensembles).

Il est aisé de voir que σ_n est formée des fractions

$$(0, a_1, a_2, \ldots, a_p) \qquad (a_i \geqq 1),$$

telles $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = n$. S_n donc formée des fractions $(0, a_1, \ldots, a_p)$ pour lesquelles

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_p \leqq n.$$

La n^{ieme} *suite de Farey est constituée par les fractions formées de n doublets* 0,1 *ou* 1,0 *indifféremment, le premier doublet étant toutefois obligatoirement* 0,1.

Transformations linéaires de $\chi(x, \alpha)$ par une transformation modulaire de x.

16. Nous allons trouver dans la détermination des intervalles de validité des formules

$$\text{(II)} \qquad \chi(x') = \chi\left(\frac{px+p'}{qx+q'}, \alpha\right) = A\chi(x, \alpha) + B \qquad (pq' - qp' = 1),$$

$$\text{(III)} \qquad \chi(x') = \chi\left(\frac{px+p'}{qx+q'}, \alpha\right) = C\chi(x, 1-\alpha) + D \qquad (pq' - qp' = -1),$$

la justification du développement canonique des nombres rationnels.

Dans ce qui suit, les nombres p, q, p', q' sont des *entiers* vérifiant soit $pq'-qp'=1$, soit $pq'-qp'=-1$. *q n'est jamais négatif.* Si $q \geqq 1$, q' est quelconque. Si $q=0$, q' est 1; p et p' sont toujours quelconques.

17. Nous appellerons *points séparateurs* (sous-entendu : des intervalles de validité) des formules (II) ou (III), les points au voisinage desquels les coefficients A, B ou C, D cessent d'être constants. Donc, dans un intervalle vide de points séparateurs, les coefficients considérés sont constants. Pour un tel intervalle, on aura une expression du couple de coefficients A, B, ou C, D, au moyen des valeurs associées de $\chi(x, \alpha)$ ou de $\chi(x, 1-\alpha)$ d'une part, et de $\chi(x', \alpha)$ d'autre part, respectivement en deux points x_1, x_2 et en leurs homologues x'_1, x'_2.

Les coefficients A et B (C et D) varient simultanément en un point séparateur parce que $\chi(x)$ et $\chi(x')$ ne cessent pas d'être continus en ce point $\Big($tout au moins si ce point est différent de $-\frac{q'}{q}$; mais ce dernier point est limite de points séparateurs et A, B, C, D ont une infinité d'acceptions distinctes autour de $-\frac{q'}{q}\Big)$.

Voici une observation qui nous sera très utile.

Si nous utilisons une substitution auxiliaire modulaire $\xi(x)$, x' sera une substitution modulaire de ξ. $\chi(\xi, \alpha)$ s'exprime en $\chi(x, \alpha)$ ou en $\chi(x, 1-\alpha)$ par une formule (f_1) du type (II) ou (III); $\chi(x', \alpha)$ s'exprime en $\chi(\xi, \alpha)$ ou en $\chi(\xi, 1-\alpha)$ par une formule (f_2) de l'un ou l'autre type. D'où résultera, par la composition des deux transformations, l'expression de $\chi(x', \alpha)$ en $\chi(x, \alpha)$ ou $\chi(x, 1-\alpha)$ par une formule (f).

Si (f_1) et (f_2) sont du même type, (f) sera du type (II), ce qui était évident *a priori* puisque le module de $x'(x)$ est alors $(\pm 1)^2$, donc 1. Si (f_1) et (f_2) sont de types différents, (f) sera du type (III).

Mais, en outre, soit x_0 une valeur de x et $\xi_0=\xi(x_0)$.

Si x_0 n'est pas séparateur pour (f_1) ni ξ_0 pour (f_2), x_0 n'est pas séparateur pour (f).

Si x_0 est séparateur pour (f_1) sans que ξ_0 soit séparateur pour (f_2), ou si ξ_0 est séparateur pour (f_2) sans que x_0 soit séparateur pour (f_1), dans les deux cas x_0 est séparateur pour (f).

Si, en même temps, x_0 est séparateur pour (f_1) et ξ_0 pour (f_2), rien ne prouve que x_0 soit séparateur pour (f). Car il peut se produire une compensation entre les variations des coefficients de (f_1) au point x_0 et celles des coefficients de (f_2) au point ξ_0, en sorte que les coefficients de (f) restent constants autour de x_0. Par exemple, il est évident que, x_0 étant un point rationnel quelconque intérieur à un intervalle de validité d'une formule (f), on peut toujours trouver $\xi(x)$ de façon que x_0 soit point séparateur pour (f_1). Puisque x_0 ne l'est pas pour (f), ξ_0 sera nécessairement point séparateur pour (f_2).

Enfin, si x_n est un point séparateur pour (II) ou pour (III), $x'_n = \dfrac{px_n + p'}{qx_n + q'}$ est séparateur pour la formule inverse appartenant au même type et exprimant $\chi\left(\dfrac{-q'x + p'}{qx - p}, \alpha\right)$ en $\chi(x, \alpha)$ ou $\chi(x, 1 - \alpha)$.

Après ces remarques, énonçons le théorème fondamental auquel nous aboutirons et dont la démonstration et l'interprétation ont inspiré toute cette étude.

