JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CONSTANTIN ORLOFF

Sur la formation de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, au moyen d'une intégrale complète

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 18 (1939), p. 145-156.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18__145_0>

Sur la formation de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, au moyen d'une intégrale complète;

PAR CONSTANTIN ORLOFF

(Belgrade).

1. Le Mémoire de Lagrange, « Sur les intégrales particulières des équations différentielles » (¹), donne une méthode pour obtenir une intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, étant connue une intégrale complète de cette dernière équation. Cette méthode, quoique générale, est d'après Lagrange lui-même « plus curieuse qu'utile », étant très compliquée même dans les applications aux équations les plus simples.

Le but de ce travail est de simplifier la méthode de Lagrange pour composer l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. L'étude qui va être exposée a été suggérée par les conférences de M. N. Saltykow, en 1933, à l'Institut scientifique Russe à Belgrade.

Dans son Mémoire cité Lagrange démontre que par la variation des constantes dans une intégrale complète première, à deux constantes arbitraires, on obtient une intégrale générale première, à une fonction arbitraire.

Il va sans dire que l'intégrale complète première peut être obtenue d'une intégrale complète, à cinq constantes arbitraires, chaque fois qu'il soit possible d'éliminer trois constantes arbitraires de l'intégrale

(¹) *Œuvres complètes*, t. 4, p. 5-108.

complète en question et de ses deux dérivées partielles du premier ordre prises respectivement par rapport à x et à y.

Or, il faut noter qu'une équation donnée aux dérivées partielles du second ordre peut bien admettre outre les intégrales complètes jouissant de la propriété mentionnée concernant les éliminations indiquées, encore d'autres intégrales qui n'en jouissent point.

Introduisons, pour les intégrales complètes de la première catégorie indiquée, la désignation des *intégrales complètes spéciales*, tout en désignant les autres *intégrales complètes régulières*.

Nous allons étudier la possibilité de résoudre le problème en question au moyen de la transformation des intégrales complètes régulières en celles de la *forme spéciale*.

Or, cette voie que nous venons d'indiquer n'est pas la seule possible à suivre pour la solution du problème posé.

Il est aisé d'imaginer, dans le même but, encore un autre procédé concernant la formation directe des intégrales générales premières en partant des intégrales complètes *quelconques*. Ce procédé sera aussi démontré dans le présent travail.

2. Considérons, d'abord, une intégrale complète *spéciale* d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, à savoir

$$z = \varphi(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5), \tag{1}$$

les $C_1, C_2, \ldots, C_5$ désignant cinq constantes arbitraires distinctes. L'intégrale complète (1) étant *spéciale*, supposons qu'elle produit une intégrale complète première à deux constantes arbitraires, en éliminant C_1, C_2, C_3 de l'équation (1) et de ses dérivées du premier ordre prises par rapport à x et à y. Il s'ensuit que la fonction φ doit satisfaire à la condition suivante

$$D\left(\frac{\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}}{C_1, C_2, C_3}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial C_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial C_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial C_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial C_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial C_3} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial C_3} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial C_3} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

L'intégrale complète (1) pourrait admettre la forme *spéciale* non seulement par rapport à un groupe de trois constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, mais encore par rapport à un second groupe de trois constantes arbitraires, par exemple par rapport à C_1, C_4, C_5. Dans ce cas, outre la condition (2), on aurait la seconde condition

$$(3)\qquad D\left(\frac{v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}}{C_1, C_4, C_5}\right) = 0.$$

Cette seconde condition étant satisfaite, on éliminera, de l'intégrale complète (1) et de ses dérivées du premier ordre par rapport à x et à y, une fois les constantes C_1, C_2, C_3 et l'autre fois les constantes C_1, C_4, C_5. De cette manière on va avoir deux intégrales complètes premières différentes qui se trouvent en involution. Il s'ensuit alors, par une quadrature, l'intégrale générale de l'équation étudiée aux dérivées partielles du second ordre.

3. Supposons maintenant que l'on ait une intégrale *régulière* de la même équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(4)\qquad z = w(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5),$$

les α étant des constantes arbitraires distinctes. Il s'agit de voir s'il est possible de transformer cette intégrale *régulière* (4) en une intégrale *spéciale*. Pour faire cette transformation, introduisons, au lieu des constantes arbitraires α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, cinq nouvelles constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, liées avec les constantes α par des relations

$$(5)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = f_1(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5), \\ \alpha_2 = f_2(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5), \\ \alpha_3 = f_3(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5), \\ \alpha_4 = f_4(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5), \\ \alpha_5 = f_5(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5). \end{cases}$$

Les fonctions f peuvent être quelconques, à condition d'être distinctes, ou, ce qui est le même, vérifiant la condition

$$(6)\qquad D\left(\frac{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5}{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5}\right) \gtrless 0,$$

car autrement il y aurait une ou plusieurs relations entre les constantes α, qui sont cependant indépendantes.

