JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL MONTEL

Sur les valeurs algébriques d'une fonction entière ou méromorphe

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 20 (1941), p. 305-324.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1941_9_20__305_0>

Sur les valeurs algébriques d'une fonction entière ou méromorphe;

Par Paul MONTEL.

1. L'étude de la distribution des valeurs d'une fonction entière ou méromorphe peut être rattachée à la théorie de la croissance et à l'impossibilité de certaines identités entre fonctions entières qui ont fait l'objet d'un travail fondamental de M. É. Borel. Elle peut l'être aussi à la théorie des familles normales de fonctions.

A ce dernier point de vue, les propositions obtenues comportent des extensions nombreuses. En effet, à tout critère de famille normale correspond un groupe de théorèmes formant un cycle semblable à ce qu'on est convenu d'appeler le cycle de Picard et comportant, en particulier, des propositions du type de celles de Landau et de Schottky. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les fonctions bornées, les fonctions univalentes ou multivalentes d'ordre donné, etc.

Dans le présent travail, j'introduis un nouveau critère de normalité déduit de la comparaison de la fonction avec une fonction algébrique. On en tire des conséquences pareilles à celles de la théorie classique des fonctions à valeurs exceptionnelles qui apparaît d'ailleurs comme un cas particulier de la théorie actuelle.

Le critère de normalité qui est à sa base s'énonce comme il suit : *les fonctions méromorphes qui ne sont jamais égales à une fonction algébrique admettant au moins trois déterminations forment une famille normale.*

2. Donnons la démonstration de cette proposition. Soient

$$F(x, y) = A_0(x)y^m + A_1(x)y^{m-1} + \ldots + A_m(x) = 0 \qquad (m \geqq 3)$$

l'équation définissant la fonction algébrique $y(x)$; $f(x)$, une fonction méromorphe dans l'intérieur d'un domaine (D) et telle que l'on ait

$$f(x) \neq y(x)$$

lorsque x est intérieur au domaine.

Soit x_0 un point intérieur au domaine; nous allons montrer que la famille des fonctions $f(x)$ est normale en x_0.

Supposons d'abord que x_0 ne soit pas un point de ramification de $y(x)$ et soient $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ trois branches simples passant en x_0. Traçons un cercle (γ) de centre x_0, intérieur à (D) et ne contenant aucun point de ramification. Dans (γ), les fonctions y_1, y_2, y_3 sont uniformes et méromorphes; la fonction

$$g(x) = \frac{f(x) - y_1}{f(x) - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = (y_1, y_2, f, y_3)$$

est méromorphe dans (γ) où elle ne prend aucune des valeurs $0, 1, \infty$. En effet, $g(x)$ ne peut s'annuler que pour $f(x) = y_1$ ou $y_2 = y_3$. Il en est de même pour

$$\frac{1}{g(x)} = (y_2, y_1, f, y_3),$$

en permutant y_1 et y_2, et pour

$$1 - g(x) = (y_3, y_2, f, y_1),$$

en permutant y_1 et y_3; les valeurs infinies ne modifient pas ces conclusions.

La famille des fonctions $g(x)$ est normale dans (γ). Or $f(x)$ et $g(x)$ sont liées par les relations

$$g(x) = \frac{A f(x) + B}{C f(x) + D}, \qquad f(x) = \frac{D g(x) - B}{- C g(x) + A}.$$

avec

$$AD - BC = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3) \neq 0.$$

Les fonctions méromorphes A, B, C, D sont invariables; donc la famille $f(x)$ est normale dans (γ) : le point x_0 est un point régulier.

Supposons maintenant que x_0 soit un point de ramification. Il n'y a rien à changer au raisonnement s'il existe trois déterminations simples et distinctes de y autour de x_0. Dans le cas contraire, traçons un cercle (γ) de centre x_0, intérieur à (D) et ne contenant aucun point de ramification autre que x_0. En x_0, on peut avoir

$$y_1 = y_2 \neq y_3 \quad \text{ou} \quad y_1 = y_2 = y_3,$$

en remplaçant au besoin $g(x)$ par $\frac{1}{g(x)}$ ou $1 - g(x)$. Dans le premier cas, on a

$$g(x_0) = 1,$$

même si $f(x_0)$ ou $y_1(x_0)$ ou $y_3(x_0)$ est infini. Dans le second cas, donnons à $g(x)$ en x_0 la valeur limite de $g(x)$ lorsque x tend vers x_0. Cette valeur limite est arbitraire et peut être égale à 0, 1 ou ∞. Donc $g(x)$ prend une seule fois au plus l'une de ces valeurs.

Dans tous les cas, une substitution de la forme

$$x = x_0 + t^q,$$

q désignant un entier, rend uniformes dans (γ) les fonctions y_1, y_2, y_3 et $g(x)$. La famille des fonctions $g(x_0 + t^q)$ est normale pour $t = 0$; il en est de même pour la famille des fonctions $f(x_0 + t^q)$ et, par conséquent, pour la famille des fonctions uniformes $f(x)$ au point x_0.

Enfin, si x_0 est le point à l'infini, il suffit de remplacer x par $\frac{1}{x}$, puisqu'une représentation conforme conserve la normalité.

