JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GASTON JULIA

Décomposition en produit infini des opérateurs linéaires de l'espace hilbertien

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 20 (1941), p. 347-362.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1941_9_20__347_0>

Décomposition en produit infini des opérateurs linéaires de l'espace hilbertien;

PAR GASTON JULIA.

---

1. J'ai indiqué sommairement, dans une Note des *Comptes renaus de l'Académie des Sciences* (212, p. 733-736), comment on pouvait définir un opérateur linéaire A de l'espace hilbertien H, dont le domaine d'existence D_A est partout dense dans H, à partir de la suite des vecteurs $A_n = Ae_n$, transformés par A d'un système orthonormal complet (e_n) appartenant à D_A.

J'ai montré notamment que tout opérateur borné est défini dans tout l'espace H par l'équation $y = AX = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n$, donnant le vecteur Y transformé par A du vecteur $X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, qui est un vecteur arbitraire de H. La série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n$ est alors fortement convergente pour tout système (x_n) tel que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ converge. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que $\sum_{n=1}^{\infty} |(A_n, X)|^2$ converge pour tout vecteur X de H, (A_n, X) désignant le produit scalaire des vecteurs (A_n, X). Un système infini de vecteurs A_n étant donné, j'ai indiqué une règle pratique permettant de reconnaître si la condition est vérifiée, avec le minimum de calculs.

Lorsque le système (A_n) ne vérifie pas la condition qu'on vient d'indiquer, la série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n$ ne converge pas fortement pour tout $X = \Sigma x_n e_n$ de H. Il existe alors un domaine d_A, partout dense dans H, et contenant tous les e_n, où cette série converge fortement; appelons-le *domaine ou noyau de convergence forte* de la série $\Sigma A_n x_n$; dans ce domaine l'équation $y = \Sigma A_n x_n$ définit un vecteur Y correspondant à $X = \Sigma x_n e_n$ par un opérateur linéaire que nous appellerons A; $Y = AX$.

L'étude du prolongement de A hors de d_A ne sera pas abordée ici. Notre but est simplement de montrer que cette conception de l'opérateur, comme transformant l'un dans l'autre les deux systèmes infinis (e_n) et (A_n), conduit à des résultats intéressants dont je voudrais ici donner un exemple.

2. On va, en effet, prouver d'abord que tout opérateur *borné* se décompose en produit, généralement infini, d'opérateurs simples d'un type canonique, par analogie avec la décomposition des fonctions entières d'une variable complexe en produit de facteurs primaires. On étendra ensuite la décomposition aux opérateurs *non bornés*.

Envisageons le système des $A_n = Ae_n$ et appliquons-lui la méthode d'orthonormalisation [1] de E. Schmidt. Elle fournit un système de vecteurs orthonormaux $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ tels que l'on ait

$$A_n = \alpha_{n1}\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_{nn}\varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty);$$

les α_{ik} étant des nombres complexes tels que la matrice récurrente $\|\alpha_{ik}\|$ soit une matrice bornée lorsque l'opérateur A est borné, et réciproquement.

On a toujours $\alpha_{ik} = 0$ pour $i < k$.

Si tous les A_n sont indépendants, tous les α_{nn} sont $\neq 0$. Si A_n, $A_{n+1}, \ldots, A_{n+p-1}$ dépendent linéairement de $A_1, \ldots, A_{n-1}$, supposés

[1] *Voir* G. Julia, *Introduction mathématique aux théories quantiques*, 2e Partie, Chap I, § III, n° 2. *Voir* aussi cet ouvrage pour la terminologie.

indépendants, tous les α_{ik}, pour i et $k = 1$ des nombres n, $n+1, \ldots,$ $n+p-1$, sont nuls. Si dans la suite des A_n il n'y a qu'un nombre fini p de vecteurs indépendants, la méthode de Schmidt ne fournit qu'un nombre fini p de vecteurs ε_n; par un numérotage convenable on peut alors supposer que $A_1, \ldots, A_p$ sont indépendants, et il en résulte que tous les α_{ik} sont nuls pour $k > p$, quel que soit i.

Si dans la suite des A_n il y a une infinité de vecteurs indépendants, le système (ε_n) est infini. Il est *complet* si la variété fermée $V = [A_1, A_2, \ldots]$, formée de toutes les combinaisons linéaires $\sum_1^p \lambda_i A_i$ et de leurs limites, est identique à H. Il est *incomplet* si la variété V ne remplit pas H.

Nous examinerons d'abord le cas des systèmes *infinis* (ε_n).

