JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Tétraèdres inscrits dans une biquadratique $\mathcal{B}$ et circonscrits à une quadrique Σ

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 21 (1942), p. 199-265.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1942_9_21__199_0>

Tétraèdres inscrits dans une biquadratique $\mathcal{B}$ et circonscrits à une quadrique Σ;

Par Bertrand GAMBIER.

---

1. Introduction. — J'ai abordé ce sujet à la fin du Mémoire que j'ai rédigé en collaboration avec M. Charles H. Rowe : *Tétraèdres inscrits dans une quadrique* Q *et circonscrits à une autre quadrique* Q_1 (*Annales de l'École Normale*, 1934, p. 153-198). J'y suis revenu, seul, au *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1935, p. 56-90 : *Tétraèdres inscrits dans une cubique gauche* (*ou une biquadratique*) *et circonscrits à une développable de classe* 3 (*ou* 4) *ou à une quadrique*. Ce dernier travail résout complètement le cas de la cubique gauche, mais, pour le cas de la biquadratique, donne, synthétiquement, des constructions *suffisantes*, sans montrer qu'elles sont effectivement *nécessaires* (comme nous le verrons dans ce nouveau travail). Je résous cette fois la question complètement, en reprenant des résultats du Mémoire Gambier-Rowe. *On trouve trois cas :*

1° *Quand le faisceau issu de $\mathcal{B}$ ne contient aucune quadrique coupant la quadrique Σ suivant quatre droites, il existe six tétraèdres inscrits dans $\mathcal{B}$, circonscrits à Σ.*

2° *Si ce faisceau contient une seule quadrique coupant Σ suivant quatre droites, il existe ∞^1 tétraèdres; leurs faces enveloppent l'une ou l'autre de deux développables de genre* 1 *et classe* 4, *correspondant chacune* (*plan pour point*) *birationnellement à $\mathcal{B}$; pour chacune de ces développables $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}'$, chaque point de $\mathcal{B}$ est sommet d'un seul tétraèdre; chaque plan tangent à $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}'$ est support d'un unique tétraèdre. La configuration* ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) *est de nature dualistique.* En réalité, les configurations ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) sont l'élément fondamental, plutôt que les configurations ($\mathcal{B}$, Σ).

3° *Si le faisceau issu de $\mathcal{B}$ contient deux quadriques coupant chacune Σ suivant quatre droites, chaque point de $\mathcal{B}$ est sommet de ∞^1 tétraèdres; en réalité, on trouve même ∞^2 couples de Möbius, inscrits dans $\mathcal{B}$, circonscrits à Σ, chaque plan tangent de Σ étant support de quatre tétraèdres.* Je dois dire que, dans le Mémoire Gambier-Rowe, ces couples étaient obtenus, mais que nous ne l'avions pas remarqué (j'ai étudié à nouveau cette question aux *Annales de l'École Normale : Couples de tétraèdres de Möbius*, 1939, p. 71-118).

Je dois signaler un principe important, qui m'a permis d'éviter des calculs pénibles d'identification et qui, au fond, revient au théorème de d'Alembert : *si une variété algébrique complexe et fermée* W_m *à m paramètres est contenue dans une variété* V_m *de même définition,* W_m *épuise complètement* V_m (*voir* paragraphes 5 et suivants) *ou, du moins, les éléments qui appartiennent à* V_m *sans être contenus dans* W_m *forment un ensemble à moins de m dimensions.*

2. Rappel de résultats antérieurs. — Dans le Mémoire Gambier-Rowe se trouvent plusieurs démonstrations, dues à M. Rowe, du résultat fondamental suivant, dû aussi à M. Rowe : *si les quadriques* Q, Σ *se coupent suivant quatre droites, il existe* ∞^5 *tétraèdres inscrits dans* Q, *circonscrits à* Σ. On prend *au hasard* un point A de Q, un plan tangent α de Σ : la conique (Q, α) est capable de ∞^1 triangles circonscrits à la conique, section par α, du cône de sommet A et circonscrit à Σ. On peut, aussi, choisir α *au hasard,* puis trois points B, C, D, *au hasard,* sur la conique (Q, α) : les plans tangents à Σ, autres que α, issus de CD, DB, BC se recoupent en un point A situé sur Q (je me contenterai de donner plus bas une preuve analytique de cette proposition).