Ainsi, la famille des fonctions $f(x)$ est normale en chaque point intérieur à (D) : elle est donc normale dans l'intérieur de (D) comme je l'ai établi au début de la théorie des familles normales ([1]).

3. La démonstration précédente n'exige pas que le polynome $F(x, y)$ soit indécomposable. En particulier, on peut supposer que F admette trois facteurs du premier degré qui, égalés à zéro, définissent trois fractions rationnelles $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$. Le théorème s'applique alors aux fonctions méromorphes $f(x)$ toujours différentes de $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$. On peut même supposer que y_1, y_2, y_3 soient des fonc-

---

([1]) *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (*Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, série 3, t. XXXIII, 1916, p. 227).

tions méromorphes distinctes. On retrouve ainsi un cas déjà étudié [1].

Si, en particulier, les fonctions y_1, y_2, y_3 sont des constantes différentes, on obtient un théorème classique sur les familles normales.

Lorsque les fonctions $f(x)$ sont holomorphes, on peut les considérer comme des fonctions méromorphes admettant comme valeur exceptionnelle la constante infinie. On peut aussi reprendre le raisonnement du paragraphe précédent en posant $y_3 = \infty$, c'est-à-dire raisonner sur la fonction

$$g(x) = \frac{f(x) - y_1}{f(x) - y_2}.$$

Dans le théorème général, la condition que le nombre des déterminations de $y(x)$ soit au moins égal à trois est essentielle. Une famille de fonctions $f(x)$ jamais égales à une fonction algébrique à deux déterminations n'est pas nécessairement normale. Par exemple, pour

$$F(x, y) = y^2 + 1,$$

la famille des fonctions

$$f_n(x) = \operatorname{tang}(nx) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

n'est pas normale. Tous les points de l'axe réel sont irréguliers. On a cependant $f_n(x) \neq \pm i$.

Pour

$$F(x, y) = y^2 - x,$$

la famille

$$f_n(x) = \sqrt{x}\coth(\sqrt{nx})$$

est formée de fonctions toujours différentes de $\sqrt{x}$.

On a, en effet,

$$F(x, f_n) = f_n^2 - x = \frac{x}{\operatorname{sh}^2(\sqrt{nx})} \neq 0.$$

Cette famille n'est pas normale. Tous les points du demi-axe réel négatif sont irréguliers.

De même, pour les fonctions holomorphes, la condition $m \geqq 2$ est

---

[1] *Cf.* P. MONTEL, *Sur les familles complexes et leurs applications* (*Acta Mathematica*, t. 49, 1926, p. 129 et suiv.). — *Leçons sur les familles normales*, etc. (Paris, Gauthier-Villars et C[ie], 1927, p. 269 et suiv.)

indispensable. Par exemple, la suite

$$f_n(x) = x + e^{nx},$$

composée de fonctions toujours différentes de $y = x$, n'est pas normale. Tous les points de l'axe imaginaire sont irréguliers.

4. Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan et toujours différente de $y(x)$, $(m > 3)$. Désignons par R un nombre supérieur aux modules de tous les points critiques à distance finie. Si le point à l'infini n'est pas critique ou si, lorsque ce point est critique, il existe trois déterminations de $y(x)$ uniformes à l'infini, la fonction $g(x)$ est uniforme et méromorphe à distance finie pour $|x| > \mathrm{R}$, et ne prend aucune des valeurs 0, 1, ∞. C'est donc une fraction rationnelle; comme y_1, y_2, y_3 sont régulières à l'infini ou y admettent des pôles, il en est de même pour $f(x)$ qui est aussi une fraction rationnelle.

S'il n'existe pas trois déterminations uniformes à l'infini, un changement de variable de la forme $x = t^q$, q désignant un entier, permet d'uniformiser y_1, y_2, y_3, donc $g(x)$, et le résultat demeure le même.

Enfin, si $f(x)$ prend un nombre fini de fois la valeur $y(x)$, il suffit de supposer R supérieur aux modules des zéros de $f(x) - y(x)$ pour que le raisonnement et sa conclusion subsistent. Donc :

Toute fonction transcendante méromorphe dans le plan prend une infinité de fois les valeurs de toute fonction algébrique qui admet au moins trois déterminations.

Toute fonction transcendante entière prend une infinité de fois les valeurs de toute fonction algébrique qui admet au moins deux déterminations.

5. Les seules fonctions entières qui peuvent ne jamais prendre les valeurs d'une fonction algébrique admettant au moins deux déterminations sont des polynomes. Nous dirons qu'un polynome $\mathrm{P}(x)$ qui n'est jamais égal à $y(x)$ ou coïncide avec une de ses branches est *exceptionnel relativement à* $\mathrm{F}(x, y)$. On peut alors écrire :

$$\mathrm{F}(x, y) \equiv (y - \mathrm{P})\,\mathrm{F}_1(x, y) + \mathrm{C},$$

C désignant une constante. Si $\mathrm{Q}(x)$ est un autre polynome exceptionnel correspondant à la même constante C, on aura

$$F(x, Q) \equiv (Q - P) F_1(x, Q) + C \equiv C,$$

donc

$$F_1(x, Q) \equiv 0, \qquad F_1(x, y) \equiv (y - Q) F_2(x, y)$$

et

$$F(x, y) \equiv (y - P)(y - Q) F_2(x, y) + C.$$

Si donc $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sont tous les polynomes exceptionnels correspondant à la même constante C, on aura l'identité

$$(1) \qquad F(x, y) \equiv (y - P_1)(y - P_2)\ldots(y - P_k) F_k(x, y) + C,$$

F_k n'étant pas décomposable en un produit dont l'un des facteurs serait de la forme $y - Q(x)$. Le nombre maximum des polynomes distincts correspondant à une même constante C est donc m.

