JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. FAVARD

Sur l'interpolation

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 281-306.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_281_0>

Sur l'interpolation;

PAR J. FAVARD.

---

1. Une grande partie des travaux sur l'approximation des classes de fonctions réelles d'une variable les plus simples par des polynomes a pour base les développements en séries.

Beaucoup moins nombreux sont les travaux qui ont pour point de départ la connaissance des valeurs prises par la fonction en un certain nombre de points. Sans doute la suite des polynomes d'interpolation d'une fonction continue dans un intervalle fini, en une suite de nœuds dense partout, peut-elle diverger en tout point (1), mais on peut, à partir de la connaissance des valeurs prises en cette suite de nœuds, former une suite de polynomes tendant vers la fonction : il suffit de modifier convenablement les polynomes de S. Bernstein (2).

Ce dernier auteur a d'ailleurs démontré (3) qu'avec une certaine suite de nœuds, l'approximation fournie par le polynome d'interpolation de degré n est de l'ordre de $E_n \log n$, où E_n désigne la meilleure approximation par un polynome d'ordre n.

La question se pose donc de savoir si, pour certaines classes, la connaissance des valeurs prises par la fonction, permettra de connaître,

---

(1) G. GRÜNWALD, *Über Divergenzerscheinungen...* (*Ann. of Math. II*, t. 37, 1936, p. 908-918).

(2) S. BERNSTEIN, *Communications Soc. Math. Kharkow*, 2e série, t. 13, 1912, p. 1-2.

(3) S. BERNSTEIN, *Sur l'interpolation* (*Math. Annal.*, 1919, p. 1-21).

ou non, la fonction avec une erreur de l'ordre de la meilleure approximation dans la classe.

La réponse est affirmative. Ainsi, on sait qu'une fonction admettant une dérivée bornée d'ordre p, peut être approchée par un polynome d'ordre n, avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{n^p}$, nous verrons que la connaissance des valeurs prises par la fonction, en certaines suites de nœuds, permet de connaître la fonction avec une précision du même ordre.

Avant d'aborder les questions de ce genre, nous aurons à nous occuper du problème suivant : lorsqu'on connaît les valeurs d'une fonction en un nombre fini de points, la fonction interpolatrice linéaire, dans chacun des intervalles définis par les points précédents, paraît la meilleure parmi celles qui présentent, presque partout, une dérivée bornée; quelle est la meilleure parmi celles qui, presque partout, admettent une dérivée bornée, d'ordre donné, supérieur à un ?

Dans le cas de la dérivée première, le graphe indique de lui-même la solution, dans les autres cas nous introduirons des caractères extrémaux qui, appliqués à la dérivée première, redonnent d'ailleurs la solution simple attendue.

2. Soit $\varphi(t)$ une fonction de la variable réelle t, sommable dans un ensemble E et non nulle presque partout sur cet ensemble. Soit $f(t)$ une autre fonction sommable telle que

$$\int_E \varphi(t) f(t)\, dt = c, \tag{1}$$

posons

$$\int_E |\varphi(t)|\, dt = M.$$

On voit tout de suite qu'il existe dans E des valeurs de t telles que

$$|f(t)| \geqq \frac{|c|}{M},$$

et la fonction extrémale, quant au module, satisfaisant à (1) est

$$f(t) = \frac{c}{M} \operatorname{sgn}[\varphi(t)]. \tag{2}$$

Cependant si l'ensemble $\varphi(t) = 0$ a une mesure positive, une fonction dont la valeur absolue ne dépasse pas $\frac{|c|}{M}$ dans cet ensemble pourra jouer le rôle de fonction extrémale.

3. Donnons-nous maintenant n fonctions sommables réelles sur un ensemble E (1)

$$\varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour qu'il existe des fonctions sommables $f(t)$ telles que

$$(1_i) \qquad \int_E \varphi_i(t) f(t)\, dt = c_i,$$

où les c_i désignent des constantes réelles données, il est nécessaire que toute relation de la forme

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i = 0 \qquad \text{presque partout sur E,}$$

entraîne

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i = 0.$$

Cette condition est suffisante, nous allons le voir en construisant la fonction extrémale quant au module satisfaisant aux égalités (1_i), la seule qui nous intéresse. Nous supposerons que les constantes c_i ne sont pas toutes nulles [dans le cas contraire il suffit de prendre $f(t) = 0$], qu'il n'existe entre les φ_i aucune relation de la forme (3) avec des coefficients λ_i non tous nuls et qu'enfin, pour tout sous-ensemble $\mathcal{E}$ de E de mesure positive, il existe un φ_i tel que

$$\int_{\mathcal{E}} |\varphi_i|\, dt > 0,$$

dans le cas contraire, il suffirait en effet d'opérer sur E — $\mathcal{E}$.

En désignant par a_i des constantes réelles quelconques, on voit, en

(1) Nous supposons que nous avons des fonctions d'une variable mais le cas de plusieurs variables n'amène aucune complication.

raisonnant comme au numéro **2**, que $f(t)$ atteint au moins la valeur

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} u_i c_i\right|}{\int_E \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\right| dt}.$$

Nous pouvons admettre que $\sum_{i=1}^{n} a_i c_i \neq 0$ et supposer que l'ordre des fonctions φ_i est tel que

$$c_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k); \qquad c_i = 0 \quad (i > k).$$

Le nombre ci-dessus s'écrit

$$\frac{1}{\int_E \left|\sum_{i=1}^{k} \frac{u_i \varphi_i}{c_i} + \sum_{k+1}^{n} a_i \varphi_i\right| dt} \qquad \text{avec} \sum_{i=1}^{k} u_i = 1.$$

Le dénominateur est une fonction continue et convexe des variables u_i et a_i, car on a évidemment

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\varphi_i\right| \leqq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i\right|,$$

il présente donc un minimum et un seul réalisé pour des valeurs υ_i et α_i; ce minimum m_1 n'est pas nul car, d'après nos hypothèses, les fonctions φ_i sont linéairement indépendantes. Pour toute fonction f satisfaisant aux égalités (1_i), il existe donc des valeurs de t telles que

$$|f(t)| \geqq \frac{1}{m_1}.$$

4. Remarquons à présent que, φ et ψ désignant deux fonctions sommables sur E et ε un nombre quelconque, on a évidemment

$$\int_E |\varphi + \varepsilon\psi|\, dt \geqq \int_E (\varphi + \varepsilon\psi)\operatorname{sgn}\varphi\, dt = \int_E |\varphi|\, dt + \varepsilon \int_E \psi \operatorname{sgn}\varphi\, dt,$$

ce qui montre que $\int_E \psi \operatorname{sgn}\varphi\, dt$ est compris entre la dérivée à droite et la dérivée à gauche, pour $\varepsilon = 0$, de l'intégrale figurant au premier membre de l'inégalité; ceci nous permet de conclure que, sauf peut-être pour une infinité dénombrable de valeurs de ε, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left\{\int_E |\varphi+\varepsilon\psi|\,dt\right\}=\int_E \psi \operatorname{sgn}(\varphi+\varepsilon\psi)\,dt,$$

et que l'intégrale du second membre est toujours comprise entre la dérivée à droite et la dérivée à gauche.