Supposons maintenant Q, Σ *quelconques* et leurs équations ramenées à la forme canonique

$$(\mathrm{Q}) \qquad Ax^2+A'y^2+A''z^2+A'''t^2=0,$$

$$(\Sigma) \qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a'}+\frac{z^2}{a''}+\frac{t^2}{a'''}=0.$$

Les racines λ_i de l'équation en λ du faisceau *ponctuel* $Q-\lambda\Sigma=0$ sont Aa, $A'a'$, $A''a''$, $A'''a'''$ (si deux de ces nombres sont égaux, les deux autres étant égaux aussi, Q, Σ se coupent suivant quatre droites : ce cas est écarté). Il existe ∞^4 tétraèdres inscrits dans Q, circonscrits à Σ : on choisit *au hasard* un point $A(x_0, y_0, z_0, t_0)$ de Q; *le plan* α *de la face* BCD *doit contenir le point* $A_1(Hx_0, Ky_0, Lz_0, Mt_0)$ avec

$$(1) \qquad \begin{aligned} H &= (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)^2-4(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_4+\lambda_4\lambda_2)-4\lambda_1^2 \\ &= (\lambda_2-\lambda_3)^2+(\lambda_3-\lambda_4)^2+(\lambda_4-\lambda_2)^2-(\lambda_1-\lambda_2)^2-(\lambda_1-\lambda_3)^2-(\lambda_1-\lambda_4)^2 \end{aligned}$$

(et formules semblables pour K, L, M). Le cône de sommet A et base (Q, α) est, sous cette condition, capable de ∞^1 trièdres dont les faces touchent Σ. On a la relation $H+K+L+M=0$; *les quatre nombres* H, K, L, M *s'annulent tous si* Q, Σ *ont quatre droites communes et seulement dans ce cas; le plan* α *n'est alors soumis à aucune autre condition que toucher* Σ *et c'est ce qui explique l'apparition du cinquième paramètre.*

La correspondance (A, A_1) joue un rôle fondamental pour notre problème, et c'est pour ne pas l'avoir assez employée que mes Mémoires précédents n'avaient pu donner une conclusion suffisamment précise. *Cette correspondance* (A, A_1) *est une homographie ayant pour points doubles chaque sommet du tétraèdre* Θ *conjugué commun à* Q *et* Σ; *il ne peut exister d'autre point double que si cette homographie devient l'involution biaxiale relative à l'un ou l'autre des trois couples d'arêtes opposées de* Θ : s'il s'agit du couple $(x=y=0)$, $(z=t=0)$, le cas de l'involution est obtenu pour la relation, *nécessaire et suffisante*,

$$Aa + A'a' = A''a'' + A'''a'''. \tag{2}$$

Le point A_1 est l'homologue de A dans cette involution; ABCD étant inscrit dans Q, circonscrit à Σ, le tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ possède les mêmes propriétés et est en *position de Möbius* avec ABCD (cette dernière remarque, pourtant bien simple, nous avait échappé dans le Mémoire Gambier-Rowe); *réciproquement, il ne peut exister de couples de Möbius que si cette relation* (2), *ou l'une des analogues, est vérifiée, et alors il existe* ∞^4 *couples de Möbius*. Dans ce cas de Möbius, il est commode de se borner à la réduction moins précise

$$\left\{\begin{array}{l} Q \equiv (Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy) + (A''z^2 + A'''t^2 + 2C''zt) \\ \Sigma \equiv (au^2 + a'v^2 + 2b''uv) + (a''w^2 + a'''r^2 + 2c''wr) \end{array}\right. \tag{3}$$

qui met en évidence le couple $(x=y=0)$, $(z=t=0)$ de deux droites conjuguées simultanément par rapport à Q et Σ; la relation (2) est remplacée par

$$Aa + A'a' + 2B''b'' = A''a'' + A'''a''' + 2C''c''. \tag{2'}$$

Quand (Q, Σ) ne sont pas rapportées à leur tétraèdre conjugué commun (c'est ce qui arrive nécessairement si l'on associe une biquadratique $\mathcal{B}$ et une quadrique Σ, le tétraèdre Θ conjugué par rapport aux quadriques issues de $\mathcal{B}$ n'étant pas supposé conjugué par rapport à Σ), les coordonnées de A_1 s'expriment linéairement au moyen de celles de A; les coefficients de l'homographie (A, A_1) sont homogènes et du second degré par rapport aux coefficients ponctuels de Q, homogènes et du second degré par rapport aux coefficients tangentiels de Σ; si donc la biquadratique $\mathcal{B}$ est définie par deux quadriques Q, Q_1 et si A est un point arbitraire de $\mathcal{B}$, *la quadrique* $Q + hQ_1$ *donne pour homologue du point* A (*quand on cherche un tétraèdre inscrit dans* $Q + hQ_1$, *circonscrit à* Σ), *un point* A_1^h *dont le lieu, pour* A *fixe et* h *variable, est une conique* C_A : le cas important pour nous est précisément *celui où* C_A *se réduit, quel que soit* A *sur* $\mathcal{B}$, *à une droite* Δ_A *ou même à un unique point* A_1.

