

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HENRI PONCIN

**Sur les équations du mouvement d'un milieu continu dans le cas
de discontinuités stationnaires relatives à la densité**

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 18 (1939), p. 385-404.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18_385_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur les équations du mouvement d'un milieu continu
dans le cas de discontinuités stationnaires relatives
à la densité;*

PAR HENRI PONCIN.

Nous nous proposons d'établir les conditions vérifiées par les vitesses des différentes particules d'un milieu continu en mouvement dans le cas où il existe, relativement à la densité, une surface de discontinuité de forme stationnaire. Les équations que nous obtenons à la fin de cette étude sont applicables à la recherche des potentiels de stabilité pour une discontinuité du type précédent et à certaines questions importantes de la théorie des cavitations.

Après avoir précisé les notations et les hypothèses, nous établissons les équations qui permettent de déterminer la surface de discontinuité à l'instant t , puis nous étudions l'influence de l'invariance géométrique de cette surface sur la forme de la solution. Nous obtenons ainsi des résultats locaux qui ne sont valables que dans le voisinage immédiat de la discontinuité. Nous pouvons néanmoins, grâce à une transformation géométrique convenable, réaliser le prolongement analytique des fonctions qui sont liées au champ hydrodynamique, en dehors de ce champ lui-même, dans des domaines où elles cessent d'avoir une signification physique. Ce prolongement nous permet d'assurer, dans des conditions très générales, l'existence des fonctions dérivées jusqu'à un ordre déterminé et de ramener le problème à la formation et à l'étude d'un système différentiel qui pourra être envisagé directement dans les questions que nous avons indiquées ci-dessus.

1. NOTATIONS. — Au cours des calculs nous aurons à utiliser différents systèmes de référence :

1° Un trièdre $\mathcal{C}_0[OX, X_2, X_3]$ de direction fixe qui permettra de définir le mouvement d'ensemble des fluides et, éventuellement, des surfaces solides limites S.

2° Un trièdre $\mathcal{C}_1(ox, x_2, x_3)$ invariablement lié aux surfaces S qui permettra de définir les mouvements relatifs des particules fluides et les déformations du milieu continu.

3° Une famille de trièdres mobiles $\mathcal{C}(M|t)$ attachés aux différents éléments qui constituent la masse fluide en mouvement, définis à l'instant t par les vecteurs unitaires $\vec{s}_1(M|t)$, $\vec{s}_2(M|t)$ et $\vec{s}_3(M|t)$ respectivement dirigés suivant la tangente, la normale principale et la binormale aux lignes de flux du champ des vitesses $\vec{V}(M|t)$.

Nous désignerons par $\vec{\gamma}(t)$ l'accélération du point principal O lié à S, par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, ses composantes relatives au trièdre \mathcal{C}_0 , par $\vec{\omega}(t)$ ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$) la rotation instantanée du trièdre \mathcal{C}_1 à l'instant t .

Pour les opérateurs différentiels qui s'introduisent dans les calculs nous adoptons les notations suivantes :

$$D. = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$\nabla(U, V) = \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial U}{\partial x_3} \frac{\partial V}{\partial x_3};$$

$$\nabla U = \nabla(U, U);$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}.$$

2. HYPOTHÈSES RELATIVES AUX FONCTIONS DONT DÉPEND LE PROBLÈME AU POINT DE VUE ANALYTIQUE. — Le milieu étudié est limité par une surface indéformable S formant un continu qui peut être défini relativement au trièdre \mathcal{C}_1 par une fonction des variables (x). Nous supposons de plus qu'à l'instant t , existe une surface de discontinuité relativement à la densité. Cette surface satisfait, au point de vue géométrique, aux conditions suivantes :

1° Il existe un plan tangent en chacun de ses points;

2° L'angle des normales en deux de ses points situés à la distance r l'un de l'autre est inférieur à kr^λ [$0 < \lambda \leq 1$] et il existe un nombre d , tel que les parallèles à la normale en M coupent en un point au plus la portion de surface intérieure à la sphère σ de centre M et de rayon d , le nombre d étant indépendant du point M considéré. On sait que dans les conditions que nous venons de préciser, l'équation de la surface considérée à l'intérieur de la sphère est de la forme

$$L(x_1 x_2 x_3 | t) = 0,$$

et la fonction $x_3(x_1, x_2 | t)$ définie par cette équation possède des dérivées à l'intérieur de la sphère σ .

Au point de vue cinématique la surface L prise dans son ensemble divise le milieu continu en deux régions D_1 et D_2 . Dans chacune de ces régions la densité peut être considérée comme constante et le mouvement irrotationnel admet un plan directeur. Lorsqu'on traverse la surface S, la densité subit une variation brusque $\Delta\rho$.

3. ÉQUATIONS DU PROBLÈME. — Les conditions cinématiques précisées au paragraphe précédent s'expriment analytiquement par les relations

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \overrightarrow{\text{Div}} U = 0, \\ (2) \quad \overrightarrow{\text{Rot}} U = -2\omega(t), \\ (3) \quad \vec{u} \wedge \vec{x}_3 = 0, \end{array} \right.$$

valables dans le domaine $D = D_1 + D_2$ relatif à la variable (x) et dans l'intervalle (t_0, t_1) relatif à la variable t .

S et L étant surfaces limites on a

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} (4) \quad S(\vec{x} + \vec{u} dt) = 0, \\ (5) \quad L(\vec{x} + \vec{u} dt | t + dt) = 0. \end{array} \right.$$

Enfin, la pression, déterminée par les conditions classiques, doit prendre une succession de valeurs, continue au passage à travers L.

