JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉLIE CARTAN

Les représentations linéaires des groupes de Lie

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 1-12.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Les représentations linéaires des groupes de Lie;

PAR ÉLIE CARTAN.

M. Ado, dans un Mémoire récent [1] en langue russe, a publié une démonstration d'un théorème important, depuis très longtemps en suspens, d'après lequel tout groupe fini et continu de Lie est isomorphe holoédrique d'un groupe linéaire. Il s'agit d'un isomorphisme holoédrique *infinitésimal* et non global, car on sait que certains groupes n'admettent aucune représentation linéaire *fidèle* au sens global; il en est ainsi par exemple du groupe simplement connexe infinitésimalement isomorphe au groupe homographique d'une variable réelle et le recouvrant une infinité de fois [2]. Ce théorème a, entre autres conséquences importantes, celle d'entraîner *ipso facto* la réciproque du

[1] *Über die Darstellung der endlichen kontinuierlichen Gruppen durch lineare Substitutionen* (*Bull. Soc. Physico-Mathématique Kazan*, 7, 1934-1935, p. 3-43).

[2] Si un groupe linéaire g est infinitésimalement isomorphe au groupe homographique *réel* d'une variable, on peut, par le passage du réel au complexe en ce

troisième théorème fondamental de Lie. Autant qu'on peut en juger d'après le court résumé en allemand qui suit le Mémoire de M. Ado, l'auteur cherche à construire un groupe dont le groupe adjoint contienne comme groupe facteur le groupe donné. Sa démonstration va des groupes de rang zéro aux groupes intégrables, puis aux groupes non intégrables.

Les indications précédentes nous ont conduit à examiner la question pour les groupes de rang zéro, d'où l'idée d'une méthode tout à fait différente de celle de M. Ado, conduisant rapidement à la démonstration du théorème en question. Comme dans le Mémoire de M. Ado, le théorème est d'abord démontré pour les groupes de rang zéro, puis pour les groupes intégrables, enfin dans le cas général, suivant une marche en somme analogue à celle qui nous a servi à démontrer la réciproque du troisième théorème fondamental de Lie. Les résultats sont en un sens plus complets que ceux de M. Ado, car ils prouvent que tout groupe intégrable simplement connexe admet une représentation linéaire *globalement* fidèle. Ajoutons que les groupes dont il va être question sont les groupes de Lie continus à paramètres complexes, mais il est clair que les conclusions subsistent pour les groupes à paramètres réels qui en sont des sous-groupes.

I. — Lemme fondamental.

1. Partons du Lemme suivant :

LEMME. — *Si les équations finies d'un groupe fini et continu à n variables x_i et r paramètres a_i sont de la forme*

$$x'_i = \sum_{k=1}^{k=N} P_{ik}(a)\, X_k(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

qui concerne les paramètres, le regarder comme faisant partie d'un groupe G infinitésimalement isomorphe au groupe homographique *complexe* d'une variable; G est alors globalement isomorphe, soit à ce groupe homographique, soit au groupe linéaire unimodulaire de deux variables complexes, qui le recouvre deux fois; à une transformation homographique donnée correspondent donc dans G, et par suite dans g, deux substitutions linéaires au plus, mais jamais une infinité.

où les N *fonctions* $X_1(x), \ldots, X_N(x)$ *sont linéairement indépendantes, ce groupe admet une représentation linéaire fidèle fournie par les* N *quantités* X_i.

La démonstration est très simple. Prenons l'une des équations données, par exemple la $i^{\text{ième}}$; parmi les N fonctions $P_{i1}(a), \ldots, P_{iN}(a)$, supposons qu'il y en ait $\nu \leqq N$ linéairement indépendantes : on peut supposer que ce sont les ν premières et même, en effectuant sur les X une substitution linéaire à coefficients constants, que les $N - \nu$ autres fonctions $P_{ih}(a)$ sont identiquement nulles. Dans l'équation considérée ne figurent donc que les ν fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$.

