JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE COTTON

Sur le calcul des invariants différentiels euclidiens d'une surface

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 211-220.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_211_0>

Sur le calcul des invariants différentiels euclidiens d'une surface;

PAR ÉMILE COTTON.

En groupant dans l'équation réduite d'une surface Σ les termes de même degré, on est conduit à associer à Σ et à chacun de ses points M une suite de surfaces algébriques $S_2(M)$, $S_3(M)$, ... La donnée de ces surfaces équivaut à celle des invariants différentiels considérés par M. Tresse. Quelques mots au sujet des surfaces $S_\alpha(M)$ forment le début du présent article (n° **1**); vient ensuite (n^{os} **2**, **3**, **4**) leur détermination lorsque Σ est donnée par les expressions des coordonnées de M en fonction de deux paramètres u, v. Une Note de M. Cartan ([1]) donne un procédé simple pour conduire les calculs; toutefois le repère dont nous faisons usage ici n'est pas celui de Frenet, mais est constitué par les deux vecteurs $\frac{\partial M}{\partial u}$, $\frac{\partial M}{\partial v}$ et le vecteur unitaire normal $\mathbf{n}$. Les expressions différentielles correspondant à cette famille de repères R (ou à des familles analogues pour des variétés à n dimensions de classe de Ricci égale à 1) conduisent encore (n° **5**) à des calculs simples pour d'autres problèmes classiques de Géométrie.

([1]) *Comptes rendus*, t. **178**, 1924, p. 182. Nous désignons dans cet article par [1] les renvois à cette Note; les Ouvrages suivants de M. Cartan sont indiqués ainsi : [2]. *La Géométrie des espaces de Riemann,* [3] *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann,* [4] *La méthode du repère mobile.* (*Exposés de Géométrie,* n° **194**).

1. Soit Σ une surface dont l'équation rapportée à trois axes rectangulaires $Mxyz$, le dernier étant normal à Σ au point M, est

$$(1) \qquad z = f(x, y) = f_2(x, y) + \ldots + f_\alpha(x, y) + \ldots,$$

f_α désignant l'ensemble des termes de degré α.

Remplaçons les axes Mx, My par d'autres Mx^*, My^*, qui s'en déduisent par rotation autour de Mz, $f(x, y)$, $f_2(x, y)$, ..., $f_\alpha(x, y)$, ..., se transforment respectivement en $f^*(x^*, y^*)$, $f_2^*(x^*, y^*)$, ..., $f_\alpha^*(x^* y^*)$; *nous pouvons considérer les surfaces* $S_\alpha(M)$, *d'équations*

$$(2) \qquad z = f_\alpha(x, y),$$

comme bien déterminées par Σ *et par le point* M *considéré sur* Σ que nous appellerons le sommet de S_α. L'entier α varie de 2 à $+\infty$ si Σ est analytique, comme nous le supposerons pour simplifier; mais, si l'on sait seulement que f admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre ν, on aurait une suite limitée de surfaces $S_2(M)$, ..., $S_{\nu-1}(M)$.

Toute surface $S_\alpha(M)$ reste invariante vis-à-vis des transformations

$$(3) \qquad x = \lambda x', \qquad y = \lambda y', \qquad z = \lambda^\alpha z',$$

et, réciproquement, toute surface algébrique de degré α qui reste invariante, sans être un cylindre, est une surface S_α. Remarquons, en passant, que les lignes asymptotiques de S_α s'échangent entre elles par les transformations (3) et se déterminent par quadratures. Les points de S_α, où la normale rencontre Mz, sont situés dans les plans donnés par

$$(4) \qquad x\frac{\partial f_\alpha}{\partial y} - y\frac{\partial f_\alpha}{\partial x} = 0;$$

S_α admet ainsi α lignes de courbure planes.