En considérant un déplacement infiniment petit normal en M à la surface L (l'existence d'une normale bien définie aux différents points de L est assurée dans les conditions du paragraphe 2), nous obtenons

la relation

$$(III) \quad (6) \quad \lim_{r \rightarrow 0} [p(\vec{x}(L) + r\vec{n}(L)) - p(\vec{x}(L) - r\vec{n}(L))] = 0.$$

Les équations du groupe (I) permettent de définir le champ de vitesses par une équation de la forme

$$(7) \quad \vec{u}(\mathbf{M}|t) = \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \vec{x}_1(t) - \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \vec{x}_2(t) + \omega_3(t) \vec{M} \wedge \vec{x}_3(t) \\ - 2x_3 [\omega_2(t) \vec{x}_1(t) - \omega_1(t) \vec{x}_2(t)],$$

où Ω est une fonction des variables x_1, x_2 et de la variable t définie en tout point (x) intérieur à S et satisfaisant dans le domaine de ce point à l'équation

$$(8) \quad \Delta \Omega = 0.$$

Désignons d'autre part par $F(x|t)$ la fonction scalaire

$$(9) \quad F(x|t) = \Omega(x|t) - 2\omega_1(t)x_1x_3 - 2\omega_2(t)x_2x_3 + \omega_3(t) \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

Nous pouvons mettre les équations du groupe (II) sous la forme

$$(10) \quad \frac{\partial F}{\partial s_1(S)} = 0,$$

$$(11) \quad \frac{\partial F}{\partial s_1(L)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta L}} \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Le champ de vitesses étant ainsi défini, nous déduirons la répartition des pressions dans le domaine fluide D intérieur à S au moyen des équations classiques de l'hydrodynamique. Les forces extérieures se composent de certaines forces dérivant d'un potentiel U variable suivant la nature du problème étudié, de la force d'inertie composée $2\vec{u} \wedge \vec{\omega} dm$ et de la force d'inertie d'entraînement

$$-\vec{\gamma}(0) + \vec{M} \wedge \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \omega^2 \vec{M}.$$

Introduisons maintenant les fonctions $G(\vec{x}|t)$ et $\bar{\Omega}(\vec{x}|t)$ définies

par

$$(12) \quad G(\vec{x}|t) = \omega_2^2(t)x_1^2 + \omega_1^2(t)x_2^2 - 3[\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)]x_3^2 \\ + 2\left(\omega_2\omega_3 - \frac{d\omega_1}{dt}\right)x_2x_3 + 2\left(\omega_3\omega_1 + \frac{d\omega_2}{dt}\right)x_3x_1 - 2\omega_1\omega_2x_1x_2;$$

$$(13) \quad \overrightarrow{\text{grad}}[\overline{\Omega}(\vec{x}|t)] = \overrightarrow{\text{grad}}[\Omega(\vec{x}|t)] \wedge \vec{x}_3.$$

Nous écrivons l'équation de pression sous la forme

$$(14) \quad \frac{p(\vec{x}|t)}{\rho} = p_0(t) + U(\vec{x}|t) - \frac{\partial}{\partial t}\overline{\Omega}(\vec{x}|t) - \vec{\gamma}(t) \cdot \vec{x} \\ - \frac{1}{2}\nabla\Omega + [2x_3\vec{\omega}(t) - \omega_3(t)\vec{x}] \overrightarrow{D}\Omega(\vec{x}|t) + \frac{1}{2}G(\vec{x}|t).$$

L est une surface de discontinuité et dans les hypothèses du paragraphe 2 les parallèles au vecteur $\vec{n}[M(L)]$ coupent en un point au plus la portion de surface intérieure à la sphère de centre M et de rayon d . Il en résulte que pour tout nombre positif δ inférieur à d nous pouvons écrire

$$(15) \quad \rho(\vec{M} + \delta\vec{n}) = \rho_1,$$

$$(16) \quad \rho(\vec{M} - \delta\vec{n}) = \rho_2.$$

La surface L divise le domaine D en deux domaines distincts D_1 et D_2 . D_1 a pour ensemble frontière $S + L$. D_2 est le domaine intérieur à L. La normale en M à la surface S est supposée dirigée vers l'intérieur du domaine D_1 . Nous pouvons, dans ces conditions, définir une fonction $\Omega_1(\vec{x}|t)$ harmonique dans D_1 et une fonction $\Omega_2(\vec{x}|t)$ harmonique dans D_2 , liées au champ des vitesses par les relations

$$(17) \quad \vec{u}[\vec{x}(D_1)|t] = \overrightarrow{\text{grad}}\Omega_1(\vec{x}|t) - \vec{x} \wedge \vec{\omega}_3(t) + 2\vec{\omega}(t) \wedge \vec{x}_3,$$

$$(18) \quad \vec{u}[\vec{x}(D_2)|t] = \overrightarrow{\text{grad}}\Omega_2(\vec{x}|t) + \vec{\omega}_3(t) \wedge \vec{x} + 2\vec{\omega}(t) \wedge \vec{x}_3.$$

D'après (6), (15) et (16), nous pouvons, d'autre part, écrire la relation (19) valable en tout point M de la surface de discontinuité L

$$(19) \quad p_0(t) + \rho_1 \frac{\partial \overline{\Omega}_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \overline{\Omega}_2}{\partial t} + \frac{\rho_1}{2}\nabla\Omega_1 - \frac{\rho_2}{2}\nabla\Omega_2 \\ + (\rho_1 - \rho_2) \left[\vec{u}(\vec{x}|t) - \vec{\gamma}(t) \cdot \vec{x} + \frac{1}{2}F(\vec{x}|t) \right] \\ + [\omega_3(t)\vec{x} - 2x_3\vec{\omega}(t)] [\rho_1 \overrightarrow{D}\Omega_1 - \rho_2 \overrightarrow{D}\Omega_2] = L(\vec{x}|t).$$

En portant cette expression de $L(\vec{x}|t)$ dans l'équation (11) nous obtenons une condition relative à la fonction $\Omega(\vec{x}|t)$ valable en un point quelconque M de L. Cette condition, jointe à la condition (10) relative à la frontière indéformable S du domaine D, doit permettre la détermination de la surface de discontinuité à l'instant t , compte tenu des conditions initiales qui expriment qu'à un instant déterminé t_0 la surface de discontinuité a une forme et une position déterminée, tandis que les fonctions $\Omega_1(\vec{x}|t)$ et $\Omega_2(\vec{x}|t)$ se réduisent pour $t = t_0$ à des fonctions du point \vec{x} qui sont parfaitement définies dans les domaines $D_1(t_0)$ et $D_2(t_0)$.