Composons à présent les conditions que doivent vérifier les fonctions f pour que l'intégrale régulière (4) transformée admette la forme d'une intégrale spéciale par rapport aux constantes C_1, C_2, C_3. Supposons que l'intégrale (4) transformée devient

$$z = \varphi(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5), \tag{7}$$

où l'on a posé

$$\varphi \equiv w(x, y, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5), \tag{8}$$

où la fonction φ vérifie la condition (2). Il s'ensuit, en tenant compte de l'égalité (8), les relations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial C_i} &= \sum_{s=1}^{5} \frac{\partial w}{\partial \alpha_s} \frac{\partial f_s}{\partial C_i} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial C_i} &= \sum_{s=1}^{5} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial \alpha_s} \frac{\partial f_s}{\partial C_i} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial C_i} &= \sum_{s=1}^{5} \frac{\partial^2 w}{\partial y\, \partial \alpha_s} \frac{\partial f_s}{\partial C_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{9}$$

Si l'on pose, pour abréger l'écriture,

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha_s} = w_s, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial \alpha_s} = w_{xs}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y\, \partial \alpha_s} = w_{ys} \qquad (s = 1, 2, 3, 4, 5),$$

les relations (9) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial C_i} &= \sum_{s=1}^{5} w_s \frac{\partial f_s}{\partial C_i} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial C_i} &= \sum_{s=1}^{5} w_{xs} \frac{\partial f_s}{\partial C_i} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial C_i} &= \sum_{s=1}^{5} w_{ys} \frac{\partial f_s}{\partial C_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{10}$$

En substituant les expressions (10) dans la formule (2), on obtient la condition requise

$$
(11) \qquad \begin{vmatrix}
\sum_{s=1}^{5} w_s \frac{\partial f_s}{\partial C_1} & \sum_{s=1}^{5} w_{xs} \frac{\partial f_s}{\partial C_1} & \sum_{s=1}^{5} w_{ys} \frac{\partial f_s}{\partial C_1} \\
\sum_{s=1}^{5} w_s \frac{\partial f_s}{\partial C_2} & \sum_{s=1}^{5} w_{xs} \frac{\partial f_s}{\partial C_2} & \sum_{s=1}^{5} w_{ys} \frac{\partial f_s}{\partial C_2} \\
\sum_{s=1}^{5} w_s \frac{\partial f_s}{\partial C_3} & \sum_{s=1}^{5} w_{xs} \frac{\partial f_s}{\partial C_3} & \sum_{s=1}^{5} w_{ys} \frac{\partial f_s}{\partial C_3}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Si cette dernière condition (11) est satisfaite, alors, en éliminant les trois constantes C_1, C_2, C_3, de l'équation (7) et de ses deux dérivées du premier ordre, on en tire l'intégrale complète première.

Si l'on considère la condition (11) comme une équation que doivent vérifier les fonctions f, dont les expressions sont inconnues, il suffit d'en trouver des valeurs particulières quelconques des fonctions f pour résoudre le problème de la formation de *l'intégrale complète spéciale*.

Étudions maintenant la transformation d'une intégrale complète régulière (4) en une intégrale spéciale par rapport à deux groupes de constantes arbitraires C_1, C_2, C_3 et C_1, C_4, C_5. Il faut alors qu'outre la première condition (11), la seconde relation suivante ait lieu, à savoir

$$
(12) \qquad \begin{vmatrix}
\sum_{s=1}^{5} w_s \frac{\partial f_s}{\partial C_1} & \sum_{s=1}^{5} w_{xs} \frac{\partial f_s}{\partial C_1} & \sum_{s=1}^{5} w_{ys} \frac{\partial f_s}{\partial C_1} \\
\sum_{s=1}^{5} w_s \frac{\partial f_s}{\partial C_4} & \sum_{s=1}^{5} w_{xs} \frac{\partial f_s}{\partial C_4} & \sum_{s=1}^{5} w_{ys} \frac{\partial f_s}{\partial C_4} \\
\sum_{s=1}^{4} w_s \frac{\partial f_s}{\partial C_5} & \sum_{s=1}^{5} w_{xs} \frac{\partial f_s}{\partial C_5} & \sum_{s=1}^{5} w_{ys} \frac{\partial f_s}{\partial C_5}
\end{vmatrix} = 0,
$$

les désignations y conservant les valeurs antérieurement définies.