Cela posé effectuons d'abord la transformation S_b de paramètres b, puis la transformation S_a de paramètres a, et désignons par x'_i les variables transformées par S_b; soit enfin S_c la transformation résultante $S_a S_b$. On aura évidemment

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{k=\nu} P_{ik}(a)\, X_k(x') = \sum_{k=1}^{k=\nu} P_{ik}(c)\, X_k(x).$$

Donnons aux variables x_i successivement ν systèmes de valeurs numériques

$$x_i^{(1)}, \qquad x_i^{(2)}, \qquad \ldots, \qquad x_i^{(\nu)};$$

les x'_i correspondantes deviendront certaines fonctions déterminées des paramètres b. Comme le déterminant des $X_k(x^{(j)})$ n'est pas identiquement nul, les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ étant linéairement indépendantes, on peut supposer qu'il ne s'annule pas pour les valeurs numériques $x_i^{(j)}$ choisies; les ν équations (2) pourront alors être résolues par rapport aux $P_{ik}(c)$ sous la forme

$$P_{ik}(c) = \Sigma P_{ih}(a)\, Q_{hk}(b);$$

en remplaçant dans les équations (2) les $P_{ik}(c)$ par les valeurs précédentes et égalant les coefficients des différentes fonctions $P_{ij}(a)$ dans les deux membres, on obtiendra

$$X_j(x') = \sum_{k=1}^{k=\nu} Q_{jk}(b)\, X_k(x).$$

Cela démontre effectivement que les N fonctions $X_k(x)$ subissent une substitution linéaire par toute transformation S_b du groupe [1].

Ajoutons la remarque que cette substitution linéaire ne se réduit à l'identité que si les coefficients $Q_{jk}(b)$ sont nuls pour $j \neq k$, égaux à 1 pour $j = k$; cela revient à dire que $P_{ik}(c) = P_{ik}(a)$ et que, par suite, les transformations S_c et S_a produisent le même effet sur les variables initiales x_i : la transformation S_b est donc la transformation identique, et la représentation linéaire du groupe donné par les N quantités X_i est fidèle.

II. — Les groupes de rang zéro.

2. Nous allons montrer qu'on peut choisir les paramètres x_i d'un groupe de rang zéro de manière que les équations finies du groupe des paramètres donnent pour les x'_i des polynomes entiers par rapport aux x_i. Il est clair que le Lemme fondamental sera alors applicable.

On peut toujours choisir les transformations infinitésimales de base d'un groupe infinitésimal G de rang zéro de manière que les crochets $(X_i X_j)$ ne dépendent que des X_k dont l'indice k est supérieur à la fois à i et j [2]. Si nous désignons par $\Sigma \omega_i X_i$ le symbole de la transformation infinitésimale $S_x^{-1} S_{x+dx}$, on sait que l'on a (formules de Maurer-Cartan) [3]

$$\omega'_i = \sum_{j<k}^{1, 2, \ldots, i-1} c_{jki} [\omega_j \omega_k]; \tag{3}$$

---

(1) On peut faire un raisonnement peut-être plus intuitif. L'hypothèse revient à affirmer l'existence d'un nombre fini de transformations particulières du groupe $S_1, S_2, \ldots, S_\rho$, telles que la transformée x' d'une variable quelconque x_i par une transformation *arbitraire* S_a soit une combinaison linéaire des transformées de x_i par les transformations données $S_1, \ldots, S_\rho$. Soit N le nombre des fonctions linéairement indépendantes X_β dont dépendent linéairement ces $n\rho$ transformées. Toute transformée par S_a d'une de ces fonctions X_i sera donc une combinaison linéaire des transformées des variables initiales x_k par $S_a S_1, S_a S_2, \ldots, S_a S_\rho$, donc sera une combinaison linéaire des fonctions X.

(2) *Voir* E. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* (*Thèse*, 2e éd., Vuibert, 1933, p. 46).

(3) E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la Géométrie différentielle* (Paris, Gauthier-Villars, 1937, p. 183-185).

d'après ce qui précède, les seconds membres ne font intervenir que des formes ω_j, ω_k d'indice inférieur à i. En particulier, on aura

$$\omega'_1 = 0, \qquad \omega'_2 = 0, \qquad \omega'_3 = c_{123}[\omega_1 \omega_2].$$

On pourra donc poser

$$\omega_1 = dx_1, \qquad \omega_2 = dx_2, \qquad \omega_3 = dx_3 + c_{123} x_1 dx_2.$$