Si donc, pour les valeurs υ_i et α_i, qui correspondent au minimum de la fonction convexe des variables u_i et a_i dont nous nous occupons, cette fonction admet des dérivées partielles continues, alors celles-ci sont nulles et l'on a

$$\int_E \frac{\varphi_1}{c_1}\operatorname{sgn}\left\{\sum_1^k \frac{\upsilon_i\varphi_i}{c_i}+\sum_{k+1}^n \alpha_i\varphi_i\right\}dt=\ldots=\int_E \frac{\varphi_k}{c_k}\operatorname{sgn}\left\{\sum_k^k \frac{\upsilon_i\varphi_i}{c_i}+\sum_n^n \alpha_i\varphi_i\right\}dt,$$

$$\int_E \varphi_i \operatorname{sgn}\left\{\sum_1^k \frac{\upsilon_i\varphi_i}{c_i}+\sum_{k+1}^n \alpha_i\varphi_i\right\}dt=0$$
$$(i>k),$$

d'où

$$\int_E \frac{\varphi_i}{c_i}\operatorname{sgn}\left\{\sum_1^k \frac{\upsilon_i\varphi_i}{c_i}+\sum_{k+1}^n \alpha_i\varphi_i\right\}dt=\int_E\left|\sum_1^k \frac{\upsilon_i\varphi_i}{c_i}+\sum_{k+1}^n \alpha_i\varphi_i\right|dt \qquad (i\leqq k),$$

ce qui montre qu'une fonction extrémale est

$$f(t)=\frac{1}{m_1}\operatorname{sgn}\left(\sum_1^k \frac{\upsilon_i\varphi_i}{c_i}+\sum_{k+1}^n \alpha_i\varphi_i\right). \tag{5}$$

5. Dans le cas général on ne peut compter sur la continuité des dérivées partielles, nous allons cependant montrer qu'elle est réalisée lorsque l'ensemble E_1 des points où

$$\sum_1^k \frac{\upsilon_i\varphi_i}{c_i}+\sum_{k=1}^n \alpha_i\varphi_i=0$$

est de mesure nulle.

Pour simplifier les notations, supposons que la fonction extrémale soit φ_1 (nous posons $c_1=1$). Il suffira alors de montrer la continuité de l'expression

$$\int_E \psi \operatorname{sgn}(\varphi_1 + \varepsilon\psi)\, dt,$$

au voisinage de $\varepsilon = 0$, ψ désignant une fonction sommable sur E. Soit η un nombre positif quelconque, la mesure de l'ensemble H où

$$|\varphi_1| \leqq \eta$$

tend vers zéro avec η en vertu de l'hypothèse faite sur φ_1; la mesure de l'ensemble N où $|\psi| > n$, n désignant un nombre quelconque, tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Pourvu que ε soit assez petit, on a d'autre part

$$\operatorname{sgn}(\varphi_1 + \varepsilon\psi) = \operatorname{sgn}\varphi_1 \qquad \text{dans } E - H - N,$$

de là

$$\left| \int_E \psi \{ \operatorname{sgn}(\varphi_1 + \varepsilon\psi) - \operatorname{sgn}\varphi_1 \} dt \right| \leqq 2 \int_H |\psi|\, dt + 2 \int_N |\psi|\, dt.$$

En vertu de la continuité de l'intégrale et des remarques précédentes, cette inégalité démontre notre résultat.

Supposons à présent que l'ensemble E_1 soit de mesure positive, nous définirons alors $f(t)$ au moyen de (5) dans l'ensemble $E - E_1$ puis, dans l'ensemble E_1, nous écrirons à nouveau les conditions analogues à (1_i); elles se réduisent à $(n-1)$ au plus; nous procéderons avec ces nouvelles conditions comme nous venons de le faire dans E en calculant le nouveau minimum m_2; nous obtiendrons ainsi une fonction extrémale définie dans une partie de E_1 et l'on recommencera si besoin est. La définition complète de la fonction extrémale, presque partout sur E, exige donc, au plus, n opérations; le module de cette fonction prendra donc au plus n valeurs distinctes :

$$\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \ldots, \frac{1}{m_n}.$$

Il nous reste à montrer que le procédé indiqué ne se heurte à aucune impossibilité; nous verrons aussi que les valeurs $\frac{1}{m_i}$ vont en décroissant et que la fonction extrémale est unique.

6. Pour simplifier les notations, nous examinerons seulement le cas où tous les c_i sont égaux à 1 et nous supposerons que

$$\int_E |\varphi_1|\,dt = \int_{E-E_1} |\varphi_1|\,dt = m_1.$$

Pour montrer que le procédé ne conduit à aucune impossibilité, il suffit de faire voir que si une combinaison $\sum_2^n \alpha_i\varphi_i$ est nulle presque partout dans E_1, alors on a aussi

$$\int_{E_1} \left(\sum_2^n \alpha_i\varphi_i\right) f(t)\,dt = 0$$

(les valeurs des intégrales précédentes ayant été déterminées comme il vient d'être dit). Supposons par exemple que

$$\varphi_2(t) = 0 \qquad \text{presque partout } E_1,$$

alors l'expression

$$\int_E |u_1\varphi_1 + (1-u_1)\varphi_2|\,dt = \int_{E-E_1} |u_1\varphi_1 + (1-u_1)\varphi_2|\,dt$$

doit être minimum pour $u_1 = 1$. Or la règle de différentiation s'applique puisque φ_1 est différent de zéro presque partout dans $E - E_1$, donc

$$\int_{E-E_1} (\varphi_1 - \varphi_2)\,\mathrm{sgn}\,\varphi_1\,dt = 0$$

ce qui, dans E_1, nous donne immédiatement, en vertu de $c_2 = 1$,

$$\int_E \varphi_2 f(t)\,dt = 0.$$

C'est là ce que nous voulions démontrer.

7. Supposons maintenant φ_2 non identiquement nul dans E_1 et considérons à nouveau l'intégrale

$$\int_E |u_1\varphi_1 + (1-u_1)\varphi_2|\,dt = \int_{E-E_1} |u_1\varphi_1 + (1-u_1)\varphi_2|\,dt + \int_{E_1} |(1-u_1)\varphi_2|\,dt.$$

Comme elle doit être minimum pour $u_1 = 1$, on doit avoir à la fois

$$\int_{E-E_1} (\varphi_1 - \varphi_2) \operatorname{sgn} \varphi_1 \, dt - \int_{E_1} |\varphi_2| \, dt \leqq 0,$$

$$\int_{E-E_1} (\varphi_1 - \varphi_2) \operatorname{sgn} \varphi_1 \, dt + \int_{E_1} |\varphi_2| \, dt \geqq 0,$$

ce qui s'écrit

$$\int_{E_1} |\varphi_2| \, dt \geqq \left| \int_{E-E_1} (\varphi_1 - \varphi_2) \operatorname{sgn} \varphi_1 \, dt \right|. \tag{6}$$

Or on a

$$\int_{E_1} \varphi_2(t) f(t) \, dt = 1 - \frac{1}{m_1} \int_{E-E_1} \varphi_2 \operatorname{sgn} \varphi_1 \, dt = \frac{1}{m_1} \left| \int_{E-E_1} (\varphi_1 - \varphi_2) \operatorname{sgn} \varphi_1 \, dt \right| = c_2^1.$$

Admettons à présent que

$$\int_E \left| \frac{\varphi_2}{c_2^1} \right| dt = m_2,$$

l'inégalité (6) se réduit à

$$m_2 \geqq m_1$$

c'est le deuxième des résultats annoncés.