Si l'on réussit à obtenir les valeurs des fonctions f vérifiant les deux conditions (11) et (12) simultanément, l'intégrale complète (7) produira deux intégrales complètes premières distinctes.

On va à présent démontrer que les considérations exposées offrent des applications très importantes.

4. En effet, appliquons la méthode étudiée à l'exemple classique de Lagrange [1].

Il est bien connu que l'expression

$$z = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \frac{\alpha_4}{a^2} y^2 \tag{13}$$

est l'intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles de la corde vibrante

$$r - a^2 t = 0, \tag{14}$$

les désignations étant usuelles, les α étant des constantes arbitraires distinctes.

On voit immédiatement que l'intégrale (13), donnée par Lagrange, est régulière. D'autre part il est évident que les équations (11) et (12) admettent la solution suivante, vérifiant la condition (6),

$$\begin{aligned} &f_1 = C_1, && f_4 = a^2(C_3 + C_5), \\ &f_2 = a(C_2 - C_4), && f_5 = 2a(C_3 - C_5). \\ &f_3 = C_2 + C_4. \end{aligned}$$

Il en résulte que les formules de transformation deviennent

$$\left\{ \begin{aligned} &\alpha_1 = C_1, && \alpha_4 = a^2(C_3 + C_5), \\ &\alpha_2 = a(C_2 - C_4), && \alpha_5 = 2a(C_3 - C_5). \\ &\alpha_3 = C_2 + C_4, \end{aligned} \right. \tag{15}$$

L'intégrale (13) transformée, au moyen de ces dernières formules (15), devient une intégrale *spéciale par rapport à deux groupes de constantes arbitraires*, à savoir C_1, C_2, C_3 et C_1, C_4, C_5 et prend la forme suivante

$$z = C_1 + C_2(y + ax) + C_3(y + ax)^2 + C_4(y - ax) + C_5(y - ax)^2, \tag{16}$$

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 désignant les nouvelles constantes arbitraires.

En éliminant de cette intégrale et de ses dérivées du premier ordre

---

[1] LAGRANGE, *ibid.*

prises par rapport à x et à y, une fois les constantes C_1, C_2, C_3 et l'autre fois les constantes C_1, C_4, C_5, on obtient deux intégrales complètes premières suivantes :

$$(17)\qquad \begin{cases} p - aq = 2aC_4 - 4aC_5(y - ax), \\ p + aq = 2aC_2 + 4aC_3(y + ax). \end{cases}$$

On en tire, par la variation des constantes arbitraires, d'après la méthode de Lagrange, deux intégrales premières générales :

$$(18)\qquad \begin{cases} p - aq = -\ 2a\varphi'(y - ax), \\ p + aq = \quad 2a\psi'(y + ax), \end{cases}$$

φ' et ψ' désignant les dérivées de deux fonctions arbitraires φ et ψ.

Il s'ensuit, par une quadrature, l'intégrale générale classique de l'équation de la corde vibrante (14)

$$(19)\qquad z = \varphi(y - ax) + \psi(y + ax).$$

5. Lagrange, dans le Mémoire cité, avait de plus démontré l'existence des intégrales complètes premières à trois constantes arbitraires, dont on peut obtenir par la variation de constantes arbitraires les intégrales premières générales.

Étudions d'abord la forme générale des intégrales complètes premières contenant trois ou plus de trois constantes arbitraires.

Considérons, donc, une intégrale complète première d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, définie par l'équation de la forme suivante

$$(20)\qquad \mathcal{F}(x, y, z, p, q, C_1, C_2, C_3) = 0,$$

impliquant trois constantes arbitraires C_1, C_2, C_3.

D'après la définition même de l'intégrale complète première, l'équation (20) doit satisfaire aux conditions suivantes. Composons tout d'abord les deux équations dérivées du premier ordre de (20) par rapport à x et y, à savoir

$$(21)\qquad \begin{cases} \mathcal{F}'_x \equiv \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} p + \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} r + \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} s = 0, \\ \mathcal{F}'_y \equiv \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} q + \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} s + \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} t = 0, \end{cases}$$

r, s et t désignant les dérivées secondes correspondantes $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Pour que l'équation (20) soit l'intégrale complète première d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, cette dernière doit s'obtenir par l'élimination de toutes les trois constantes C_1, C_2, C_3 entre les trois équations (20) et (21). Analytiquement la condition requise va s'exprimer par l'égalité

$$D\left(\frac{\mathcal{F}, \mathcal{F}'_x, \mathcal{F}'_y}{C_1, C_2, C_3}\right) = 0, \tag{22}$$

le symbole du premier membre de cette dernière égalité (22) désignant le déterminant fonctionnel des trois fonctions F, F'_x, F'_y, pris par rapport à C_1, C_2 et C_3.