Théorème général. — *L'ensemble des points séparateurs des intervalles de validité des formules* (II) *et* (III) *coïncide avec l'ensemble des réduites du développement canonique complet de* $-\dfrac{q'}{q}$, *développement supérieur pour la formule* (II), *inférieur pour la formule* (III).

Ce théorème légitimera de la façon la plus nette l'introduction de cette nouvelle notion des développements canoniques, et montrera combien celle-ci éclaire la nature du développement normal d'un nombre en fraction continue.

Avant d'aborder le cas général, nous établirons quelques propositions préliminaires.

18. Théorème I. — *Si* q' (*comme* q) *est non négatif, si* $\dfrac{p}{q}, \dfrac{p'}{q'}$ *sont différents de* $\dfrac{-1}{0}$, *les formules*

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \chi\left(\dfrac{px + p'}{qx + q'}, \alpha\right) = \left[\chi\left(\dfrac{p'}{q'}, \alpha\right) - \chi\left(\dfrac{p}{q}, \alpha\right)\right] \chi(x, \alpha) + \chi\left(\dfrac{p}{q}, \alpha\right) \\ \qquad (pq' - qp' = 1), \end{cases}$$

et

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} \varkappa\left(\dfrac{px+p'}{qx+q'}, \alpha\right) = \left[\varkappa\left(\dfrac{p'}{q'}, \alpha\right) - \varkappa\left(\dfrac{p}{q}, \alpha\right)\right] \varkappa(x, 1-\alpha) + \varkappa\left(\dfrac{p}{q}, \alpha\right) \\ \qquad\qquad (pq' - qp' = -1) \end{cases}$$

sont valables dans le champ $x > 0$.

Il n'est pas dit que le point o soit séparateur pour aucune des deux formules.

Observons que si l'on admet la validité d'une formule des types (II) ou (III) sur la totalité du champ $0 < x$, il suffit de faire tendre x successivement vers o et vers $\frac{1}{0}$, pour trouver comme valeurs des coefficients A, B ou C, D précisément celles qui figurent dans les formules (VII) et (VIII). Le seul point à établir est donc que le champ $0 < x$ est contenu dans un même intervalle de validité des formules (II) ou (III).

D'après les hypothèses de l'énoncé, il existe toujours un développement fini à gauche (même normal, sauf éventuellement par son dernier quotient $a_m \geqq 0$) tel que

$$\frac{p}{q} = (a_0, a_1, \ldots, a_m), \qquad \frac{p'}{q'} = (a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}),$$

m étant impair ou pair selon que $pq' - qp' = 1$ ou $pq' - qp' = -1$.

D'après $\frac{0}{1} \leqq x \leqq \frac{1}{0}$, on a toujours

$$x = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots) \qquad \text{avec} \quad \beta_0 \geqq 0.$$

Donc

$$x' = (a_0, a_1, \ldots, a_m, x) = (a_0, a_1, \ldots, a_m, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r, \ldots).$$

Désignons par τ_n, τ'_n les sommes relatives à x' et analogues aux sommes σ_n, σ'_n relatives à x. Donc

$$\varkappa(x', \alpha) = \Sigma(-1)^n \alpha^{\tau_n}(1-\alpha)^{\tau'_n}, \qquad \varkappa(x, \alpha) = \Sigma(-1)^n \alpha^{\sigma_n}(1-\alpha)^{\sigma'_n}.$$

Or, si m est impair,

$$\tau_{r+m} = \sigma_r + \tau_m, \qquad \tau'_{r+m} = \sigma'_r + \tau'_m.$$

Si m est pair,

$$\tau_{r+m} = \sigma'_r + \tau_m, \qquad \tau'_{r+m} = \sigma_r + \tau'_m.$$

D'où l'existence de formules de types (II) ou (III) valables pour $\frac{0}{1} \leqq x \leqq \frac{1}{0}$. Et en conséquence, les formules (VII) ou (VIII).

19. Cas remarquables. — 1° $\frac{p}{q} = \frac{1}{0}$. Donc

$$q' = 1 \quad \text{et} \quad pq' - qp' = 1; \quad x' = \frac{1.x + p'}{0.x + 1} = x + p'.$$

La formule (VII) et un calcul direct immédiat donnent

$$\text{(IV } bis) \qquad \chi[(1, 0, x), \alpha] = \chi(x + 1, \alpha) = \alpha\chi(x, \alpha),$$
$$\chi(x + p', \alpha) = \alpha^{p'}\chi(x, \alpha),$$

quel que soit x réel.

Il est à remarquer qu'ici le développement supérieur de $\frac{-q'}{q} = \frac{1}{0}$ n'existe pas. Et en même temps la formule (II) correspondant à ce cas n'a pas de point séparateur. Il y a donc accord entre le théorème général et ce cas particulier.

En application de ceci, nous voyons que nous pouvons ajouter à $x' = \frac{px + p'}{qx + q'}$ un entier quelconque b sans changer les points séparateurs des formules correspondantes (II) ou (III). Les coefficients A, B et C, D sont simplement multipliés respectivement par a^b et par $(1 - \alpha)^b$.