Montrons que d'une manière générale les équations (3) sont vérifiées en posant

$$\omega_i = dx_i + \sum_{k=1}^{k=i-1} P_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})\, dx_k,$$

les P_{ik} étant des polynomes entiers par rapport aux variables x_1, $x_2, \ldots, x_{i-1}$. Cette propriété est vraie pour $i = 1, 2, 3$. Supposons-la démontrée jusqu'à $i - 1$. On aura

$$\omega'_i = \sum_{j<k} c_{jki}[\omega_j \omega_k] = \sum_{j<k}^{1, 2, \ldots, i-1} Q_{jki}[dx_j dx_k],$$

les Q_{jki} étant des polynomes connus. Le second membre ayant sa dérivée extérieure nulle peut être regardé comme la dérivée extérieure d'une forme $\Sigma R_{ik}(x)\, dx_k$, les R_{ik} étant des polynomes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Par suite on peut effectivement poser [1]

$$\omega_i = dx_i + \sum_{k=1}^{k=i-1} R_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})\, dx_k.$$

---

[1] En prenant pour les x_i les paramètres canoniques et désignant par H la matrice de Killing qui admet comme élément à la ligne i et à la colonne j la somme $\sum_k c_{kji} x_k$, les formes ω_i se déduisent des différentielles dx_i par la substitution linéaire représentée par la matrice $\frac{e^H - 1}{H} = 1 + \frac{H}{2} + \frac{H^2}{3!} + \ldots$. Si le groupe est de rang zéro, l'une des puissances de H est nulle, et le second membre est une matrice dont les éléments sont des polynomes entiers en x_i. *Voir*, pour la formule invoquée, E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* (*Mém. Sc. math.*, t. XLII, 1932, p. 20-21).

3. Le groupe des paramètres est le plus grand groupe de transformations effectuées sur les x_i et laissant invariantes les formes ω_i. On en déduit immédiatement

$$x'_1 = x_1 + a_1, \qquad x'_2 = x_2 + a_2, \qquad x'_3 = x_3 - c_{123} a_1 x_2 + a_3.$$

Montrons que d'une manière générale on aura

$$x'_i = x_i + a_i + \Pi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}; a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}),$$

les Π_i étant des polynomes entiers par rapport à leurs $2(i-1)$ arguments. Supposons qu'il en soit ainsi jusqu'à $i-1$. On aura alors

$$dx'_i + \sum_{k=1}^{k=i-1} R_{ik}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{i-1})\, dx'_k = dx_i + \sum_{k=1}^{k=i-1} R_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})\, dx_k,$$

d'où, en remplaçant $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{i-1}$ par leurs valeurs,

$$dx'_i = dx_i + \sum_{k=1}^{k=i-1} S_{ik}(x_1, \ldots, x_{i-1}; a_1, \ldots, a_{i-1})\, dx_k.$$

Le second membre étant une différentielle exacte, il est clair que x'_i est de la forme générale qui a été indiquée.

Le théorème est donc démontré pour les groupes de rang zéro [1]. Nous remarquerons que le groupe, tel que nous l'avons réalisé, est simplement connexe puisque sa variété est l'espace euclidien à n dimensions. C'est ce groupe simplement connexe qui admet une représentation linéaire fidèle.

III. — Les groupes intégrables.

4. Un groupe infinitésimal d'ordre r est, d'après S. Lie, intégrable s'il admet un sous-groupe invariant d'ordre $r-1$, celui-ci, un sous-groupe invariant d'ordre $r-2$, et ainsi de suite. Lie a montré qu'on

---

[1] En réalité nous avons montré, par la construction effective des formes ω_i satisfaisant aux équations de structure (3), que tout groupe infinitésimal (algèbre de Lie) de rang zéro peut être *réalisé* en un groupe global admettant une représentation linéaire.

peut toujours choisir les transformations infinitésimales de base X_1, X_2, ..., X_r du groupe de manière à avoir

$$(3) \qquad (X_i X_j) = \sum_{k=j}^{k=r} c_{ijk} X_k \qquad (i<j).$$

L'équation caractéristique, ou équation de Killing, relative à la transformation infinitésimale $\sum_{i=1}^{i=r} e_i X_i$, n'admet alors que des racines linéaires en $e_1, e_2, \ldots, e_r$, soit

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = c_{122} e_1, \qquad \lambda_3 = c_{133} e_1 + c_{233} e_2, \quad \ldots,$$
$$\lambda_r = c_{1rr} e_1 + c_{2rr} e_2 + \ldots + c_{(r-1)rr} e_{r-1};$$

enfin, ces racines sont des invariants du groupe adjoint [1]. On peut supposer que ces racines sont des combinaisons linéaires indépendantes de $e_1, e_2, \ldots, e_l$, en désignant par l le rang du groupe; le fait que ce sont des invariants du groupe adjoint entraîne la nullité des constantes de structure $c_{ij1}, c_{ij2}, \ldots, c_{ijl}$, et par suite des racines λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_l$.