A. ÉTUDE DES MOUVEMENTS POUR LESQUELS LA SURFACE DE DISCONTINUITÉ EST INVARIANTE. — Si la surface L est de forme stable, la variable t ne figure pas explicitement dans l'équation qui la définit. On peut donc intégrer à chaque instant t les équations (10) et (11) par rapport aux variables d'espace et en tenant compte de la définition des fonctions Ω_1 et Ω_2 mettre ces conditions sous la forme

$$(20) \quad \Omega_1(\vec{x}|t) = q_1(x_3|t) + 2\omega_1(t)x_1x_3 + 2\omega_2(t)x_2x_3 - \omega_3(t)\frac{x_1^2 + x_2^2}{2},$$

valable en tout point de l'ensemble frontière S et

$$(20_1) \quad \Omega_1(\vec{x}|t) = q_2(x_3|t) + 2\omega_1(t)x_1x_3 + 2\omega_2(t)x_2x_3 - \omega_3(t)\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

$$(20_2) \quad \Omega_2(\vec{x}|t) = q_3(x_3|t) + 2\omega_1(t)x_1x_3 + 2\omega_2(t)x_2x_3 - \omega_3(t)\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

valable en tout point de l'ensemble frontière L.

Nous définissons ainsi trois fonctions $q_1(x_3|t)$, $q_2(x_3|t)$ et $q_3(x_3|t)$ qui ont, remarquons-le en passant, une signification physique très simple. Considérons en effet les lignes de courant qui sont situées à l'instant t dans le plan de cote x_3 et à partir du point dont la vitesse relative est nulle traçons une section normale aux lignes de courant. On vérifie sans peine que la quantité de fluide qui passe à travers cette section entre les instants t et $t + dt$ a pour valeur

$$(21) \quad [\rho_1(q_2 - q_1) + \rho_2q_3] dt.$$

Les fonctions Ω_1 et Ω_2 sont des fonctions harmoniques respectivement

définies dans les domaines D_1 et D_2 , et les équations (20), (20₁), (20₂) donnent les valeurs que prennent ces fonctions sur les frontières des domaines D_1 et D_2 . Par suite, si nous négligeons une fonction de x_3 et de t sans importance puisque les dérivées partielles en x_1 et x_2 figurent seules dans les relations qui lient ces fonctions au champ des vitesses, les fonctions dont il s'agit sont parfaitement définies à chaque instant et en chacun des points intérieurs aux domaines D_1 et D_2 .

En désignant par $G_1(x_1, x_2)$ et par $G_2(x_1, x_2)$ les fonctions de Green des domaines D_1 et D_2 , nous pouvons écrire la solution du problème sous la forme

$$(22) \quad \begin{aligned} \Omega_1(x|t) = & 2\omega_1(t)x_1x_3 + 2\omega_2(t)x_2x_3 \\ & - \frac{1}{2}\omega_3(t)\left[x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{\pi}\iint_{D_1(x_3|t)} G_1(x_1, x_2|\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2\right] \\ & + \oint_S q_1(x_1, x_2, x_3|t) \frac{\partial G_1}{\partial s_2} \partial S_1 - \oint_L q_2(x_1, x_2, x_3|t) \frac{\partial G_1}{\partial s_2} ds_1; \end{aligned}$$

$$(23) \quad \begin{aligned} \Omega_2(x|t) = & 2\omega_1(t)x_1x_3 + 2\omega_2(t)x_2x_3 - \frac{\omega_3(t)}{2}[x_1^2 + x_2^2] \\ & + \frac{1}{2\pi}\omega_3(t)\iint_{D_2(x_3|t)} G_2(x_1, x_2|\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 \\ & + \oint_L q_3(x_3|t) \frac{\partial G_2}{\partial s_2} ds_1. \end{aligned}$$

5. EXPRESSION ANALYTIQUE DU CHAMP HYDRODYNAMIQUE ET DÉTERMINATION DES CONDITIONS AUX LIMITES. — Les expressions des fonctions Ω_1 et Ω_2 telles que nous les avons données dans le paragraphe précédent en faisant intervenir les fonctions de Green ont l'avantage de montrer de façon immédiate la manière dont les diverses variables de temps et d'espace figurent dans la solution du problème. Si nous ne connaissons pas les domaines D_1 et D_2 nous savons tout au moins que la variable de temps ne figure pas dans l'expression des fonctions de Green G_1 et G_2 . Il résulte de là que les fonctions Ω_1 et Ω_2 sont de la forme

$$(24) \quad \begin{aligned} \Omega_1(\vec{x}|t) = & 2\omega_1(t)x_1x_3 + 2\omega_2(t)x_2x_3 \\ & + \omega_3(t)\Omega_{11}(x_1, x_2) + q_1(x_3|t)\Omega_{12}(x_1, x_2) \\ & + q_2(x_3|t)\Omega_{13}(x_1, x_2); \end{aligned}$$

$$(25) \quad \begin{aligned} \Omega_2(\vec{x}|t) = & 2\omega_1(t)x_1x_3 + 2\omega_2(t)x_2x_3 \\ & + \omega_3(t)\Omega_{21}(x_1, x_2) + q_3(x_3|t)\Omega_{22}(x_1, x_2); \end{aligned}$$

Les fonctions $\Omega_{11}(x_1, x_2)$, $\Omega_{12}(x_1, x_2)$, $\Omega_{13}(x_1, x_2)$, $\Omega_{21}(x_1, x_2)$, $\Omega_{22}(x_1, x_2)$ sont exprimées dans les formules (21), (22), (23) au moyen des fonctions de Green $G_1(x|\xi)$ et $G_2(x|\xi)$ des domaines D_1 et D_2 . En écrivant que ces fonctions ne dépendent pas de la variable x_3 nous obtenons

$$(26) \quad 2\omega_1(t)x_1 + 2\omega_2(t)x_2 + \frac{\partial q_1}{\partial x_3}\Omega_{12}(x_1, x_2) + \frac{\partial q_2}{\partial x_3}\Omega_{13}(x_1, x_2) = 0;$$

$$(27) \quad 2\omega_1(t)x_1 + 2\omega_2(t)x_2 + \frac{\partial q_3}{\partial x_3}(x_3|t)\Omega_{22}(x_1, x_2) = 0.$$

Ces relations doivent être identiquement vérifiées par toutes les valeurs de x_1, x_2, x_3 , et de t situées à l'intérieur d'un certain domaine d'étendue finie. Une deuxième dérivation par rapport à x_3 conduit aux conditions

$$(28) \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_3^2}(x_3|t)\Omega_{12}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_3^2}(x_3|t)\Omega_{13}(x_1, x_2) = 0;$$

$$(29) \quad \frac{\partial^2 q_3}{\partial x_3^2}(x_3|t)\Omega_{22}(x_1, x_2) = 0.$$