Pareillement, si x est remplacé par $\xi - b'$, et si $\chi(x', \alpha)$ est exprimé en $\chi(\xi, \alpha)$ ou en $\chi(\xi, 1 - \alpha)$ par une formule (f_2), les points séparateurs de (f) exprimant $\chi(x', \alpha)$ en $\chi(x, \alpha)$ ou en $\chi(x, 1 - \alpha)$ seront ceux de la formule (f_2) simplement diminués de b'. D'après $\chi(\xi, \alpha) = \alpha^{b'}\chi(x, \alpha)$, les coefficients A, C de (f) seront ceux de (f_2) respectivement multipliés par $\alpha^{b'}, (1 - \alpha)^{b'}$, les coefficients B, D de (f) étant les mêmes que pour (f_2).

En tous cas, si le théorème général est établi pour une fraction $\frac{px + q'}{qx + p'}$, il le sera par là même pour toutes les fractions

$$x' = k + \frac{px + ph + p'}{qx + qh + q'}.$$

Si $q > 0$, on pourra donc toujours ramener l'étude au cas $0 \leqq p < q$, $0 \leqq q' < q$, etc.

2° $\frac{p'}{q'} = \frac{1}{0}$, d'où

$$q = 1, \qquad pq' - qp' = -1, \qquad x' = \frac{p.x + 1}{1.x + 0} = \frac{1}{x}.$$

On fait $p = 0$ sans changer les points séparateurs des formules (III) correspondant à ce cas.

Nous supposons $x > 0$. Si $x = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ avec $\alpha_0 \geqq 0$, on trouve immédiatement : $x' = (0, x)$, et en accord avec l'équation (VIII),

$$(20) \qquad \varkappa\left(\frac{1}{x}, \alpha\right) = 1 - \varkappa(x, 1 - \alpha) \qquad \text{pour} \quad x > 0.$$

Mais ici 0 *est un point séparateur*, parce que le premier membre est discontinu pour $x = 0$ et non pas le second.

Observons que $-\frac{q'}{q} = \frac{0}{1}$, et que la réduite maximum finie du développement complet inférieur de $\frac{0}{1}$ est effectivement 0.

20. Cas singuliers. — Avec $q, q' \geqq 0$, supposons que l'une des deux fractions $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$ soit $\frac{-1}{0}$.

1° $\frac{p}{q} = \frac{-1}{0}$, d'où

$$q' = 1, \qquad x' = \frac{-1.x + p'}{0.x + 1} = p' - x, \qquad pq' - qp' = -1.$$

Sans changer les points séparateurs, nous faisons $p' = 0$.

Pour simplifier, supposons x non entier et $\alpha_0 < x < \alpha_0 + 1$. Soit $x = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ avec $\alpha_1 = 1$. Alors

$$(11) \quad -x = (-\alpha_0 - 1, 1, \alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots) = \left(-\alpha_0 - 1, 1, \frac{1}{x - \alpha_0} - 1\right).$$

Donc

$$\varkappa(-x, \alpha) = \alpha^{-\alpha_0 - 1} - \alpha^{-\alpha_0 - 1}(1 - \alpha) + \alpha^{-\alpha_0 - 1}(1 - \alpha)\varkappa\left(\frac{1}{x - \alpha_0} - 1, \alpha\right),$$

d'après $\frac{1}{x - \alpha_0} - 1 > 0$ et la formule (VII) correspondante. L'application des formules (IV) et (20) donne

$$(21) \qquad \chi(-x, \alpha) = \alpha^{-\alpha_0-2}(1-\alpha+\alpha^2) - \alpha^{-\alpha_0-2}(1-\alpha)^{1-\alpha_0}\chi(x, 1-\alpha)$$

pour $\alpha_0 < x < \alpha_0 + 1$. On vérifie que cette formule ne pourrait être indépendante de α_0 que si $1-\alpha+\alpha^2=0$, hypothèse incompatible avec la condition $|\alpha(1-\alpha)| < 1$, même pour α complexe.

Il est évident que l'ensemble des points séparateurs de la formule du type (III) constituée par (21) coïncide avec celui de tous les entiers réels.

Or, $-\frac{q'}{q} = \frac{1}{0}$ et les réduites du développement canonique complet inférieur (et unique) de $\frac{1}{0}$ forment effectivement la suite de tous les entiers. Le théorème général est donc vérifié dans le cas de $x' = -x$.

2° $\frac{p'}{q'} = \frac{-1}{0}$, d'où

$$q = 1, \qquad pq' - qp' = 1, \qquad x' = \frac{p.x - 1}{1.x + 0} = p - \frac{1}{x}.$$

Sans changer les points séparateurs de la formule (II) correspondant au présent cas, nous pouvons faire $p = 0$. D'où $x' = -\frac{1}{x}$.

Supposons $x < 0$ et posons $\xi = -x$, d'où $x' = -\frac{1}{x} = \frac{1}{\xi}$ avec $\xi > 0$. On a

$$(f_1) \qquad \chi(\xi, 1-\alpha) = C_1 + D_1\,\chi(x, \alpha),$$

les coefficients de (f_1) étant donnés par la formule (21). Les points séparateurs de cette formule (f_1) sont tous les entiers, donc les entiers négatifs $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$, si nous nous bornons au champ de $x < 0$.

D'après $\xi > 0$, la formule (18) donne

$$(f_2) \qquad \chi(x', \alpha) = 1 - \chi\left(\frac{1}{\xi}, 1-\alpha\right),$$

quel que soit $\xi > 0$.