Considérons, en second lieu, l'équation à quatre constantes arbitraires C_1, C_2, C_3 et C_4

$$\mathcal{F}(x, y, z, p, q, C_1, C_2, C_3, C_4) = 0. \tag{23}$$

Pour que cette dernière représente l'intégrale complète première d'une équation donnée aux dérivées partielles du second ordre, cette dernière doit s'obtenir comme résultat de l'élimination des quatre constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, C_4 entre l'équation (23) et ces deux équations

$$\mathcal{F}'_x = 0, \qquad \mathcal{F}'_y = 0, \tag{24}$$

leurs premiers membres étant définis d'une manière analogue aux équations antérieures (21).

Il s'ensuit que les conditions de la forme suivante doivent avoir lieu

$$D\left(\frac{\mathcal{F}, \mathcal{F}'_x, \mathcal{F}'_y}{C_1, C_2, C_3}\right) = 0, \qquad D\left(\frac{\mathcal{F}, \mathcal{F}'_x, \mathcal{F}'_y}{C_1, C_2, C_4}\right) = 0. \tag{25}$$

Enfin, considérons l'équation

$$\mathcal{F}(x, y, z, p, q, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = 0, \tag{26}$$

à cinq constantes arbitraires. Pour que cette dernière représente l'intégrale complète première d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, l'élimination de deux constantes arbitraires quelconques parmi C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 entre l'équation (26) et ses deux dérivées

$$\mathcal{F}'_x = 0, \qquad \mathcal{F}'_y = 0,$$

produit l'équation indépendante de toutes les autres constantes.

Le résultat obtenu, étant l'équation aux dérivées partielles, la relation (26) en est une intégrale complète première à cinq constantes arbitraires. Pour cela les trois conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$(27) \quad D\left(\frac{\mathcal{F}, \mathcal{F}'_x, \mathcal{F}'_y}{C_1, C_2, C_3}\right) = 0, \qquad D\left(\frac{\mathcal{F}, \mathcal{F}'_x, \mathcal{F}'_y}{C_1, C_2, C_4}\right) = 0, \qquad D\left(\frac{\mathcal{F}, \mathcal{F}'_x, \mathcal{F}'_y}{C_1, C_2, C_5}\right) = 0.$$

Les conditions qui viennent d'être établies (22), (25) et (27) définissent respectivement les intégrales complètes premières à trois, à quatre et à cinq constantes arbitraires. Il est aisé de les distinguer d'une part en intégrales *régulières* et d'un autre côté en *spéciales*. On le fera en leur appliquant les considérations analogues à celles que l'on avait introduit au n° **3** concernant les intégrales complètes. S'il est possible d'introduire un nouveau système des constantes arbitraires distinctes dans les intégrales (20), (23) et (26) d'une telle manière que le nombre de nouvelles constantes se réduit à deux constantes distinctes, les intégrales correspondantes obtenues seront dites de la forme *spéciale*.

6. Les considérations exposées permettent de donner une nouvelle méthode pour la composition des intégrales premières générales, sans transformer l'intégrale complète, comme on l'avait fait antérieurement au n° **3**.

En effet, reprenons l'intégrale complète (13), du n° **4**,

$$z = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \frac{\alpha_4}{a^2} y^2$$

de l'équation aux dérivées partielles de la corde vibrante (14).

Écrivons les deux équations aux dérivées partielles du premier ordre prises par rapport à x et à y de cette dernière équation.

En combinant les deux dernières équations dérivées, on en tire immédiatement deux intégrales complètes premières, chacune à quatre constantes arbitraires, à savoir

$$(28)\quad \begin{cases} p - aq = a\alpha_3 - \alpha_2 + \dfrac{a\alpha_5 - 2\alpha_4}{a}(y - ax), \\ p + aq = a\alpha_3 + \alpha_2 + \dfrac{a\alpha_5 + 2\alpha_4}{a}(y + ax). \end{cases}$$