3. Envisageons l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ défini par $A_n = \mathcal{A}\varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$. Il est défini dans V, dont la base est (ε_n); sa matrice dans cette base est

$$\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} & \ldots \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ . & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ . & . & \ldots & \alpha_{nn} & \ldots \\ . & . & \ldots & 0 & \ldots \\ . & . & \ldots & 0 & \ldots \end{Vmatrix} \qquad \text{matrice transposée de } \| \alpha_{ik} \|.$$

La série $\Sigma |(A_n, X)|^2$ étant convergente pour tout X de H, l'opérateur $\mathcal{A}$ est borné en même temps que A.

Envisageons en outre l'opérateur U défini par $\varepsilon_n = U e_n$. Deux cas sont à distinguer :

1° Si (ε_n) est complet, U est *unitaire*, $UU^* = U^*U = 1$. On a $e_n = U^* \varepsilon_n$. A tout vecteur $X = \Sigma x_n e_n$ de H correspond $\xi = UX = \Sigma x_n \varepsilon_n$; et réciproquement à tout vecteur $\xi = \Sigma \xi_n \varepsilon_n$ de H correspond $X = U^* \xi = \Sigma \xi_n e_n$. Les deux vecteurs X et ξ ont mêmes coordonnées respectives, le premier par rapport à (e_n), le second par rapport à (ε_n). A cause de $A_n = A e_n = \mathcal{A}\varepsilon_n$ et $\varepsilon_n = U e_n$, la série $y = AX = \Sigma x_n A_n$ étant fortement convergente pour tout $X = \Sigma x_n e_n$ de H, on voit que

(a) $\qquad UX = \Sigma x_n \varepsilon_n,$

(b) $\qquad \mathfrak{A} UX = \Sigma x_n \mathfrak{A} \varepsilon_n = \Sigma x_n A_n = AX,$ pour tout X de H.

Donc

$$A = \mathfrak{A} U.$$

De plus, lorsque X décrit H, $\xi = UX$ décrit H et $\|\xi\| = \|X\|$. Donc la borne supérieure exacte de $\|AX\|$ sur $\|X\| = 1$ est identique à la borne exacte de $\|\mathfrak{A}\xi\|$ sur $\|\xi\| = 1$. Donc A et $\mathfrak{A}$ ont même borne exacte.

2° Si (ε_n) est incomplet, U n'est pas unitaire. Mais on a $U^\star U = 1$, $UU^\star = P_V$, P_V désignant l'opérateur de projection sur $V = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots]$. A $X = \Sigma x_n e_n$ décrivant H correspond $\xi = UX = \Sigma x_n \varepsilon_n$ décrivant V, et réciproquement. La correspondance est biunivoque. On a toujours $X = U^\star \xi$, X décrivant H lorsque ξ décrit V. Mais pour tout vecteur ξ de H — V (orthogonal à V) on a $U^\star \xi = 0$, en sorte que tout X de H est transformé par $UU^\star$ en sa projection sur V. On a pourtant toujours $A = \mathfrak{A} U$ avec bornes égales pour A et $\mathfrak{A}$, le raisonnement de 1° restant valable lorsqu'on considère $\mathfrak{A}$ dans V et A dans H. On dit que U est ici *unitaire à gauche*.

4. Il est alors aisé d'opérer la décomposition annoncée sur $\mathfrak{A}$. Nous passons du système (ε_n) au système (A_n) par *étapes successives*. Conservant les ε_n pour $n \geqq 2$, nous passons de ε_1 à A_1 par un opérateur simple. Puis, sans toucher à A_1 ni aux ε_n pour $n \geqq 3$, nous passons de ε_2 à A_2, etc. A la $p^{\text{ième}}$ étape nous conservons $A_1 \ldots A_{p-1}$, ainsi que les ε_n pour $n > p$, et nous passons de ε_p à A_p. Nous continuons ainsi indéfiniment.

La première étape s'effectue par l'opérateur simple $\mathfrak{A}_1$ défini par $\mathfrak{A}_1 \varepsilon_1 = A_1$ et $\mathfrak{A}_1 \varepsilon_n = \varepsilon_n$ pour $n \geqq 2$. On voit aussitôt que pour tout $\xi = \Sigma \xi_n \varepsilon_n$ de V, on a $\mathfrak{A}_1 \xi = \xi + \xi_1 (A_1 - \varepsilon_1)$. Il en résulte que $\mathfrak{A}_1$ est borné, car $\|\mathfrak{A}_1 \xi\| \leqq \|\xi\| + |\xi_1| \, \|A_1 - \varepsilon_1\|$, donc

$$\|\mathfrak{A}_1 \xi\| \leqq \|\xi\| [1 + \|A_1 - \varepsilon_1\|].$$

Pour la deuxième étape, considérons l'opérateur $\mathfrak{A}_2$ défini par

$$\mathfrak{A}_2 \varepsilon_2 = A_2 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{A}_2 \varepsilon_n = \varepsilon_n \qquad \text{pour} \quad n \neq 2.$$

La relation $A_1 = \alpha_{11} \varepsilon_1$ montre que A_1 reste invariant par $\mathfrak{A}_2$, comme ε_1. Donc $\mathfrak{A}_2$ possède la propriété requise pour la deuxième étape. On aura $\mathfrak{A}_2\xi = \xi + \xi_2(A_2 - \varepsilon_2)$ et $\mathfrak{A}_2$ sera borné, comme $\mathfrak{A}$.