Si maintenant $F(x, y)$ admet un polynome exceptionnel $Q(x)$ correspondant à une constante C′ différente de C, on aura

$$(Q - P_1)(Q - P_2)\ldots(Q - P_k) F_k(x, Q) \equiv C' - C.$$

On en conclut que chacun des facteurs du premier membre est une constante. Donc, d'abord, que les polynomes $P_1, P_2, \ldots, P_k$, pris deux à deux, ne diffèrent que par une constante; on peut donc écrire

$$P_i \equiv P + \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

λ_i désignant une constante;

$$Q \equiv P + \lambda,$$

λ désignant une constante. D'autre part, C_k désignant aussi une constante,

$$F_k(x, Q) \equiv (y - Q) F_{k+1}(x, y) + C_k.$$

Donc

$$\begin{aligned} F(x, y) \equiv{} & (y - P_1)(y - P_2)\ldots(y - P_k)(y - Q) F_{k+1}(x, y) \\ & + (y - P_1)(y - P_2)\ldots(y - P_k) C_k + C. \end{aligned}$$

En continuant ainsi, on verrait que $F(x, y)$ se mettra sous la forme

$$(2) \qquad \begin{aligned} F(x, y) \equiv{} & (y - P - \lambda_1)(y - P - \lambda_2)\ldots(y - P - \lambda_p) F_p(x, y) \\ & + C_{p-1}(y - P - \lambda_1)(y - P - \lambda_2)\ldots(y - P - \lambda_{p-1}) \\ & + C_{p-2}(y - P - \lambda_1)\ldots(y - P - \lambda_{p-2}) + \ldots \\ & + C_2(y - P - \lambda_1)(y - P - \lambda_2) + C_1(y - P - \lambda_1) + C. \end{aligned}$$

Certaines des constantes C_i peuvent être nulles. Le nombre des polynomes exceptionnels pour F est exactement égal à p ou est supérieur à p suivant que F_p n'admet pas ou admet un polynome exceptionnel de la forme $P+\lambda$.

Si le nombre p est inférieur à m, le nombre des polynomes exceptionnels est fini. Si p est égal à m, $F_p \equiv A_0(x)$ peut se réduire à une constante. Dans ce cas, tout polynome de la forme $P+\lambda$, λ désignant une constante arbitraire est exceptionnel. En effet, $F(x, y)$ est alors un polynome en $y - P$ à coefficients constants et peut s'écrire

$$F(x, y) \equiv (y - P - \mu_1)(y - P - \mu_2)\ldots(y - P - \mu_m).$$

Dans ce cas, tout polynome de la forme $P + \mu$ vérifie la condition

$$F(x, P+\mu) \equiv \text{const.}$$

Nous dirons que, dans ce dernier cas, $F(x, y)$ est un *polynome singulier;* dans les autres cas, que $F(x, y)$ est un *polynome ordinaire.*

En résumé tout polynome $F(x, y)$ peut se mettre sous la forme (1) ou la forme (2). Si ce polynome est ordinaire, il admet au plus m polynomes exceptionnels. Si ce polynome est singulier, il admet une infinité de polynomes exceptionnels de la forme $P(x)+\mu$: leurs coefficients, sauf le terme constant, sont invariables.

6. Un polynome $F(x, y)$ indécomposable n'admet pas en général de polynome exceptionnel $P(x)$. En effet, la parabole

$$y = P(x) \equiv a + bx + \ldots + lx^q$$

rencontre la courbe algébrique (C), d'équation

$$F(x, y) = 0$$

d'ordre $r \geqq m$, en qr points tous à l'infini. Si $q = 1$, la droite

$$y = a + bx$$

coupe (C) en r points confondus à l'infini. Si ce point est simple pour (C), la droite est une asymptote de (C) qui a, avec cette courbe, un contact d'ordre $r-1$. Si $q > 1$, la courbe (C) doit avoir une branche parabolique dans la direction de l'axe des y ayant avec la parabole un contact d'ordre $qr - 1$.

Examinons en particulier les cas où (C) est d'ordre deux ou d'ordre trois.

Si (C) est une conique à centre, il y a deux polynomes exceptionnels du premier degré; les droites correspondantes sont les deux asymptotes si les directions asymptotiques sont distinctes de l'axe des y. Si la conique a une asymptote parallèle à l'axe des y, il y en a un seul.

