JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES BOULIGAND

Sur les surfaces satisfaisant à la théorie de Gauss et à la relation classique entre la courbure totale et la courbure géodésique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 20 (1941), p. 325-337.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1941_9_20__325_0>

Sur les surfaces satisfaisant à la théorie de Gauss et à la relation classique entre la courbure totale et la courbure géodésique;

Par Georges BOULIGAND.

Cette Note, fort modeste, fera du moins évoquer les deux géomètres, célébrés en ce volume, par leur intérêt ininterrompu aux principes de toutes questions mathématiques. Nous allons nous laisser guider par un souci de ce genre en étudiant le champ de validité de la théorie générale établie pas Gauss (1827) dans ses *Disquisitiones* et prolongée par divers géomètres, en tête desquels il faut citer Ossian Bonnet.

Lorsqu'on établit la relation classique découverte par Ossian Bonnet en 1848

$$\int \frac{ds}{R_g} = 2\pi - \iint \frac{dS}{RR'} \tag{1}$$

entre l'intégrale de la courbure totale, étendue à l'aire d'une portion de surface courbe, et celle de la courbure géodésique, prise le long des divers contours limitant cette portion, on suppose, en général, qu'il s'agit d'une surface analytique ou, du moins, d'une surface représentable au voisinage de chaque point, moyennant un choix convenable des axes par une équation

$$z = f(x, y), \tag{2}$$

la fonction f admettant des dérivées partielles continues, quant à l'ensemble des variables x, y, jusqu'à un ordre suffisamment élevé, au sujet duquel on donne rarement des indications explicites. Le présent travail aura pour but de combler cette lacune. De la sorte, nous serons amenés à désigner sous le nom de *surfaces de Gauss* celles dont la représentation locale (2) est fournie, autour de chaque point, par une fonction douée de dérivées partielles secondes, en dépendance continue du point (x, y). Tel sera l'objet de la section I.

Nous montrerons de plus, en une seconde section, que la méthode construite par Darboux pour former l'équation aux dérivées partielles des surfaces admettant un ds^2 donné est applicable dans le champ précédent, malgré le rôle apparent dévolu en cette occasion aux dérivées troisièmes.

Toutefois, ne s'agit-il que de la formation même de l'équation, et quelques brèves remarques (section III) nous feront mesurer la difficulté de son étude.

I.

Nous n'envisagerons que des surfaces douées d'un champ continu de normales. Il est dès lors permis d'en considérer la *représentation sphérique*. Si l'on veut pouvoir définir univoquement, en chaque point, les directions principales et les rayons de courbure principaux, il faut introduire cette nouvelle hypothèse : existence en chaque point d'une transformation linéaire tangente à celle qui met en correspondance la surface et sa représentation sphérique. D'ailleurs, la continuité de répartition de cette transformation linéaire tangente équivaut à la continuité de répartition des éléments de courbure, ou, si l'on préfère, des dérivées secondes r, s, t. On peut d'ailleurs noter que

$$\begin{matrix} r & s \\ s & t \end{matrix}$$

est le tableau des coefficients de la transformation linéaire tangente à la transformation ponctuelle

$$p = p(x, y), \qquad q = q(x, y),$$

associant à la projection d'un point (x, y, z) de la surface sur le plan xOy la trace sur le plan $z = -1$ de la parallèle à la normale en ce point, menée par l'origine du trièdre des coordonnées (laquelle représentation ne diffère de la représentation sphérique, considérée ci-dessus, que par une transformation algébrique).

Les surfaces de la catégorie considérée sont aussi les images d'un plan ou d'une portion de plan par une transformation de la Topologie restreinte du second ordre [1].

Cela posé, l'une des méthodes les plus usitées pour la démonstration du théorème de Bonnet consiste à définir, tout le long de la surface S considérée, *un champ de trièdres trirectangles directs*. Chaque point M de S est le sommet d'un de ces trièdres, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{\nu}$, la normale en M portant la troisième arête. On considère alors l'ensemble des mouvements dans lesquels un trièdre emprunte ses positions successives au champ précédent. De la vitesse du sommet, on déduit en ces conditions les vitesses des points liés au trièdre. Supposons le temps égal à l'abscisse curviligne de M sur sa trajectoire C. La vitesse de M sera le vecteur unitaire $\vec{T}$ de la tangente à cette courbe. On peut dès lors exprimer la rotation instantanée $\vec{\Omega}$ du trièdre, en optant pour une forme où la *torsion relative* (dite improprement : *torsion géodésique*) soit remplacée par sa valeur en fonction des courbures principales et de l'angle α que fait le vecteur $\vec{T}$ avec une tangente principale. Ce qui donne