En général $S_2(M)$ est un paraboloïde n'ayant que deux plans de symétrie; en les prenant comme plans xMz, yMz l'équation (1) donne l'équation réduite dont les coefficients, comme l'a montré M. Tresse, sont les valeurs en M d'une suite d'invariants différentiels, suite complète, en ce sens qu'avec ces invariants on peut construire tous les autres. Mais on ne peut plus déterminer aussi rapidement les valeurs numériques des invariants lorsqu'au point M considéré le paraboloïde S_2 est de révolution (ombilic) ou disparaît (le plan tangent ayant alors un contact d'ordre supérieur à l'unité avec la surface). Les surfaces S_α restent néanmoins bien déterminées en ces points exceptionnels (si l'on écarte toutefois les points de contact de Σ et de ses plans tangents isotropes); notons, à ce propos, qu'en un ombilic où $S_3(M)$ existe les plans des trois lignes de courbure planes de S_3 coupent le plan tangent en M suivant les tangentes aux lignes de courbure de Σ passant en M (la démonstration en est donnée par M. Picard dans le Chapitre XI du tome III de son *Traité d'analyse*).

D'ailleurs, dans toute question où les invariants différentiels du même ordre de la suite de M. Tresse figurent d'une façon symétrique, il est naturel de faire intervenir les surfaces S_α. Par exemple, si l'on a deux surfaces Σ, Σ^* et sur chacune d'elles un point, M et M^*, l'ordre maximum ν du contact des deux surfaces réalisable par déplacement euclidien amenant M en M^* se détermine en imaginant M, M^* et les normales orientées Mz, M^*z^* superposées et cherchant quelles surfaces $S_2(M), \ldots, S_\nu(M)$ peuvent, par une même rotation autour de la normale commune, coïncider avec les surfaces correspondantes $S_2^*(M^*), \ldots, S_\nu^*(M^*)$, $S_{\nu+1}(M)$ et $S_{\nu+1}^*(M^*)$ ne coïncidant pas. Ce n'est d'ailleurs que pour des couples M, M^* exceptionnels que ν peut surpasser l'unité.

2. Cherchons maintenant à *déterminer les surfaces* $S_\alpha(M)$ *pour une surface* Σ *donnée en coordonnées rectangulaires quelconques* ξ, η, ζ *par une représentation paramétrique*; soient u, v les paramètres. La solution du problème ne comporte évidemment que des dérivations et des éliminations; la remarque suivante donne une première méthode pour conduire les calculs.

Quand un point P se meut sur Σ de façon que sa projection P′ sur le plan tangent xMy décrive uniformément une droite passant par le point de contact M, et si X, Y sont les projections sur Mx, My de la vitesse de ce mouvement uniforme, le vecteur $\frac{d^\alpha P}{dt^\alpha}$ (dérivée $\alpha^{\text{ième}}$ par rapport au temps ou accélération d'ordre $\alpha - 1$) est lors du passage de P en M porté par la normale Mz et a pour mesure $\alpha\,!\,f_\alpha(X, Y)$. En annulant les produits scalaires par $\frac{\partial M}{\partial u}$ d'une part et $\frac{\partial M}{\partial v}$ d'autre part des vecteurs $\frac{d^2 P}{dt^2}, \ldots, \frac{d^\alpha P}{dt^\alpha}$ considérés à l'instant du passage en M, on a une suite d'équations donnant les valeurs à cet instant des dérivées $\frac{d^2 u}{dt^2}, \frac{d^2 v}{dt^2}, \ldots, \frac{d^\alpha v}{dt^\alpha}$ exprimées comme fonctions de U et V valeurs au même moment de $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\cdot$ La mesure à cet instant du vecteur $\frac{1}{\alpha!}\frac{d^\alpha P}{dt^\alpha}$ ou encore de sa projection sur Mz, avec laquelle il se confond alors, est un polynome de degré α en U et V, dont les coefficients sont fonctions de u et v, soit $Z = \Phi_\alpha(U, V; u, v)$. Comme U et V sont des formes linéaires faciles à trouver des projections X, Y de la vitesse sur Mx, My, on peut déduire de là l'équation de $S_\alpha(M)$.