Si (C) est du type parabolique et indécomposable, il n'y a pas de polynome exceptionnel, sauf dans le cas où l'axe est vertical, on a alors

$$F(x, y) \equiv y - a - bx - cx^2 \equiv y - P(x),$$

et tout polynome $P(x) + \lambda$, avec $\lambda \neq 0$, est exceptionnel. Si la conique se réduit à deux droites parallèles, toute droite parallèle à celles-ci représente un polynome exceptionnel lorsque les droites ne sont pas parallèles à l'axe des y. Dans ce dernier cas, il n'y a pas de polynome exceptionnel. Le cas parabolique comprend la forme

$$F(x, y) \equiv (y - a)(y - b) \qquad (a \neq b),$$

de la théorie classique des valeurs exceptionnelles.

Si (C) est une cubique indécomposable dont les directions asymptotiques sont distinctes, il y a zéro, un ou trois polynomes exceptionnels du premier degré suivant que les points à l'infini comprennent zéro, un ou trois points d'inflexion de la courbe. Ces polynomes sont fournis par les équations des tangentes d'inflexion. On suppose qu'il n'y ait pas de direction asymptotique parallèle à Oy.

S'il y a deux directions asymptotiques confondues, la direction asymptotique simple donne un polynome exceptionnel du premier degré lorsqu'elle n'est pas parallèle à Oy et correspond à un point d'inflexion. Si la direction double donne un point simple de la courbe et n'est pas parallèle à l'axe des y, il n'y a pas de polynome exceptionnel correspondant. Si cette direction double est celle de l'axe des y, on peut écrire

$$F(x, y) \equiv (y - mx - p)(y - a - bx - cx^2) + \alpha x + \beta.$$

Si $\alpha \neq 0$, il n'y a aucun polynome exceptionnel. Si $\alpha = 0$, le point à l'infini dans la direction simple est un point d'inflexion. Il y a deux polynomes exceptionnels

$$mx+p, \qquad a+bx+cx^2.$$

Si la direction double donne un point double de (C), les tangentes au point double, c'est-à-dire les asymptotes, donnent des polynomes exceptionnels du premier degré lorsqu'elles ne sont pas parallèles à l'axe des y.

Si les trois directions asymptotiques sont confondues, il n'y a pas de polynome exceptionnel lorsque le point à l'infini est simple.

7. On peut d'ailleurs limiter aisément le degré p de tout polynome exceptionnel possible $P(x)$. Écrivons :

$$F(x, P) \equiv A_0 P^m + A_1 P^{m-1} + \ldots + A_{m-1} P + A_m \equiv C.$$

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ les degrés des polynomes $A_0, A_1, \ldots, A_m$. Dans chaque terme de la forme $A_k P^{m-k}$ supposé développé figure un monome de plus haut degré $\alpha_k+(m-k)p$. Pour que l'expression se réduise à une constante, il faut qu'il y ait au moins deux de ces monomes qui soient semblables, leur degré commun étant supérieur à celui de tous les autres. On doit donc avoir

$$\begin{aligned} &\alpha_h + (m-h)p = \alpha_k + (m-k)p, \\ &\alpha_{h'} + (m-h')p \leqq \alpha_k + (m-k)p \qquad (h' \neq h). \end{aligned}$$

Donc

$$p = \frac{\alpha_h - \alpha_k}{h-k}, \qquad \alpha_{h'} \leqq \alpha_k + (h'-k)p.$$

On en déduit que p est égal à la pente d'un des côtés du polygone de Newton formé avec les points (i, α_i). On ne doit évidemment retenir que les côtés du polygone dont la pente est positive et égale à un nombre entier. Si tous les côtés ont des pentes soit négatives, soit fractionnaires, il n'existe aucun polynome exceptionnel. Par exemple, pour

$$F(x, y) \equiv y^m - x \qquad (m > 1),$$

il n'y a pas de polynome exceptionnel.

8. Nous sommes maintenant en mesure d'établir un théorème donnant une extension de celui de Landau.

Soient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

une fonction holomorphe pour $|x| < \mathrm{R}$ et $\mathrm{F}(x, y)$ un polynome ordinaire définissant une fonction algébrique admettant au moins deux déterminations. Supposons a_0 fixe et différent des valeurs $\mathrm{P}(0)$ en nombre limité des polynomes exceptionnels relativement à F. S'il n'existe pas de tel polynome, a_0 peut prendre une valeur fixe arbitraire. Je dis que, si $f(x) \neq y(x)$, R ne dépasse pas une valeur fixe $\mathrm{R}_0(a_0)$ qui ne dépend que de ce premier coefficient.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi : à chaque entier n correspondrait alors au moins une fonction $f_n(x)$, holomorphe pour $|x| < n$ et différente de $y(x)$ dans ce cercle. La suite infinie