Nous allons maintenant, sans altérer la forme des relations (3), prendre une nouvelle base jouissant de propriétés particulières. Nous pouvons supposer choisie la transformation X_1 de telle sorte que les formes $\lambda_i - \lambda_j$, $\lambda_i + \lambda_j - \lambda_h$ qui ne sont pas identiquement nulles prennent des valeurs numériques non nulles pour $e_1 = 1$, $e_2 = 0$, ..., $e_l = 0$. Partons alors des relations

$$(X_1 X_r) = c_{1rr} X_r,$$
$$(X_1 X_{r-1}) = c_{1(r-1)(r-1)} X_{r-1} + c_{1(r-1)r} X_r,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si le coefficient $c_{1(r-1)(r-1)}$ est différent de c_{1rr}, nous pourrons ajouter à X_{r-1} un multiple de X_r de manière à annuler le coefficient $c_{1(r-1)r}$. Plus généralement, en procédant de proche en proche, nous pourrons ajouter à X_i une combinaison linéaire de $X_{i+1}, \ldots, X_r$, de manière que, dans l'expression développée du crochet $(X_1 X_i)$, ne figurent effec-

---

(1) Pour toutes ces propriétés, *voir* E. Cartan, *Thèse*, p. 44-45.

tivement que des transformations X_k pour lesquelles on ait $c_{1kk} = c_{1ii}$. Nous dirons que la nouvelle transformation X_i *appartient* à la racine c_{1ii}, valeur de λ_i pour $e_1 = 1$, $e_2 = \ldots = e_l = 0$.

On peut alors, suivant un procédé classique [1], montrer que le crochet $(X_i X_j)$ ne fait intervenir effectivement que les transformations X_k qui appartiennent à la racine $c_{1ii} + c_{1jj}$; si donc la constante de structure c_{ijk} n'est pas nulle, c'est que la forme linéaire λ_k est égale à $\lambda_i + \lambda_j$, car si elle ne l'était pas, on n'aurait pas $c_{1kk} = c_{1ii} + c_{1jj}$.

5. Le groupe des paramètres est le plus grand groupe de transformations qui laisse invariantes r formes de Pfaff ω_i, avec les relations de structure

$$\omega'_i = \sum_{k<h\leqq i} c_{khi}[\omega_k \omega_h]; \tag{4}$$

on a en particulier

$$\omega'_1 = \omega'_2 = \ldots = \omega'_l = 0,$$

ce qui permet de poser

$$\omega_1 = dx_1, \quad \omega_2 = dx_2, \quad \ldots, \quad \omega_l = dx_l. \tag{5}$$

Posons alors

$$\lambda_i(x) = c_{1ii}x_1 + c_{2ii}x_2 + \ldots + c_{lii}x_l \tag{6}$$

et

$$\omega_i = e^{\lambda_i(x)}\overline{\omega}_i.$$

Comme on a

$$\lambda_k(x) + \lambda_h(x) = \lambda_i(x)$$

toutes les fois que $c_{khi} \neq 0$, les équations (4) prennent la forme

$$\overline{\omega}'_i = \sum_{k<h<i} c_{khi}[\overline{\omega}_k \overline{\omega}_h], \tag{4'}$$

les coefficients c_{kii} s'étant éliminés.

Les équations (4′) sont manifestement les équations de structure d'un groupe de rang zéro. On peut donc poser

$$\overline{\omega}_i = dx_i + \sum_{k=1}^{k=i-1} R_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})\, dx_k. \tag{7}$$

---

[1] *Voir* E. CARTAN, *Thèse*, Chap. II, spécialement p. 40 *sqq*.