De (f_1) et de (f_2) résulte, pour $\xi > 0$,

$$(f) \qquad \chi\left(-\frac{1}{x}, \alpha\right) = A\,\chi(x, \alpha) + B.$$

Au point $x = -n$ correspond $\xi = n$. $x = -n$ est séparateur pour (f_1) et $\xi = n$ n'est pas séparateur pour (f_2). Donc la formule (f) résultant de (f_1) et de (f_2) admet tous les points $x = -n$ comme points séparateurs et seulement ceux-là dans le champ $x < 0$.

Passons au champ $x > 0$. La relation $x' = -\frac{1}{x}$ est symétrique entre x et x', son inversion change toute formule (f) en une autre formule (f) reliant $\chi\left(-\frac{1}{x}, \alpha\right)$ à $\chi(x, \alpha)$, et réciproquement. Quand x parcourt le champ $x > 0$, $x' = -\frac{1}{x}$ décrit le champ $x' < 0$ et $\chi(x, \alpha)$ exprimé en $\chi(x', \alpha)$ n'a d'autres points séparateurs que $-n$. Donc pour $x > 0$, $\chi(x', \alpha)$ a dans son expression en $\chi(x, \alpha)$ pour points séparateurs $-\left(\frac{1}{-n}\right) = \frac{1}{n}$ et ces points seulement. Le point 0, limite des précédents est aussi séparateur pour les formules (f).

L'ensemble des points séparateurs de (f) est donc formé des nombres $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$.

C'est bien là l'ensemble des réduites du développement canonique complet supérieur de $-\frac{q'}{q} = \frac{0}{1}$.

On trouve, pour $x > 1$, et par application de la formule (f) pour $x = \frac{1}{0}$ et pour $x = \frac{1}{1}$,

$$\chi(0, \alpha) = A\chi\left(\frac{1}{0}, \alpha\right) + B \qquad \text{ou} \qquad 1 = B,$$

$$\chi\left(-\frac{1}{1}, \alpha\right) = A\chi\left(\frac{1}{1}, \alpha\right) + B \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\alpha} = A\alpha + B,$$

finalement

$$\chi\left(-\frac{1}{x}, \alpha\right) = 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha^2}\chi(x, \alpha) \qquad \text{pour} \quad x > 1. \tag{22}$$

Le point 1 est séparateur pour la formule (22).

21. Cherchons l'ensemble des points séparateurs de l'expression (f') de $\chi\left(\frac{1}{x}, \alpha\right)$ en $\chi(x, 1-\alpha)$ pour $x < 0$.

Posons $\xi = -x$, d'où $x' = \frac{1}{x} = -\frac{1}{\xi}$, et $\xi > 0$.

L'expression (f'_1) de $\varkappa(\xi, \alpha)$ en $\varkappa(x, 1-\alpha)$ a pour points séparateurs dans le champ $x < 0$, tous les entiers négatifs $-1, -2, \ldots, -r, \ldots$. L'expression (f'_2) de $\varkappa(x', \alpha) = \varkappa\left(-\frac{1}{\xi}, \alpha\right)$ en $\varkappa(\xi, \alpha)$, dans le champ $\xi > 0$ correspondant à $x < 0$, a pour points séparateurs les nombres $\xi = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{r}, \ldots$ correspondant aux valeurs $-1, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{r}, \ldots$ de x. Donc les nombres $-2, \ldots, -r, \ldots, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{r}, \ldots, (r \geqq 2)$ sont certainement séparateurs pour (f') comme intervenant pour une et une seule des deux expressions (f'_1) et (f'_2). -1 est le seul nombre restant qui puisse encore être séparateur pour (f'). Cependant -1 étant séparateur pour (f'_1) et correspondant à un point séparateur ($\xi = 1$) de (f'_2), la validité du point séparateur -1 pour (f') est *a priori* incertaine. Elle est pourtant effective. On peut établir ceci de diverses manières.

On peut remarquer que, si -1 n'était pas séparateur pour (f'), l'intervalle $-2 < x < -\frac{1}{2}$ ne contiendrait pas de point séparateur et l'on aurait une formule

$$\varkappa\left(\frac{1}{x}, \alpha\right) = C\varkappa(x, 1-\alpha) + D,$$

valable pour les trois couples associés $\left(x = -\frac{1}{2}, x' = -2\right)$, $(x = x' = -1)$, $\left(x = -2, x' = -\frac{1}{2}\right)$. Mais le système des trois équations linéaires en C et D que l'on obtient ainsi a son déterminant non nul d'après $|\alpha(1-\alpha)| < 1$. Il y a donc impossibilité. -1 est séparateur.

On peut encore raisonner ainsi, comme dans le cas général traité plus loin. Faisons parcourir à x l'intervalle $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ en posant $x = \frac{-1-\xi}{1+2\xi}$, et faisant varier ξ dans l'intervalle $(0, +\infty)$. On a

$$x' = \frac{1}{x} = -\frac{1+2\xi}{1+\xi} = -2 + \frac{1}{1+\xi},$$

$$(f_2) \qquad \varkappa(x', \alpha) = \alpha^{-2}\varkappa\left(\frac{1}{1+\xi}, \alpha\right) = C_2\varkappa(\xi, 1-\alpha) + D_2,$$

une même formule (f_2) étant valable pour $\xi > -1$, d'après la formule (20). D'autre part il existe une formule

$$(\varphi_1) \qquad \chi(x, 1-\alpha) = \chi\left(\frac{-1-\xi}{1+2\xi}, 1-\alpha\right) = A_1\chi(\xi, 1-\alpha) + B_1,$$

valable pour $\xi > 0$, le point $\xi = 0$ étant séparateur pour (φ_1), comme nous le verrons (23).