Il est aisé de s'en persuader, par l'élimination des constantes arbitraires de chacune des formules (28) à part, que chacune des équations (28) est vraiment une intégrale complète première à quatre constantes arbitraires. Il va sans dire que ces dernières intégrales sont bien de la forme *spéciale*. On voit de suite que toutes les deux se réduisent à celles à deux constantes arbitraires distinctes, si l'on prend pour nouvelles constantes arbitraires dans la première (28) les expressions

$$a\alpha_3 - \alpha_2, \quad \frac{a\alpha_5 - 2\alpha_4}{a},$$

et, dans la seconde intégrale (28), les valeurs

$$a\alpha_3 + \alpha_2, \quad \frac{a\alpha_5 + 2\alpha_4}{a}.$$

On en tire, donc, les deux intégrales premières générales, obtenues antérieurement au n° **4**, à savoir

$$\begin{aligned} p - aq &= -2a\,\varphi'(y - ax), \\ p + aq &= 2a\,\psi'(y + ax). \end{aligned}$$

C'est ainsi que l'on parvient, par une autre méthode, à former l'intégrale générale de l'équation différentielle de la corde vibrante, en partant de son intégrale complète.

7. Les transformations du numéro précédent sautent aux yeux d'elles-mêmes. Or, ce n'est pas toujours le cas. Mais on pourrait alors essayer *une autre méthode*.

En abandonnant l'idée de la formation des intégrales complètes premières à deux constantes arbitraires, on tachera de composer immédiatement l'intégrale générale première, au moyen d'une intégrale complète première à un *nombre quelconque* de constantes arbitraires.

Considérons, par exemple, l'équation eulérienne

$$r - t = -\frac{2p}{x}. \tag{29}$$

L'intégrale complète de cette dernière équation a été donnée par M. N. Saltykow [1], sous la forme suivante

$$z = C_1 y(x^2 + y^2) + C_2\left(\frac{x^2}{3} + y^2\right) + \frac{C_3}{x} + C_4 y + C_5. \tag{30}$$

C'est bien une intégrale régulière. Or on forme aisément, en vertu des deux équations dérivées du premier ordre de l'intégrale (30), deux intégrales complètes premières suivantes, chacune à quatre constantes arbitraires,

$$\left\{\begin{array}{l} xp + xq + z - C_1(x+y)^3 - C_2(x+y)^2 - C_4(x+y) - C_5 = 0, \\ xp - xq + z + C_1(x-y)^3 - C_2(x-y)^2 + C_4(x-y) - C_5 = 0. \end{array}\right. \tag{31}$$

On s'en persuade aisément par un calcul très simple.

Démontrons, à présent, comment on peut appliquer la méthode de la variation des constantes arbitraires, aux intégrales complètes premières dont le nombre des constantes arbitraires dépassent trois, pour obtenir les intégrales premières générales. Considérons à cet effet, sauf une, toutes les autres constantes arbitraires comme fonctions arbitraires de cette première constante.

Appliquons ce procédé à la première des intégrales (31), en posant

$$C_2 = \xi(C_1), \qquad C_4 = \eta(C_1), \qquad C_5 = \zeta(C_1), \tag{32}$$

ξ, η et ζ désignant des fonctions arbitraires de C_1.

L'intégrale (31) considérée prend la forme suivante

$$xp + xq + z - C_1(x+y)^3 - \xi(C_1)(x+y)^2 - \eta(C_1)(x+y) - \zeta(C_1) = 0. \tag{33}$$

---

[1] N. Saltykow, *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg. Classe des Sciences*, 5e série, t. **18**, 1932, n° **10**, p. 817).

La dérivée de cette équation, par rapport à C_1, devient donc

$$-(x+y)^3 - \xi'(C_1)(x+y)^2 - \eta'(C_1)(x+y) - \zeta'(C_1) = 0. \tag{34}$$

Or, cette dernière relation obtenue démontre que C_1 est une fonction arbitraire quelconque de l'argument $x+y$, que l'on va écrire

$$C_1 = \theta(x+y), \tag{35}$$

θ désignant la fonction arbitraire.

Substituons, maintenant, cette valeur (35) dans l'équation (33), en remplaçant tous les termes à fonctions arbitraires de $x+y$ par une désignation unique.

L'équation (33) prend, alors, la forme d'une intégrale générale première de l'équation étudiée (29)

$$xp + xq + z = 2\varphi'(x+y), \tag{36}$$

φ' étant la dérivée d'une fonction arbitraire φ de $x+y$.

On obtient, par un procédé analogue, en partant de l'autre intégrale complète première (31), la seconde intégrale générale première de l'équation (29) sous la forme suivante

$$xp - xq + z = 2\psi'(x-y), \tag{37}$$

ψ' désignant la dérivée d'une seconde fonction arbitraire ψ de $x-y$.

Grâce à deux intégrales générales premières (36) et (37), il s'ensuit, par une quadrature, l'intégrale générale de l'équation (29)

$$z = \frac{1}{x}[\varphi(x+y) + \psi(x-y)],$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires.