JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN LERAY

Majoration des dérivées secondes des solutions d'un problème de Dirichlet

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 89-104.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_89_0>

Majoration des dérivées secondes des solutions d'un problème de Dirichlet;

PAR JEAN LERAY.

I. — Introduction.

1. Le but de cet article est d'établir la proposition suivante, qui nous servira ailleurs à discuter la possibilité du problème de Dirichlet [1] :

THÉORÈME. — *Considérons une équation aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes,*

$$(1)\quad f(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0 \qquad (p = z'_x,\ q = z'_y,\ r = z''_{x^2},\ s = z''_{xy},\ t = z''_{y^2}),$$

satisfaisant aux conditions suivantes : elle est du type elliptique, autrement dit, dans l'espace (r, s, t), *les plans tangents à la surface* $f = 0$ *sont extérieurs à la conique à l'infini* $rt = s^2$; *en outre, les tangentes à la courbe à l'infini de cette surface sont elles aussi extérieures à cette conique.* (*Ces conditions sont invariantes pour toute transformation ponctuelle transformant entre elles les parallèles à l'axe des* z.)

Soit une solution régulière quelconque de (1), *définie sur la fermeture* $\Delta + \Delta'$ *d'un domaine* Δ *du plan* (x, y); *soit* γ *le contour que décrit le point* $x, y, z(x, y)$ *quand* (x, y) *décrit la frontière* Δ' *de* Δ; *nous supposons* Δ' *et* γ *réguliers.*

Je dis qu'il est possible de majorer les valeurs absolues des dérivées secondes r, s, t *de cete solution arbitraire en fonction d'une borne*

(1) Voir *Comptes rendus*, t. 205, 1937, p. 268 et 784. Le présent article développe le paragraphe **1** de la seconde de ces Notes.

locale de la pente $\sqrt{p^2+q^2}$ *de cette solution, de l'allure locale du contour* γ *qui la limite et de l'allure locale de l'équation* $f=0$.

(Local signifie : au voisinage des points en lesquels on effectue cette majoration; si, par exemple, ces points ne sont pas voisins de Δ', l'allure de γ n'entre pas en jeu.)

2. Historique. — Ce théorème n'avait été énoncé et démontré jusqu'à présent que dans le cas où l'équation $f=0$ est *quasi-linéaire*, c'est-à-dire linéaire en r, s, t. Les célèbres travaux de M. S. Bernstein contiennent cet énoncé particulier ([2]) et décrivent ([3]) une majoration de $r^2+s^2+t^2$ qui fait entrer en jeu l'allure globale de f et de γ et le maximum absolu de p^2+q^2; M. J. Schauder a précisé ([4]) ce raisonnement de M. S. Bernstein.

En s'aidant des théorèmes les plus fins de M. J. Schauder ([5]) sur les équations linéaires en r, s, t, p, q, z et en généralisant un lemme de M. H. Lebesgue ([6]), M. R. Caccioppoli ([7]) a établi le théorème ci-dessus, f étant *quasi-linéaire*.

L'hypothèse que f est *quasi-linéaire* nous est apparue superflue parce que, à l'imitation de M. S. Bernstein, nous n'avons pas utilisé la théorie des équations linéaires en r, s, t, p, q, z.

3. Conventions diverses. — Nous supposerons donnés f, un domaine D du plan (x, y) et un arc régulier ouvert C de sa frontière D'. Nous nommerons d tout domaine qui appartient à D et dont la distance à D' — C est positive, nous nommerons c tout arc qui appartient à C et dont la distance à D' — C est positive.

C pourra être vide. Sinon nous supposerons (à partir du paragraphe **8**) qu'une transformation de coordonnées nous a ramenés au cas suivant : C est un segment de l'axe des x sur lequel $z=0$.

([2]) S. Bernstein, *Comptes rendus*, **151**, 1910, p. 636.

([3]) S. Bernstein, *Math. Annalen,* t. **69**, 1910, p. 119-125.

([4]) J. Schauder, *Math. Zeitschrift,* t. **37**, 1933, p. 629-632.

([5]) J. Schauder, *Math. Zeitschrift*, t. **38**, 1934, p. 257-282; *Studia math.*, t. **5**, 1934, p. 34-42.

([6]) *Voir* ci-après (§ **5**), lemme de Lebesgue-Caccioppoli.

([7]) R. Caccioppoli, *Rendiconti della r. Accad. dei Lincei,* t. **19**, 1934, p. 83-89; t. **22**, 1935, p. 307-310.

Nous désignerons par le symbole $A(d)$ [ou $A(c)$] toute fonctionnelle *connue* de d (ou de c), finie, positive et croissante quel que soit d (ou c); W_1 et W_2 étant deux fonctions de (x, y), nous écrirons souvent des inégalités du type

$$W_1 < A(d) W_2, \qquad W_1 < A(c) W_2;$$

elles signifieront que $W_1 < A(d) W_2$ sur chaque domaine d, $W_1 < A(c) W_2$ sur chaque arc c.

NOUVEL ÉNONCÉ DU THÉORÈME DU PARAGRAPHE **1**. — *L'équation* (1), D *et* C *étant donnés, soit une solution régulière de* (1) *au sujet de laquelle on possède seulement les renseignements suivants : elle est définie sur* D + C, *nulle sur* C *et* $p^2 + q^2 < A(d)$. *Je dis qu'elle satisfait à*

$$r^2 + s^2 + t^2 < A(d).$$

Précisions sur les conditions imposées à l'équation (1). — f est dérivable trois fois; nous nommons solutions régulières de (1) les solutions de (1) dérivables trois fois.

Quels que soient r, s, t [quand $f = 0$ et $p^2 + q^2 < A(d)$, ce que nous supposerons toujours réalisé],

$$(2)\quad \begin{cases} f_p'^2 + f_q'^2 + f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2 + f_{p^2}''^2 + \ldots + f_{px}''^2 + \ldots + f_{z^2}''^2 \\ \qquad\qquad < A(d)\,[f_r'^2 + f_s'^2 + f_t'^2]\,[r^2 + s^2 + t^2 + 1], \\ f_{rp}''^2 + \ldots + f_{tz}''^2 \qquad < A(d)\,]f_r'^2 + f_s'^2 + f_t'^2], \\ f_{r^2}''^2 + \ldots + f_{rs}''^2 + \ldots + f_{t^2}''^2 < A(d)\,[f_r'^2 + f_s'^2 + f_t'^2]\,[r^2 + s^2 + t^2 + 1]^{-1}. \end{cases}$$

L'hypothèse que, dans l'espace (r, s, t), les plans tangents à la surface $f = 0$ et les tangentes à sa courbe à l'infini sont extérieurs à la conique à l'infini $rt = s^2$ s'exprime par l'inégalité

$$(3)\qquad f_r'^2 + f_s'^2 + f_t'^2 < A(d)\,[4 f_r' f_t' - f_s'^2].$$

Remarques. — (3) implique que f_r' et f_t' ont un signe constant; nous supposerons que c'est +.

L'hypothèse exprimée par (3) entraîne que la courbe à l'infini de la surface $f = 0$ est dans le domaine $rt < s^2$ du plan à l'infini de l'espace (r, s, t). Si $\theta(r, s, t)$ est une forme quadratique en r, s, t, positive pour $rt < s^2$, nous avons donc

$$(4)\qquad r^2 + s^2 + t^2 < A(d)\,\theta(r, s, t) + A(d).$$

Par exemple

$$(5)\qquad r^2+s^2+t^2 < \mathrm{A}(d)[r^2+s^2]+\mathrm{A}(d),$$

$$(6)\qquad r^2+s^2+t^2 < \mathrm{A}(d)[s^2-rt]+\mathrm{A}(d).$$

Cette même hypothèse a les conséquences suivantes : si (ρ, σ, τ) est un point à l'infini de la région $\rho\tau \geqq \sigma^2$, alors

$$\rho f'_r + \sigma f'_s + \tau f'_t \neq 0.$$

Donc, plus précisément,

$$(7)\qquad \left\{ \begin{array}{l} [\rho^2+\sigma^2+\tau^2]^{\frac{1}{2}}[f'^2_r+f'^2_s+f'^2_t]^{\frac{1}{2}} < \mathrm{A}(d)[\rho f'_r+\sigma f'_s+\tau f'_t], \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad \rho\tau \geqq \sigma^2, \quad \rho > 0, \end{array} \right.$$

(5) et (7) ont par exemple la conséquence suivante,

$$(8)\qquad [r^2+s^2+t^2-\mathrm{A}(d)][f'^2_r+f'^2_s+f'^2_t]^{\frac{1}{2}} < \mathrm{A}(d)[r^2 f'_r + rs f'_s + s^2 f'_t].$$

II. — Lemmes fondamentaux.

4. Lemme sur la majoration des fonctions privées de maximum relatif intérieur. — Énoncé : *Soit une fonction* $\mathrm{W}(x, y)$ *définie sur* $\mathrm{D}+\mathrm{C}$, *supposons qu'à chaque point* (x_0, y_0) *de* $\mathrm{D}+\mathrm{C}$ *corresponde une fonction* $w_0(x, y)$ *qui possède les propriétés suivantes, sur un voisinage de* (x_0, y_0) : $w_0 < \mathrm{A}(d)$ *entraîne* $\mathrm{W} < \mathrm{A}(d)$; w_0 *n'a pas de maximum relatif intérieur à* D ;

$$\iint_d w_0\,dx\,dy < \mathrm{A}(d); \qquad \iint_d \sqrt{\left(\frac{\partial w_0}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial w_0}{dy}\right)^2}\,dx\,dy < \mathrm{A}(d); \qquad w_0 < \mathrm{A}(c).$$

Je dis que $\mathrm{W} < \mathrm{A}(d)$.