Mais on peut dire aussi que U, V, Z sont les coordonnées cartésiennes contravariantes d'un point de $S_\alpha(M)$ lorsqu'on prend le repère R défini par les deux vecteurs $\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}$ et le vecteur $\mathbf{n}$ de longueur égale à l'unité porté par Mz. De tels repères appartiennent à une famille de *repères naturels* $\mathcal{R}$ tels que ceux que M. Cartan [3] associe à tout point M de l'espace euclidien à n dimensions E_n rapporté à un système de coordonnées curvilignes u^i; les vecteurs unitaires étant les vecteurs $\frac{\partial M}{\partial u^i}\cdot$ Pour nous, $n = 3$, les paramètres sont $u^1 = u$, $u^2 = v$, et la distance $u^3 = h$ d'un point M de l'espace à la surface Σ. Nos repères R correspondront alors à $h = 0$.

3. Cette remarque nous permet d'appliquer à la détermination des fonctions Φ_α les procédés de calcul de M. Cartan. Reprenant pour un instant ses notations relatives à E_n, désignons par $x^1, \ldots, x^n$ les coordonnées contravariantes d'un point fixe de E_n; elles dépendent de l'origine M du repère et satisfont [3] à un système d'équations linéaires aux différentielles totales

$$(5) \qquad dx^i + du^i + \sum_k x^k \omega_k^i = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $\omega_k^i = \sum_r \Gamma_{kr}^i du^r$ sont des expressions de Pfaff construites avec les variables u^i et leurs différentielles. Les coefficients Γ_{kr}^i ne sont autres que les symboles $\left\{\begin{matrix} kr \\ i \end{matrix}\right\}$ de Christoffel. L'emploi des équations de Lagrange pour leur calcul, signalé par M. Cartan, peut être présenté de la façon suivante : à l'élément linéaire $ds^2 = \Sigma g_{ij} du^i du^j$ de E_n correspond la force vive $2T$ d'un point de masse unité et les équations de Lagrange dont les premiers membres donnent les composantes covariantes de l'accélération

$$\gamma_s = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{(\partial u^s)'} - \frac{\partial T}{\partial u^s},$$

ce sont des fonctions linéaires des dérivées secondes $u_i'' = \frac{d^2 u^i}{dt^2}$; on construit les composantes contravariantes, soit γ^i l'une d'elles, c'est une forme linéaire des γ_s telle que la seule dérivée seconde u_i'' y figure avec un coefficient égal à l'unité; les autres termes constituent une forme quadratique des dérivées $(u^j)'$; *on obtient les expressions* ω_k^i *en remplaçant dans* $\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma^i}{\partial (u^k)'}$, *les dérivées* $(u^r)'$ *par les différentielles correspondantes* du^r. (Les expressions $\omega_{ij} = \Sigma g_{jk} \omega_i^k$ se déduisent de la même manière de γ_j.)

L'élément linéaire de l'espace euclidien E_3 rapporté aux paramètres u, v, h est

$$(6) \qquad dS^2 = \mathcal{E} du^2 + 2\mathcal{F} du\,dv + \mathcal{G} dv^2 + dh^2 = ds^2 + dh^2 - 2h\Psi + h^2\chi,$$

où

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

est l'élément linéaire de Σ, où

$$\chi = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

celui de la sphère σ de rayon unité, les points m de σ et M de Σ se correspondant par parallélisme des normales. Enfin $-\Psi$ est le produit scalaire de deux arcs infiniment petits correspondants qu'on sait calculer quand Σ est donnée paramétriquement,

$$\Psi = D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

en adoptant les notations de Bianchi (*Lezioni di Geometria Differenziale*, 1894, Chap. IV). On notera que les déterminants D, D′, D″ de

Darboux (*Leçons*, tome III, livre VII, Chap. IV) doivent être divisés par $\sqrt{EG - F^2}$ pour avoir les D, D′, D″ de Bianchi.

On obtient ainsi les équations (5) relatives aux repères $\mathcal{R}$. *Nous remplaçons h et dh par zéro, et nous avons un système différentiel correspondant à la famille à deux paramètres des repères* R que nous écrivons en remplaçant x^1, x^2, x^3 par U, V, Z :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &dU + du + U\omega_1^1 + V\omega_2^1 + Z\omega_3^1 = 0,\\ &dV + dv + U\omega_1^2 + V\omega_2^2 + Z\omega_3^2 = 0,\\ &dZ \qquad\quad + U\omega_1^3 + V\omega_2^3 \qquad\quad = 0. \end{aligned}\right.$$