8. Admettons maintenant que, pour les deux fonctions φ_1 et φ_2, on ait

$$\int_E |\varphi_1| \, dt = \int_E |\varphi_2| \, dt = m_1,$$

alors, en vertu de la convexité de la fonction que nous examinons nous avons aussi

$$\int_E |u_1 \varphi_1 + (1 - u_1) \varphi_2| \, dt = m_1 \qquad (0 \leqq u_1 \leqq 1).$$

Si, pour $u_1 = 0$ (ou $u_1 = 1$), par exemple, cette fonction a une dérivée continue, on a

$$\int_E (\varphi_1 - \varphi_2) \operatorname{sgn} \varphi_2 \, dt = 0,$$

ce qui donne

$$\int_E \varphi_1 \operatorname{sgn} \varphi_2 \, dt = \int_E \varphi_1 \operatorname{sgn} \varphi_1 \, dt = m_1,$$

d'où nous concluons

$$\operatorname{sgn} \varphi_1 = \operatorname{sgn} \varphi_2$$

presque partout sur $E - E_1$.

Il est donc indifférent de prendre φ_1 ou φ_2 pour définir notre fonction extrémale si E_1 est de mesure nulle. Lorsque E_1 est de mesure positive, si l'on prend φ_2 pour définir d'abord la fonction extrémale, elle se trouvera définie dans $E - E_1$ comme si l'on prenait φ_1; si l'on prend φ_1 elle sera définie comme par φ_2 dans $E - E_1$. De plus, un calcul simple montre que si φ_2 n'est pas nul en mesure sur E_1 (cas seul à considérer) alors on a

$$m_2 = m_1$$

et que la partie de l'extrémale définie par la deuxième opération est égale à

$$\frac{1}{m_1} \operatorname{sgn} \varphi_2,$$

c'est-à-dire que l'extrémale sera définie comme par φ_2.

Remarquons enfin que l'hypothèse sur la continuité de la dérivée pour $u_1 = 0$ ($u_1 = 1$) peut toujours être réalisée : il suffit de prendre φ_1 ou φ_2 à l'intérieur du domaine convexe des variables où le minimum est réalisé

Nous énoncerons ce résultat comme il suit :

Si les fonctions φ_i sont linéairement indépendantes, il existe une fonction, et une seule, extrémale quant au module et satisfaisant aux égalités (1_i).

9. Exemple. — Soient

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n$$

$n + 1$ nombres réels, la fonction extrémale du problème

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dt = c_i(t_i - t_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

est, comme on le voit facilement, définie par

$$f(t) = c_i \qquad (t_{i-1} < t < t_i),$$

elle prend donc n valeurs au plus. Les divers minima sont les valeurs $\frac{1}{|c_i|}$ classées par ordre de grandeur.

Si simple qu'il soit, cet exemple montre que les divers cas envisagés peuvent effectivement être réalisés; les fonctions φ_i que nous avons ici sont égales à 1 dans l'intervalle (t_{i-1}, t_i) et nulles ailleurs. A un même stade de la construction, le minimum peut être réalisé par plusieurs fonctions lorsque plusieurs nombres c_i ont des modules égaux.

Pour nous il présente un autre intérêt : celui de définir par des propriétés extrémales la fonction linéaire dans chaque intervalle (t_{i-1}, t_i), et effectuant l'interpolation d'une fonction dont on donne les valeurs aux points t_i.

En désignant en effet par c_i la pente du segment de droite joignant deux points consécutifs, et par $f(t)$ la dérivée de la fonction, on a les conditions ci-dessus.

A partir de là on aperçoit déjà comment on définira la fonction extrémale interpolatrice admettant une dérivée d'ordre supérieur donné.

10. Rappelons auparavant quelques notations et résultats élémentaires sur les différences divisées.

Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x et $x_0, x_1, \ldots$ des valeurs différentes [1] de la variable pour lesquelles la fonction est définie; nous posons

$$[x] = f(x),$$

les différences divisées d'ordre $1, 2, \ldots, n$ sont définies par

$$[x_0 x_1] = \frac{[x_0] - [x_1]}{x_0 - x_1}, \qquad [x_0 x_1 x_2] = \frac{[x_0 x_1] - [x_1 x_2]}{x_0 - x_2}, \qquad \ldots,$$

$$[x_0 x_1 \ldots x_n] = \frac{[x_0 x_1 \ldots x_{n-1}] - [x_1 x_2 \ldots x_n]}{x_0 - x_n}.$$

---

[1] On peut aussi définir des différences divisées lorsque les x_i ne sont pas tous différents et résoudre alors des problèmes analogues à ceux qui nous occupent. Nous ne le ferons pas afin de ne pas allonger ce travail.

On trouve que

$$[x_0 x_1 \ldots x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)},$$

ce qui montre que la différence divisée d'ordre n est une fonction symétrique de ses nœuds. Si $f(x)$ a une dérivé d'ordre n sommable, on peut écrire

$$[x_0 x_1 \ldots x_n] = \int f^{(n)}(t_0 x_0 + t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n,$$

l'intégrale étant prise dans le domaine

$$t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1; \qquad t_i \geqq 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Si $f^{(n)}(x)$ est continue, on peut aussi écrire

$$[x_0 x_1 \ldots x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

où ξ désigne un nombre compris entre les x_i.

Les nombres x_i étant rangés par ordre de grandeur croissante, on montre sans peine que

$$(7) \quad [x_0 x_1 \ldots x_n] = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \pi_i(x_k \mid t) f^{(n)}(t)\, dt = \int_{x_0}^{x_n} \varpi(x_0 \ldots x_n \mid t) f^{(n)}(t)\, dt,$$

où les π_i sont des polygones en t, faciles à former, de degré $(n-1)$ en t et dont les coefficients dépendent des x_i.

Enfin on a la relation

$$[x_0 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n x_{n+1}](x_{n+1} - x_0) = [x_0 \ldots x_n](x_i - x_0) + [x_1 \ldots x_{n+1}](x_{n+1} - x_i),$$

dont on tire la conclusion suivante :

Les différences divisées d'ordre n d'une fonction sont comprises entre la borne supérieure et la borne inférieure des différences divisées formées avec $(n+1)$ nœuds consécutifs.