N. B. — Ce lemme nous servira au paragraphe **15**.

Démonstration. — Il suffit de démontrer ce lemme quand D a été réduit à sa partie intérieure au voisinage considéré de (x_0, y_0). Il suffit donc de justifier l'énoncé suivant :

« *Soit une fonction* $w(x, y)$ *définie sur* $\mathrm{D}+\mathrm{C}$, *ne possédant pas de maximum relatif intérieur à* D *et vérifiant les inégalités*

$$\iint_d w\,dx\,dy < \mathrm{A}(d), \qquad \iint_d \sqrt{w'^2_x+w'^2_y}\,dx\,dy < \mathrm{A}(d), \qquad w < \mathrm{A}(c).$$

« *Soit d_1 la partie de* D *qui est intérieure à un cercle arbitraire étranger à* $D' - C$. *Je dis qu'il est possible de majorer w sur d_1.* »

Traçons un cercle concentrique, plus grand, également étranger à $D' - C$; soit d_2 la partie de D intérieure à ce cercle. Choisissons le centre de ces cercles comme centre de coordonnées polaires (ρ, θ); ρ_1 et ρ_2 seront les rayons des deux cercles. Nommons χ la partie de la circonférence coordonnée de rayon ρ qui appartient à D; posons

$$\overline{w}_1 = \text{maximum de } w \text{ sur } d_1,$$
$$\overline{w}(\rho) = \text{maximum de } w \text{ sur } \chi.$$

Supposons $\overline{w}_1$ supérieur au maximum atteint par w sur la partie de C qui est frontière de d_2; puisque w n'admet pas de maximum intérieur,

$$\overline{w}_1 \leqq \overline{w}(\rho) \qquad \text{pour} \quad \rho_1 \leqq \rho \leqq \rho_2;$$

w prend sur χ la valeur $(\text{mes. } \chi)^{-1} \int_\chi w\, d\theta$; donc

$$\overline{w}(\rho) < (\text{mes. } \chi)^{-1} \int_\chi w\, d\theta + \int_\chi |w'_\theta|\, d\theta;$$

par suite

$$\overline{w}_1 . (\text{mes. } \chi) < \int_\chi w\, d\theta + 2\pi \int_\chi |w'_\theta|\, d\theta.$$

Multiplions les termes de cette relation par $\rho\, d\rho$ et intégrons de ρ_1 à ρ_2; il vient

$$\overline{w}_1 . (\text{mes. } d_2 - d_1) < \iint_{d_2 - d_1} w\, dx\, dy + 2\pi\rho_2 \iint_{d_2 - d_1} \sqrt{w'^2_x + w'^2_y}\, dx\, dy. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

5. Lemme de MM. Lebesgue ([8]) et Caccioppoli ([9]). — Énoncé : *Soit une fonction* $W(x, y)$ *définie sur* $D + C$ *et vérifiant l'inégalité*

$$\iint_d (W'^2_x + W'^2_y)\, dx\, dy < A(d).$$

([8]) H. Lebesgue, *Sur le problème de Dirichlet* (*Rendiconti del Circolo math. di Palermo*, t. 24, 1907, p. 386). M. Lebesgue envisage seulement le cas où $W = w_1 = -w_2$ n'a ni maximum, ni minimum relatif intérieur à D.

([9]) R. Caccioppoli, *Rendiconti della r. Accad. dei Lincei*, t. 22, 1935, p. 308.

Supposons donné le long de C *un module de continuité de* W.

Supposons qu'on puisse mettre, au voisinage de chaque point (x_0, y_0) *de* D + C, W *sous les deux formes*

$$W = F_1(w_1, x, y) = F_2(w_2, x, y),$$

F_1 *et* F_2 *ayant des modules de continuité donnés,* F_1 *croissant avec* w_1, F_2 *avec* $-w_2$, w_1 *et* w_2 *étant deux fonctions de* (x, y) *qui ne possèdent aucun maximum relatif, intérieur à* D, *voisin de* (x_0, y_0). F_1, F_2, w_1, w_2 *peuvent dépendre de* (x_0, y_0).

On peut alors construire, en fonction des données, un module de continuité de $W(x, y)$.

N. B. — Ce lemme nous servira au paragraphe **12**.

La *démonstration* de M. Lebesgue est modifiée par M. Caccioppoli seulement en ceci : l'oscillation de $W(x, y)$ dans un domaine n'est plus égale à l'oscillation de $W(x, y)$ sur la frontière de ce domaine; elle la dépasse au plus d'une quantité connue, qui tend vers zéro avec la largeur de ce domaine.

6. Généralisation d'un lemme de M. Caccioppoli [10]. — Énoncé : *Soient deux fonctions* $\varphi(x, y)$ *et* $b(x, y)$ *définies sur* D + C *et satisfaisant à l'inégalité*

$$(9)\qquad \iint_d \varphi^2(x, y)\,dx\,dy < A(d) + A(d)\int_{d'_D} b(x, y)\,\varphi(x, y)\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

où d'_D *représente la partie de la frontière* d' *de* d *qui est intérieure à* D. *Supposons en outre*

$$\iint_d b^2(x, y)\,dx\,dy < A(d).$$

Je dis que

$$\iint_d \varphi^2(x, y)\,dx\,dy < A(d).$$

N. B. — Ce lemme est utilisé au paragraphe **10**; son application essentielle est celle du paragraphe **13**.

---

[10] Cf. *loc. cit.* [9]. M. Caccioppoli a démontré ce lemme dans le cas où $b(x, y)$ est une constante.