Si nous éliminons $\chi(\xi, 1-\alpha)$ entre les deux relations (φ_1), (f_2), il nous reste une relation (f) du type (III) valable pour le champ $0 < \xi$ avec cessation de validité pour $\xi = 0$, soit pour $x = -1$.

A la transformation $x' = \frac{1}{x}$ correspond $-\frac{q'}{q} = \frac{0}{1}$ dont le développement canonique complet inférieur a pour réduites, $\ldots, -r, \ldots, -1, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{r}, \ldots, 0$. Le théorème général est donc vérifié pour les quatre cas particuliers examinés jusqu'ici et qui étaient caractérisés par l'égalité $qq' = 0$.

21. Au cas de $q = 1$, $q' = 0$ se rattache celui de $q = 1$, $q' = -m$, m étant entier.

$$x' = \frac{px - pm \pm 1}{x - m} = p \pm \frac{1}{x - m}.$$

On voit immédiatement par la transformation auxiliaire $\xi = x - m$, que le théorème général est encore vrai dans ces conditions particulières.

Un cas remarquable est celui de $p = 1$, $m = -1$.

$$x' = \frac{x}{x+1} = (0, 1, x).$$

L'ensemble séparateur correspondant est formé des réduites du développement supérieur de -1, savoir de tous les entiers non positifs $0, -1, -2, \ldots, -r, \ldots$ et des fractions

$$-\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{3}, \quad \ldots, \quad -\frac{n-1}{n}, \quad \ldots.$$

Le champ $0 < x$ est un intervalle de validité limité par le point séparateur o et l'on a la transformation fondamentale

$$\text{(IX)} \quad \varkappa[(0, 1, x), \alpha] = \varkappa\left(\frac{x}{1+x}, \alpha\right) = \alpha + (1-\alpha)\varkappa(x, \alpha) \qquad (0 < x).$$

22. En résumé : 1° *Nous avons démontré l'exactitude du théorème général pour $q = 0$ et pour $q = 1$.*

2° *Sauf pour la transformation $x' = -x$, et quels que soient q et q', il existe une formule* (II) *ou* (III) *admettant un intervalle de validité* (v) *indéfini vers la droite.*

Pour la transformation $x' = x + p'$, (v) coïncide avec l'axe réel tout entier.

Pour $q = 1$, $pq' - qp' = 1$, donc $x' = p - \frac{1}{x+q'}$, l'extrémité gauche de (v) est $-q' + 1$.

Pour $q = 1$, $pq' - qp' = -1$, donc $x' = p + \frac{1}{x+q'}$, l'extrémité gauche de (v) est $-q'$.

Nous n'avons plus à démontrer le théorème général que pour $q \geqq 2$.

23. Théorème II. — *Si $0 < q' < q$, 0 est un point séparateur, frontière de validité pour la formule* (VII) *ou* (VIII) *valable pour $x > 0$.*

0 est la plus grande réduite des deux développements complets (et même des deux développements normaux) de $-\frac{q'}{q}$. Si le théorème général est exact, il implique donc le théorème II. Démontrons celui-ci.

Considérons d'abord le cas $x' = (b, a, x)$ pour lequel l'ensemble des points séparateurs est le même que pour $(0, a, x)$, quel que soit l'entier b. Pour $a = 1$, le théorème est établi. Soit donc $a \geqq 2$,

$$x' = \frac{x}{ax+1}.$$

Les données correspondent à $\frac{p}{q} = \frac{1}{a}$, $\frac{p'}{q'} = \frac{0}{1}$, d'où

$$\varkappa\left(\frac{p}{q}, \alpha\right) = 1 - (1-\alpha)^a \qquad \text{et} \qquad \varkappa\left(\frac{p'}{q'}, \alpha\right) = 1.$$

La formule (VII) donne, pour $x > 0$,

$$\chi\left(\frac{x}{ax+1}, \alpha\right) = (1-\alpha)^a \chi(x, \alpha) + 1 - (1-\alpha)^a \qquad (x > 0). \tag{23}$$

Pour montrer que la validité de cette formule s'arrête au point o, il suffit d'établir qu'elle n'est pas valable pour $x = -\frac{1}{a+r}$, r étant un entier positif.

Or, pour cette valeur de x,

$$x' = \frac{x}{ax+1} = -\frac{1}{r}.$$

D'après (22),

$$\chi(x, \alpha) = 1 + (1-\alpha)\alpha^{a+r-2}, \qquad \chi(x', \alpha) = 1 + (1-\alpha)\alpha^{r-2}.$$

L'égalité des deux membres de (23) donnerait après réductions,

$$(1-\alpha)^a \alpha^a = 1,$$

ce qui est incompatible avec $|\alpha(1-\alpha)| < 1$, condition imposée à α, même complexe. Donc la formule (23) admet o pour point séparateur.