Pour la $p^{\text{ième}}$ étape, considérons $\mathfrak{A}_p$ défini par

$$\mathfrak{A}_p\varepsilon_p = A_p \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{A}_p\varepsilon_n = \varepsilon_n \qquad \text{pour} \quad n \neq p.$$

Les relations

$$A_i = \alpha_{i1}\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_{ii}\varepsilon_i \qquad \text{pour} \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

montrent que, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ restant invariants par $\mathfrak{A}_p$, il en est de même des $A_1, \ldots, A_{p-1}$. Donc $\mathfrak{A}_p$ est l'opérateur requis pour la $p^{\text{ième}}$ étape. Il est borné et l'on a $\mathfrak{A}_p\xi = \xi + \xi_p(A_p - \varepsilon_p)$.

5. Considérons le produit $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p-1}\ldots\mathfrak{A}_1$. C'est un opérateur borné qui laisse invariants tous les ε_n pour $n > p$. Il transforme ε_k en A_k pour $k = 1, 2, \ldots, p$. Il est facile de l'exprimer en fonction de l'*opérateur réduit* $\mathfrak{A}^{(p)}$, d'ordre p, que Hilbert associe à l'opérateur borné $\mathfrak{A}$. Si l'on désigne par $\mathcal{E}_p$ le projecteur dont la variété de projection est $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p]$, le projecteur $1 - \mathcal{E}_p$ projette sur la variété fermée $[\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots]$. $\mathcal{E}_p$ laisse invariants $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ et transforme en zéro les vecteurs ε_i pour $i > p$. $1 - \mathcal{E}_p$ laisse invariants les ε_i pour $i > p$ et transforme en zéro les ε_i pour $i \leqq p$. On sait que $\mathfrak{A}^{(p)} = \mathcal{E}_p\mathfrak{A}\mathcal{E}_p$ transforme en zéro les ε_i pour $i \geqq p$ et transforme ε_i en A_i pour $i \leqq p$, puisque A_i appartient à la variété invariante $[\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_p]$. Par suite $\mathfrak{A}^{(p)} + 1 - \mathcal{E}_p$ possède les mêmes propriétés que $\mathfrak{A}_p\ldots\mathfrak{A}_1$ par rapport aux ε_i. On a donc

$$\mathfrak{A}_p\ldots\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}^{(p)} + 1 - \mathcal{E}_p.$$

Cela se voit aussi sur les matrices relatives au système (ε_i).

La matrice de $\mathfrak{A}_k$ est

$$\mathfrak{A}_k = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{k1} & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & . & \alpha_{k2} & 0 & \ldots \\ . & 0 & \ldots & . & \ldots & . & \ldots \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . & \ldots \\ . & . & \ldots & 1 & \ldots & . & \ldots \\ . & . & \ldots & 0 & \alpha_{kk} & 0 & \ldots \\ . & . & \ldots & . & \ldots & 1 & \ldots \\ . & . & \ldots & . & \ldots & 0 & \ldots \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . & \ldots \end{matrix} \right\|$$

celle de $\mathfrak{A}_p \ldots \mathfrak{A}_1$ est

$$\mathfrak{A}_p \ldots \mathfrak{A}_1 = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{p1} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{p2} & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & 0 & \ldots & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \alpha_{pp} & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & 0 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{Vmatrix}.$$

On a

$$\mathcal{E}_p = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & \cdot & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots \\ 0 & \cdot & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots \\ 0 & \cdot & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & 0 & \ldots \end{Vmatrix}$$

et

$$1 - \mathcal{E}_p = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 & \cdot & \ldots \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & 1 & \ldots \end{Vmatrix}$$

avec

$$\mathfrak{A}^{(p)} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{p1} & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{p2} & \ldots & \cdot & \ldots \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \cdot & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{pp} & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \cdot & \ldots \\ 0 & \cdot & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots \end{Vmatrix},$$

d'où il ressort aussi que

$$\mathfrak{A}_p \ldots \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}^{(p)} + 1 - \mathcal{E}_p.$$