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

est normale dans tout domaine fini d'après le théorème du paragraphe **2**. Comme elle est normale pour $|x| < 2$ et $n > 1$, on peut en extraire une suite partielle

$$f_1^{(1)}(x), \quad f_2^{(1)}(x), \quad \ldots, \quad f_n^{(1)}(x), \quad \ldots,$$

convergente pour $|x| < 1$. Cette dernière suite étant normale pour $|x| < 3$, en supprimant au plus les deux premières fonctions, on peut en extraire une suite partielle

$$f_1^{(1)}(x), \quad f_2^{(2)}(x), \quad f_3^{(2)}(x), \quad \ldots, \quad f_n^{(2)}(x), \quad \ldots,$$

convergente pour $|x| < 2$. En continuant ainsi, on formera le tableau

$$\begin{array}{lllll}
f_1^{(1)}(x), & f_2^{(1)}(x), & \ldots, & f_n^{(1)}(x), & \ldots, \\
f_1^{(1)}(x), & f_2^{(2)}(x), & \ldots, & f_n^{(2)}(x), & \ldots, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots, \\
f_1^{(1)}(x), & f_2^{(2)}(x), & \ldots, & f_n^{(n)}(x), & \ldots, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots,
\end{array}$$

dans lequel la $n^{\text{ième}}$ ligne forme une suite convergente pour $|x| < n$. La suite diagonale

$$f_1^{(1)}(x), \quad f_2^{(2)}(x), \quad \ldots, \quad f_n^{(n)}(x), \quad \ldots$$

converge dans tout domaine fini vers une fonction $f_0(x)$ holomorphe dans le plan ouvert. Comme

$$f_n^{(n)}(x) \neq y(x),$$

on a

$$f_0(x) \neq y(x) \qquad \text{ou} \qquad f_0(x) \equiv y(x),$$

comme on le voit aisément à l'aide de l'intégrale de Cauchy; la fonction $f_0(x)$ ne peut être qu'un polynome exceptionnel relativement à $F(x, y)$. Mais, comme $f_n(o) = a_0$, on a aussi $f_0(o) = a_0$. Or, a_0 est différent des valeurs $P(o)$ relatives aux polynomes exceptionnels, $f_0(x)$ ne peut être un tel polynome et il y a contradiction. Donc $R_0(a_0)$ existe.

Si maintenant $F(x, y)$ est un polynome singulier, on peut répéter le même raisonnement en laissant fixes a_0 et a_1, a_1 étant différent de la valeur $P'(o)$. On montrera ainsi l'existence d'un nombre $R_0(a_0, a_1)$ ne dépendant que de ces deux coefficients. On peut donc énoncer le théorème :

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$$

une fonction holomorphe dans le cercle de rayon R *et différente de la fonction algébrique* $y(x)$ *définie par l'équation*

$$F(x, y) = o$$

dans laquelle $F(x,y)$ *désigne un polynome dont le degré en* y *est au moins égal à deux.*

1° *Si* $F(x, y)$ *est un polynome ordinaire et si* a_0 *est fixe et différent des valeurs* $P(o)$ *des polynomes exceptionnels quand il en existe, le rayon* R *ne dépasse pas une valeur finie* $R(a_0)$ *qui ne dépend que de* a_0 *;*

2° *Si* $F(x, y)$ *est un polynome singulier et si* a_0 *et* a_1 *sont fixes,* a_1 *étant différent de la valeur* $P'(o)$ *des polynomes exceptionnels, le rayon* R *ne dépasse pas une valeur finie* $R(a_0, a_1)$ *qui ne dépend que de* a_0 *et* a_1.

Si l'on prend le polynome singulier

$$F(x, y) \equiv (y - a)(y - b) \qquad (a \neq b),$$

on a $P(x) \equiv C$, C désignant une constante arbitraire. On a ici $P'(0) = 0$ et $a_1 \neq 0$. On retrouve ainsi le théorème de Landau.

On peut remplacer R par un nombre plus grand; désignons maintenant par R_0 la limite supérieure des nombres R tels qu'il existe une fonction $f(x)$ holomorphe et différente de $y(x)$ dans le cercle $|x| < R$. Par définition, il n'existe aucune fonction $f(x)$, holomorphe et différente de $y(x)$ pour $|x| < R_0 + \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε; et il existe toujours une fonction $f(x)$, holomorphe et différente de $y(x)$ pour $|x| < R_0 - \varepsilon$. Désignons par $f_n(x)$ une fonction de la famille $f(x)$, holomorphe et différente de $y(x)$ pour $|x| < R_0 - \frac{1}{n}$. La suite $f_n(x)$ est normale dans l'intérieur du cercle $|x| < R_0$; on peut en extraire une suite partielle convergeant uniformément dans l'intérieur de ce cercle vers une fonction $f_0(x)$ holomorphe et différente de $y(x)$ pour $|x| < R_0$.

On peut, dans l'énoncé du théorème, remplacer a_1 par un autre coefficient a_q avec $q > 1$. Il suffit de supposer que ce coefficient demeure fixe et différent de la valeur $\frac{P^{(q)}(0)}{q!}$ des polynomes exceptionnels lorsque $F(x, y)$ est singulier. Si l'on choisit q assez grand, la condition se réduit à $a_q \neq 0$, puisque l'on peut fixer *a priori* une limite supérieure du degré de tout polynome exceptionnel.