$$\vec{\Omega} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{T} - \left(\frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2}\right)\vec{\Gamma} + \left(\rho\sin\theta - \frac{d\varphi}{ds}\right)\vec{\nu},$$

en désignant

par $\vec{\Gamma}$ le vecteur unitaire de la normale géodésique à C;

par $\vec{\nu}$ le vecteur unitaire de la normale à la surface;

par φ l'angle $\widehat{MX, M\vec{T}}$, que fait $\vec{T}$ avec la première arête MX de notre trièdre.

Dans le raisonnement invoqué pour parvenir à ce résultat, la torsion est d'ordinaire mise en cause, ce qui fait appel aux dérivées troisièmes. Cependant, cette torsion disparaît de l'expression même de $\vec{\Omega}$ dont il convient d'approfondir la structure.

---

(1) G. BOULIGAND, *Le rôle de la théorie des groupes en géométrie infinitésimale directe* (*Ens. Math.*, t. 36, 1937, p. 5-27).

Soit un trièdre de sommet fixe O, trièdre qui reste équipollent à $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{\nu}$. Les termes en $\vec{T}$ et $\vec{\Gamma}$ donnent pour ce trièdre la vitesse du point à l'unité de distance du sommet sur la troisième arête, c'est-à-dire la dérivée géométrique $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$. Inversement, de $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$, on revient aux coefficients de $\vec{T}$ et de $\vec{\Gamma}$ dans $\vec{\Omega}$ (il s'agit d'un simple échange de ces coefficients dans l'expression de $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$, avec un changement de signe, dans le but d'accomplir la rotation d'un droit menant de $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$ à la composante de $\vec{\Omega}$ parallèle au plan $\vec{X}$, $\vec{Y}$). Il faut donc établir, indépendamment de la torsion de C, la relation

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\left(\frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2}\right)\vec{T} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{\Gamma}.$$

Or, cette égalité géométrique n'a d'autre rôle que la détermination de la transformation linéaire tangente à la représentation sphérique, laquelle existe avec r, s, t, et entraîne la connaissance des directions et courbures principales. On l'obtient donc indépendamment des dérivées troisièmes.

Pour justifier complètement l'expression de $\vec{\Omega}$, il nous suffit désormais d'évaluer la composante de $\vec{\Omega}$ perpendiculaire à $\vec{T}$, d'où nous déduirons $\vec{\Omega}.\vec{\nu}$, valeur qui seule reste à déterminer. Or, pour le trièdre principal d'une courbe gauche, lorsqu'il existe une rotation instantanée, sa projection sur le plan normal est le vecteur $\rho\vec{B}$, dans lequel le coefficient scalaire ρ représente la courbure. Et nous sommes ici en présence d'un énoncé valable pour toute courbe à courbure continue, sans plus; cet énoncé n'est d'ailleurs qu'un équivalent du suivant, qui pourra sembler plus familier :

Pour toute courbe gauche à courbure continue, la dérivée géométrique $\frac{d\vec{T}}{ds}$ *a pour valeur* $\rho\vec{N}$.

D'ailleurs, on trouve même composante normale pour la rotation instantanée du trièdre $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ et pour celle du trièdre $\vec{T}$, $\vec{\Gamma}$, $\vec{\nu}$. Revenons de ce dernier au trièdre $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{\nu}$. Nous voyons que $\vec{\Omega}$ est la somme géométrique du terme en $\vec{T}$ déjà formé et de

$$\rho\,\vec{B} - \frac{d\varphi}{ds}\vec{\nu} = -\rho\cos\theta\,\vec{\Gamma} + \left(\rho\sin\theta - \frac{d\varphi}{ds}\right)\vec{\nu}.$$

Finalement, il ne subsiste plus d'élément inconnu dans la répartition des vitesses du trièdre MXYν. L'expression proposée pour $\vec{\Omega}$ est donc définitivement établie.