Si l'on n'introduit pas $\mathcal{A}^{(p)}$, on peut remarquer, de proche en proche, que

$$\mathcal{A}_1\xi = \xi + \xi_1(A_1 - \varepsilon_1),$$

$$\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1\xi = \mathcal{A}_2\xi + \xi_1\mathcal{A}_2(A_1 - \varepsilon_1) = \xi + \xi_1(A_1 - \varepsilon_1) + \xi_2(A_2 - \varepsilon_2),$$

car

$$\mathcal{A}_2\xi = \xi + \xi_2(A_2 - \varepsilon_2) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}_2(A_1 - \varepsilon_1) = A_1 - \varepsilon_1,$$

l'opérateur $\mathcal{A}_2$ laissant invariants A_1 et ε_1.

En général

$$\mathcal{A}_p\ldots\mathcal{A}_1\xi = \xi + \sum_1^p \xi_n(A_n - \varepsilon_n).$$

6. Imaginons que p devienne infini. L'opérateur $\mathcal{A}$ étant borné, on sait que $\mathcal{A}^{(p)} = \mathcal{E}_p\mathcal{A}\mathcal{E}_p$ converge fortement vers $\mathcal{A}$ parce que $\mathcal{E}_p$ tend fortement vers 1. $1 - \mathcal{E}_p$ tend fortement vers zéro. Donc $\mathcal{A}_p\ldots\mathcal{A}_1$ *converge fortement vers* $\mathcal{A}$.

On peut donc écrire, *pour tout* A *borné*,

$$A = \ldots\mathcal{A}_p\mathcal{A}_{p-1}\ldots\mathcal{A}_1 U,$$

la convergence du produit infini étant forte lorsque p devient infini.

7. Donnons *quelques propriétés des opérateurs simples* $\mathcal{A}_k$ *de décomposition*. Et d'abord étudions le *spectre de* $\mathcal{A}_p$. On a vu que

$$\mathcal{A}_p X = X + x_p(A_p - \varepsilon_p) \qquad \text{si} \quad X = \sum_{p=1}^{\infty} x_n\varepsilon_n.$$

Il en résulte que, si l'on cherche à résoudre en X l'équation vectorielle $Y = (\mathcal{A}_p - \lambda)X$, cette équation fournit le système

$$\begin{aligned}
y_1 &= (1-\lambda)x_1 + \alpha_{p1}x_p,\\
y_2 &= (1-\lambda)x_2 + \alpha_{p2}x_p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{p-1} &= (1-\lambda)x_{p-1} + \alpha_{p.p-1}x_p,\\
y_p &= (\alpha_{pp} - \lambda)x_p,\\
y_{p+q} &= (1-\lambda)x_{p+q} \qquad \text{pour} \quad q > 0.
\end{aligned}$$

On a posé

$$A_p = \alpha_{p1}\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_{pp}\varepsilon_p \qquad \text{et} \qquad Y = \Sigma y_n\varepsilon_n.$$

1° λ appartient à l'*ensemble résolvant* de $\mathfrak{A}_p$ si le système précédent fournit un vecteur X et un seul pour chaque y de H.

Cela exige d'abord $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq \alpha_{pp}$, et fournit une seule valeur pour x_{p+q}, $q \geqq 0$, à savoir

$$x_p = \frac{y_p}{\alpha_{pp} - \lambda}, \qquad x_{p+q} = \frac{y_{p+p}}{1 - \lambda},$$

d'où l'on déduit

$$x_k = \frac{y_k}{1-\lambda} - \frac{\alpha_{pk}}{1-\lambda} x_p = \frac{y_k}{1-\lambda} - \frac{\alpha_{pk} y_p}{(1-\lambda)(\alpha_{pp} - \lambda)} \quad \text{pour } (k = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Par hypothèse $\sum_1^\infty |y_k|^2$ converge. Donc

$$\sum_p^\infty |x_k|^2 = \frac{|y_p|^2}{|\alpha_{pp} - \lambda|^2} + \sum_{q=1}^\infty \frac{|y_{p+q}|^2}{|1-\lambda|^2}$$

converge si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq \alpha_{pp}$. Alors $\sum_1^\infty |x_k|^2$ converge et *toute valeur de λ distincte de 1 et de α_{pp} appartient à l'ensemble résolvant.*

2° Considérons $\lambda = \alpha_{pp} \neq 1$. Il faut pour pouvoir résoudre le système, que $y_p = 0$. Alors x_p est arbitraire, mais tous les $x_{p+q} (q > 0)$ sont déterminés et $\sum_1^\infty |x_{p+q}|^2$ converge. Donc l'équation $Y = (\mathfrak{A}_p - \lambda) X$ admet une infinité de solutions X. Donc $\lambda = \alpha_{pp} \neq 1$ appartient au spectre ponctuel de $\mathfrak{A}_p$. En résolvant $O = (\mathfrak{A}_p - \lambda) X$, on reconnaît sans peine que la valeur propre $\lambda = \alpha_{pp} = (\varepsilon_p, A_p)$ est d'ordre 1 et que la solution *propre* correspondant à α_{pp} est $X = A_p - \varepsilon_p$, à un facteur scalaire arbitraire près.