11. Soient à présent $(m+1)$ nœuds

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_m$$

et $m+1$ nombres réels $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Parmi les fonctions $f(x)$ définies dans l'intervalle (x_0, x_m), y admettant une dérivée $n^{\text{ième}}$ sommable ($m > n > 1$), et telle que

$$f(x) = y_i, \tag{8}$$

nous pouvons à présent en définir une, et une seule, que l'on doit regarder comme la plus simple : $f^{(n)}(x)$ sera l'extrémale du problème

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{x_0}^{x_n} \varpi(x_0 \quad \ldots x_n \quad | \, t) f^{(n)}(t)\, dt = [x_0 x_1 \ldots x_n], \\ \displaystyle\int_{x_1}^{x_{n+1}} \varpi(x_1 \quad \ldots x_{n+1} \, | \, t) f^{(n)}(t)\, dt = [x_1 x_2 \ldots x_{n+1}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\int_{x_{m-n}}^{x_m} \varpi(x_{m-n} \ldots x_m \quad | \, t) f^{(n)}(t)\, dt = [x_{m-n} \ldots x_m]; \end{array}\right. \tag{9}$$

$f(x)$ s'obtiendra par intégration à partir de $f^{(n)}(x)$ et par les conditions (8).

Nous remarquerons qu'il y a toujours une solution car les fonctions ϖ sont différentes de zéro dans des segments différents et, par suite, il ne saurait y avoir de relation linéaire et homogène entre les ϖ [1].

12. Pour $n = 2$, prenons par exemple les 4 points $x_i = i (0 \leq i \leq 3)$

---

[1] REMARQUES. — 1° Les considérations précédentes ne permettent pas, en général, de poser d'une façon satisfaisante le problème de l'interpolation dans un intervalle infini.

2° Des problèmes analogues, et relatifs aux fonctions de plusieurs variables, peuvent être posés suivant les mêmes principes. Ainsi, donnant la fonction $f(x, y)$ en un certain nombre de points (x_i, y_i), on peut demander le minimum de $p^2 + q^2$ dans le polygone de sustentation des points (x_i, y_i). On aura les équations

$$\int_{x_i, y_i}^{x_k, y_k} p\, dx + q\, dy = f(x_k, y_k) - f(x_i, y_i).$$

Ce problème, malgré sa simplicité, ne semble pas susceptible d'une solution immédiate.

et soit $y_i = \frac{1}{2}$ pour $i = 0$ et 2; $y_i = 0$ pour $i = 1$ et 3, on a

$$[x_0 x_1 x_2] = \frac{1}{2}; \qquad [x_1 x_2 x_3] = -\frac{1}{2},$$

puis

$$\varphi_i = \begin{cases} \dfrac{t - i + 1}{2} & (i - 1 \leqq t \leqq i) \\ \dfrac{i + 1 - t}{2} & (i \leqq t \leqq i + 1) \\ 0 & (\text{ailleurs}). \end{cases} \quad (i = 1, 2),$$

On voit facilement que

$$\int_0^3 (\varphi_1 + \varphi_2)\,\mathrm{sgn}(\varphi_1 - \varphi_2)\,dt = 0,$$

par suite

$$m_1 = \int_0^3 (\varphi_1 - \varphi_2)\,dt = \frac{3}{4}.$$

La dérivée seconde de la fonction extrémale est donc égale à $\frac{4}{3}$ dans la première moitié de l'intervalle, et à $-\frac{4}{3}$ dans l'autre. Remarquons à présent que la moyenne de la dérivée seconde est 1 de 0 à 2 et -1 de 1 à 3; c'est-à-dire que l'interpolation par une fonction admettant une dérivée seconde ne peut se faire qu'avec une dérivée seconde supérieure à 1 en module.

Dans le cas où l'on prend plus généralement

$$[x_0 x_1 x_2] = \frac{c_1}{2}; \qquad [x_1 x_2 x_3] = \frac{c_2}{2}; \qquad c = \max\{|c_1|, |c_2|\}$$

on montre facilement que l'interpolation peut se faire avec une fonction dont le module de la dérivée seconde ne dépasse pas $\frac{4}{3}c$.

Si l'on prend 5, puis 6 points équidistants [1], au lieu de $\frac{4}{3}$ on trouve respectivement les multiplicateurs $\frac{4\sqrt{2}+5}{7}$ et $\frac{64}{39}$.

---

[1] La détermination des constantes dans le cas général des points équidistants ($n = 2$) ne semble pas présenter de difficultés insurmontables.

13. Dans le cas général, à défaut d'un résultat quantitatif précis, nous allons démontrer qu'on peut faire l'interpolation d'une fonction telle que

$$|[x_i x_{i+1} \dots x_{i+n}]| \leqq \frac{c}{n!}$$

par une fonction admettant une dérivée d'ordre n telle que

$$|f^{(n)}(x)| \leqq \mathrm{K}(n)c, \tag{10}$$

où $\mathrm{K}(n)$ *désigne une constante indépendante des* x_i.

Considérons les deux polynomes $\mathrm{P}_0(x)$ et $\mathrm{P}_1(x)$, de degré n, qui réalisent l'interpolation respectivement aux nœuds $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ et $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$; on voit sans peine que

$$\mathrm{P}_1(x) - \mathrm{P}_0(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n)\{[x_1 x_2 \dots x_{n+1}] - [x_0 x_1 \dots x_n]\}. \tag{11}$$

Soit (x_{i-1}, x_i) le plus long des intervalles $(x_1, x_2)\dots(x_{n-1}, x_n)$ dont l'indice est le plus petit; c'est-à-dire que l'on a

$$|x_k - x_l| \leqq |l - k|(x_i - x_{i-1}) \qquad (1 \leqq k,\ l \leqq n). \tag{12}$$

Cela posé nous interpolerons de x_0 à x_{n+1} en posant définitivement

$$f(x) = \mathrm{P}_0(x) \qquad \text{pour } x_0 \leqq x \leqq x_{i-1};$$

provisoirement

$$f(x) = \mathrm{P}_1(x) \qquad \text{pour } x_i \leqq x \leqq x_{n-1}$$

et, provisoirement aussi, dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i), nous ajouterons à $\mathrm{P}_0(x)$ une fonction $\mathrm{R}(x)$, nulle ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées en x_{i-1}, $f(x) + \mathrm{R}(x)$ se raccordant à $\mathrm{Q}(x)$, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées en x_i, $\mathrm{R}(x)$ admettant une dérivée $n^{\text{ième}}$ constante dans chacun des intervalles de division de (x_{i-1}, x_i) en n parties égales. Ces constantes λ_k sont déterminées par les n équations linéaires suivantes dont le déterminant, facile à calculer, n'est pas nul

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - t)^{n-1}\mathrm{R}^{(n)}(t)\,dt = 0,$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - t)^{n-2}\mathrm{R}^{n}(t)\,dt = \mathrm{P}'_1(x_i) - \mathrm{P}'_0(x_i),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathrm{R}^{(n)}(t)\,dt = \mathrm{P}_1^{(n-1)}(x_i) - \mathrm{P}_0^{(n-1)}(x_i).$$

D'après (11), les différences $P_1^{(p)}(x_i) - P_0^{(p)}(x_i)$ s'expriment, au facteur $\{[x_1 x_2 \ldots x_{n+1}] - [x_0 x_1 \ldots x_i]\}$ près, sous la forme d'une somme de produits ayant chacun $n-p$ facteurs de la forme $(x_k - x_l)$ et les coefficients du premier membre correspondant contiennent $(x_i - x_{i-1})^{n-p}$ en facteur; il s'ensuit que les λ_k sont données par des relations de la forme

$$\lambda_k = \left(\sum_{l=1}^{n} \theta_l^k a_l^k\right)\{[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] - [x_0, x_1, \ldots, x_n]\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les a_l^k sont des constantes numériques et les θ_l^k des fonctions des x_i, homogènes et de degré zéro, bornées chacune par une constante absolue en vertu de (12).