Si C_A *est une conique effective, on obtient six tétraèdres*; *si* C_A *est une droite* Δ_A, *on a* ∞^1 *tétraèdres*; *si* C_A *est un point* A_1, *on a* ∞^2 *tétraèdres*. En effet, *si* C_A *est une conique*, on écrit que le plan de C_A est tangent à Σ et l'on obtient une équation de degré 6 par rapport aux coordonnées de A, d'où 24 positions possibles pour A et, par suite, six tétraèdres (nous verrons qu'il ne peut jamais exister ∞^1 tétraèdres dans ce cas). Si C_λ *se réduit à une droite* Δ_λ, on mène, par Δ_λ, l'un ou l'autre des plans tangents α ou α' à Σ (si Δ_λ n'est pas tangente à Σ, α et α' sont distincts; si Δ_λ est tangente à Σ, α et α' se confondent) et alors chaque point A de $\mathcal{B}$ donne deux tétraèdres (ou un seul comptant pour deux confondus); le fait, un peu imprévu, que nous verrons plus bas, est que les plans α et α' se séparent *rationnellement*, de sorte que chacun enveloppe une développable $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}'$ de classe 4 et genre 1 et que *la configuration* ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) *est de nature dualistique*. Si C_λ *est un point* A_1, on est dans le cas des *tétraèdres de Möbius*, formant une série ∞^2.

Pour bien établir ces résultats, il est nécessaire de prouver que, si le plan α touche Σ et contient le lieu C_λ tout entier (conique, droite ou point), trois des points *convenablement choisis*, B, C, D, communs à $\mathcal{B}$ et α, donnent, avec A, un tétraèdre T circonscrit à Σ. En effet, les coniques $(Q+hQ_1, \alpha)$ forment un faisceau ponctuel dont *chacune est capable de* ∞^1 *triangles circonscrits à la conique* σ *suivant laquelle* α *coupe le cône circonscrit de* A *à* Σ; on sait que, si l'une des tangentes à σ coupe $(Q+hQ_1, \alpha)$ en deux points c, d, les nouvelles tangentes à σ, autres que cd, issues de c et d se coupent en un point b encore situé sur $(Q+hQ_1, \alpha)$. Or, il existe trois valeurs de h, soient h', h'', h''', telles que $(Q+hQ_1, \alpha)$ dégénère en deux droites; l'une de ces deux droites (à l'exclusion de l'autre) est *tangente* à σ, en vertu de l'hypothèse relative à σ et aux coniques du faisceau $(Q+hQ_1, \alpha)$; il en résulte que les deux droites $(Q+h'Q_1, \alpha)$ se séparent *rationnellement*, une fois h' calculée; appelons CD celle qui est tangente à σ : elle perce $(Q+hQ_1, \alpha)$ en deux points C, D *indépendants de h*, points bases du faisceau; mais alors le point B, où se recoupent les tangentes autres que CD, menées à σ de C et D, est *indépendant de h* et situé, quel que soit h, sur $(Q+hQ_1, \alpha)$; donc B est, lui aussi, point de base du faisceau et le triangle BCD est inscrit dans toutes les coniques du faisceau $(Q+hQ_1, \alpha)$ et circonscrit à σ; on remarque que les coordonnées du point B sont obtenues *rationnellement* au moyen de h'; or, la seconde droite BE en laquelle se décompose $(Q+h'Q_1, \alpha)$ est obtenue rationnellement en h', donc aussi les coordonnées de E; mais le même raisonnement est valable pour h'', h''' de sorte qu'en réalité les coordonnées de E s'expriment *rationnellement* au moyen des coefficients qui définissent Q, Q_1, α, σ, *donc au moyen des coefficients de* Q, Q_1, Σ *et des coordonnées de* A (sans avoir besoin de calculer h', h'', h''').