6. L'intégration des équations

$$\omega_i(x'; dx') = \omega_i(x; dx)$$

donnera d'abord

$$x'_i = x_i + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l),$$

puis, pour $i > l$,

$$e^{\lambda_i(x+a)}\overline{\omega}_i(x'; dx') = e^{\lambda_i(x)}\overline{\omega}_i(x; dx),$$

ou

$$\overline{\omega}_i(x'; dx') = e^{-\lambda_i(a)}\overline{\omega}_i(x, dx).$$

On montre, comme pour les groupes de rang zéro, en procédant de proche en proche, que les variables transformées x'_i sont des polynomes entiers par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i$. Le théorème est ainsi démontré et l'on peut faire à l'égard des groupes intégrables les mêmes remarques qu'à l'égard des groupes de rang zéro. En particulier, on voit que tout groupe intégrable simplement connexe admet une représentation linéaire globalement fidèle.

IV. — Les groupes non intégrables.

7. On sait que tout groupe infinitésimal non intégrable G d'ordre r admet un plus grand sous-groupe invariant intégrable Γ (1), que nous supposerons d'ordre ρ. Nous admettrons le théorème de E.-E. Levi (2) d'après lequel il est possible de choisir une base infinitésimale de G telle que les $r - \rho$ premières transformations infinitésimales

$$Y_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, r - \rho)$$

engendrent un sous-groupe semi-simple g, les ρ dernières

$$X_i (i = 1, 2, \ldots, \rho)$$

engendrant le groupe intégrable Γ. Les racines de l'équation de Killing de Γ sont, comme on le voit facilement, les racines linéaires de l'équation de Killing de G ; nous les supposerons des combinaisons

(1) E. Cartan, *Thèse*, p. 97.

(2) *Atti Accad. Torino,* **40**, 1905, p. 3-17. M. J. H. C. Whitehead vient de publier une élégante démonstration de ce théorème (*Proc. Cambridge Phil. Society*, **32**, 1936, p. 229-237).

linéaires indépendantes de $e_1, e_2, \ldots, e_l$; elles constituent des invariants linéaires du groupe adjoint de G. D'autre part, le sous-groupe $g^\star$ de ce groupe adjoint qui correspond au sous-groupe g de G transforme $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$ suivant un groupe linéaire isomorphe à g, donc semi-simple. On sait qu'un tel groupe est *complètement réductible* (¹); il admet un certain nombre d'invariants linéaires, dont $e_1, e_2, \ldots, e_l$; nous supposerons qu'il en existe $m \geqq l$ indépendants, que nous pouvons supposer être $e_1, e_2, \ldots, e_l, e_{l+1}, \ldots, e_m$. Enfin nous pouvons supposer, à cause de la complète réductibilité, que ce groupe linéaire transforme entre elles les variables $e_{m+1}, \ldots, e_\rho$.

Cela posé, nous pouvons normer, comme il a été indiqué au paragraphe **4**, la base infinitésimale de Γ par rapport aux transformations infinitésimales $X_1, X_2, \ldots, X_l$. Ces transformations sont invariantes par le sous-groupe $g^\star$ du groupe adjoint de G. On en déduit facilement que *ce groupe $g^\star$ transforme toute transformation infinitésimale de Γ appartenant à la racine λ_i en une transformation appartenant à la même racine*, cela à cause de l'invariance de la relation $(X_1 X_i) = c_{1ii} X_i$ par rapport à toute opération de $g^\star$ (²).

8. Ces préliminaires étant posés, les groupes infinitésimaux g et Γ peuvent être réalisés par des groupes globaux, que nous continuerons à désigner par les mêmes lettres, et que nous pouvons supposer simplement connexes, le second étant celui qui a été construit au paragraphe **3**. On aura une réalisation globale de G en prenant les produits $S_x T_\xi$ d'une transformation S_x de Γ et d'une transformation T_ξ de g, deux de ces produits n'étant regardés comme égaux que s'ils ont les mêmes facteurs. On définira la loi de composition de ce groupe et en même temps son groupe des paramètres, en partant de la relation

$$S_{x'} T_{\xi'} = (S_a T_\alpha)(S_x T_\xi),$$

(¹) *Voir* H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen* (*Math. Zeitschr.*, **23**, 1925, p. 271-309 et **24**, 1925, p. 328-395).