Considérons à présent le polynome $P_2(x)$, réalisant l'interpolation aux points $(x_2, x_3 \ldots, x_{n+2})$; suivant la même méthode nous pouvons le raccorder au polynome $P_1(x)$. Si l'intervalle (x_{j-1}, x_j) où se fait le raccord est tel que $j > i$, alors nous définirons la fonction interpolatrice en posant définitivement

$$f(x) = P_0(x) + R(x) \qquad \text{pour } x_{i-1} \leqq x \leqq x_i,$$
$$f(x) = P_1(x) \qquad \text{pour } x_i \leqq x \leqq x_{j-1}.$$

Si $j = i$, nous raccordons P_1 à P_2 au moyen de la fonction $S(x)$ dans (x_{i-1}, x_i) et nous posons provisoirement

$$f(x) = P_0(x) + R(x) + S(x) \qquad \text{pour} \quad x_{i-1} \leqq x \leqq x_i,$$

ce qui équivaut à raccorder $P_0(x)$ à $P_2(x)$ dans cet intervalle.

Au bout de $i - 1$ ($\leqq n - 1$) opérations, au plus, la fonction interpolatrice sera définitivement définie dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i).

Comme les remarques précédentes montrent l'existence d'une fonction $k(n)$ telle que

$$|R^{(n)}(x)| \leqq k(n)\,c, \qquad |S^{(n)}(x)| \leqq k(n)\,c, \qquad \ldots,$$

on en déduit immédiatement l'existence de la constante $K(n)$.

Voici enfin une remarque essentielle : les formules qui donnent les λ_k sont linéaires suivant les valeurs $f(x_i) = y_i$ prises par la fonction aux nœuds x_i; il s'ensuit que *la fonction interpolatrice que nous venons de construire est constituée par des polynomes de degré n se raccordant, chacun d'eux ayant des coefficients dépendant linéairement des* $f(x) = y_i$.

14. Exemple. — Dans le cas où $n=2$, un calcul, que le lecteur fera facilement, montre que l'on peut prendre $K(2)=2$ et cette valeur est à peu près certainement exacte; voici comment on peut raisonner pour le voir ([1]).

Admettons que le problème de l'interpolation, par une fonction $f(x)$ à dérivée seconde minima, telle que

$$\begin{aligned} f(i) &= 0 \qquad (i \text{ pair}) \\ f(i) &= \frac{1}{2} \qquad (i \text{ impair}) \end{aligned} \qquad (i \text{ entier quelconque, positif ou négatif})$$

ait un sens et une solution unique qui, alors, sera périodique.

Quant à la détermination de la fonction dans l'intervalle (0, 3) par exemple, seules interviennent les fonctions

$$\varpi(i-1,\, i,\, i+1 \mid t) = \varphi_i(t) \qquad (i = 0,\, 1,\, 2,\, 3)$$

et les fonctions φ_0 et φ_3 doivent intervenir de façon antisymétrique, ainsi que φ_1 et φ_2, ce qui conduit au fait que la dérivée seconde doit être proportionnelle à

$$\operatorname{sgn}(\varphi_3 - \varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_0),$$

on en tire que le raccord doit se faire aux points $i+\frac{1}{2}$ et enfin $K(n) \geqq 2$.

15. Passons au problème de l'approximation des fonctions, appartenant aux classes simples, lorsqu'on connaît seulement leurs valeurs en un certain nombre de points.

Soit d'abord $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) et dont on donne les valeurs

$$f(x_0^m), \quad f(x_1^m), \quad \ldots, \quad f(x_m^m)$$

en une suite de nœuds

$$x_0^m, \quad x_1^m, \quad \ldots, \quad x_m^m \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

avec

$$a \leqq x_0^m < x_1^m < \ldots < x_m^m \leqq b.$$

([1]) *Voir* un problème analogue au n° **21**; il semble que les polynomes d'Euler jouent un rôle important dans ces questions.

Supposons d'abord que $f(x)$ soit continue et soit $\omega(\lambda)$ son module de continuité dans un intervalle d'amplitude λ.

Effectuons l'interpolation de $f(x)$ au moyen de la fonction $\varphi_m(x)$, linéaire dans chaque intervalle (x_{i-1}^m, x_i^m), constante dans (a, x_0^m) et (x_m^m, b) et telle que

$$\varphi_m(x_i) = f(x_i).$$

Nous nous proposons d'approcher $f(x)$ au moyen d'un polynome de degré m. Posons

$$\Lambda_m = \max\{x_0^m - a,\ b - x_m^m;\ x_i^m - x_{i-1}^m\},$$
$$\lambda_m = \min\{x_i^m - x_{i-1}^m\}.$$

Nous devons, bien entendu, considérer une suite de nœuds dense dans (a, b), c'est-à-dire supposer que Λ_m tend vers zéro lorsque m augmente indéfiniment. Une suite de nœuds peut être dite régulière si le rapport $\frac{\Lambda_m}{\lambda_m}$ reste inférieur à un nombre fini A. On a d'abord

$$(13) \qquad |f(x) - \varphi_m(x)| \leqq \omega(\Lambda_m),$$

or la fonction $\varphi_m(x)$ satisfait à la condition suivante de Lipschitz :

$$(14) \qquad |\varphi_m(x') - \varphi_m(x)| \leqq \frac{\omega(\Lambda_m)}{\lambda_m}\,|x' - x|.$$

D'après un résultat connu [1] on peut donc approcher φ_m, par un polynome de degré m au plus, $P_m(x)$, tel que

$$(15) \qquad |\varphi_m(x) - P_m(x)| \leqq \frac{\pi}{4}\,\frac{b-a}{m}\,\frac{\omega(\Lambda_m)}{\lambda_m}.$$

De (13) et (15) nous tirons

$$(16) \qquad |f(x) - P_m(x)| \leqq \omega(\Lambda_m)\left[1 + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{b-a}{m\lambda_m}\right].$$

Lorsque m augmente indéfiniment, le second membre de cette inégalité ne tend pas forcément vers zéro, mais il en est ainsi lorsque la suite des nœuds est régulière; dans ce cas on trouve

$$|f(x) - P_m(x)| \leqq \omega(\Lambda_m)\left[1 + \frac{\pi}{4}\,A.\frac{m+2}{m}\right].$$

---

[1] J. Favard, *Sur les meilleurs procédés d'approximation*... (*Bull. Sc. Math.*, **61**, 2e série, 1937).

Dans le cas d'une suite non régulière, divisons l'intervalle (a, b) en m parties égales et interpolons $\varphi_m(x)$ aux $(m+1)$ points de division, par une fonction $\psi_m(x)$ linéaire dans chacun des intervalles de division; on a

$$(17) \qquad |\varphi_m(x) - \psi_m(x)| \leqq \omega(\Lambda_m).$$

Évaluons maintenant le maximum de la pente des segments constituant $\psi_m(x)$. Lorsque deux points $\frac{i-1}{m}$ et $\frac{i}{m}$ se trouvent sur un même segment de $\varphi_m(x)$, les deux fonctions coïncident et il faut pour cela que le segment correspondant aux nœuds de départ ait une longueur au moins égale à $\frac{b-a}{m}$; dans ce cas la pente ne dépasse pas $\frac{m\,\omega(\Lambda_m)}{(b-a)}$.

Si deux points $\frac{i-1}{m}$ et $\frac{i}{m}$ se trouvent sur des segments différents, nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{b-a}\left|\psi_m\left(\frac{i-1}{m}\right) - \psi_m\left(\frac{i}{m}\right)\right| \\
&\leqq \frac{m}{b-a}\left[\left|\psi_m\left(\frac{i-1}{m}\right)-f\left(\frac{i-1}{m}\right)\right|+\left|\psi_m\left(\frac{i}{m}\right)-f\left(\frac{i}{m}\right)\right|+\left|f\left(\frac{i}{m}\right)-f\left(\frac{i-1}{m}\right)\right|\right] \\
&\leqq \frac{3m}{b-a}\,\omega(\Lambda_m).
\end{aligned}$$

En définitive, quels que soient les points x et x' de l'intervalle (a, b), on a donc

$$|\psi_m(x') - \psi_m(x)| \leqq \frac{3m}{b-a}\,\omega(\Lambda_m).$$

D'après le résultat rappelé ci-dessus, on peut approcher $\psi_m(x)$ par un polynome $Q_m(x)$, de degré m au plus, et tel que

$$(18) \qquad |\psi_m(x) - Q_m(x)| \leqq \frac{3\pi}{4}\,\omega(\Lambda_m).$$

La comparaison de (13), (17) et (18) donne

$$(19) \qquad |f(x) - Q_m(x)| \leqq \left(2 + \frac{3\pi}{4}\right)\omega(\Lambda_m) < 5\,\omega(\Lambda_m).$$

Un cas particulier intéressant est celui où les nœuds d'ordre m partagent l'intervalle (a, b) en m parties égales, la formule (16) montre l'existence d'un polynome tel que

$$(16') \qquad |f(x) - P_m(x)| \leqq \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \omega\left(\frac{b-a}{m}\right) < 2\omega\left(\frac{b-a}{m}\right).$$

16. Les formules précédentes montrent bien que la connaissance des valeurs prises par la fonction en une suite de nœuds permet de connaître la fonction avec une erreur de l'ordre de la meilleure approximation dans la classe, mais elles seraient de peu de prix si elles ne fournissaient que des théorèmes d'existence sans donner de méthode régulière propre à la formation des polynomes d'approximation.

Le théorème utilisé pour avoir l'inégalité (15) s'obtient par un procédé que nous allons rappeler. On peut toujours, quitte à faire une transformation linéaire, supposer que l'on opère dans l'intervalle $(-1, +1)$; posons alors $x = \cos\varphi$ (1) et considérons le développement en série de Fourier de $\varphi_m(\cos\varphi)$

$$\varphi_m(\cos\varphi) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_k \cos k\varphi.$$

On démontre alors qu'il existe des constantes γ_k^m, indépendantes de φ, telles que le polynome

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{m} \gamma_k^m a_k \cos k\varphi$$

satisfasse à l'inégalité (15).

Reprenons maintenant la définition de $\varphi_m(x)$; nous voyons qu'elle est la somme de fonctions linéaires dans un intervalle et nulles

(1) Ce changement de variable indique une voie différente de la nôtre pour résoudre le problème qui nous occupe; par exemple la suite de nœuds

$$\cos\frac{k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m;\ m = 1, 2, \ldots)$$

non régulière dans $(-1, +1)$ avec la variable x, l'est avec la variable φ; l'interpolation sur l'axe des φ peut ensuite être restituée sur x; au lieu de fonctions linéaires dans un intervalle, on a des fonctions de la forme $A \arccos x + B$.

ailleurs; le coefficient de chacune de ces fonctions linéaires dépendant linéairement des valeurs prises par $f(x)$ aux extrémités de l'intervalle. Il s'ensuit donc que les coefficients a_k se présentent sous la forme

$$a_k = \sum_{i=0}^{m} f(x_i^m)\,\theta_i^k(x_i^m),$$

où les fonctions θ_i^k dépendent seulement des x_i^m.

Le même résultat vaut pour la fonction $\psi_m(x)$ de sorte que, en définitive, nous pouvons énoncer les résultats suivants correspondant aux inégalités (16) et (16').

1° *Soit*

$$x_0^m, \quad x_1^m, \quad \ldots, \quad x_m^m \qquad (m \text{ entier quelconque})$$

une suite de nœuds dense dans l'intervalle (a, b). *Pour toute valeur de* m *on peut trouver une suite de polynomes*

$$P_0^m(x), \quad P_1^m(x), \quad \ldots, \quad P_m^m(x)$$

de degré m *au plus* [1] *tels que, pour toute fonction continue* $f(x)$, *le polynome*

$$f(x_0)P_0^m(x) + f(x_1)P_1^m(x) + \ldots + f(x_m)P_m^m(x)$$

diffère de $f(x)$ *de moins de* $5\omega(\Lambda_m)$ *dans* (a, b); ω *désignant le module de continuité de la fonction et* Λ_m *le maximum de la longueur des* $(m+2)$ *intervalles déterminés sur* (a, b) *par la suite des nœuds d'ordre* m.

2° *Les notations étant les mêmes que ci-dessus, on peut, pour toute valeur de* m, *trouver des polynomes de degré* m *au plus*

$$\Pi_0^m(x), \quad \Pi_1^m(x), \quad \ldots, \quad \Pi_m^m(x),$$

tels que, dans (a, b),

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{m} f\left(a + i\,\frac{b-a}{m}\right)\Pi_i^m(x) \right| < 2\omega\left(\frac{b-a}{m}\right).$$

17. Pour une fonction $f(x)$ admettant dans l'intervalle (a, b) une dérivée bornée ou, plus généralement, satisfaisant à une condition de

---

(1) Notre méthode de construction de la fonction $\psi_m(x)$ montre que quelques-uns des polynomes $P_i^m(x)$ peuvent être nuls.

Lipschitz telle que

$$(20)\qquad |f(x')-f(x)| \leqq M|x'-x|.$$

Interpolons d'abord $f(x)$ au moyen de $\varphi_m(x)$ et examinons seulement le cas (¹) où $x_0^m = a$ et $x_m^m = b$, on a

$$(21)\qquad |f(x)-\varphi_m(x)| \leqq \frac{1}{2}\Lambda_m M,$$

puis, en remarquant que $\varphi_m(x)$ satisfait aussi à (20), on peut déterminer un polynome $P_m(x)$, de degré m au plus, tel que

$$|\varphi_m(x)-P_m(x)| \leqq \frac{\pi}{4}\frac{b-a}{m}M.$$

En définitive

$$|f(x)-P_m(x)| \leqq \left(\frac{\Lambda_m}{2}+\frac{\pi}{4}\frac{b-a}{m}\right)M \leqq \Lambda_m\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)M < \frac{3}{2}\Lambda_m M,$$

et l'on peut trouver une suite de polynomes $P_i^m(x)$ analogues aux précédents. Lorsque la suite des points est celle qui divise l'intervalle en parties égales, la suite $\Pi_i^m(x)$ répond à la question et l'on a une erreur moindre que $\frac{3}{2}\frac{b-a}{m}M$, ce qui est de l'ordre de la meilleure approximation dans la classe.

18. Passons maintenant au cas d'une fonction $f(x)$ admettant, presque partout une dérivée d'ordre n borné, ou ce qui revient au même, telle que

$$|[x, x', \ldots, x^{n}]| \leqq \frac{M}{n!}.$$

Connaissant les valeurs de la fonction aux points x_i^m, interpolons suivant la règle établie au nº **13** par une fonction $\varphi_m(x)$ telle que

$$|\varphi_m^{(n)}(x)| \leqq K(n)M \qquad \text{dans} \qquad x_0^m \leqq x \leqq x_m^m,$$

et

$$|\varphi_m^{(n)}(x)| = 0 \qquad \text{dans} \qquad a \leqq x \leqq x_0^m; \qquad x_m^m \leqq x \leqq b.$$

La différence $f(x)-\varphi_m(x)$ s'annule aux points $x_0^m, \ldots, x_m^m$; en prenant les n nœuds les plus voisins d'un point x donné et en écrivant,

(¹) Lorsqu'il n'en est pas ainsi, le facteur $\frac{1}{2}$ est à supprimer dans (21).

pour $f-\varphi_m$, la différence divisée $[x, x_{i_1}^m, \ldots, x_{i_n}^m]$, on a

$$\left|\frac{f(x)-\varphi_m(x)}{(x-x_{i_1}^m), \ldots, (x-x_{i_n}^m)}\right| \leqq [1+K(n)]\frac{M}{n!}.$$

Or, évidemment ([1])

$$|(x-x_{i_1}^m), \ldots, (x-x_{i_n}^m)| \leqq n!\,\Lambda_m^n.$$

de là

$$(22) \qquad |f(x)-\varphi_m(x)| \leqq [1+K(n)]\Lambda_m^n M.$$

D'autre part, d'après un résultat connu, on peut approcher $\varphi_m(x)$, par un polynome de degré m au plus, $P_m(x)$, tel que

$$(23) \qquad |\varphi_m(x)-P_m(x)| \leqq C(n)\,K(n)\left(\frac{b-a}{m}\right)^n M \leqq C(n)\,K(n)\,\Lambda_m^n M,$$

où $C(n)$ désigne une constante ne dépendant que de n. De (22) et (23) on tire alors

$$|f(x)-P_m(x)| \leqq [1+K(n)+C(n)\,K(n)]\Lambda_m^n M = D(n)\,\Lambda_m^n M.$$

Nous avons déjà fait remarquer que la fonction interpolatrice $\varphi_m(x)$ dépendait linéairement des $f(x_i^m)$; comme précédemment, nous en déduisons donc l'existence de polynomes, de degré m au plus

$$P_{0,n}^m(x), \quad P_{1,n}^m(x), \quad \ldots, \quad P_{m,n}^m(x),$$

tels que

$$\left|f(x)-\sum_{i=0}^{m} f(x_i^m)\,P_{i,n}^m(x)\right| \leqq D(n)\,\Lambda_m^n M.$$

Dans le cas des nœuds divisant (a, b) en parties égales, on a, en particulier, des polynomes $\Pi_{i,n}^m(x)$, tels que

$$\left|f(x)-\sum_{i=0}^{m} f\left(a+i\,\frac{b-a}{m}\right)\Pi_{i,n}^m(x)\right| \leqq D(n)\left(\frac{b-a}{m}\right)^n M.$$

Remarques. — 1° Si l'on s'en tient aux théorèmes d'existence, sans exiger de procédé régulier pour leur formation, le résultat du début

([1]) Cette évaluation est extrêmement grossière et, notamment, dans le cas de la suite des nœuds divisant (a, b) en m parties égales, peut être facilement améliorée.

du travail montre l'existence d'une fonction interpolatrice $\mu_m(x)$ telle que

$$|\mu_m^{(n)}(x)| \leqq M.$$

Dans les formules précédentes il y a lieu de remplacer $K(n)$ par 1, d'où l'existence d'un polynome $Q_m(x)$ tel que

$$|f(x) - Q_m(x)| \leqq [2 + C(n)]\Lambda_m^n M.$$

2° Si la dérivée $n^{\text{ième}}$ admet un module de continuité comme $\omega_n(\lambda)$, il est facile de voir qu'il existe un procédé régulier d'approximation fournissant une erreur de l'ordre de $\Lambda_m^n \omega_n(\Lambda_m)$.

3° En terminant, je tiens à signaler un résultat sur l'approximation qui complète les précédents : il s'agit de l'existence d'un meilleur procédé d'interpolation, dans les classes que nous venons d'examiner, résultat que j'ai établi ailleurs [1].

19. Fonctions périodiques. — Les solutions des problèmes d'interpolation relatifs aux fonctions périodiques, et analogues aux précédents, ne diffèrent pas essentiellement de celles déjà données. Nous nous bornerons à quelques remarques.

Supposons que la période soit 2π; ayant placé tout d'abord les nœuds d'interpolation sur le cercle trigonométrique, nous en prendrons un pour origine, soit x_0, et nous tournerons dans le sens positif, à partir de ce point, jusqu'au retour en x_0. Si, par exemple, nous avons m nœuds, nous écrirons la suite

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = 2\pi + x_0 [\equiv x_0 (\operatorname{mod} 2\pi)].$$

Pour avoir la fonction interpolatrice extrémale ayant une dérivée d'ordre n (ici n peut être supérieur à m), il suffira de partir de la formule

$$(24) \qquad \begin{aligned} f(x) - \frac{a_0}{2} &= -\frac{(2\pi)n}{n!}\int_0^1 \overline{B_n}(1-z) f^{(n)}(x + 2\pi z)\, dz \\ &= -\frac{(2\pi)n}{n!}\int_0^1 \overline{B_n}\left(1 - \frac{x}{2\pi} - z\right) f^{(n)}(2\pi z)\, dz, \end{aligned}$$

(1) J. Favard, *Sur l'interpolation*. (*Bull. Soc. Math. France*, **67**, 1939, p. 102-113.)

où $\overline{B_n}(x)$ désigne la fonction périodique, de période 1, et égale au polynome de Bernoulli d'ordre n dans (0, 1). On aura les équations

$$f(x_i)-f(x_0)=-\frac{(2\pi)n}{n!}\int_0^1\left\{\overline{B_n}\left(1-\frac{x_i}{2\pi}-z\right)\right.$$
$$\left.-\overline{B_n}\left(1-\frac{x_0}{2\pi}-z\right)\right\}f^{(n)}(2\pi z)\,dz$$
$$(i=1,\,2,\,\ldots,\,m-1),$$
$$\int_0^1 f^{(n)}(2\pi z)\,dz=0.$$

Quant à l'existence de la constante $K(n)$ (nº **13**), elle s'établit facilement; il faut avoir soin simplement de raccorder les polynomes interpolateurs jusqu'au retour au premier polynome choisi. Ajoutons que le premier polynome interpolateur sera défini par les nœuds $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$; si $n\geqq m$, nous posons $x_m=x_0$, $x_{m+1}=x_1$, ...

Les théorèmes d'approximation s'énonceront par suite d'une manière tout à fait analogue, il suffira de remplacer le mot polynome par polynome trigonométrique; les inégalités d'erreur gardent leur forme.

20. Dans les pages précédentes, nous n'avons pas donné d'exemple effectif d'une suite de polynomes $P^m_{i,n}$, ni de polynomes $\Pi^m_{i,n}$ car, si leur calcul ne demande qu'un peu de soin, il ne semble pas présenter beaucoup d'intérêt; il est en effet à peu près certain que ces polynomes ne sont pas exactement adaptés au problème.

Par contre, nous allons donner un exemple de polynomes trigonométriques interpolateurs qui, eux non plus, ne semblent pas exactement adaptés, mais qui présentent quelque intérêt à cause de leur simplicité.

Supposons que nous donnions les valeurs d'une fonction aux points de division du cercle en $2m$ parties égales

$$0,\quad \frac{\pi}{m},\quad \frac{2\pi}{m},\quad \ldots,\quad \frac{2m-1}{m}\pi.$$

Comme un polynome trigonométrique est déterminé par un nombre impair de conditions, nous ne pouvons déterminer, en général, de polynome trigonométrique d'ordre $m-1$ prenant en ces points les mêmes valeurs que la fonction; nous chercherons donc un polynome d'approximation d'ordre $(m-1)$ dépendant linéairement de ces valeurs, il sera de la forme

$$\sum_{h=0}^{2m-1} f\left(h\frac{\pi}{m}\right) \mathrm{T}\left(x-\frac{h\pi}{m}\right).$$

Dans le cas des fonctions continues, ou admettant une dérivée bornée, pour obtenir $\mathrm{T}(x)$, il suffit de développer en série de Fourier égale à 1 pour $x=0$, égale à zéro pour $x=\frac{\pi}{m}$ et $-\frac{\pi}{m}$ et linéaire dans chacun des intervalles $\left(-\frac{\pi}{m}, 0\right)$ et $\left(0, \frac{\pi}{m}\right)$, et de multiplier les m premiers termes de cette série par $\frac{k\pi}{2m}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2m}$. On trouve alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(x) &= \frac{1}{2m} + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{m-1}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{m}\cos kx \\
&= \frac{1}{2m} + \frac{1}{2\pi}\sum_{1}^{m-1}\left[\frac{\sin k\left(\frac{\pi}{m}+x\right)}{k} + \frac{\sin k\left(\frac{\pi}{m}-x\right)}{k}\right] \\
&= \frac{1}{2m} + \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{A}_m\left(\frac{\pi}{m}+x\right) + \mathrm{A}_m\left(\frac{\pi}{m}-x\right)\right].
\end{aligned}$$

Or le polynome $\mathrm{A}_m(x)$ est bien connu; il a été longuement étudié, surtout à propos du phénomène de Gibbs.

21. Le problème d'extremum, résolu au début de ce travail, permet de poser d'une manière intéressante le problème de l'interpolation des fonctions périodiques.

Prenons un cas simple : nous allons déterminer la fonction interpolatrice extrémale $f_n(x)$, admettant une dérivée bornée d'ordre n, et telle que

$$f_n(0)=1, \qquad f_n(\pi)=-1. \tag{25}$$

Écrivant la formule (24), on voit qu'il suffit de déterminer trois constantes a, a' et a_0^n, de façon que le nombre M_n défini par

$$M_n \int_0^1 |\overline{B}_n(1-z)-a|\,dz \geqq \left|1-\frac{a_0^n}{2}\right|,$$
$$M_n \int_0^1 |\overline{B}_n(1-z)-a'|\,dz \geqq \left|-1-\frac{a_0^n}{2}\right|$$

soit le plus petit possible : on trouve facilement $a_0^n = 0$; quant aux valeurs de a et de a', je les ai déterminées pour un autre objet (¹), la valeur correspondante de M_n est alors facile à calculer (¹) et l'on trouve finalement

$$f_{2\nu-1}(x) = \frac{\overline{E_{2\nu-1}}\left(\frac{x}{\pi}\right)}{\overline{E_{2\nu-1}}(0)}, \qquad f_{2\nu}(x) = \frac{\overline{E_{2\nu}}\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)}{\overline{E_{2\nu}}\left(\frac{1}{2}\right)},$$

où la fonction $\overline{E_n}(x)$ est définie par

$$\overline{E_n}(x+1)+\overline{E_n}(x)=0, \qquad \overline{E_n}(x)=E_n(x) \qquad (0\leqq x\leqq 1),$$

$E_n(x)$ désignant le polynome d'Euler de degré n.

On trouve immédiatement que $f_n(x)$ tend uniformément vers $\cos x = f(x)$ et que l'on a aussi uniformément en x

$$f_n^{(p)}(x) \to f^{(p)}(x).$$

La fonction $\cos x$ doit donc être considérée comme la fonction, de période 2π, indéfiniment dérivable la plus simple définie par (25).

Voici maintenant le problème général que l'on peut poser :

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_m$ des points différents du cercle trigonométrique, parmi les fonctions périodiques qui, en ces points, prennent les valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_m$, soit $f_n(x)$ l'extrémale quant à la dérivée d'ordre n. Si, lorsque n augmente indéfiniment, $f_n(x)$ tend vers une limite $f(x)$ indéfiniment dérivable, $f(x)$ doit être considérée comme la fonction interpolatrice la plus naturelle.

Il semble d'ailleurs que $f(x)$ existe toujours et est égale au polynome interpolateur, d'ordre le moins élevé, dont le module est le plus petit, mais cela me semble difficile à prouver.

(¹) J. Favard, *Application de la formule sommatoire d'Euler*... (*Mat. Tids*, 1936, p. 81-94.)