Les nouvelles expressions de Pfaff ω_j^i sont données par le tableau suivant où $\delta = \sqrt{EG - F^2}$, et où les dérivées sont indiquées par la notation de Lagrange

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega_1^1 = \frac{1}{2\delta}[(GE'_u - 2FF'_u + FE'_v)\,du + (GE'_v - FG'_u)\,dv],\\ &\omega_2^1 = \frac{1}{2\delta}[(GE'_v - FG'_u)\,du + (2GF'_v - GG'_u - FG'_v)\,dv],\\ &\omega_1^2 = \frac{1}{2\delta}[(2EF'_u - EE'_v - FE'_u)\,du + (EG'_u - FE'_v)\,dv],\\ &\omega_2^2 = \frac{1}{2\delta}[(EG'_u - FE'_v)\,du + (EG'_v - 2FF'_v + FG'_u)\,dv],\\ &\omega_1^3 = D\,du + D'\,dv,\\ &\omega_2^3 = D'\,du + D''\,dv,\\ &\omega_3^1 = \frac{1}{\delta}[(-GD + FD')\,du + (-GD' + FD'')\,dv] = \frac{1}{\delta}[F\omega_2^3 - G\omega_1^3],\\ &\omega_3^2 = \frac{1}{\delta}[(-ED' + FD)\,du + (-ED'' + FD')\,dv] = \frac{1}{\delta}[F\omega_1^3 - E\omega_2^3]. \end{aligned}\right.$$

4. Soit $Z = \Phi(U, V; u, v)$ l'équation de Σ rapportée au repère R ; si cette surface est analytique, Φ est la somme de la série $\Phi_2 + \Phi_3 + \ldots$; nous en déterminons les termes de même degré en U et V par une méthode de M. Cartan [1]. Transformant l'identité $d\Phi - dZ = 0$ en remplaçant dU, dV, dZ par leurs valeurs données par (7), il vient

$$(9)\quad U\omega_1^3 + V\omega_2^3 + \frac{\partial\Phi}{\partial u}du + \frac{\partial\Phi}{\partial v}dv - \frac{\partial\Phi}{\partial U}(du + U\omega_1^1 + V\omega_2^1 + Z\omega_3^1) - \frac{\partial\Phi}{\partial V}(dv + U\omega_1^2 + V\omega_2^2 + Z\omega_3^2) = 0.$$

Remplaçons, dans cette relation, du, dv par U, V respectivement, Z par Φ, égalons à zéro les termes de même degré en U et V, tenant compte de l'homogénéité des Φ_n en U et V, *désignons par* Ω^i_j *ce que devient* ω^i_j *quand on y remplace du et dv par* U *et* V; nous avons les relations cherchées :

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
2\,\Phi_2 &= \mathrm{U}\Omega^3_1 + \mathrm{V}\Omega^3_2,\\
3\,\Phi_3 &= \mathrm{U}\frac{\partial\Phi_2}{\partial u} + \mathrm{V}\frac{\partial\Phi_2}{\partial v} - (\mathrm{U}\Omega^1_1 + \mathrm{V}\Omega^1_2)\frac{\partial\Phi_2}{\partial \mathrm{U}} - (\mathrm{U}\Omega^2_1 + \mathrm{V}\Omega^2_2)\frac{\partial\Phi_2}{\partial \mathrm{V}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(n+1)\,\Phi_{n+1} &= \mathrm{U}\frac{\partial\Phi_n}{\partial u} + \mathrm{V}\frac{\partial\Phi_n}{\partial v} - (\mathrm{U}\Omega^1_1 + \mathrm{V}\Omega^1_2)\frac{\partial\Phi_n}{\partial \mathrm{U}} - (\mathrm{U}\Omega^2_1 + \mathrm{V}\Omega^2_2)\frac{\partial\Phi_n}{\partial \mathrm{V}}\\
&\quad -\sum_{i=2}^{n-1}\Phi_i\left(\Omega^1_3\frac{\partial\Phi_{n-i+1}}{\partial \mathrm{U}} + \Omega^2_3\frac{\partial\Phi_{n-i+1}}{\partial \mathrm{Y}}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Les fonctions Φ_α sont ainsi construites de proche en proche. La fonction