9. On peut aussi donner une extension au cas présent du théorème de Schottky.

Si les fonctions $f(x)$ sont holomorphes et différentes de $y(x)$ pour $|x| < 1$, elles forment une famille normale dans l'intérieur de ce cercle. Si les valeurs $f(0)$ sont bornées, la famille est normale et bornée dans tout cercle $|x| \leqq \theta < 1$. En particulier, si $f(0)$ a une valeur fixe, on obtient le théorème :

Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans le cercle-unité et prenant au centre la valeur a_0. Si cette fonction est différente de la fonction algébrique $y(x)$ qui admet au moins deux déterminations, on a

$$|f(x)| \leqq \Omega(a_0, \theta)$$

pour

$$|x| \leqq \theta < 1.$$

Ce théorème n'est plus vrai si l'algébrique y est uniforme; par exemple, les fonctions

$$f(x) = a_0 e^{nx} + x \qquad (a_0 \neq 0;\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

différentes de $y = x$ dans le cercle $|x| < 1$, ne sont bornées dans aucun cercle concentrique.

10. Nous avons vu que toute fonction méromorphe dans le plan ouvert et sans point commun avec une courbe algébrique dont le degré en y est au moins égal à trois était une fraction rationnelle. Voyons à quelles conditions une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est exceptionnelle relativement à $F(x, y)$ supposé indécomposable. On peut toujours supposer premiers entre eux les polynomes P et Q. On a

$$Q^m F\left(x, \frac{P}{Q}\right) \equiv A_0 P^m + A_1 P^{m-1} Q + \ldots + A_m Q^m.$$

Si la fraction $\frac{P}{Q}$ est exceptionnelle, elle ne doit prendre aucune valeur $y(x)$. Si $Q(x)$ est nul, il est nécessaire que $A_0(x)$ ne le soit pas, sinon la courbe algébrique et la courbe

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se couperaient à l'infini : donc P et A_0 doivent être premiers entre eux. Si $Q(x)$ est différent de zéro, l'expression qui figure au second membre de l'identité précédente ne doit pas s'annuler : comme c'est un polynome, il se réduit à une constante que l'on suppose égale à l'unité, puisque P et Q ne sont définis qu'à une constante près. On a donc

$$A_0 P^m + A_1 P^{m-1} Q + \ldots + A_m Q^m \equiv 1. \tag{3}$$

Réciproquement, si l'identité (3) est vérifiée, $F\left(x, \frac{P}{Q}\right)$ est différent de zéro lorsque Q n'est pas nul; d'autre part, A_0 et Q sont premiers entre eux : donc la fraction $\frac{P}{Q}$ est exceptionnelle.

Si $F(x, y)$ est décomposable, il peut y avoir des fractions exceptionnelles coïncidant avec une des branches.

11. Soient p et q les degrés des polynomes P et Q; en raisonnant comme au paragraphe **7**, on pourra limiter supérieurement la différence $|p-q|$. En effet, en exprimant que les monomes de degrés les plus élevés de deux termes de la somme précédente ont des degrés égaux, on a l'égalité et l'inégalité suivantes :

$$\alpha_h + (m-h)p + hq = \alpha_k + (m-k)p + kq,$$
$$\alpha_{h'} + (m-h')p + h'q \leqq \alpha_k + (m-k)p + kq \qquad (h' \neq h).$$

Donc

$$p - q = \frac{\alpha_h - \alpha_k}{h-k}, \qquad \alpha_{h'} \leqq \alpha_k + (h'-k)(p-q).$$

On en déduit que $p-q$ est égal à la pente d'un des côtés du polygone de Newton formé avec les points (i, α_i).

En particulier, si aucun des côtés n'a une pente égale à un nombre entier, il n'existe aucune fraction exceptionnelle. Par exemple, pour $m > 1$, la fonction

$$F(x, y) \equiv y^m - x$$

n'admet aucune fraction exceptionnelle.

Pour

$$F(x, y) = (y-x)(y^2 \pm xy + 1),$$

le polygone de Newton donne pour $p-q$ les valeurs possibles ± 1. Nous allons voir que le polynome $F(x, y)$ correspondant au signe $+$ n'a pas de fraction exceptionnelle autre que x; que le polynome $F(x, y)$ correspondant au signe $-$ en admet une seule en dehors de x.

En effet, l'identité

$$(P - Qx)(P^2 + xPQ + Q^2) \equiv 1$$

entraîne

$$P - Qx \equiv C \neq 0, \qquad P^2 + xPQ + Q^2 \equiv \frac{1}{C}.$$

On vérifie aisément que ces identités simultanées n'admettent pas de solution.

Au contraire, l'identité

$$(P - Qx)(P^2 - xPQ + Q^2) \equiv 1$$

entraîne

$$P - Qx = C \neq 0 \qquad P^2 - xPQ + Q^2 \equiv \frac{1}{C},$$

d'où, en éliminant P,

$$Q(Q + Cx) \equiv \frac{1 - C^3}{C}.$$

Cette identité exige $C^3 = 1$, d'où

$$Q \equiv -Cx, \qquad P \equiv C(1 - x^2), \qquad \frac{P}{Q} = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

Il peut arriver que le polynome $F(x, y)$ admette une infinité de fractions exceptionnelles. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$F(x, y) \equiv (B_1 y - A_1)(B_2 y - A_2)\ldots(B_m y - A_m),$$

les polynomes A_i et B_i vérifiant les identités

$$A_i B_j - B_i A_j = \text{const.} \neq 0.$$

Pour obtenir un tel polynome, prenons deux polynomes premiers entre eux A_0 et B_0 et deux polynomes C_0 et D_0 tels que

$$A_0 C_0 - B_0 D_0 \equiv 1,$$

et posons

$$A_i = C_0 + \lambda_i B_0,$$
$$B_i = D_0 + \lambda_i A_0.$$

On aura

$$A_i B_j - B_i A_j = \lambda_j - \lambda_i \neq 0.$$

Il suffit donc de prendre pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ des constantes toutes différentes. Dans ces conditions, la fraction

$$\frac{P}{Q} = \frac{C_0 + \lambda B_0}{D_0 + \lambda A_0}$$

est exceptionnelle relativement à $F(x, y)$. On a, en effet,

$$Q^m F\left(x, \frac{P}{Q}\right) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_m).$$

Il existe donc une infinité de fractions exceptionnelles.