Les variables (x_1, x_2) d'une part, les variables (x_3, t) d'autre part, constituent deux groupes indépendants. Les fonctions $\Omega_{ij}(x_1, x_2)$ satisfont aux conditions limites sur S

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad \Omega_{11} = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \\ 2. \quad \Omega_{12} = 1, \\ 3. \quad \Omega_{13} = 0; \end{array} \right.$$

et sur L

$$(31) \quad \Omega_{11} = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2},$$

$$(32) \quad \Omega_{12} = 0,$$

$$(33) \quad \Omega_{13} = 1.$$

Il est par suite impossible que l'on puisse écrire dans un domaine (x) d'étendue finie une relation de la forme

$$(34) \quad \Omega_{12} = C\Omega_{13},$$

où C a une valeur constante, car une telle relation ne saurait être vérifiée sur les frontières du domaine. La condition (28) entraîne donc

nécessairement

$$(35) \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_3^2} = 0.$$

D'où l'on déduit

$$(36) \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_3} = q'_1(t),$$

$$(37) \quad \frac{\partial q_2}{\partial x_3} = q'_2(t)$$

et

$$(38) \quad 2\omega_1(t)x_1 + 2\omega_2(t)x_2 + q'_1(t)\Omega_{12}(x_1, x_2) + q'_2(t)\Omega_{13}(x_1, x_2) = 0.$$

Les fonctions qui figurent dans la relation (38) se rapportent à deux groupes de variables indépendantes : variable t (domaine de variation t_0, t_1), variable (x) (domaine de variation $D_1 + D_2$). Il existe donc nécessairement un certain nombre de relations linéaires entre des fonctions de chaque groupe convenablement associées. Les conditions aux limites relatives aux fonctions Ω_{12} et Ω_{13} montrent qu'il n'existe aucune relation linéaire entre les fonctions du 2^e groupe. On en déduit la condition nécessaire

$$(39) \quad \omega_1(t) = \omega_2(t) = q'_1(t) = q'_2(t) = 0.$$

Mais chacune des fonctions Ω_1 et Ω_2 n'est définie qu'à une fonction de (t) près. On peut donc, sans rien changer au résultat final, supposer que les fonctions $q_2(t)$ et $q_3(t)$ sont nulles. L'expression définitive des fonctions Ω_1 et Ω_2 s'écrit dans ces conditions

$$(40) \quad \begin{cases} \Omega_1(x_1, x_2|t) = \omega_3(t)\Omega_{11}(x_1, x_2) + q(t)\Omega_{12}(x_1, x_2), \\ \Omega_2(x_1, x_2|t) = \omega_3(t)\Omega_{21}(x_1, x_2), \end{cases}$$

où Ω_{11} , Ω_{12} et Ω_{21} s'expriment comme on sait [formules (22) et (23)] au moyen des fonctions de Green des domaines D_1 et D_2 .

Si nous portons les expressions de $\Omega_1(x_1, x_2|t)$ et de $\Omega_2(x_1, x_2|t)$ dans l'équation (19), qui exprime la continuité des pressions au voisinage de la surface L , nous obtenons la relation

$$(41) \quad U(M|t) = \sum_i h_i(x) g_i(t),$$

où les fonctions h sont des fonctions de \vec{x} définies en tout point de L et où les fonctions g_i sont des fonctions du temps définies dans un intervalle d'amplitude finie t_0, t_1 . Ces 18 fonctions sont explicitement données dans le tableau suivant.

Valeur de i .	Expression de la fonction g_i .	Expression de la fonction h_i .
1...	$g(t)$	1
2...	$\omega^2(t)$	$\frac{1}{2(\rho_1 - \rho_2)} [\rho_1 \nabla \Omega_{11} - \rho_2 \nabla \Omega_{21} + 2\rho_1 \vec{x} \cdot \vec{\Delta} \Omega_{11} - 2\rho_2 \vec{x} \cdot \vec{\Delta} \Omega_{21}]$
3...	$2q(t)\omega(t)$	$\frac{\rho_1}{2(\rho_1 - \rho_2)} [\nabla(\Omega_{11}\Omega_{12}) + \vec{x} \cdot \vec{\Delta} \Omega_{12}]$
4...	$q^2(t)$	$\frac{\rho_1}{2(\rho_1 - \rho_2)} \nabla \Omega_{12}$
5...	$\frac{d\omega}{dt}$	$\frac{1}{\rho_1 - \rho_2} [\rho_1 \bar{\Omega}_{11} - \rho_2 \bar{\Omega}_{21}]$
6...	$\frac{dq}{dt}$	$\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} \bar{\Omega}_{12}$
7...	$\gamma_1(t)$	$x_1[M(L)]$
8...	$\gamma_2(t)$	$x_2[M(L)]$
9...	$\gamma_3(t)$	$x_3[M(L)]$

Les fonctions h_i ne sont définies par le tableau précédent que pour les points de L section de la surface de discontinuité par le plan x_3 . Une condition relative à ces fonctions ne peut donc fournir qu'un résultat local, et il faut déduire de ces résultats locaux des conséquences valables dans tout le domaine d'existence des potentiels. Nous y parviendrons en utilisant la propriété des transformations par image à travers une courbe analytique.

6. PRINCIPE DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES POTENTIELS HYDRODYNAMIQUES DANS DES DOMAINES OU ILS CESSENT D'AVOIR UNE SIGNIFICATION PHYSIQUE. — Considérons, dans le plan z , le champ vectoriel $u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)$ associé à L par l'équation

$$L(x_1 + iu_1, x_2 + iu_2) = 0.$$

A chaque point $I(x_1, x_2)$ du plan sont attachés deux vecteurs opposés IP_1, IP_2 , dont les composantes ont pour valeur (u_1, u_2) et $(-u_1, -u_2)$.