On démontre aussitôt que la composante de $\vec{\Omega}$ suivant la normale aura le caractère purement géodésique, et l'on en déduit l'égalité des aires fournissant, sur la sphère, les représentations de deux rondelles de surfaces isométriques. Nous n'insisterons pas sur cette partie de la déduction, pour laquelle rien n'est à changer aux raisonnements classiques. Le théorème de Bonnet est donc étendu, de la sorte, à la classe des surfaces pour lesquelles le voisinage de chaque point est un morceau de surface représentable sous la forme

$$z = f(x, y),$$

la fonction f étant douée de dérivées partielles secondes continues par rapport à l'ensemble des variables. De telles surfaces méritent donc bien le nom de *surfaces de Gauss*. On peut les caractériser par cette condition : pour chaque point M et chaque tangente MT, la surface admet une courbure normale, fonction continue de M et de la direction MT (lorsque ces éléments varient indépendamment) (¹).

(¹) G. Bouligand, *Conditions pour la validité des théorèmes relatifs à la courbure des courbes tracées sur une surface* (*Journ. de Math.*, 9, t. XI, 1932, p. 131-142 et 385-387). Signalons, par ailleurs, que le théorème de Bonnet peut être démontré sans recourir à la méthode du trièdre mobile, et sans introduire de dérivée troisième. Il se trouve que cette dernière exigence est précisément réalisée dans une méthode exposée par M. Adolphe Buhl (*Géométrie et Analyse des intégrales doubles*; fasc. 36 de Scientia, n° 2 du chap. III, p. 35 à 37; Gauthier-Villars, 1920).

II.

L'objectivité d'une telle classe de surfaces est confirmée lorsqu'on se propose de trouver les surfaces admettant un ds^2 donné. Dans l'exposé qui va suivre, nous ne nous attacherons d'ailleurs pas à considérer des ds^2 aussi généraux que possible. Notre attention se portera de préférence sur des surfaces isométriques à une certaine portion de surface analytique. Par suite, en nous donnant la première forme fondamentale

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

nous supposerons que ses trois coefficients E, F, G sont des fonctions réelles pour u, v réels, et de plus holomorphes pour tous les couples u, v réels fournissant les coordonnées d'un point extrait d'un certain domaine du plan des u, v.

Le problème dont nous allons nous occuper consiste en la recherche d'une *surface de Gauss* (au sens indiqué) répondant au ds^2 précédent. Tout ce que nous montrerons ici est que la mise en équations peut s'effectuer au sein d'une telle catégorie de surfaces, c'est-à-dire de manière à ne pas transgresser les hypothèses de dérivabilité requises par la définition.

Prenons avec Darboux les variables indépendantes u, v et proposons-nous d'exprimer qu'en vertu de l'identité

$$dx^2 + dy^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right)^2$$

la forme quadratique présente au second membre correspond à une courbure totale nulle. Représentons les dérivées partielles de la fonction inconnue $z(u, v)$ [fonction à laquelle il faudrait adjoindre $x(u, v)$, $y(u, v)$ pour la détermination de la surface] par les notations

$$p = \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial v}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Notre attention va se porter sur l'élément linéaire

$$(\mathrm{E} - p^2)\,du^2 + 2(\mathrm{F} - pq)\,du\,dv + (\mathrm{G} - q^2)\,dv^2 = \overline{\mathrm{E}}\,du^2 + 2\overline{\mathrm{F}}\,du\,dv + \overline{\mathrm{G}}\,dv^2$$

Un arc de courbe du plan des (u, v) acquiert, dans la métrique correspondante, une courbure géodésique dont le produit par l'élément d'arc est la somme de $d\varphi$ et d'une forme différentielle

$$\overline{\mathcal{R}}\, du + \overline{\mathcal{R}}_1\, dv,$$

où $\overline{\mathcal{R}}$ et $\overline{\mathcal{R}_1}$ sont données par les formules de Codazzi, écrites par Darboux au Chapitre II du Livre V de ses *Leçons sur la théorie des surfaces* (t. II). Mais au lieu d'écrire l'élément linéaire sous la forme

$$A^2\, du^2 + 2\,AC\cos\alpha\, du\, dv + C^2\, dv^2,$$

il nous faut ici revenir à

$$\overline{E}\, du^2 + 2\overline{F}\, du\, dv + \overline{G}\, dv^2.$$

Moyennant cette transposition de notations, on obtient

$$2\overline{H}\overline{\mathcal{R}} = \overline{F_u} - \overline{E_v} + \frac{\overline{F}}{2}\left(\frac{\overline{G_u}}{\overline{G}} - \frac{\overline{E_u}}{\overline{E}}\right),$$
$$2\overline{H}\overline{\mathcal{R}}_1 = \overline{G_u} - \overline{F_v} + \frac{\overline{F}}{2}\left(\frac{\overline{G_v}}{\overline{G}} - \frac{\overline{E_v}}{\overline{E}}\right),$$