(²) Il n'en serait plus de même si le groupe $g^\star$ ne transformait pas entre elles les variables $e_{m+1}, \ldots, e_\rho$, parce qu'alors la transformation X_1, caractérisée par $e_2 = \ldots = e_m = e_{m+1} = \ldots = e_\rho = 0$, ne serait pas nécessairement invariante par $g^\star$.

d'où nous tirerons

$$(8) \qquad S_{x'} = S_a(T_\alpha S_x T_\alpha^{-1}), \qquad T_{\xi'} = T_\alpha T_\xi;$$

le symbole $T_\alpha S_x T_\alpha^{-1}$ désigne la transformation de Γ transformée de S_x par la transformation T_α de g; elle est connue par le fait que c'est le groupe linéaire $g^\star$, dont on connaît les transformations infinitésimales, qui indique comment T transforme les transformations infinitésimales de Γ.

Soit $\mathcal{G}$ le groupe opérant dans l'espace euclidien des x_i qui indique comment le groupe des paramètres de G transforme entre elles les transformations de Γ. Soient $\omega_i(x;\, dx)$ les formes qui définissent les paramètres de la transformation infinitésimale $S_x^{-1} S_{x+dx}$ de Γ. On a, d'après (8),

$$S_{x'}^{-1} S_{x'+dx'} = T_\alpha (S_x^{-1} S_{x+dx}) T_\alpha^{-1},$$

et, par suite,

$$\omega_i(x';\, dx') = \sum_{k=1}^{k=\rho} A_{ik}(\alpha)\, \omega_k(x;\, dx),$$

les $A_{ik}(\alpha)$ étant les coefficients de la substitution linéaire de $g^\star$ qui correspond à la transformation T_α de g : ce sont des fonctions régulières dans l'espace de g.

Rappelons-nous maintenant que le sous-groupe $g^\star$ transforme entre elles les transformations de Γ qui appartiennent à la même racine λ_i. En reprenant les notations du paragraphe **6**, nous aurons donc

$$e^{\lambda_i(x+a)}\, \overline{\omega}_i(x';\, dx') = e^{\lambda_i(x)} \sum_{k=1}^{k=\rho} A_{ik}(\alpha)\, \overline{\omega}_k(x;\, dx),$$

ou enfin

$$(9) \qquad \overline{\omega}_i(x';\, dx') = e^{-\lambda_i(a)} \sum_{k=1}^{k=\rho} A_{ik}(\alpha)\, \overline{\omega}_k(x;\, dx).$$

Étant donnée la forme des expressions $\overline{\omega}_i$, on montre de proche en proche, comme dans les paragraphes **2** et **3**, que *les variables transformées x'_i sont des polynomes entiers par rapport aux x_k*. On en déduit une représentation linéaire fidèle du groupe $\mathcal{G}$.

Le groupe $\mathcal{G}$ est isomorphe, holoédrique ou mériédrique, de G.

A la transformation identique de $\mathcal{G}$ correspondent dans G les transformations (S_a, T_α) telles que $S_a = 1$ et que la substitution linéaire de g^* qui correspond à T_α soit la substitution identique; ces transformations engendrent un sous-groupe invariant g' de g, nécessairement semi-simple, et le groupe $\mathcal{G}$ n'est autre que $\frac{G}{g'}$. Le groupe G est le produit direct de $\frac{G}{g'}$ (ou $\mathcal{G}$) et de g'; il suffit donc d'adjoindre à la représentation linéaire fidèle de $\mathcal{G}$ qui a été obtenue, une représentation linéaire quelconque infinitésimalement fidèle de g', par exemple son groupe adjoint linéaire, pour avoir une représentation linéaire infinitésimalement fidèle de G.

On peut remarquer que la démonstration précédente suit la même marche que la première démonstration qui ait été donnée de la réciproque du troisième théorème fondamental de Lie ([1]), tout en la précisant. Le théorème de M. Ado entraîne automatiquement cette réciproque, mais si l'on réfléchit à la démonstration qui vient d'être donnée, on se convaincra que cette réciproque exige moins que le théorème d'Ado, en ce sens qu'elle peut se passer du Lemme fondamental.

([1]) E. Cartan, *Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 914 et 1005. Comparer E. Cartan, *La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie* (*L'Enseignement math.*, 1936, p. 190-195).