$$\Psi(\mathrm{U},\mathrm{V};u,v) = \mathrm{E}\mathrm{U}^2 + 2\mathrm{F}\mathrm{U}\mathrm{V} + \mathrm{G}\mathrm{V}^2,$$

donnant le carré de la distance du point U, V, Z à l'axe Mz support du vecteur **n** du repère R, intervient avec elles pour la détermination en fonction de u, v des invariants formant la suite de M. Tresse. La réduction simultanée de Ψ et $2\,\Phi_2$ considérées comme formes quadratiques de U et V

$$\Psi = X^2 + Y^2, \qquad 2\,\Phi_2 = aX^2 + bY^2$$

donne les inverses a et b des rayons de courbure principaux, les expressions de U, V en X et Y et par suite celles des formes Φ_α en X, Y; les coefficients de ces nouvelles formes sont les invariants cherchés.

De même, deux surfaces Σ, Σ^* étant données paramétriquement et deux normales Mz, M$^*z^*$ étant amenées à coïncider, l'étude du point multiple M de leur intersection utilise les substitutions linéaires transformant $\Psi(\mathrm{U},\mathrm{V})$ dans la forme quadratique $\Psi^*(\mathrm{U}^*,\mathrm{V}^*)$ relative à Σ^*. Ces substitutions dépendent d'un paramètre; s'il peut être déterminé de façon que la fonction Φ_2 relative à Σ se transforme dans la fonction Φ^*_2 concernant Σ^*, un contact d'ordre supérieur à l'unité est ainsi réalisé et s'étudie en considérant les formes suivantes. Le cas du contact simple est examiné dans un article antérieur de ce Journal (t. XVII, 1938, p. 169).

5. La même méthode s'applique à la recherche d'équations semi-réduites telles que (1) pour les variétés V_n à n dimensions situées dans un espace euclidien E_{n+1} à $n+1$ dimensions. Montrons rapidement, à ce propos, comment on retrouve, par un autre mode de calcul, des expressions et des équations analogues aux précédentes, en utilisant des repères tels que R pour chercher si un espace de Riemann, $\mathcal{E}_n$ donné par les variables $u^1, u^2, \ldots, u^n$ et $ds^2 = \Sigma g_{ij}du^i du^j$, peut être réalisé par une variété V_n d'un espace E_{n+1} (problème de Ricci).

S'il en est ainsi, on peut adjoindre aux vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ du repère naturel r correspondant au point M de $\mathcal{E}_n$ un $n+1^{\text{ième}}$ vecteur $\mathbf{e}_{n+1}$ normal aux précédents, de longueur unité; on constitue ainsi une famille à n paramètres de repères cartésiens R de E_{n+1}. Procédant encore comme M. Cartan ([3] p. 34), considérons les composantes contravariantes relatives à R des différences $\mathbf{e}_i(M') - \mathbf{e}_i(M)$ (M' est infiniment voisin de M, sur Σ); désignons-les par ω_k^i, nous avons les systèmes

$$(11)\qquad dM = \mathbf{e}_1 du^1 + \mathbf{e}_2 du^2 + \ldots + \mathbf{e}_n du^n,$$

$$(12)\qquad d\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \omega_i^1 + \mathbf{e}_2 \omega_i^2 + \ldots + \mathbf{e}_n \omega_i^n + \mathbf{e}_{n+1} \omega_i^{n+1},$$

auxquelles correspondent les équations que vérifient les coordonnées relatives à R de tout point P fixe de E_{n+1}

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} dx^j + \omega^j + \sum_k x^k \omega_k^j = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n+1) \\ \qquad \omega^j = du^j \quad \text{pour } j \leqq n, \qquad \omega^{n+1} = 0. \end{array}\right.$$