3° Si $\lambda = 1 \neq \alpha_{pp}$, x_p est déterminé, mais les x_{p+q} n'existent que si $y_{p+q} = 0$ pour $q > 0$; les x_{p+q} sont alors indéterminés; il faut en outre que $y_i = \alpha_{pi} x_p$, pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, $\lambda = 1$ est donc une valeur propre. En résolvant $O = (\mathfrak{A}_p - \lambda) X$ pour $\lambda = 1 \neq \alpha_{pp}$ on voit que $\lambda = 1$ *est une valeur propre d'ordre infini* et la *solution propre* correspondante est un *vecteur arbitraire de la variété* $[\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{p-1} \varepsilon_{p+1} \ldots]$.

4° Si $\alpha_{pp} = 1 = \lambda$, on a encore une *valeur propre d'ordre infini.* La valeur propre correspondante est un vecteur complètement arbitraire de H si tous les $\alpha_{pi}(i<p)$ sont nuls; c'est un vecteur arbitraire de $[\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p-1}\,\varepsilon_{p+1}\ldots]$ si l'un des $\alpha_{pi}(i<p)$ n'est pas nul.

En définitive *le spectre de $\mathfrak{A}_p$ est ponctuel et se compose des deux points* 1 *et* $\alpha_{pp}=(\varepsilon_p,\, A_p)$ *distincts ou confondus.*

8. En second lieu il est remarquable que la *borne exacte de $\mathfrak{A}_p$ puisse se calculer* sans difficulté.

Envisageons pour cela l'associé $\mathfrak{A}_p^*$ de $\mathfrak{A}_p$, donc la matrice est, dans le système (ε_p),

$$\mathfrak{A}_p^* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & . & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & . & \ldots \\ . & . & \ldots & . & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & . & \ldots \\ \bar\alpha_{p1} & \bar\alpha_{p2} & \ldots & . & \bar\alpha_{pp} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & . & 0 & 1 & \ldots \end{Vmatrix}.$$

Par suite, en posant $X=\sum_1^\infty x_n\varepsilon_n$, on aura

$$\|\mathfrak{A}_p^* X\|^2=\sum_1^{p-1}|x_n|^2+|\bar\alpha_{p1}x_1+\ldots+\alpha_{pp}x_p|^2+\sum_{p+1}^{\infty}|x_n|^2.$$

Et, en supposant $\|X\|^2=\sum_1^\infty |x_n|^2=1$,

$$\|\mathfrak{A}_p^* X\|^2=1+|\bar\alpha_{p1}x_1+\ldots+\bar\alpha_{pp}x_p|^2-|x_p|^2,$$

dont il faut chercher le maximum lorsque $x_1,\ \ldots,\ x_p$ varient arbitrairement dans l'hypersphère $\sum_1^p |x_i|^2\leqq 1$.

1° Si $\alpha_{pp}=0$, on aura ce maximum pour $x_p=0$, et pour le maximum de $|\bar\alpha_{p1}x_1+\ldots+\bar\alpha_{p,p-1}x_{p-1}|^2$. lorsque $\sum_1^{p-1}|x_i|^2\leqq 1$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que c'est $|\alpha_{p1}|^2+\ldots+|\alpha_{p,p-1}|^2$.

Alors la borne cherchée est

$$M_{\mathfrak{a}_p}=\sqrt{1+|\alpha_{p1}|^2+\ldots+|\alpha_{pp}|^2}.$$

2° Si $\alpha_{pp}\neq 0$, on a à étudier le maximum de $|a+\bar{\alpha}_{pp}x_p|^2-|x_p|^2$ lorsque $|x_p|^2\leqq 1-\sum_1^{p-1}|x_k|^2$, en posant $a=\sum_1^{p-1}\bar{\alpha}_{pi}x_i$.