Démonstration. — Utilisons les domaines d_1 et d_2, les coordonnées polaires (ρ, θ) et les parties de circonférence χ introduits au paragraphe **4**. Pour justifier l'énoncé ci-dessus, il suffit de majorer

$$\iint_{d_1} \varphi^2(x, y)\, dx\, dy.$$

Posons

$$\rho \int_\chi \varphi^2\, d\theta = \Phi^2(\rho), \qquad A(d_2)\, \rho \int_\chi b^2\, d\theta = B^2(\rho).$$

Appliquons l'inégalité (9) au domaine d constitué par la partie de D qui est à l'intérieur de la circonférence-coordonnée dont χ fait partie; il vient, en majorant le second membre de (9) par l'inégalité de Schwarz :

$$\int_0^\rho \Phi^2(\rho)\, d\rho < A(d_2) + B(\rho)\, \Phi(\rho) \qquad (\rho < \rho_2). \tag{10}$$

Supposons

$$\int_0^{\rho_1} \Phi^2(\rho)\, d\rho > A(d_2),$$

posons

$$\Psi^{-1}(\rho) = \int_0^\rho \Phi^2(\rho)\, d\rho - A(d_2).$$

L'inégalité (10) s'écrit

$$\Psi'_\rho < -B^{-2}(\rho) \qquad (\rho_1 \leqq \rho \leqq \rho_2);$$

elle a pour conséquence

$$\Psi(\rho_2) - \Psi(\rho_1) < -\int_{\rho_1}^{\rho_2} B^{-2}(\rho)\, d\rho,$$

donc

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} B^{-2}(\rho)\, d\rho < \Psi(\rho_1). \tag{11}$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$[\rho_2 - \rho_1]^2 < \int_{\rho_1}^{\rho_2} B^2(\rho)\, d\rho \times \int_{\rho_1}^{\rho_2} B^{-2}(\rho)\, d\rho.$$

L'inégalité (11) entraîne donc la suivante

$$\Psi^{-1}(\rho_1) < [\rho_2 - \rho_1]^{-2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} B^2(\rho)\, d\rho.$$

Par suite

$$\int_0^{\rho_1} \Phi^2(\rho)\,d\rho < \mathrm{A}(d_2) + [\rho_2 - \rho_1]^{-2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \mathrm{B}^2(\rho)\,d\rho;$$

en d'autres termes

$$\iint_{d_1} \varphi^2(x,y)\,dx\,dy < \mathrm{A}(d_2) + \mathrm{A}(d_2)[\rho_2-\rho_1]^{-2} \iint_{d_2-d_1} b^2(x,y)\,dx\,dy. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

7. Lemme de M. S. Bernstein ([11]). — *Notations.* — Introduisons les opérateurs différentiels

$$\mathfrak{X} = k\frac{\partial}{\partial r} + l\frac{\partial}{\partial s} + m\frac{\partial}{\partial t} + r\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q} + p\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x},$$
$$\mathfrak{Y} = l\frac{\partial}{\partial r} + m\frac{\partial}{\partial s} + n\frac{\partial}{\partial t} + s\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q} + q\frac{d}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Définissons comme suit le produit de deux opérateurs différentiels de ce type

$$\mathfrak{A} = \sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \mathfrak{B} = \sum_j b_j\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Énoncé : *Soit l'équation aux dérivées partielles du type elliptique*

(12) $f(r,s,t,p,q,x,y,z) = 0 \quad (4f'_r f'_t > f'^2_s, \ f'_r > 0 \ \text{pour}\ f = 0).$

Introduisons quatre nouvelles variables : k, l, m, n. Soit une fonction $w(r,s,t,p,q,x,y,z)$ satisfaisant à l'inégalité

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} f'_r\mathfrak{X}^2 w + f'_s\mathfrak{X}\mathfrak{Y}w + f'_t\mathfrak{Y}^2 w \\ + (rf'_r + sf'_s + tf'_t + pf'_p + qf'_q)\,w'_z + f'_p w'_x + f'_q w'_y \\ - w'_r\mathfrak{X}^2 f - w'_s\mathfrak{X}\mathfrak{Y}f - w'_t\mathfrak{Y}^2 f \\ - (rw'_r + sw'_s + tw'_t + pw'_p + qw'_q)\,f'_z - w'_p f'_x - w'_q f'_y > 0, \\ \qquad \text{quand}\quad \mathfrak{X}w = \mathfrak{Y}w = \mathfrak{X}f = \mathfrak{Y}f = 0, \quad f = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on remplace dans $w(r,s,t,p,q,x,y,z)$ les variables z,p,q,r,s,t par une solution arbitraire de (12) *et ses dérivées du premier et du second*

([11]) Les raisonnements par lesquels M. S. Bernstein étudie les équations non linéaires constituent une série d'applications de ce lemme dont M. S. Bernstein n'a cependant pas donné d'énoncé général.

ordre, alors la fonction w de (x, y) ainsi obtenue ne possède aucun maximum relatif intérieur à son domaine de définition.