Les ω_k^j doivent satisfaire à deux sortes de conditions : les unes s'obtiennent en différentiant les relations donnant les produits scalaires des vecteurs $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}$

$$(14)\qquad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = g_{ij}, \qquad g_{in+1} = g_{n+1i} = 0 \quad (i \neq n+1), \qquad g_{n+1\,n+1} = 1;$$

les autres sont les conditions d'intégrabilité du système (13); elles traduisent les conditions de structure du groupe affine ([4] p. 37);

nous les désignerons par

$$(15) \qquad \Omega^i = 0$$

$$(15') \qquad \Omega^i_j = 0,$$

Ω^i et Ω^i_j contiennent respectivement les covariants bilinéaires des expressions ω^i ou ω^i_j avec un coefficient égal à l'unité. Il est bon aussi de considérer les sommes

$$(16) \qquad \omega_{ij} = \sum_k g_{jk}\omega^k_i, \qquad \text{d'où} \qquad \omega_{in+1} = \omega^{n+1}_i,$$

$$(17) \qquad \Omega_{ij} = \sum_k g_{jk}\Omega^k_i, \qquad \Omega_{in+1} = -\Omega_{n+1i} = \Omega^{n+1}_i.$$

Les relations (14) différentiées ont alors la forme simple

$$dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji}, \qquad \omega_{in+1} + \omega_{n+1i} = 0, \qquad \omega_{n+1\,n+1} = \omega^{n+1}_{n+1} = 0.$$

Les conditions (15) montrent immédiatement que les coefficients de du^k dans ω^i_h et de du^h dans ω^i_k sont égaux; $\omega^i_1, \ldots, \omega^i_n$ sont donc les demi-dérivées par rapport à $du^1, \ldots, du^n$ d'une forme quadratique θ^i de ces différentielles.

Pour $i \leqq n$, $j \leqq n$, les formes θ^i et les expressions ω^i_j sont celles qui concernent l'espace de Riemann $\mathcal{E}_n$; supposons connue la forme θ^{n+1} que nous désignons plutôt par -2Ψ; on a

$$\Psi = \sum_{ij} \gamma_{ij}\, du^i du^j, \qquad \omega^{n+1}_i = \sum_j \gamma_{ij}\, du^j$$

et les ω^k_{n+1} sont donnés par les équations

$$dg_{in+1} = \omega_{in+1} + \omega_{n+1i} = \omega^{n+1}_i + \sum_k g_{ik}\omega^k_{n+1} = 0.$$

Les relations $\Omega_{ij} = 0$ remplacent avantageusement les relations (15'), car Ω_{ij} et Ω_{ji} ne diffèrent que par le facteur -1. Elles donnent immédiatement les conditions de Ricci auxquelles doivent satisfaire les γ_{ij}. (*Voir* [2], p. 53.)

Pour $n = 2$, la recherche d'une surface dont les deux formes quadratiques fondamentales sont données est un problème classique.

Il est facile de condenser les équations qui le concernent, données dans les Leçons de Darboux (*loc. cit.*, éq. 8, 9, 36) ou dans celles de Bianchi (*loc. cit.*, éq. I, II), en un système de trois équations linéaires aux différentielles totales qui correspond à la projection sur trois axes rectangulaires fixes des relations vectorielles (12). Une remarque analogue s'applique aux équations du problème de Ricci.

La forme quadratique χ, qui n'intervient pas en réalité dans les calculs des n^{os} **3**, **4**, se déduit, comme on le sait, des deux autres formes fondamentales (Darboux, *loc. cit.*, éq .32). Il est facile de le montrer, en observant que la différentielle covariante du vecteur **n** a pour composantes ω_3^1, ω_3^2, o et que la longueur de ce vecteur infiniment petit a pour carré :

$$\begin{aligned} E(\omega_3^1)^2 + 2F\,\omega_3^1\omega_3^2 + G(\omega_3^2)^2 &= (E\omega_3^1 + F\omega_3^2)\,\omega_3^1 + (F\omega_3^1 + G\omega_3^2)\,\omega_3^2 \\ &= -[\omega_3^1\omega_1^3 + \omega_3^2\omega_2^3] = \frac{E(\omega_2^3)^2 - 2F\omega_1^3\omega_2^3 + G(\omega_1^3)^2}{\delta}. \end{aligned}$$

Indiquons seulement, en terminant que, dans le cas d'une variété V_ρ de classe de Ricci $\pi > 1$, des procédés analogues sont valables; mais une étude spéciale est nécessaire, car au lieu d'une équation réduite ou semi-réduite, on a un système de π équations de cette nature, au lieu d'une normale unique un π-plan normal.