Laissant les $x_1, \ldots, x_{p-1}$ et $|x_p|$ fixes, ce maximum est atteint pour

$$\bar{\alpha}_{pp}x_p=ka \qquad (k>0),$$

et c'est

$$|a|^2(1+k)^2-\frac{k^2}{|\alpha_{pp}|^2}|a|^2=|a|^2(1+2k)+|a|^2k^2\left(1-\frac{1}{|\alpha_{pp}|^2}\right)$$

dont nous devons prendre le maximum lorsque $\sum_1^{p-1}|x_i|^2\leqq 1$ et, pour $k>0$,

$$k^2|a|^2\leqq|\alpha_{pp}|^2\left(1-\sum_1^{p-1}|x_i|^2\right).$$

Poursuivons le calcul seulement dans le cas où $|\alpha_{pp}|>1$. On voit aisément qu'il faudra, pour maximer, prendre $k^2|a|^2$ égal à sa limite supérieure, ce qui donne la valeur

$$|a|^2+2|a|.|\alpha_{pp}|\sqrt{1-s^2}+(1-s^2)(|\alpha_{pp}|^2-1)$$

en posant

$$s^2=\sum_1^{p-1}|x_i|^2.$$

Pour maximer la valeur obtenue, lorsque les x_i varient de manière que $s^2\leqq 1$, il faudra d'abord faire acquérir à $|a|$ sa valeur maximum qui est (inégalité de Cauchy-Schwarz) $\sqrt{|\alpha_{p1}|^2+\ldots+|\alpha_{p,p-1}|^2}.s$, puis chercher le maximum, lorsque $s^2\leqq 1$, de l'expression obtenue

$$s^2\left(\sum_1^{p-1}|\alpha_{pi}\right)+2s\sqrt{1-s^2}\,|\alpha_{pp}|\sqrt{\sum_1^{p-1}|\alpha_{pi}|^2}+(1-s^2)(|\alpha_{pp}|^2-1).$$

C'est un problème aisé à résoudre en posant $s=\sin\varphi$ et faisant varier φ

de o à $\frac{\pi}{2}$, limites comprises. On a une expression de la forme

$$A\sin^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi$$

dont le maximum est, ici,

$$\frac{C+A}{2} + \sqrt{B^2 + \left(\frac{C-A}{2}\right)^2}.$$

En définitive, on obtient pour la borne de $\mathfrak{A}_p^*$ et de $\mathfrak{A}_p$ l'expression cherchée

$$(M_{\mathfrak{A}_p})^2 = 1 + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{p} |\alpha_{pi}|^2 - 1\right] + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2\left[\sum_{i=1}^{p-1} |\alpha_{pi}|^2 - |\alpha_{pp}|^2\right] + \left[\sum_{i=1}^{p} |\alpha_{pi}|^2\right]^2}.$$

9. Envisageons le cas des *opérateurs non bornés* A définis par un *système quelconque de vecteurs* A_n. On aura toujours $A = \mathfrak{A}U$, $\mathfrak{A}$ défini par $\mathfrak{A}\varepsilon_n = A_n$, U unitaire ou unitaire à gauche, selon que le système (ε_n) est complet ou non. Le noyau de convergence forte $d_{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}$ est défini par les $\xi = \sum \xi_n \varepsilon_n$ tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n A_n$ converge fortement.

Les $\mathfrak{A}_p$ étant définis comme précédemment, on aura, comme au n° 5,

$$\mathfrak{A}_p \ldots \mathfrak{A}_1 \xi = \xi + \sum_1^p \xi_n (A_n - \varepsilon_n),$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{A}_p \ldots \mathfrak{A}_1 \xi - \sum_1^p \xi_n A_n = \xi - \sum_1^p \xi_n \varepsilon_n.$$

Le deuxième membre converge fortement vers zéro pour tout ξ de H. Donc :

1° *Pour tout* ξ *du noyau* $d_{\mathfrak{A}}$ la série $\sum_1^{\infty} \xi_n A_n$ et le produit infini $\mathfrak{A}_p \ldots \mathfrak{A}_1 \xi$ *convergent fortement vers la même limite.*

2° Hors du noyau, la série ne convergeant pas fortement, le produit infini ne convergera pas fortement.

La série et le produit infini ont donc *même noyau de convergence forte* et dans le noyau représentent le même opérateur linéaire $\mathcal{A}\xi$.