Passons au cas général. D'après $1 < q' < q$, on peut écrire les développements normaux

$$\frac{p}{q} = (a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m), \qquad \frac{p'}{q'} = (a_0, \ldots, a_{m-1}) \qquad \text{avec} \quad a_1, \ldots, a_m \geqq 1,$$

m étant impair ou pair selon que $pq' - qp' = +1$ ou $= -1$. Nous supposons $m \geqq 2$. Sinon nous serions dans le premier cas. Donc $a_{m-1} \geqq 1$.

La substitution donnée est

$$x' = (a_0, a_1, \ldots, a_m, x).$$

Posons

$$\xi = (a_{m-1}, a_m, x),$$

d'où

$$x' = (a_0, a_1, \ldots, a_{m-2}, \xi).$$

$\chi(\xi, \alpha)$ s'exprime en $\chi(x, \alpha)$, ou $\chi(\xi, 1-\alpha)$ en $\chi(x, 1-\alpha)$, par une formule (f_1) du type (VII) valable pour $x > 0$, o étant frontière de validité.

$\chi(x', \alpha)$ s'exprime en $\chi(\xi, \alpha)$, ou en $\chi(\xi, 1-\alpha)$, selon la parité de m par une formule (f_2) du type (VII) ou (VIII) valable pour $\xi > 0$. Mais pour $x = 0$, $\xi = a_{m-1} \geqq 1$. a_{m-1} est donc intérieur à l'intervalle de validité de (f_2). Donc $x = 0$, point séparateur de (f_1), l'est aussi pour la formule (f), savoir (VII) ou (VIII), exprimant $\chi(x', \alpha)$ en $\chi(x, \alpha)$ ou en $\chi(x, 1-\alpha)$. C.Q.F.D.

23 *b*. COROLLAIRE. — *Si* $2 \leqq q < q'$ *et si* $u = \mathrm{E}\left(\frac{q'}{q}\right)$ *est la valeur de* $\frac{q'}{q}$ *à une unité près par défaut, le champ de validité indéfini à droite des formules* (VII) *ou* (VIII) *est* $x > -u$.

D'après $q' = uq + q''$ avec $1 \leqq q'' < q$ (puisque $q \geqq 2$, $pq' - qp' = \pm 1$),

$$x' = \frac{px + p'}{qx + q'} = \frac{p(x+u) + p' - pu}{q(x+u) + q''},$$

ce qui rend le corollaire évident.

Rappelons qu'en vertu des résultats relatifs au cas $q = 1$, $q' = 0$, *pour* $q = 1$, q' *quelconque, le champ de validité de la formule* VII (*correspondant à* $pq' - qp' = 1$) *est* $x > -q' + 1$, *celui de la formule* (VIII) (*correspondant à* $pq' - qp' = -1$) est $x > -q'$.

En conclusion le point 0 *sera* INTÉRIEUR *à l'intervalle de validité des formules* (VII) *ou* (VIII) :

1° Si $2 \leqq q < q'$, $pq' - qp' = \pm 1$;
2° Si $q = 1$ et $pq' - qp' = 1$, $q' \geqq 2$; ou $q = 1$, $pq' - qp' = -1$, $q' \geqq 1$;
3° Si $q = 0$ et $pq' - qp' = 1$;

en résumé, 1° si $1 \leqq q < q'$, $pq' - qp' = \pm 1$; 2° si $q = q' = 1$, $pq' - qp' = -1$; 3° si $q = 0$, $pq' - qp' = 1$.

24. Grâce à la détermination dans tous les cas du point séparateur extrême droit des formules (VII) et (VIII), nous démontrerons maintenant sans peine le théorème général dans le cas restant à traiter $q \geqq 2$.

On a $pq' \neq 0$. On peut supposer

$$q' = -q'' \quad \text{avec} \quad 1 \leqq q'' < q.$$

On peut également supposer $1 \leqq p < q$.

Donc

$$x' = \frac{px - p''}{qx - q''}$$

avec $pq'' - qp'' = -\varepsilon$, si $pq' - qp' = \varepsilon = \pm 1$.

Soit

$$\text{(D)}\qquad \frac{p}{q}=(\ldots,0,1,0,\ \overset{\binom{1}{0}\binom{0}{1}}{1,\alpha_1,\alpha_2},\ldots,\alpha_s,1,0,1,0,\ldots)=\frac{p_s}{q_s},$$

$$\frac{p''}{q''}=(\ldots,0,1,0,\ \overset{\binom{1}{0}\binom{0}{1}}{1,\alpha_1,\alpha_2},\ldots,\alpha_{s-1})=\frac{p_{s-1}}{q_{s-1}},$$

avec $\alpha_1=\alpha_s=1$:

$\alpha_1=1$ afin que α_{-1} soit le dernier zéro de la suite indéfinie alternative gauche formée de zéros et de 1; $\alpha_s=1$ pour que $q>q''$.

Enfin s est pair si $pq''-qp''=-1$ ou $pq'-qp'=1$, et s est impair si $\varepsilon=-1$, en sorte que $(-1)^s=\varepsilon$.

Le développement canonique complet (D) de $\frac{p}{q}$ est donc supérieur si $\varepsilon=1$, inférieur si $\varepsilon=-1$.