La rotation $R\left(1 \left| \frac{\pi}{2} \right. \right)$ transforme les points P_1, P_2 en deux points M_1, M_2 , qui sont dits images l'un de l'autre à travers L . Le champ vectoriel (u_1, u_2) satisfait aux conditions

$$\vec{\text{Div}} V = 0, \quad \frac{D(u_1, u_2)}{D(x_1, x_2)} = 1,$$

que l'on obtient en écrivant que $x_2 + iu_2$ est fonction analytique de $x_1 + iu_1$. La transformation par images conserve les angles, mais change leur sens d'orientation. De plus, la courbe L est invariante par cette transformation. L'imaginaire conjuguée de $z(M_2)$ est donc une fonction analytique de $z(M_1)$. Nous désignerons cette fonction par la notation ζ

$$\bar{z}(M_2) = \zeta[z(M_1)].$$

En posant

$$\begin{aligned} 2\Omega_{11}(x_1, x_2) &= - \left[\frac{z\zeta}{2} + U_{11}(z) \right] - \left[\frac{z'\zeta'}{2} + U'_{11}(z) \right], \\ 2\Omega_{12}(x_1, x_2) &= - [U_{12}(z) + U'_{12}(z)], \\ 2\Omega_{21}(x_1, x_2) &= - \left[\frac{z\zeta}{2} + U_{21}(z) \right] - \left[\frac{z'\zeta'}{2} + U'_{21}(z) \right], \end{aligned}$$

nous définissons trois fonctions $U_{11}(z), U_{12}(z), U_{21}(z)$ dont les conjuguées sont $U'_{11}, U'_{12}, U'_{21}$ et qui sont des fonctions analytiques en Z , les deux premières dans le domaine D_1 , la troisième dans le domaine D_2 et les parties réelles de chacune d'elles prennent des valeurs nulles sur un arc quelconque de L . Soient maintenant d et δ deux régions du plan z qui sont séparées l'une de l'autre par un arc de L et qui se correspondent par image à travers cette courbe au sens précisé au début du paragraphe. Si la fonction

$$z = H(u),$$

analytique en u pour les valeurs de u de module inférieur à l'unité, représente la courbe L lorsque u se déplace sur l'axe réel, les points

$$z_{m,n} = U_{m,n}(z) \quad \left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} = 1, 2 \right]$$

représentés dans le plan complexe décrivent pour ce déplacement des

portions L_{11} , L_{12} , L_{21} de l'axe des quantités imaginaires. Si les points $M_{m,n}$ et $\mu_{m,n}$ sont images l'un de l'autre à travers les segments $L_{m,n}$, nous pouvons écrire pour les valeurs considérées de u la relation

$$z_{m,n} + \zeta_{m,n} = 0.$$

Si nous donnons maintenant à u des valeurs complexes de module inférieur à l'unité, M décrit dans le plan une certaine région d et les points $M_{m,n}$ décrivent respectivement les régions associées $d_{m,n}$ qui sont contiguës aux segments $L_{m,n}$. Les images $\mu_{m,n}$ décrivent des régions $\delta_{m,n}$ contiguës aux mêmes segments. Par exemple, les points M , μ et μ_{11} se correspondent par l'intermédiaire des relations

$$\zeta = H'(u), \quad \zeta_{11} = U'_{11}[H'(u)].$$

Nous obtenons ainsi une correspondance point par point entre les quatre régions d , δ , d_{11} et δ_{11} . Par élimination du paramètre u entre les relations précédentes nous obtenons

$$z_{11} = \zeta_{11}\{z_{11}[z(\zeta)]\},$$

qui définit ζ_{11} à l'intérieur de d comme une fonction de ζ .

Sur l'axe imaginaire les deux fonctions ζ_{11} et U'_{11} sont égales et il en est de même des fonctions dérivées. Il résulte de là que la fonction ζ_{11} constitue le prolongement analytique de la fonction U'_{11} . Or, cette fonction n'était définie par le champ hydrodynamique qu'à l'intérieur du domaine D_1 . Les considérations qui précèdent vont nous permettre de la définir dans une région δ intérieure à D_2 . L'existence de ce prolongement analytique sera fondamentale pour la suite. Il nous sera d'ailleurs possible d'étendre le domaine δ à l'intérieur duquel la fonction $U_{11}(z)$ se trouve ainsi prolongée lorsque z reste une fonction analytique de ζ et ζ_{11} une fonction analytique de z_{11} . En particulier, si L est une courbe algébrique, on ne sera arrêté dans l'extension de δ que si cette région vient à contenir un foyer de L . Dans certains cas la région δ , ainsi prolongée, recouvrira le domaine D_2 tout entier.

Il est clair que des considérations en tout point analogues à celles que nous venons de faire relativement à la fonction $U_{11}(z)$ pourront être faites relativement au prolongement de la fonction $U_{12}(z)$ à l'intérieur du domaine D_2 et de la fonction $U_{21}(z)$ à l'intérieur du

domaine D_1 . Ces divers prolongements analytiques sont effectués par l'intermédiaire des formules

$$\begin{aligned} U'_{m,n}(\zeta) &= -U_{m,n}[z(\zeta)], \\ U_{m,n}(\zeta') &= -U'_{m,n}[z'(\zeta')], \end{aligned}$$

7. ÉTUDE DE LA TRANSFORMATION I(L). CONSÉQUENCES RELATIVES AUX POTENTIELS HYDRODYNAMIQUES. — Ces résultats étant acquis, revenons à la liaison qui existe entre les fonctions $U_{11}(z)$, $U_{12}(z)$ et $U_{21}(z)$ et le champ hydrodynamique. A l'intérieur du domaine D_1 cette liaison s'exprime par la relation

$$(56) \quad \omega(t) \left[\frac{dU_{11}}{dz} + \frac{1}{2} \left(\zeta + z \frac{d\zeta}{dz} \right) \right] + q(t) \frac{dU_{12}}{dz} = i\omega(M) + \omega(t)z'.$$

A l'intérieur du domaine D_2 elle s'exprime par

$$(57) \quad \omega(t) \left[\frac{dU_{21}}{dz} + \frac{1}{2} \left(\zeta + z \frac{d\zeta}{dz} \right) \right] = i\nu(M) + \omega(t)z'$$

Traçons à l'intérieur de D_1 une coupure γ qui joint les courbes frontières L et S. Soient P_0 et P_1 deux points qui ont même projection sur le plan z , mais qui sont situés de part d'autre de la coupure. A l'instant t , il existe une ligne de vecteurs du champ \vec{V} passant par P_0 . Il n'en existe qu'une. Après une circulation dans le sens direct de P_0 à P_1 la fonction Ω_{11} reprend la valeur qu'elle avait en P_0 , et si l'on va de P_0 à P_1 en suivant un chemin quelconque tracé dans D_1 , on revient sur la ligne de courant initiale. A l'instant t_m on a donc

$$(58) \quad \omega(t_m) [\Omega_{11}(P_1) - \Omega_{11}(P_0)] + q(t_m) [\Omega_{12}(P_1) - \Omega_{12}(P_0)] = 0.$$

Cette relation subsiste pour toutes les valeurs de t qui sont intérieures à l'intervalle (t_0, t_1) et pour toutes les valeurs de la variable qui définit la position du point P sur la coupure γ . Ces variables étant indépendantes, une telle relation suppose que l'on trouve dans l'un des deux cas suivants.

1^{er} cas :

$$\begin{aligned} q(t) &= C\omega(t) \quad [C \text{ const.}], \\ [\Omega_{11}(P_1) - \Omega_{11}(P_0)] + C [\Omega_{12}(P_1) - \Omega_{12}(P_0)] &= 0; \end{aligned}$$

2° cas :

$$\Omega_{11}(P_1) - \Omega_{11}(P_0) = 0,$$

$$\Omega_{12}(P_1) - \Omega_{12}(P_0) = 0.$$

Examinons successivement les deux hypothèses.

11. CAS OU LES FONCTIONS $\omega(t)$ ET $q(t)$ SONT LIÉES PAR UNE RELATION DE LA FORME $q(t) = C\omega(t)$. — On peut admettre que la fonction $q(t)$ est identiquement nulle. Ceci revient en effet à changer la définition de la fonction Ω à partir du champ hydrodynamique, mais ne modifie ni les raisonnements ni les résultats. Dans ce cas toutes les lignes de courant situées entre L et S restent invariables au cours du mouvement. On retombe dans ces conditions sur un problème qui a été étudié en détail dans une publication antérieure [H. PONCIN, *Sur les cavitations de forme permanente* (Service des recherches de l'Aéronautique, Publication n° 18, Gauthier-Villars et Blondel La Rougerie, 1933)]. Nous y renverrons pour les formules qui permettent d'explicitier le mouvement.

12. CAS OU LES FONCTIONS Ω_{11} ET Ω_{12} SONT UNIFORMES DANS LE DOMAINE D_1 . — Les équations

$$\Omega_{11}(P_1) - \Omega_{11}(P_0) = 0,$$

$$\Omega_{12}(P_1) - \Omega_{12}(P_0) = 0$$

expriment l'uniformité des fonctions Ω_{11} et Ω_{12} à l'intérieur du domaine D_1 . La condition

$$(76) \quad \omega(t) \left[\overrightarrow{\text{grad}} \Omega_{11}(P_0) - \overrightarrow{\text{grad}} \Omega_{11}(P_1) \right] + q(t) \left[\overrightarrow{\text{grad}} \Omega_{12}(P_0) - \overrightarrow{\text{grad}} \Omega_{12}(P_1) \right] = 0,$$

valable pour toutes les valeurs de t et toutes les positions du point P sur la coupure γ , montre de la même façon que les dérivées du premier ordre des fonctions Ω_{11} et Ω_{12} sont uniformes dans le domaine D_1 . Par suite une seule hypothèse est acceptable. C'est celle qui exprime qu'après une circulation dans le domaine D_1 muni de la coupure γ les fonctions conjuguées $\bar{\Omega}_{11}$ et $\bar{\Omega}_{12}$ prennent en P_1 les valeurs qu'elles avaient en P_0 augmentées des constantes cycliques réelles K_1 pour $\bar{\Omega}_{11}$ et K_2 pour $\bar{\Omega}_{12}$. La constante K_1 peut être nulle, mais la constante K_2 ne l'est certainement pas. Nous avons vu en effet que la fonction $\bar{\Omega}_{12}$ pouvait être prolongée analytiquement à travers L et se trouvait ainsi

définie dans une région $d + \delta$ renfermant L. Ceci nous permet de définir les dérivées normales des fonctions Ω , introduites au cours du raisonnement. Les valeurs extrêmes de la fonction $\Omega_{1,2}$ dans d et dans δ sont atteintes sur L. On a donc

$$\frac{\partial \Omega_{1,2}}{\partial s_2} \geq 0,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Omega}_{1,2}}{\partial s_2} &\geq 0, \\ \bar{\Omega}_{1,2}(P_1) - \bar{\Omega}_{1,2}(P_0) &\geq 0, \\ K_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

La constante cyclique K_2 ne peut être nulle que si la fonction $\bar{\Omega}_{1,2}$ est constante tout le long de L. Mais, dans ce cas, la fonction analytique $U_{1,2}(z)$ est constante sur un arc de longueur finie, et par suite elle est constante dans tout son domaine d'existence, ce qui ramène au cas précédent.

8. CONSTRUCTION DE LA SURFACE DE RIEMANN ASSOCIÉE AU CHAMP HYDRODYNAMIQUE ET DÉTERMINATION EFFECTIVE DES PROLONGEMENTS ANALYTIQUES DÉFINIS AU PARAGRAPHE 6. — Si les relations (46) et (47) font correspondre à chaque valeur de z n valeurs de ζ , nous considérerons la surface de Riemann Σ constituée par n feuillets plans superposés se raccordant le long des lignes qui joignent deux à deux les foyers de L.

La courbe S sera supposée tracée sur un des feuillets de cette surface que nous désignons par \mathcal{F}_1 . Le champ des vecteurs \vec{V}_1 sera défini à l'intérieur du domaine situé sur un feuillet de Σ et limité par les courbes L et S.

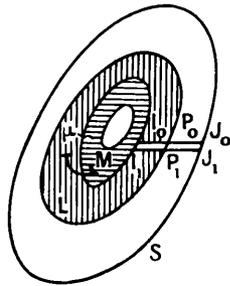
Deux points M et μ seront dits associés si leurs projections sur le plan simple sont images l'une de l'autre par rapport à L et si les points eux-mêmes viennent en coïncidence lorsque leurs projections se confondent.

Lorsque le point M décrit l'arc de la courbe L qui correspond au segment (a, b) de l'axe réel du plan u , le point associé μ décrit le même arc de courbe et les relations (43) permettent de trouver les valeurs des fonctions $U_{1,1}$, $U_{1,2}$ et $U_{2,1}$ et des dérivées successives au point M_0 .

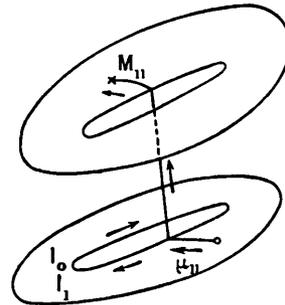
de l'arc en question. On a, en effet,

$$(79) \quad U_{11}(M_0) = i\bar{\Omega}_{11} = -\frac{1}{2}H(u_0)H'(u_0),$$

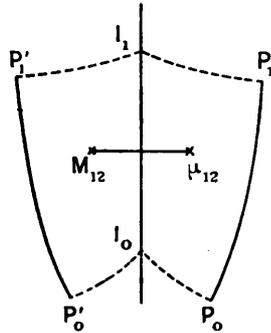
$$(80) \quad \left[\frac{dU_{11}}{dz} \right]_{u=u_0} = i \frac{\partial \bar{\Omega}_{11}}{\partial S_1} \left[\frac{dH'}{dH} \right]^{\frac{1}{2}}.$$



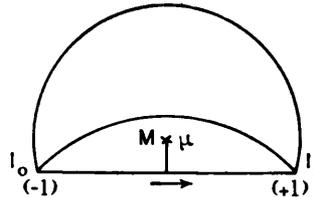
Régions d et δ



Régions d_u et δ_u



Régions d_{12} et δ_{12}



Régions d et $\delta(u)$

Or, on peut écrire d'autre part,

$$(81) \quad \frac{\partial \bar{\Omega}_{11}}{\partial s_2} = -\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial s_1} = \frac{1}{2} \left[H'(u_0) \left(\frac{dH'}{dH} \right)_{u=u_0}^{\frac{1}{2}} + H(u_0) \left(\frac{dH'}{dH} \right)_{u=u_0}^{\frac{1}{2}} \right].$$

La considération des fonctions $\Omega_{1,2}$ et Ω_2 , fournira deux relations analogues. Ceci posé, un calcul très simple nous conduira aux

relations suivantes :

$$(82) \quad \nabla \Omega_{11} = \frac{1}{4} \left[H^2(u) \frac{dH'}{dH} + H'^2(u) \frac{dH}{dH'} + 2H(u)H'(u) - \frac{dH}{dH'} \left(\frac{dU_{11}}{dz} \right)^2 \right],$$

$$(83) \quad \nabla \Omega_{12} = - \frac{dH}{dH'} \left(\frac{dU_{12}}{dz} \right)^2,$$

$$(84) \quad \nabla \Omega_{21} = \frac{1}{4} \left[H^2(u) \frac{dH'}{dH} + H'^2(u) \frac{dH}{dH'} + 2H(u)H'(u) - \frac{dH}{dH'} \left(\frac{dU_{21}}{dz} \right)^2 \right],$$

$$(85) \quad \nabla (\Omega_{11}, \Omega_{12}) = \frac{dU_{11}}{dz} \frac{dU_{12}}{dz} \frac{dH}{dH'},$$

$$(86) \quad \vec{x} \vec{D} \Omega_{11} = \frac{1}{2} \frac{du^2}{dH dH'} \left[\frac{d(HH')}{du} \vec{s}_2 + i \left(H' \frac{dH}{du} - H \frac{dH'}{du} \right) \vec{s}_1 \right].$$

Ces formules nous permettent de définir un élément de chacune des fonctions $U_{11}(z)$, $U_{12}(z)$ et $U_{21}(z)$. On a en effet

$$(87) \quad U_{11}(M_0) = i \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} h_3(u_0) + \frac{\rho_2}{\rho_1} U_{21}(M_0),$$

$$(88) \quad \left[\frac{d}{dz} U_{11} \right]_{M_0} = \left(\frac{dH'}{dH} \right)_{u=u_0} \left[\left(\frac{2 \Delta \rho}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{h_3(u_0)}{\sqrt{h_1(u_0)}} \left(\frac{dH'}{dH} \right)_{u=u_0}^{\frac{1}{2}} + \frac{H'_0}{2} - \frac{H_0}{2} \left(\frac{dH'}{dH} \right)_{u=u_0} \right].$$

Si nous posons

$$(89) \quad \left[\frac{dU_{11}}{dz} \right]_{M_0} = A_{11}^{(1)}(u_0)$$

définie par (88), nous aurons de proche en proche la valeur des dérivées successives de U_{11} en utilisant la formule de récurrence

$$(90) \quad \left[\frac{d^p}{dz^p} U_{11} \right]_{M_0} = p! A_{11}^{(p)}(u_0) = \left(\frac{du}{dH} \right)_{u=u_0} \frac{d}{du_0} [A_{11}^{(p-1)}(u_0)].$$

De la même façon nous obtiendrons

$$(91) \quad U_{12}(M_0) = \frac{\Delta \rho}{\rho} h_6(u_0),$$

$$(92) \quad \left[\frac{d}{dz} U_{12} \right]_{M_0} = \left[2 \frac{\Delta \rho}{\rho} \left(\frac{dH'}{dH} \right)_{u=u_0} h_1(u_0) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$(93) \quad \left[\frac{d^p}{dz^p} U_{12} \right]_{M_0} = p! A_{12}^{(p)}(u_0) = \left(\frac{du}{dH} \right)_{u=u_0} \frac{d}{du_0} A_{12}^{(p-1)},$$

et enfin,

$$(94) \quad U_{21}(M_0) = A_{21}^0,$$

$$(95) \quad \left[\frac{d}{dz} U_{21} \right]_{M_0} = - \frac{H_0}{2} \left(\frac{dH'}{dH} \right)_{u=u_0} + \frac{H_0}{2} \left[\frac{\Delta \rho}{\rho_2} h_2 \frac{dH'}{dH} (2h_2 + HH') + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\sqrt{\frac{2 \Delta \rho}{\rho_1}} \frac{h_3}{\sqrt{h_4}} \left(\frac{dH'}{dH} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{(H' dH - H dH')(dH' - dH)}{2 dH^2} \right)^2 \right]_{u=u_0}^{\frac{1}{2}},$$

$$(96) \quad \left[\frac{d^p}{dz^p} U_{21} \right]_{M_0} = p! A_{21}^{(p)}(u_0) = \left(\frac{du}{dH} \right)_{u=u_0} \frac{d}{du} A_{21}^{(p-1)}.$$

Supposons maintenant que le point décrit un chemin l partant de M_0 , tangent en ce point au vecteur \vec{s}_2 et aboutissant à un point M_1 de la région d situé sur le feuillet \mathcal{F}_1 . Le point associé μ décrira un chemin λ partant de M_0 tangent au vecteur $\vec{s}_2(M_0)$ se projetant à l'intérieur du domaine δ et tracé sur le même feuillet de la surface de Riemann, tout au moins si le point M_1 est suffisamment rapproché du point M_0 . Inversement, et par suite de la propriété de réciprocity des images, le point μ décrira le chemin l lorsque le point M décrira le chemin λ . Dans le plan de la variable u les deux chemins l et λ correspondent à un même chemin (u_0, u_1) normal à l'axe réel au point d'abscisse u_0 et intérieur au cercle de rayon unité.

A l'intérieur d'un cercle de centre M_0 et de rayon suffisamment petit contenant les chemins l et λ , nous pouvons calculer la valeur des fonctions U en tenant compte de la définition que nous avons donnée dans les domaines où elles n'ont pas de signification au point de vue hydrodynamique. La convergence des développements de Taylor des fonctions z , ζ et $U_{mn}(z)$ est en effet assurée par les raisonnements précédents. D'autre part, la relation

$$(97) \quad G(u) = z + \zeta = H(u) + H'(u)$$

définit u en fonction de z . Si l'on désigne par $G_{(-1)}$ la fonction inverse

de $G(u)$ on aura

$$(98) \quad u = G_{(-1)}[z + \zeta(z)].$$

Dans les hypothèses faites la fonction G_{-1} est holomorphe dans le domaine du point M_0 et prend en ce point une valeur réelle. D'après la définition des fonctions U et de la fonction ζ , les équations qui suivent sont satisfaites à l'intérieur du cercle γ

$$(99) \quad \rho_1 U_{11}(z) - \rho_2 U_{21}(z) + i(\rho_2 - \rho_1) h_5[G_{-1}(z + \zeta(z))] = 0,$$

$$(100) \quad \rho_1 U_{12}(z) + i(\rho_2 - \rho_1) h_6[G_{-1}(z + \zeta(z))] = 0,$$

$$(101) \quad \rho_2 \left[\frac{dU_{21}}{dz} + \frac{z}{2} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{2} \right]^2 - \rho_1 \left[\frac{dU_{11}}{dz} + \frac{z}{2} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{2} \right]^2 \\ = 2(\rho_1 - \rho_2) \frac{d\zeta}{dz} h_2[G_{-1}(z + \zeta(z))] + (\rho_1 - \rho_2) z \zeta \frac{d\zeta}{dz},$$

$$(102) \quad \left[\frac{dU_{12}}{dz} \right]^2 = - \frac{d\zeta}{dz} \frac{2(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} h_4[G_{-1}(z + \zeta(z))],$$

$$(103) \quad \frac{dU_{12}}{dz} \left[\frac{\zeta}{2} \frac{dz}{d\zeta} - \frac{z}{2} - \frac{dU_{11}}{dz} \frac{dz}{d\zeta} \right] = \frac{2(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} h_3[G_{-1}(z + \zeta(z))].$$

La suite du raisonnement est classique : si nous remplaçons dans ces équations les fonctions qui y figurent par les développements de Taylor dont nous avons précédemment établi l'existence, nous obtiendrons des séries dont tous les coefficients sont nuls. Ceci posé, prolongeons les chemins l et λ à partir des points M_1 et μ_1 , jusqu'aux points M_2 et μ_2 , associés dans la transformation $I(L)$. Si nous pouvons poursuivre le prolongement analytique le long de ce chemin sans rencontrer de point singulier, nous arriverons en M_2 avec des fonctions qui sont analytiques en Z dans le domaine de ce point et qui satisfont aux relations que nous venons d'écrire. Il suffit pour le voir de définir ces fonctions à partir des éléments qui correspondent à un point intérieur au cercle γ . S'il existe un cercle γ_1 contenant les points M_1 et M_2 , et tel que les fonctions considérées soient holomorphes à l'intérieur de ce cercle, nous obtiendrons par substitution, dans les équations (99-103) des séries dont la somme est nulle dans la portion du plan qui est commune aux deux cercles γ et γ_1 , et par suite à l'intérieur de γ , tout entier, donc au point M_2 . S'il n'existe pas de tel cercle nous atteindrons M_2 au moyen d'une chaîne de cercles γ_n dont les centres

sont situés sur la ligne qui joint M_1 à M_2 et dont les rayons sont bornés inférieurement. Le raisonnement s'appliquera de proche en proche à tous les cercles de la chaîne jusqu'à ce que l'un d'eux renferme le point M_2 .

En résumé, la détermination des fonctions U et du champ hydrodynamique qui s'en déduit se décompose en deux parties distinctes :

- 1° Étude de la transformation $I(L)$ définie au paragraphe 7.
- 2° Étude des intégrales du système différentiel obtenu dans ce paragraphe.

La fonction $U_{2,1}$ est d'autre part une fonction de Z uniforme et régulière dans toute la portion du plan Z intérieure à L . Il en est de même de la dérivée $\frac{dU_{2,1}}{dz}$ dont l'existence est assurée en tous les points de cette région. Or, par l'étude de la fonction $\zeta(z)$ et de son prolongement à travers L , nous pouvons déterminer les points singuliers de $U_{2,1}$ prolongée comme il a été dit au paragraphe 7 dans le plan Z . La connaissance de ces points singuliers permettra d'obtenir l'expression de la fonction $U_{2,1}$ prolongée et par suite de déterminer sa valeur en tout point intérieur à L , c'est-à-dire dans le domaine où elle est liée au champ hydrodynamique.

Comme je le montre dans un autre mémoire ⁽¹⁾, les considérations qui précèdent fournissent des résultats qui sont applicables à la détermination des potentiels de stabilité pour les discontinuités dans la densité et à l'étude des cavitations.

⁽¹⁾ H. PONCIN, *Sur les conditions de stabilité d'une discontinuité dans un milieu continu (Application à la théorie des cavitations)* (*Acta Mathematica*, t. 71, p. 162, 1939.)