Il y a plus. Considérons la matrice de l'opérateur $\mathcal{A}_p\mathcal{A}_{p-1}\ldots\mathcal{A}_1$ et la *matrice* $\mathcal{A}^{(p)}$ *réduite d'ordre* **p** de la matrice de l'opérateur $\mathcal{A}$ selon Hilbert. On reconnaît aussitôt que l'on a :

$$\mathcal{A}^{(p)} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{p1} & 0 & \ldots \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{p2} & . & \ldots \\ . & 0 & \ldots & \ldots & . & \ldots \\ . & . & \ldots & \ldots & . & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{pp} & . & \ldots \\ 0 & . & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ . & . & \ldots & . & . & \ldots \end{matrix} \right\|,$$

tandis que

$$\mathcal{A}_p\mathcal{A}_{p-1}\ldots\mathcal{A}_1 = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{p1} & 0 & . & . & \ldots \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{p2} & . & . & . & \ldots \\ . & 0 & \ldots & \ldots & . & . & . & \ldots \\ . & . & \ldots & \ldots & . & . & . & \ldots \\ . & . & \ldots & \alpha_{pp} & . & . & . & \ldots \\ 0 & . & \ldots & 0 & 1 & 0 & . & \ldots \\ . & . & \ldots & . & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ . & . & \ldots & . & . & 0 & . & \ldots \\ . & . & \ldots & . & . & . & . & \ldots \end{matrix} \right\|.$$

Par conséquent, comme au n° **5**, on a

$$\mathcal{A}_p\mathcal{A}_{p-1}\ldots\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^{(p)} + 1 - \mathcal{E}_p.$$

Lorsque p devient infini, $\mathcal{E}_p$ tend fortement vers 1 dans tout H. Par suite $\mathcal{A}_p\mathcal{A}_{p-1}\ldots\mathcal{A}_1\xi$ et $\mathcal{A}^{(p)}\xi$ convergent fortement pour les mêmes vecteurs ξ, et leur limite est la même.

Donc $\mathcal{A}^{(p)}$, *réduit d'ordre* **p** de $\mathcal{A}$, *a même noyau de convergence forte da que* $\mathcal{A}_p\ldots\mathcal{A}_1$ et que $\sum_1^p \xi_p A_p$. Dans ce noyau, la limite de

$\mathfrak{A}^{(p)}$ est égale à celle de $\mathfrak{A}_p \ldots \mathfrak{A}_1$: *c'est la somme de la série*

$$\sum_1^\infty \xi_n A_n.$$

10. Revenons à X, de H, correspondant à ξ par $\xi = UX$.

$$\xi = \sum_1^\infty \xi_n \varepsilon_n = \sum_1^\infty \xi_n U e_n = U \sum_1^\infty \xi_n e_n.$$

Donc

$$X = \sum_1^\infty \xi_n e_n.$$

Ce qui prouve que $x_n = \xi_n$ pour tout n; ξ et X ont mêmes coordonnées respectives relativement aux systèmes (ε_n) et (e_n). On a donc

$$AX = \sum_1^\infty x_n A_n = \sum_1^\infty \xi_n A_n = \mathfrak{A}\xi.$$

Le noyau d_A de convergence forte de la série $\Sigma x_n A_n$ et le noyau $d_{\mathfrak{A}}$ de convergence forte de $\Sigma \xi_n A_n$ sont liés l'un à l''autre par la relation

$$d_{\mathfrak{A}} = U d_A;$$

et dans ces noyaux, les valeurs de AX et de $\mathfrak{A}\xi$ aux points homologues ξ et X ($\xi = UX$) sont égales.

Il en résulte que $\mathfrak{A}\xi$, limite forte de $\Sigma \xi_n A_n$ en tout ξ de $d_{\mathfrak{A}}$ est égale à AX, limite forte de $\Sigma x_n A_n$ au point X de d_A homologue de $\xi\,[\xi = UX,\ X = U^*\xi]$. $AX = \mathfrak{A}UX$.

En définitive, *le produit infini* $\ldots \mathfrak{A}_p \mathfrak{A}_{p-1} \ldots \mathfrak{A}_1 UX$, *la série* $\sum_1^p x_n A_n$ *et l'expression réduite* $\mathfrak{A}^{(p)} UX$ *convergent vers la somme de* $\sum_1^\infty x_p A_p$ *en tout point* X *du noyau* d_A.

11. Il reste à envisager le cas où le système (ε_n) est fini, les A_n dépendant tous linéairement d'un nombre fini p d'entre eux, que, par un numérotage convenable, on peut supposer être $A_1, A_2, \ldots, A_p$. On a alors, par le procédé de E. Schmidt,

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_{11}\varepsilon_1, \\ A_2 &= \alpha_{21}\varepsilon_1 + \alpha_{22}\varepsilon_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_p &= \alpha_{p1}\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_{pp}\varepsilon_p, \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{pp} \neq 0.$$

Ensuite on a

$$A_{p+q} = \alpha_{p+q,1}\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_{p+q\ p}\varepsilon_p \qquad \text{pour tout} \quad q > 0.$$

Arrivé ici, on peut procéder de deux manières :

1° On peut compléter le système $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ par un système orthonormal $\varepsilon_{p+1}, \ldots$, de façon que le système $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \ldots)$ soit complet. Les A_n s'expriment linéairement en fonction des ε_n du nouveau système, les coefficients de $\varepsilon_{p+1}, \ldots$, dans les formules étant tous nuls, les coefficients de $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ restant les mêmes que ceux qu'on a donnés ci-dessus. La matrice $\mathfrak{A}$ a alors toutes ses lignes nulles à partir de la $(p+1)^{\text{ième}}$. Tout ce qui précède s'applique encore, mais se simplifie énormément, par une méthode directe qui permet, comme on va le voir, de déterminer les noyaux de $d_{\mathfrak{A}}$ et d_A.