Démonstration. — Désignons par $\dfrac{d}{dx}, \dfrac{d}{dy}, \dfrac{d^2}{dx^2}, \dfrac{d^2}{dx\,dy}, \dfrac{d^2}{dy^2}$ les dérivées des deux premiers ordres d'une fonction de r, s, t, p, q, x, y, z dans laquelle on a substitué à z, p, q, r, s, t une fonction $z(x, y)$ et ses dérivées des deux premiers ordres. Nommons k, l, m, n les dérivées d'ordre trois de $z(x, y)$. Nous avons les identités

$$\frac{dw}{dx} = \mathfrak{X}w, \qquad \frac{dw}{dy} = \mathfrak{Y}w, \qquad \frac{df}{dx} = \mathfrak{X}f, \qquad \frac{df}{dy} = \mathfrak{Y}f,$$

$$\begin{aligned}
& f'_r \frac{d^2w}{dx^2} + f'_s \frac{d^2w}{dx\,dy} + f'_t \frac{d^2w}{dy^2} + f'_p \frac{dw}{dx} + f'_q \frac{dw}{dy} \\
& - w'_r \frac{d^2f}{dx^2} - w'_s \frac{d^2f}{dx\,dy} - w'_t \frac{d^2f}{dy^2} - w'_p \frac{df}{dx} - w'_q \frac{df}{dy} \\
= {} & f'_r \mathfrak{X}^2 w + f'_s \mathfrak{X}\mathfrak{Y} w + f'_t \mathfrak{Y}^2 w \\
& + (r f'_r + s f'_s + t f'_t + p f'_p + q f'_q) w'_z + f'_p w'_x + f'_q w'_y \\
& - w'_r \mathfrak{X}^2 f - w'_s \mathfrak{X}\mathfrak{Y} f - w'_t \mathfrak{Y}^2 f \\
& - (r w'_r + s w'_s + t w'_t + p w'_p + q w'_q) f'_z - w'_p f'_x - w'_q f'_y.
\end{aligned}$$

Si cette fonction $z(x, y)$ est solution de (12), l'inégalité (13) exprime donc que

$$(14) \qquad f'_r \frac{d^2w}{dx^2} + f'_s \frac{d^2w}{dx\,dy} + f'_t \frac{d^2w}{dy^2} > 0, \qquad \text{quand} \quad \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} = 0.$$

Or, cette inégalité (14) interdit à w, considérée comme fonction de (x, y), de posséder un maximum relatif intérieur à son domaine de définition. C. Q. F. D.

III. — Majoration frontière de $r^2 + s^2 + t^2$.

8. Un corollaire du lemme de M. S. Bernstein. — *Notations.* — La frontière d' d'un domaine d se compose de deux parties : d'_D intérieur à D et d'_C appartenant à C.

Enoncé : *Soit un segment c. Je dis qu'on peut trouver un domaine d et une fonction $w = p - \theta(x, y)$ possédant les propriétés suivantes : c appartient à d'_C et est à distance positive de d'_D; sur une solution de* (1) *vérifiant* $p^2 + q^2 < \mathrm{A}(d)$, *$w$ ne peut posséder de maximum intérieur à d; θ est positif dans d, nul sur c, arbitrairement grand sur d'_{D}.*

Démonstration. — D'après le lemme de M. S. Bernstein, l'absence de maximum de w à l'intérieur de d est assurée par l'inégalité

$$f'_r\theta''_{x^2} + f'_s\theta''_{xy} + f'_t\theta''_{y^2} + rf'_p + sf'_q + pf'_z + f'_x < 0, \quad \text{pour} \quad r = \theta'_x, \quad s = \theta'_y. \tag{15}$$

Choisissons une fonction $\alpha(x, y)$ nulle sur c, positive partout ailleurs, de gradient non nul; posons

$$\theta(x, y) = \theta[\alpha(x, y)];$$

(15) s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} \theta''_{\alpha^2}[\alpha'^2_x f'_r + \alpha'_x\alpha'_y f'_s + \alpha'^2_y f'_t] \\ + \theta'_\alpha[\alpha''_{x^2}f'_r + \alpha''_{xy}f'_s + \alpha''_{y^2}f'_t] + rf'_p + sf'_q + pf'_z + f'_x < 0, \\ \qquad \text{pour} \quad r = \theta'_\alpha\alpha'_x, \quad s = \theta'_\alpha\alpha'_y. \end{array}\right. \tag{16}$$

D'après (2), (7) et (5)

$$\begin{aligned} |rf'_p + sf'_q + pf'_z + f'_x| &< \mathrm{A}(d)[f'^2_r + f'^2_s + f'^2_t]^{\frac{1}{2}}[r^2 + s^2 + t^2] \\ &< [\alpha'^2_x f'_r + \alpha'_x\alpha'_y f'_s + \alpha'^2_y f'_t][\theta'^2_\alpha \mathrm{A}(d) + \mathrm{A}(d)], \end{aligned}$$
$$|\alpha''_{x^2}f'_r + \alpha''_{xy}f'_s + \alpha''_{y^2}f'_t| < \mathrm{A}(d)[\alpha'^2_x f'_r + \alpha'_x\alpha'_y f'_s + \alpha'^2_y f'_t].$$

Si nous supposons

$$|\theta'_\alpha| > 1, \tag{17}$$

l'inégalité (16) est donc satisfaite quand

$$\theta''_{\alpha^2} < -\mathrm{A}(d)\theta'^2_\alpha. \tag{18}$$

Nous choisirons, λ et μ étant deux constantes,

$$\theta = \lambda \log\left[\frac{\alpha}{\mu} + 1\right]; \qquad \text{d'où} \quad \theta'_\alpha = \frac{\lambda}{\alpha + \mu}, \qquad \theta''_{\alpha^2} = -\frac{\lambda}{[\alpha + \mu]^2},$$

(18) a lieu quand $0 < \lambda < \frac{1}{\mathrm{A}(d)}$; (17) a lieu si $0 < \mu < \frac{\lambda}{2}$ et si d est assez voisin de c pour que $\alpha < \frac{\lambda}{2}$ sur d; $\theta \to +\infty$ sur d'_{D} quand $\mu \to 0$; le corollaire énoncé est donc exact.

9. Majoration de $r^2 + s^2 + t^2$ sur C. — Nous allons maintenant préciser, par étapes successives, l'allure des dérivées d'une solution de (1), connaissant (1), D, C et les renseignements suivants : la solution étudiée est régulière sur D + C; elle satisfait à

$$p^2 + q^2 < \mathrm{A}(d); \qquad y = z = 0 \text{ sur C}.$$

Envisageons la fonction w du paragraphe précédent, θ étant choisi assez grand sur d'_{D} pour y surpasser p; $w \leqq 0$ sur d'; w n'a pas de maximum intérieur à d; donc $w \leqq 0$ dans d.

Sur c, $w = 0$; donc, en supposant que le signe constant de y dans d soit +, $\frac{dw}{dy} \leqq 0$ sur c; c'est-à-dire $s \leqq \theta'_y$ sur c.

Cette inégalité est du type $s < \mathrm{A}(c)$. On établit de même que $-s < \mathrm{A}(c)$.

Nous avons donc $|s| < \mathrm{A}(c)$; d'autre part $r = 0$ sur C; d'où, d'après (5),

$$r^2 + s^2 + t^2 < \mathrm{A}(c).$$

La majoration annoncée est effectuée.

IV. — Construction d'un module de continuité de p et de q.

10. Majoration [12] de $\iint_d [r^2 + s^2 + t^2]\, dx\, dy$.

L'identité

$$\oint_{d'} p\, dq = \iint_d [s^2 - rt]\, dx\, dy,$$

la relation $p = 0$ sur C et l'inégalité (6) entraînent l'inégalité

$$\iint_d [r^2 + s^2 + t^2]\, dx\, dy < \mathrm{A}(d) + \mathrm{A}(d) \int_{d'_{\mathrm{D}}} p(s\, dx + t\, dy).$$

D'où

$$\iint_d [r^2 + s^2 + t^2]\, dx\, dy < \mathrm{A}(d) + \mathrm{A}(d) \int_{d'_{\mathrm{D}}} \sqrt{r^2 + s^2 + t^2} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

---

(12) M. S. Bernstein a effectué cette majoration sous des hypothèses moins générales; *cf.* paragraphe **7** du l. c. (3), et J. Schauder, *C. R. Acad. Sc.*, **199**, 1934, p. 1566.

Le lemme de M. Caccioppoli, que généralise le paragraphe **6**, déduit de cette dernière inégalité la suivante :

$$\iint_d [r^2+s^2+t^2]\,dx\,dy < \mathrm{A}(d).$$

11. Un corollaire du lemme de M. S. Bernstein. — Énoncé : *Soit un point* (x_0, y_0) *de* $\mathrm{D}+\mathrm{C}$. *Si* λ *est une constante suffisamment grande, les fonctions* $w=\pm p+\lambda[x-x_0]^2$ *n'admettent pas de maximum relatif intérieur, voisin de* (x_0, y_0).

Démonstration. — D'après le lemme de M. S. Bernstein, w possède la propriété énoncée si

$$2\lambda f'_r \mp [r f'_p + s f'_q + p f'_z + f'_x] > 0 \tag{19}$$

pour

$$\mp r = 2\lambda[x-x_0], \qquad s=0.$$

Supposons $|\lambda[x-x_0]|<1$; nous avons $|r|<2$; $s=0$; d'après (5), $r^2+s^2+t^2$ est donc borné au voisinage de (x_0, y_0). Par suite (19) est vérifiée sur ce voisinage quand λ est suffisamment grand.

12. Module de continuité de p et de q. — Appliquons le lemme de Lebesgue-Caccioppoli à la fonction $\mathrm{W}=p$; d'après le paragraphe **10**

$$\iint_d [\mathrm{W}'^2_x+\mathrm{W}'^2_y]\,dx\,dy = \iint_d [r^2+s^2]\,dx\,dy < \mathrm{A}(d);$$

le paragraphe **11** nous autorise à choisir

$$w_1 = p+\lambda[x-x_0]^2, \qquad w_2 = -p+\lambda[x-x_0]^2;$$

sur C, $p=0$. On peut donc construire, sur tout domaine d, un module de continuité de p, à l'aide des seules quantités $\mathrm{A}(d)$.

Un module de continuité de q se construit par un procédé analogue; le module de continuité de q le long de C, dont la connaissance est nécessaire, est fourni par l'inégalité $|s|<\mathrm{A}(c)$ du paragraphe **9**.

V. — Majoration de $r^2+s^2+t^2$.

13. Majoration de $\iint_d [k^2+l^2+m^2+n^2][r^2+s^2+t^2+1]^{-1}\,dx\,dy$.

Nous nommons k, l, m, n les dérivées d'ordre 3 de $z(x, y)$. L'identité

$$\iint_d \frac{dr\,ds}{r^2+s^2+1} = \oint_{d'} \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} \operatorname{arc\,tang} \frac{s}{\sqrt{r^2+1}}\,dr$$

nous donne, puisque $r=0$ sur C,

$$\iint_d \frac{l^2-km}{r^2+s^2+1}\,dx\,dy < \frac{\pi}{2}\int_{d'_D} \sqrt{k^2+l^2}\sqrt{dx^2+dy^2}. \tag{20}$$

Envisageons d'autre part la forme quadratique en (ρ, σ, τ)

$$\sigma^2-\rho\tau+2[\rho f'_r+\sigma f'_s+\tau f'_t]^2[4f'_rf'_t-f'^2_s]^{-1}. \tag{21}$$

Il existe une substitution linéaire qui laisse invariante $4f'_rf'_t-f'^2_s$ et qui transforme (f'_r, f'_s, f'_t) en

$$\left(\sqrt{f'_rf'_t-\frac{1}{4}f'^2_s},\ 0,\ \sqrt{f'_rf'_t-\frac{1}{4}f'^2_s}\right);$$

faisons subir à (ρ, σ, τ) la substitution contravariante, qui laisse invariante $\sigma^2-\rho\tau$; (21) se réduit à la forme quadratique *définie positive*

$$\sigma^2-\rho\tau+\frac{1}{2}(\rho+\tau)^2=\sigma^2+\frac{1}{4}(\rho+\tau)^2+\frac{1}{4}(\rho-\tau)^2.$$

D'après (3) les substitutions linéaires envisagées ont des coefficients inférieurs en valeur absolue à $A(d)$. Nous avons donc l'inégalité

$$\rho^2+\sigma^2+\tau^2 < A(d)\{\sigma^2-\rho\tau+2[\rho f'_r+\sigma f'_s+\tau f'_t]^2[4f'_rf'_t-f'^2_s]^{-1}\}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}k^2+l^2+m^2+n^2 < A(d)\{&l^2-km \\ &+[2(kf'_r+lf'_s+mf'_t)^2 \\ &\quad+(lf'_r+mf'_s+nf'_t)^2][4f'_rf'_t-f'^2_s]^{-1}\}.\end{aligned} \tag{22}$$

La dérivation de l'équation (1) nous donne

$$k f'_r + l f'_s + m f'_t + r f'_p + s f'_q + p f'_z + f'_x = 0,$$
$$l f'_r + m f'_s + n f'_t + s f'_p + t f'_q + q f'_z + f'_y = 0.$$

D'où, à l'aide de (2) et (3),

$$| k f' r + l f' s + m f' t | < \mathrm{A}(d)[r^2 + s^2 + t^2 + 1][4 f'_r f'_t - f'^2_s]^{\frac{1}{2}},$$
$$| l f' r + m f' s + n f' t | < \mathrm{A}(d)[r^2 + s^2 + t^2 + 1][4 f'_r f'_t - f'^2_s]^{\frac{1}{2}}.$$

Simplifions par (5) ces deux inégalités et portons-les dans (22); il vient

$$k^2 + l^2 + m^2 + n^2 < \mathrm{A}(d)[l^2 - km] + \mathrm{A}(d)[r^2 + s^2 + 1]^2. \tag{23}$$

De (23), de (20) et du paragraphe **10** résulte l'inégalité

$$\iint_d \frac{k^2 + l^2 + m^2 + n^2}{r^2 + s^2 + 1}\, dx\, dy < \mathrm{A}(d) \int_{d'_D} \sqrt{k^2 + l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{dx^2 + dy^2} + \mathrm{A}(d). \tag{24}$$

Notre généralisation du lemme de M. Caccioppoli (§ **6**) s'applique à (24), en posant

$$\varphi^2 = \frac{k^2 + l^2 + m^2 + n^2}{r^2 + s^2 + 1}, \qquad b^2 = r^2 + s^2 + 1,$$

il vient

$$\iint_d \varphi^2\, dx\, dy < \mathrm{A}(d), \qquad \text{donc} \qquad \iint_d \frac{k^2 + l^2 + m^2 + n^2}{r^2 + s^2 + t^2 + 1}\, dx\, dy < \mathrm{A}(d).$$

14. Un corollaire du lemme de M. S. Bernstein. — Énoncé : *Si λ est une constante suffisamment grande, il est impossible que la fonction*

$$w(r, s, t, p) = \log[s^2 - rt] + \lambda[p - p_0]^2$$

possède un maximum relatif intérieur, en un point où $r^2 + s^2 + t^2$ est grand et p voisin de p_0.

Démonstration. — Appliquons à w le lemme de M. Bernstein, en supposant $r^2 + s^2 + t^2$ grand. k, l, m, n sont définis par les quatre équations linéaires :

$$\mathcal{X} w = \mathcal{Y} w = \mathcal{X} f = \mathcal{Y} f \equiv 0, \tag{25}$$

dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix} -t & 2s & -r & 0 \\ f'_r & f'_s & f'_t & 0 \\ 0 & -t & 2s & -r \\ 0 & f'_r & f'_s & f'_t \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant vaut $\rho\tau - \sigma^2$, où

$$\rho = \begin{vmatrix} 2s & -r \\ f'_s & f'_t \end{vmatrix}, \quad \sigma = \begin{vmatrix} -r & -t \\ f'_t & f'_r \end{vmatrix}, \quad \tau = \begin{vmatrix} -t & 2s \\ f'_r & f'_s \end{vmatrix},$$

(ρ, σ, τ) sont les coordonnées homogènes du point d'intersection des droites de coordonnées homogènes (f'_r, f'_s, f'_t), $(t, -2s, r)$; la première de ces droites est extérieure à la conique $\rho\tau = \sigma^2$; la seconde coupe cette conique; ces deux droites sont donc distinctes et (ρ, σ, τ) est extérieure à cette conique : $\rho\tau < \sigma^2$; donc, plus précisément,

$$[r^2 + s^2 + t^2][f'^2_r + f'^2_s + f'^2_t] < A(d)[\sigma^2 - \rho\tau].$$

Cette inégalité minore la valeur absolue du déterminant des équations (25); de cette minoration résulte que

$$(26) \qquad \begin{cases} \sqrt{k^2 + l^2 + m^2 + n^2} < A(d)[r^2 + s^2 + t^2], \\ \text{pour} \\ r^2 + s^2 + t^2 > A(d), \qquad |\lambda[p - p_0]| < 1. \end{cases}$$

Le premier membre de l'inégalité (13) se compose des termes

$$2\lambda[r^2 f'_r + rs f'_s + s^2 f'_t]$$

et d'autres termes que, d'après (26), (2) et (8), majore

$$A(d)[r^2 + s^2 + t^2][f'^2_r + f'^2_s + f'^2_t]^{\frac{1}{2}} < A(d)[r^2 f'_r + rs f'_s + s^2 f'_t].$$

L'inégalité (13) a donc lieu sur d quand

$$r^2 + s^2 + t^2 > A(d), \qquad \lambda > A(d), \qquad |\lambda[p - p_0]| < 1.$$

15. Majoration de $r^2 + s^2 + t^2$. — Soit un point arbitraire (x_0, y_0), de $D + C$, soit p_0 la valeur de p en ce point. Puisque nous connaissons un module de continuité de p (§ **12**), nous pouvons construire un voisinage du point (x_0, y_0) sur lequel $|\lambda[p - p_0]| < 1$.

Définissons comme suit la fonction $w_0(r, s, t, p)$

$$w_0 = w \quad \text{pour} \quad w \geqq B,$$
$$w_0 = B \quad \text{pour} \quad w \leqq B \quad \text{et pour} \quad s^2 - rt < 0,$$

B étant une constante choisie assez grande pour réaliser les deux conditions suivantes, à l'intérieur du voisinage envisagé de (x_0, y_0) :

$$r^2 + s^2 + t^2 + 1 < \text{const.}\,[s^2 - rt], \qquad \text{quand} \quad w_0 > B \quad [cf.\ ({}^6)];$$

w_0 ne possède pas de maximum relatif (*cf.* § **14**).

Nous avons, quand $w_0 > B$,

$$\frac{dw_0}{dx} = \frac{2sl - tk - rm}{s^2 - rt} + 2\lambda[p - p_0]r,$$
$$\frac{dw_0}{dy} = \frac{2sm - tl - rn}{s^2 - rt} + 2\lambda[p - p_0]s$$

et, par suite,

$$\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw_0}{dy}\right)^2 < \text{const.}\,\frac{k^2 + l^2 + m^2 + n^2}{r^2 + s^2 + t^2 + 1} + \text{const.}\,[r^2 + s^2].$$

Donc, d'après les paragraphes **10** et **13**,

$$\iint_d \left[\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2\right] dx\,dy < A(d).$$

Le paragraphe **10** nous donne

$$\iint_d |w_0|\,dx\,dy < A(d).$$

L'inégalité $w_0 < A(d)$ entraîne, d'après (6), $r^2 + s^2 + t^2 < A(d)$.

Par conséquent, en vertu du lemme du paragraphe **4**,

$$r^2 + s^2 + t^2 < A(d).$$

Cette dernière inégalité exprime le théorème énoncé au paragraphe **1**.