3. Détermination des tétraèdres quand C_λ est une conique. — Il est commode de prendre, pour tétraèdre de référence, le tétraèdre Θ conjugué commun aux quadriques issues de $\mathcal{B}$. J'écris

$$Q \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + A'''t^2, \qquad Q_1 \equiv A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_1z^2 + A'''_1t^2,$$
$$\Sigma \equiv au^2 + a'v^2 + a''w^2 + a'''r^2$$
$$+ 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr.$$

Les coordonnées du point A_1^h sont

$$(A_1^h) \qquad p+qh+rh^2, \quad p'+q'h+r'h^2, \quad p''+q''h+r''h^2, \quad p'''+q'''h+r'''h^2,$$

où $p, q, \ldots, r'''$ sont des polynomes homogènes du premier degré par rapport aux coordonnées (x_0, y_0, z_0, t_0) de A. Le plan de C_A a pour équation

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} x & p & q & r \\ y & p' & q' & r' \\ z & p'' & q'' & r'' \\ t & p''' & q''' & r''' \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients (u, v, w, r) de ce plan sont homogènes et de degré 3 en (x_0, y_0, z_0, t_0); en exprimant que ce plan touche Σ, nous obtenons une équation de degré 6 à adjoindre aux équations de $\mathcal{B}$; *nous avons ainsi* 24 *points* A, *donc six tétraèdres.*

Il est utile de vérifier sur un exemple précis, de façon à être bien sûr qu'il n'y a pas de solutions étrangères et que l'équation ne se réduit pas systématiquement à une équation de degré inférieur ou à une identité. Il suffit de prendre le cas où Σ admet elle aussi Θ pour tétraèdre conjugué, ce qui permet, sans restreindre, d'écrire

$$\Sigma \equiv u^2+v^2+w^2+r^2 = 0.$$

Les coordonnées de A_1^h étant $(H_h x_0, K_h y_0, L_h z_0, M_h z_0)$ avec

$$H_h + K_h + L_h + M_h = 0,$$

le plan de C_A a pour équation

$$\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}+\frac{t}{t_0}=0$$

et enveloppe, quand A décrit $\mathcal{B}$, une développable de classe 12; nous avons donc à résoudre un système

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^2 = mz^2+nt^2, \qquad y^2 = m'z^2+n't^2, \\ \dfrac{1}{mz^2+nt^2}+\dfrac{1}{m'z^2+n't^2}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{t^2}=0, \end{array} \right.$$

où, pour simplifier, nous avons défini $\mathcal{B}$ par deux des cônes qui la contiennent et supprimé les indices zéro. Nous sommes ainsi amenés à résoudre une équation de degré 3 en $\left(\dfrac{z^2}{t^2}\right)$: elle est générale de son degré (elle dépend de quatre paramètres m, n, m', n'; l'équation générale de degré 3 dépend de trois paramètres seulement, de sorte que m, n, m', n' forment un groupe surabondant au point de vue d'une équation de degré 3); à chacune des six valeurs de $\frac{z}{t}$ correspondent deux valeurs de $\frac{x}{t}$, deux valeurs de $\frac{y}{t}$, de sorte que nous avons bien 24 solutions; à chaque racine de l'équation en $\left(\frac{z^2}{t^2}\right)$ correspondent deux tétraèdres dont les sommets sont

$$\begin{array}{cccc}
x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\
x_0 & -y_0 & -z_0 & t_0 \\
-x_0 & y_0 & -z_0 & t_0 \\
-x_0 & -y_0 & z_0 & t_0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
-x_0 & -y_0 & -z_0 & t_0 \\
-x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\
x_0 & -y_0 & z_0 & t_0 \\
x_0 & y_0 & -z_0 & t_0
\end{array}$$

Pour les huit faces des deux tétraèdres qui viennent d'être indiqués, les coefficients (u^2, v^2, w^2, r^2) ont la même valeur : *il y a donc une développable de classe 4 et genre 1 inscrite dans les 16 faces des quatre tétraèdres correspondant à l'ensemble de deux racines différentes de l'équation en $\left(\frac{z}{t}\right)^2$, mais il n'existe qu'une quadrique, à savoir Σ, tangente aux 24 faces des six tétraèdres;* en effet, s'il existait deux quadriques, on aurait deux équations

$$u^2 = \mathrm{M}w^2 + \mathrm{N}r^2, \qquad v^2 = -(\mathrm{M}+1)w^2 - (\mathrm{N}+1)r^2$$

vérifiées par ces 24 faces; on en déduirait deux équations de degré 2 en $\left(\frac{z^2}{t^2}\right)$, vérifiées chacune par les trois racines de (5), à savoir :

$$(6) \qquad \frac{1}{mz_0^2 + nt_0^2} = \frac{\mathrm{M}}{z_0^2} + \frac{\mathrm{N}}{t_0^2}, \qquad \frac{1}{m'z_0^2 + n't_0^2} = \frac{-(\mathrm{M}+1)}{z_0^2} - \frac{(\mathrm{N}+1)}{t_0^2}$$

ce qui est impossible.