2° On peut exprimer la somme $\sum_1^k x_n A_n$ sous la forme

$$\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i \sum_{n=1}^{k} \alpha_{ni} x_n, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \varepsilon_1\mu_{1k} + \varepsilon_2\mu_{2k} + \ldots + \varepsilon_p\mu_{pk}$$

et chercher la condition pour que cette somme converge fortement pour $k = \infty$. Il est aussi simple d'exprimer directement les A_{p+q} *en fonction de* $A_1, \ldots, A_p$ et d'écrire

$$A_{p+q} = \lambda_{q1}A_1 + \ldots + \lambda_{qp}A_p.$$

Alors

$$\sum_{1}^{p+q} x_n A_n = \sum_{1}^{p} x_n A_n + A_1 \sum_{k=1}^{q} \lambda_{k1} x_{p+k} + A_2 \sum_{k=1}^{q} \lambda_{k2} x_{p+k} + \ldots + A_p \sum_{k=1}^{p} \lambda_{kp} x_{p+k}.$$

La convergence forte, pour q infini, de la somme précédente est équivalente à la convergence forte de

$$C_{p+q} = A_1 \sum_{k=1}^{q} \lambda_{k1} x_{p+k} + \ldots + A_p \sum_{k=1}^{q} \lambda_{kp} x_{p+k}.$$

On va montrer qu'elle équivaut à la *convergence simultanée des séries* $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ki} . x_{p+k}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

La condition est évidemment suffisante. Elle est aussi nécessaire. En effet, les $A_2, \ldots, A_p$ étant en nombre fini et A_1 n'appartenant pas à la variété $[A_2, \ldots, A_p]$, on peut, dans la variété complémentaire $H - [A_2, \ldots, A_p]$, trouver une infinité de vecteurs, soit Z_1 l'un d'eux, tels que

$$(Z_1, A_1) = 1, \qquad (Z_1, A_k) = 0 \qquad \text{pour} \quad (k = 2, \ldots, p).$$

Alors

$$(Z_1, C_{p+q}) = \sum_{k=1}^{q} \lambda_{k1} x_{p+k}.$$

Si C_{p+q} converge fortement, pour $q = \infty$, (Z_1, C_{p+q}) converge, et il en de même de $\sum_{k=1}^{q} \lambda_{k1} x_{p+k}$. En général on détermine Z_i tel que

$$(Z_i, A_i) = 1, \qquad (Z_i, A_j) = 0 \qquad \text{pour} \quad [j = 1, 2, \ldots, (i-1), (i+1), \ldots, p)],$$

et la convergence forte de C_{p+q} entraîne la convergence de $\sum_{k=1}^{q} \lambda_{ki} x_{p+k}$.

La convergence simultanée des p séries $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ki} x_{p+k} (i = 1, 2, \ldots, p)$ est donc nécessaire et suffisante pour la convergence forte de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathrm{A}_n$. Elle détermine donc directement le noyau de convergence forte d_{A} de $\Sigma x_n \mathrm{A}_n$, et aussi la valeur de la somme $\Sigma x_n \mathrm{A}_n$.

En particulier, la convergence forte de $\Sigma x_n \mathrm{A}_n$ *dans tout* H *a pour condition nécessaire et suffisante* la convergence simultanée dans tout H des p séries $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ki} x_{p+k}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, c'est-àdire la convergence des p séries $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{ki}|^2$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Si l'on avait opéré avec les expressions des A_n en $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$, on aurait conclu à la convergence simultanée des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ni} x_n$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, laquelle détermine toujours le noyau d_{A} de convergence forte de $\Sigma x_n \mathrm{A}_n$, et montre que $d_{\mathrm{A}} = \mathrm{H}$ dans le cas et dans le cas seulement où les p séries $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{ni}|^2$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ convergent, c'est-à-dire dans le cas où la matrice $\|\alpha_{ik}\|$, ou la matrice transposée $\mathfrak{A}$, est *quarrable*, ce qui correspond au fait bien connu que toute matrice ayant seulement un nombre fini de lignes (ou de colonnes) non identiquement nulles, est bornée dès qu'elle est quarrable, et réciproquement.