Retournons (D). Nous trouvons le développement de $\frac{q''}{q}$, supérieur si $pq'-qp'=1$, inférieur si $pq'-qp'=-1$.

$$\text{(E)}\quad \frac{q''}{q}=(\ldots,0,1,0,\ \overset{\binom{1}{0}\binom{0}{1}}{1,\alpha_s,\alpha_{s-1}},\ldots,\alpha_2,\alpha_1,1,0,1,0,\ldots)=(\ldots,\beta_m,\ldots)$$

avec $\beta_{s-n}=\alpha_{n+1}$.

Soit $\frac{\lambda}{\mu}$ une réduite finie ρ' de (E). Nous voulons montrer que $\frac{\lambda}{\mu}$ est un point séparateur d'une formule de type (II) (si $\varepsilon=1$) ou (III) si $\varepsilon=-1$, exprimant $\chi(x',\alpha)$ en $\chi(x,\alpha)$ ou en $\chi(x,1-\alpha)$.

Nous excluons l'hypothèse $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{q''}{q}$, le point $\frac{q''}{q}$ ne pouvant évidemment être intérieur à aucun intervalle de validité d'une même formule, le premier membre de celle-ci devenant discontinu pour $x=\frac{q''}{q}$ tandis que le second membre resterait continu au même point.

La réduite $\frac{\lambda}{\mu}$ apparaît pour la première fois dans (E) sous la forme

$$\frac{\lambda}{\mu}=(\ldots,\alpha_{n+2},\alpha_{n+1},\alpha_n)=\rho'_{s-n+1}\qquad\text{avec}\quad \alpha_n=\beta_{s-n+1}=1.$$

Puisque $\frac{\lambda}{\mu} \neq \frac{q''}{q}$, n diffère de 1; n diffère de $s+2i$ et de $1-2i (i \geqq 1)$, d'après $\alpha_{s+2i} = \alpha_{-1+2i} = 0$, $\alpha_n = 1$. Soit

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = (\ldots, \alpha_{n+4}, \alpha_{n+3}, \alpha_{n+2}) = \rho'_{s-n-1}$$

et

$$\frac{\lambda''}{\mu''} = (\ldots, \alpha_{n+3}, \alpha_{n+2}, \alpha_{n+1}) = \rho'_{s-n}.$$

$\frac{\lambda'}{\mu'}$ est la dernière réduite antérieure à $\frac{\lambda}{\mu}$ dans la même parité de rang. $\frac{\lambda''}{\mu''}$ est la réduite intermédiaire à $\frac{\lambda}{\mu}$ et à $\frac{\lambda'}{\mu'}$.

Donc $\frac{\lambda}{\mu} - \frac{q''}{q}$ et $\frac{\lambda'}{\mu'} - \frac{q''}{q}$ sont de même signe, et le premier est moindre que le second en valeur absolue, sauf si $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda'}{\mu'}$.

Mais, d'après $\beta_{s-n+1} = \alpha_n = 1$, $\mu = \mu'' + \mu' \geqq 1$. On a donc $\mu > \mu'$, à moins que $\mu'' = 0$. Mais si $\mu'' = 0$, $\lambda'' = 1$, et $s - n = -2i + 1 (i \geqq 1)$, ou : $n = s + 2i - 1$, $\alpha_{n+1} = 0$, $\alpha_n = \alpha_{n+2} = 1$,

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho'_{-2i+2} = \frac{-i+1}{1}, \qquad \frac{\lambda'}{\mu'} = \rho'_{-2i} = \frac{-i}{1}.$$

Dans tous les autres cas $(n < s)$, $\mu > \mu'$.

Posons

$$x = \frac{\lambda + \lambda'\xi}{\mu + \mu'\xi}.$$

D'après

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho'_{n-s+1}, \qquad \frac{\lambda'}{\mu'} = \rho'_{n-s-1}, \qquad \alpha_n = 1,$$

on trouve $\lambda'\mu - \lambda\mu' = (-1)^{s-n}$; $\chi(x, \alpha)$ ou $\chi(x, 1-\alpha)$ s'expriment pour $\xi > 0$ par une formule (φ_1) en $\chi(\xi, \alpha)$ ou en $\chi(\xi, 1-\alpha)$ du type (VII) ou (VIII), selon que $s - n$ est pair ou impair.

Si $\mu > \mu'$, quel que soit $s - n$, (φ_1) est valable pour $\xi > -1$. Si $\mu = \mu'$, $x = \frac{-i+1-i\xi}{1+\xi}$ a pour module -1, ce qui s'accorde avec $s - n = -2i + 1$. (φ_1) est alors du type (VII) et vaut encore pour $\xi > -1$. Donc $\xi = 0$ *est intérieur à l'intervalle de validité indéfini droit de* (φ_1).

Mais, d'après (15 b),

$$x' = \frac{(p\lambda' - p''\mu')\xi + p\lambda - p''\mu}{(q\lambda' - q''\mu')\xi + q\lambda - q''\mu} = \frac{p_n\xi + p_{n-2}}{q_n\xi + q_{n-2}},$$

$q\lambda' - q''\mu'$ et $q\lambda - q''\mu$ étant de mêmes signes. D'autre part,

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n.$$

Suivant le signe de $(-1)^n$, $\chi(x', \alpha)$ s'exprime par une formule (f_2) en $\chi(\xi, \alpha)$ du type (VII) ou en $\chi(\xi, 1-\alpha)$ du type (VIII). D'après

$$(\lambda'\mu - \mu'\lambda)(p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2}) = (-1)^s = \varepsilon,$$

l'élimination de ξ entre (φ_1) et (f_2) donnera bien $\chi(x', \alpha)$, par une formule (f) valable si $\xi > 0$ et de type (II) en $\chi(x, \alpha)$ ou (III) en $\chi(x, 1-\alpha)$ selon que $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$.

Mais si $q_n > q_{n-2} \geqq 1$, le point $\xi = 0$ est séparateur pour (f_2) et non pas pour (φ_1). Donc $x = \frac{\lambda}{\mu}$ correspondant à $\xi = 0$ est séparateur pour (f).

Si $q_n = q_{n-2} = 1$, avec $\alpha_n = 1$, d'où $q_{n-1} = 0$, $p_{n-1} = 1$, ceci exige

$$n = -2i \qquad (i \geqq 0),$$

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{-i+1}{1}, \qquad \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{-i}{1} \qquad \text{et} \qquad x' = \frac{(-i+1)\xi - i}{\xi + 1}.$$

Cette dernière substitution étant de module égal à $+1$, $\xi = 0$ est encore séparateur pour (f_2).

$x = \frac{\lambda}{\mu}$ est donc dans tous les cas séparateur pour (f).

Mais (f) est valable pour toutes les valeurs de x correspondant à ξ décrivant le champ $\xi > 0$.

Donc la formule (f), du type (II) *ou* (III) *selon que $pq' - qp'$ vaut* 1 *ou* -1, *est valable sur tout l'intervalle $\left(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda'}{\mu'}\right)$ séparant la réduite $\frac{\lambda}{\mu}$ de* (E) *de la réduite $\frac{\lambda'}{\mu'}$ immédiatement antérieure à $\frac{\lambda}{\mu}$ dans la même parité de rang.* Il résulte de là que tout point étranger à l'ensemble des réduites de $\frac{q''}{q}$ est intérieur à un intervalle de validité d'une formule de type (II ou III).

Le théorème général est donc entièrement établi.

Les valeurs prises par $\frac{px + p'}{qx + q'}$ quand x décrit l'ensemble des réduites de $\frac{-q'}{q}$ forment, comme nous l'avons vu et comme l'inversion des formules (II) et (III) le montre, les réduites du développement canonique complet $\left(\text{de même côté que celui de } \frac{-q'}{q}\right)$ de la fraction $\frac{p}{q}$.

Aux réduites externes préliminaires de $-\frac{q'}{q}$ correspondent les réduites externes terminales de $\frac{p}{q}$ et réciproquement. Quand x parcourt en croissant l'ensemble des réduites de $-\frac{q'}{q}$, x' parcourt l'ensemble des réduites de $\frac{p}{q}$, en croissant si $pq'-qp'=1$, en décroissant si

$$pq'-qp'=-1,$$

sauf le saut de $-\infty$ à $+\infty$ (ou de $+\infty$ à $-\infty$) quand x traverse la valeur $-\frac{q'}{q}$.

25. Quels que soient α et β, vérifiant $|\alpha|\leqq 1$, $|\beta|\leqq 1$, $|\alpha\beta|<1$, on peut considérer utilement la fonction

$$\varkappa(x, \alpha, \beta)=\Sigma(-1)^n \alpha^{\sigma_n}\beta^{\sigma'_n}.$$

Pour $\beta=1-\alpha$, on retrouve $\varkappa(x, \alpha)=\varkappa(x, \alpha, 1-\alpha)$.

La fonction $\varkappa(x, \alpha, \beta)$ possède deux déterminations différentes, égales à $\varkappa(x+0, \alpha, \beta)$, $\varkappa(x-0, \alpha, \beta)$, et elle est donc discontinue, en chaque point rationnel x, si $\beta\neq 1-\alpha$.

$$\varkappa(1-0, \alpha, \beta)=1-\beta, \qquad \varkappa(1+0, \alpha, \beta)=\alpha.$$

Mais $\varkappa\left(\frac{1}{0}, \alpha, \beta\right)=0$. On a les substitutions fondamentales

$$\varkappa[(1, 0, x), \alpha, \beta]=\varkappa(x+1, \alpha, \beta)=\alpha\varkappa(x, \alpha, \beta) \qquad \text{quel que soit } x.$$

$$\varkappa[(0, 1, x), \alpha, \beta]=\varkappa\left(\frac{x}{x+1}, \alpha, \beta\right)=1-\beta+\beta\varkappa(x, \alpha, \beta) \qquad \text{pour } x>0.$$

On trouve que $\varkappa\left(\frac{px+p'}{qx+q'}, \alpha, \beta\right)$ est une fonction linéaire

$$A\varkappa(x, \alpha, \beta)+B \qquad \text{ou} \qquad C\varkappa(x, \beta, \alpha)+D$$

suivant que $pq'-qp'=1$ ou $=-1$, les points séparateurs des formules de transformation étant, indépendamment de α et de β, les mêmes que pour $\beta=1-\alpha$.