formules dans lesquelles chaque indice implique une opération de dérivation par rapport à la variable souscrite, et où l'on pose comme d'habitude

$$\overline{H} = \sqrt{\overline{E}\overline{G} - \overline{F}^2}.$$

Cela posé, l'annulation de la courbure totale de $dx^2 + dy^2$ équivaut à la propriété pour la forme

$$\overline{\mathcal{R}}\, du + \overline{\mathcal{R}_1}\, dv$$

de se réduire à une différentielle exacte.

Les dérivées d'ordre maximum de z intervenant dans cette dernière forme sont r, s, t. Elles y figurent linéairement. Dans le produit

$$2\overline{H}(\overline{\mathcal{R}}\, du + \overline{\mathcal{R}_1}\, dv),$$

le groupe des termes contenant ces dérivées est facile à former, lorsqu'on écrit les expressions ci-dessus de $2\overline{H}\overline{\mathcal{R}}$ et de $2\overline{H}\overline{\mathcal{R}_1}$ sous forme développée

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{F}-pq)-\frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{E}-p^2)+\frac{1}{2}(\mathrm{F}-pq)\left[\frac{\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{G}-q^2)}{\mathrm{G}-q^2}-\frac{\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{E}-p^2)}{\mathrm{E}-p^2}\right],$$

$$-\frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{F}-pq)+\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{G}-q^2)+\frac{1}{2}(\mathrm{F}-pq)\left[\frac{\frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{G}-q^2)}{\mathrm{G}-q^2}-\frac{\frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{E}-p^2)}{\mathrm{E}-p^2}\right].$$

Le groupe de termes annoncé est alors

$$\begin{aligned}&(ps-qr)\,du+(pt-qs)\,dv\\&\quad+(\mathrm{F}-pq)\left[\left(\frac{pr}{\mathrm{E}-p^2}-\frac{qs}{\mathrm{G}-q^2}\right)du+\left(\frac{ps}{\mathrm{E}-p^2}-\frac{qt}{\mathrm{G}-q^2}\right)dv\right],\end{aligned}$$

et l'on y voit intervenir les combinaisons

$$r\,du+s\,dv=dp,\qquad s\,du+t\,dv=dq,$$

d'où la forme plus condensée

$$p\,dq-q\,dp+(\mathrm{F}-pq)\left(\frac{p\,dp}{\mathrm{E}-p^2}-\frac{q\,dq}{\mathrm{G}-q^2}\right).$$

D'après cela, nous aurons l'égalité

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}}\,du+\overline{\mathcal{R}_1}\,dv=\frac{1}{2\mathrm{H}}&\left[p\,dq-q\,dp+\frac{\mathrm{F}-pq}{\mathrm{E}-p^2}p\,dp-\frac{\mathrm{F}-pq}{\mathrm{G}-q^2}q\,dq\right]\\&+\mathrm{A}(u,v,z,p,q)\,du+\mathrm{B}(u,v,z,p,q)\,dv.\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Riemann

$$\int\overline{\mathcal{R}}\,du+\overline{\mathcal{R}_1}\,dv=\iint\left(\frac{\partial\overline{\mathcal{R}_1}}{\partial u}-\frac{\partial\overline{\mathcal{R}}}{\partial v}\right)du\,dv,$$

nous pourrons donc séparer les termes provenant du crochet, dans l'égalité précédente, et la partie restante.

Pour les premiers, il est indiqué de passer des variables u, v aux variables p, q. Nous usons ici de cette possibilité, qui nous est spontanément offerte, de paramétrer la surface $z=z(u,v)$ de l'espace auxiliaire (z, u, v) en fonction des deux coefficients de pente d'un de ses éléments de contact (¹) (ou, géométriquement parlant, de remonter de la représentation sphérique à cette surface elle-même, ce qui est valable dans la classe gaussienne, précédemment définie). Et grâce à cet artifice dualistique, nous voyons s'éliminer les dérivées troisièmes qui seraient apparues sous l'influence des opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial v}$$

appliqués aux divers termes de $\overline{\mathcal{R}}$ et $\overline{\mathcal{R}_1}$ lorsqu'on y laisse à u, v leur rôle de variables indépendantes. Finalement, comme il est classique, ces dérivées troisièmes disparaissent de la relation

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{R}_1}}{\partial u} - \frac{\partial \overline{\mathcal{R}}}{\partial v} = 0,$$

(¹) Sous la seule réserve que cette surface ne soit pas une développable. A cette occasion, signalons que la recherche des surfaces de Gauss qui sont *développables* (surfaces telles que la transformation linéaire tangente à leur représentation sphérique soit dégénérescente, en conservant la continuité de répartition) appelle diverses remarques. L'image sphérique d'une telle surface est un continu rectifiable, obtenu en prenant la fermeture d'une réunion d'arcs ouverts de Jordan, qui sont des trajectoires décrites sous vitesse continue et non nulle.

D'autre part, concurremment à la méthode du texte qui requiert, dans le cas où la surface auxiliaire $z = z(u, v)$ serait développable$_1$ une partie complémentaire, le problème ci-dessus traité peut s'aborder sous un autre angle : reprenant la formule de Riemann

$$\int \overline{\mathcal{R}}\, du + \overline{\mathcal{R}}_1\, dv = \int\int \left(\frac{\partial \overline{\mathcal{R}}_1}{\partial u} - \frac{\partial \overline{\mathcal{R}}}{\partial v} \right) du\, dv,$$

on constate qu'elle exprime l'identité de deux fonctionnelles de $z(u, v)$, provenant, l'une du premier membre, l'autre du second membre. Cette identité s'applique pour toute fonction z douée de dérivées continues jusqu'au troisième ordre inclus. On l'étend alors aux fonctions de z douées de dérivées continues du second ordre sans plus (les seules ici présentes) : à cet effet, il suffit de recourir à une suite de fonctions $z_n(u, v)$ convergeant uniformément, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, vers les mêmes dérivées de $z(u, v)$ respectivement. On construit d'autre part les z_n de manière à leur conférer la dérivabilité du troisième ordre : on obtient un tel résultat en appelant z_n la moyenne de $z(u, v)$ dans un cercle de centre (u, v) et de rayon ε_n, terme général d'une suite évanescente et décroissante.

Mais nous évitons maintenant les objections auxquelles prête cette manière habituelle de présenter le calcul, en admettant l'existence des dérivées troisièmes et constatant après coup leur disparition du résultat.

Dans ce qui précède, nous avons d'aillleurs admis ce lemme :

Soient $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ trois fonctions douées de dérivées partielles secondes fonctions continues du point u, v et telles que le tableau des dérivées premières contienne au moins un déterminant du second ordre non nul, soit, par exemple.

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Alors, ces trois fonctions donnent, dans l'espace (x, y, z), la représentation paramétrique d'une surface de Gauss.

C'est ce qui résulte immédiatement de la théorie classique des fonctions implicites.

III.

Il importe, en terminant, de noter qu'il ne saurait être question de rapporter la surface de Gauss la plus générale au système de ses lignes de courbure. En effet, la direction de l'une des tangentes principales est alors une fonction continue, sans plus, de son point de contact. A titre d'hypothèse supplémentaire, il faudrait introduire une condition de Lipschitz (ou une condition d'unicité plus ou moins proche parente), affectant les directions principales, pour retrouver le cas où, en chaque point de la surface distinct d'un ombilic, il passe une seule ligne de courbure d'un des systèmes.

Une remarque analogue s'appliquerait aux asymptotiques, dans le cas de la surface de Gauss à courbures opposées la plus générale. Les bandes asymptotiques jouent d'ailleurs le rôle de multiplicités caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles de Monge-Ampère à laquelle satisfait chaque coordonnée regardée comme fonction inconnue de u, v. L'étude de cette équation, dans la classe des surfaces de Gauss, nous place donc dans un champ de recherches pour lequel les conditions habituellement réalisées dans la structure des multiplicités caractéristiques n'ont plus lieu. C'est ici que commence toute la difficulté du problème.

Dans une publication antérieure (1), j'ai fait, relativement à la génération des surfaces à courbures opposées par leurs asymptotiques, des remarques pouvant être utilement rapprochées des résultats précédents.

Écrivons sous leur forme vectorielle les formules de Lelieuvre, ce qui donne

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \int \vec{\mathrm{N}} \wedge \left(\frac{\partial \vec{\mathrm{N}}}{\partial u} du - \frac{\partial \vec{\mathrm{N}}}{\partial v} dv \right).$$

Le point M décrira bien une surface, moyennant une condition d'intégrabilité, qui, lorsque la dérivée géométrique

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathrm{N}}}{\partial u \, \partial v}$$

existe, exprime que ce vecteur est colinéaire à $\vec{\mathrm{N}}$. Toutefois, peut-il arriver que l'intégrabilité ait lieu sans qu'on puisse la traduire sous cette forme. Sur le lieu du point M, le voisinage d'un point où les vecteurs (supposés continus par rapport à l'ensemble u, v)

$$\vec{\mathrm{N}}, \quad \frac{\partial \vec{\mathrm{N}}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \vec{\mathrm{N}}}{\partial v}$$

ne sont pas coplanaires, est un élément de surface à paratingent plan en chaque point (et normale à $\vec{\mathrm{N}}$). D'ailleurs, de la continuité quant à l'ensemble u, v des dérivées géométriques premières de $\vec{\mathrm{N}}$, on déduit l'existence d'une différentielle continue pour la longueur de ce vecteur, donc aussi pour chaque composante du vecteur unitaire de même direction : soit $\vec{n}$ ce dernier vecteur. Sur toute courbe, à paratingente

(1) G. Bouligand, *Sur les lignes asymptotiques* (*Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liége*, 5, 1936, p. 221-224).

unique, de la surface, la dérivée géométrique de $\vec{n}$ est bien déterminée et continue, il en est donc de même pour la dérivée géométrique du vecteur $(p, q, -1)$, en appelant, suivant l'usage, p, q les dérivées premières d'une fonction $z(x, y)$ fournissant une représentation cartésienne explicite de notre élément de surface. Ainsi, chacun des coefficients de pente p, q admet une différentielle continue, ce qui revient à reconnaître l'existence et la continuité (en x, y mais non nécessairement en u, v) des dérivées secondes r, s, t de $z(x, y)$. Dès lors la définition des directions asymptotiques (par annulation de $r\,dx^2 + 2s\,dx + t\,dy^2$) s'applique en chaque point et nos lignes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont des lignes à paratingente partout unique et confondue avec l'une de ces directions ([1]).

En outre les surfaces ainsi obtenues *appartiennent toujours à la catégorie des surfaces de Gauss*, dont l'importance géométrique résulte du présent Mémoire ([2]).

Ce résultat n'était d'ailleurs nullement évident : à première vue, on aurait été tenté d'admettre le contraire en songeant au cas particulier où $\vec{N}$ est somme géométrique d'un vecteur fonction de u seul et d'un vecteur fonction de v seul, ces vecteurs ayant, sans plus, des dérivées géométriques du premier ordre continues. On peut alors écrire

$$\overrightarrow{OM} = \vec{V} \wedge \vec{U} + \int \vec{U} \wedge d\vec{U} - \int \vec{V} \wedge d\vec{V},$$

d'où l'absence de dérivées géométriques secondes pour $\overrightarrow{OM}$ par rapport à u, v (*loc. cit.*, p. 221).

Notons aussi que cet exemple englobe, comme cas particulier, des formules familières aux géomètres qui se sont occupés des cas d'inté-

---

([1]) Sans qu'on puisse toutefois justifier que ces lignes soient les seules possédant cette propriété.

([2]) Dans ma publication citée de Liége, 1936, j'appelle en outre l'attention sur des surfaces d'une catégorie plus générale que celles de Gauss, surfaces auxquelles les formules de Lelieuvre permettent d'assigner des *asymptotiques*, en un sens qui procède de la considération de *limites généralisées* (à l'exemple de l'attribution d'une somme conventionnelle à une série divergente).

grabilité en théorie de la déformation isométrique des surfaces [1], à la suite de Weingarten, Darboux, M. Thybaut, M. Gambier [2] (surfaces réelles ayant même élément linéaire qu'un paraboloïde de révolution de paramètre $2ip$) [3].

---

[1] Dans un travail en préparation, M. Paul Germain, élève de seconde année à l'École Normale Supérieure, a simplifié l'étude des surfaces citées dans le texte en déduisant leurs propriétés des formules de Lelieuvre. Il a, en outre, étendu leur théorie dans le champ de validité qui correspond à la considération des surfaces de Gauss.

[2] Voir le *Mémorial Villat*, fasc. XXVI.

[3] Dans mon travail cité, j'ai d'ailleurs étudié les conséquences d'hypothèses encore plus larges faites sur les dérivées géométriques premières de $\vec{N}$.