12. L'identité (3) montre que tous les points de rencontre de la courbe algébrique (C) et de la courbe rationnelle (Γ) d'équation

$$Q(x)y - P(x) = 0$$

correspondent à $x = \infty$ et sont à l'infini. Ces points sont au nombre de $r(n+1)$ si r est l'ordre de la courbe algébrique et n, le degré de la fraction rationnelle, c'est-à-dire le degré de celui des polynomes P et Q dont le degré est le plus élevé. La courbe (Γ) a un seul point à l'infini pour $x = \infty$; elle doit donc avoir en ce point un contact d'ordre $r(n+1) - 1$ avec la courbe (C), c'est-à-dire que les développements en séries entières en $\frac{1}{x}$ de la courbe (Γ) et de la branche de la courbe (C) qui passe en ce point, supposé simple, doivent avoir leurs premiers termes identiques et ne peuvent différer qu'à partir du terme en $x^{1-r(n+1)}$. Or, la fraction $\frac{P}{Q}$ contient $2n+1$ paramètres arbitraires et, lorsque $r > 2$, on a

$$2n + 1 < r(n+1) - 1.$$

Il n'y a donc pas, en général, de fraction exceptionnelle.

Il n'en est plus de même pour $r = 2$. L'inégalité se transforme alors en égalité. On sait que si l'on développe en fraction continue de la forme

$$y(x) = ax + b + \frac{1|}{|b_1 x} + \frac{1|}{|b_2 x} + \ldots + \frac{1|}{|b_n x} \ldots,$$

la branche considérée de la courbe algébrique, le développement en série entière en $\frac{1}{x}$ de la différence entre $y(x)$ et la réduite de rang n commence par un terme en $x^{-(2n+1)}$. Cette réduite nous donnera donc une fraction exceptionnelle.

Prenons, par exemple, la conique

$$y^2 - xy + 1 = 0,$$

les deux branches infinies seront représentées par les développements en fractions continues

$$y_1 = x - \frac{1|}{|x} - \frac{1|}{|x} - \frac{1|}{|x} - \ldots,$$
$$y_2 = \frac{1|}{|x} - \frac{1|}{|x} - \frac{1|}{|x} - \frac{1|}{|x} - \ldots;$$

dont chacun représente l'inverse de l'autre.

Soit $\frac{P_n}{Q_n}$ la réduite de rang n, on a les relations

$$P_n = x P_{n-1} - P_{n-2},$$
$$Q_n = x Q_{n-1} - Q_{n-2}$$

Si l'on remarque que $Q_n = P_{n-1}$, on peut écrire la récurrence

$$P_n = x P_{n-1} - Q_{n-1},$$
$$Q_n = \quad P_{n-1}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = -\frac{1}{x^{2n-2}} + \ldots.$$

Par exemple, pour $y_1(x)$,

$$\frac{P_1}{Q_1} = x, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{x^2-1}{x}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{x(x^2-2)}{x^2-1}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x(x^2-2)}, \quad \ldots.$$

On a, d'ailleurs,

$$P_n^2 - x P_n Q_n + Q_n^2 = P_{n-1}^2 - x P_{n-1} Q_{n-1} + Q_{n-1}^2 = 1.$$

Pour $y_2(x)$, on obtient les fractions inverses $\frac{Q_n}{P_n}$. L'égalité précédente montre que ce sont bien des fractions exceptionnelles.

On remarquera que le degré des fractions exceptionnelles augmente indéfiniment.

Il existe d'ailleurs une fonction méromorphe transcendante exceptionnelle : c'est la fonction

$$x \frac{\sin\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} + \cos\sqrt{4-x^2} : \frac{2\sin\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}},$$

comme on le vérifie facilement.

Nous appellerons toujours *polynome ordinaire*, un polynome $F(x, y)$

qui n'admet aucune fraction rationnelle exceptionnelle ou en admet un nombre fini, et *polynome singulier*, un polynome admettant une infinité de fractions rationnelles exceptionnelles.

12. Il suffit maintenant de reprendre le raisonnement utilisé au paragraphe **8** pour obtenir une extension aux fonctions méromorphes du théorème de Landau.

Soient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une fonction méromorphe pour $|x| < \mathrm{R}$ et $\mathrm{F}(x, y)$ un polynome qui, égalé à zéro, définit une fonction algébrique $y(x)$ admettant trois déterminations au moins. Je dis que le rayon R admet une limite supérieure finie dans les hypothèses suivantes : $\mathrm{F}(x, y)$ est un polynome ordinaire et a_0 un nombre fixe différent des valeurs à l'origine des fractions exceptionnelles; ou bien, $\mathrm{F}(x, y)$ est un polynome singulier, a_0 et a_1 sont fixes, et a_1 différent des valeurs à l'origine des dérivées des fractions exceptionnelles.

En effet, dans le cas contraire, on définirait, comme précédemment, une suite infinie

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

de fonctions méromorphes définies et différentes de $y(x)$ dans des cercles concentriques dont les rayons croissent indéfiniment, et dont les développements en série de Mac-Laurin commencent tous par a_0 ou par $a_0 + a_1 x$. On en déduit, comme au paragraphe **8**, une fonction

$$f_0(x) = a_0 + a_1 x + \ldots,$$

méromorphe dans tout le plan et différente de $y(x)$ ou identique à une branche. On sait que cela est impossible, à moins que $f_0(x)$ ne soit une fraction rationnelle exceptionnelle. Mais $f_0(x)$ ne peut être une fraction rationnelle exceptionnelle puisque a_0 ou a_1 ont été choisis différents des coefficients correspondants dans les développements en séries de ces fractions. Donc R ne peut croître indéfiniment et l'on a le théorème :

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une fonction méromorphe pour $|x| < \mathrm{R}$ *qui n'est jamais égale à une fonction algébrique à trois déterminations au moins.*

1° *Si* $\mathrm{F}(x, y)$ *est un polynome ordinaire et si* a_0 *est fixe et différent des valeurs à l'origine des fractions exceptionnelles, le rayon* R *ne dépasse pas une valeur fixe* $\mathrm{R}(a_0)$;

2° *Si* $\mathrm{F}(x, y)$ *est un polynome singulier et si* a_0 *et* a_1 *sont des nombres fixes dont le second est différent des valeurs à l'origine des dérivées des fractions exceptionnelles, le rayon* R *ne dépasse pas une valeur fixe* $\mathrm{R}(a_0, a_1)$.

Si l'on désigne par R_0 la limite supérieure de l'ensemble des valeurs R, il existe une fonction $f(x)$ de la famille considérée qui est différente de $y(x)$ pour $|x| < \mathrm{R}_0$. Sur la circonférence $|x| = \mathrm{R}_0$, ou bien elle est égale à $y(x)$ en un point au moins, ou bien elle possède un point singulier au moins.

13. Comme on l'a vu, il peut exister une fonction transcendante, méromorphe dans le plan ouvert et partout différente de $y(x)$, lorsque l'algébrique $y(x)$ a moins de trois déterminations. C'est le cas de la fonction de la fin du paragraphe **11**.

On peut remarquer que, lorsque le nombre des déterminations de $y(x)$ est au moins égal à trois, le degré des fractions rationnelles exceptionnelles est toujours borné; sinon on en déduirait une fonction méromorphe transcendante exceptionnelle $f_0(x)$, ce qui est impossible. Au contraire, si l'algébrique a deux déterminations au plus, ce degré peut augmenter indéfiniment, comme le montre la suite des fractions $\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}$ du paragraphe **11**.

Dans le théorème précédent, on peut remplacer a_1 par un autre coefficient $a_n (n > 1)$, pourvu que la valeur fixe de ce coefficient soit différente des valeurs des coefficients de même rang dans les développements des fractions exeptionnelles s'il en existe une infinité.

Par exemple, pour

$$\mathrm{F}(x, y) \equiv (y - a)(y - b)(y - c),$$

a, b, c étant des constantes différentes, il faut prendre $a_n \neq 0 (n \geqq 1)$.

Pour

$$F(x, y) \equiv y^m - x \qquad (m \geqq 3),$$

on peut choisir a_0 arbitrairement.

On peut aussi imposer à $f(x)$ des conditions de nature différente. Par exemple, si l'on a pu déterminer, pour $m \geqq 3$, une limite supérieure ν du degré d'une fraction exceptionnelle, on pourra prendre comme condition dans le second cas :

$$\text{mod} \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+\nu} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} & \dots & a_{n+\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+\nu} & a_{n+\nu+1} & a_{n+\nu+2} & \dots & a_{n+2\nu} \end{vmatrix} \geqq \delta > 0,$$

pour une valeur fixe de n.

14. Considérons la famille des fonctions $f(x)$ pour lesquelles R et a_0 sont fixes. Il existe un nombre positif $r_0 < R$ tel que toutes ces fonctions sont holomorphes pour $|x| < r_0$. Cela résulte du fait que l'origine est un point régulier pour la famille considérée. Il en résulte que ces fonctions sont bornées dans tout cercle de rayon inférieur à r_0. On peut donc énoncer l'extension suivante du théorème de Schottky :

Soit $f(x)$ une fonction méromorphe et différente d'une fonction algébrique d'au moins trois déterminations pour $|x| < R$. Si $f(0) = a_0$, il existe un nombre positif $r_0 < R$, tel que, pour $|x| < \theta r_0 (0 \leqq \theta < 1)$, on ait

$$|f(x)| \leqq \Omega(a_0, \theta),$$

$\Omega(a_0, \theta)$ désignant un nombre fixe dépendant de a_0 et de θ.