L'équation (5) n'est jamais identique : donc, dans ce cas *particulier* où Θ est conjugué aussi par rapport à Σ, le plan de $\mathrm{C_A}$ n'est jamais systématiquement tangent à Σ : nous verrons, aux paragraphes suivants, que, *dans le cas général où $\mathrm{C_A}$ est une conique effective, on ne peut obtenir ∞^1 tétraèdres;* nous n'avons pas encore à notre disposition les moyens de prouver cette importante proposition (à savoir que le cas de ∞^1 tétraèdres correspond *seulement* au cas où $\mathrm{C_A}$ dégénère en une droite $\mathrm{A_A}$).

La seule particularité que puisse présenter l'équation (5) est d'avoir une racine double ou triple, mais nous n'étudierons pas ces cas.

4. Conditions relatives a ∞^1 tétraèdres. — Développons *synthétiquement* quelques résultats. *Supposons qu'il existe ∞^1 tétraèdres inscrits dans $\mathcal{B}$, circonscrits à Σ et que la donnée de* A *sur $\mathcal{B}$ détermine rationnellement, en fonction des coordonnées de* A, *les coordonnées du plan* BCD *ou* α.

Le paragraphe **2** a prouvé que le nouveau point E, commun à $\mathcal{B}$ et α, se détermine *rationnellement* au moyen des coordonnées de α, donc de A; nous pouvons supposer, sans restreindre, que $\mathcal{B}$ est la courbe $(snu, cnu, dnu, 1)$; suivant les notations de Legendre-Jacobi, nous appelons $4\mathrm{K}$, $4i\mathrm{K}'$ les périodes communes simultanément à snu, cnu, dnu; si u_1, u_2, u_3, u_4 sont les arguments de A, B, C, D, celui de E est $mu_1 - 2a$, où m est un entier positif ou négatif, et a une constante (¹); B, C, D, E étant coplanaires, on a

$$u_2 + u_3 + u_4 + (mu_1 - 2a) = 0;$$

or la relation entre u_1, u_2, u_3, u_4 doit être *symétrique*, donc m est égal à 1 et la correspondance (A, E) est *birationnelle* sur $\mathcal{B}$. Par suite *les faces des tétraèdres* ABCD *enveloppent une développable $\mathcal{D}$ de classe 4 et genre* 1 : en effet, un point de $\mathcal{B}$, à titre de point A, donne un unique plan α, donc trois faces ACD, ADB, ABC; à titre de point E (d'argument v), il fournit un unique point A (d'argument $v + 2a$) et par suite un unique plan BCDE ; donc, *par chaque point de $\mathcal{B}$ passent quatre plans, dont l'un se sépare rationnellement des trois autres* (*de même que tout plan α tangent à $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{B}$ en quatre points dont l'un se sépare rationnellement des trois autres*); *$\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ sont de même genre*, car les coordonnées de A et α se correspondent birationnellement. *Si* $2a$ *n'est pas égale à une demi-période* $2K$, $2iK'$ *ou* $2(K + iK')$, *deux tétraèdres distincts* ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ *fournissent huit sommets déterminant une seule biquadratique $\mathcal{B}$, huit faces déterminant une seule développable $\mathcal{D}$ de classe 4 et genre* 1. (Rappelons cette propriété utile pour la suite que, *si deux tétraèdres ont pour sommets huit points bases de ∞^2 quadriques, il y a ∞^2 biquadratiques passant aux huit sommets, ∞^2 quadriques et ∞^2 développables de classe 4 tangentes aux huit faces, et qu'il existe une quadrique conjuguée par rapport à chacun des deux tétraèdres : chacune de ces propriétés entraîne les autres.*)

Donc que $2a$ soit ou ne soit pas demi-période, on peut trouver deux expressions

$$f_1(u) \equiv \alpha_1 \operatorname{sn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \alpha_2 \operatorname{cn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \alpha_3 \operatorname{dn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \alpha_4$$

$$f_2(u) \equiv \beta_1 \operatorname{sn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \beta_2 \operatorname{cn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \beta_3 \operatorname{dn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \beta_4$$

définies chacune à un facteur de proportionnalité près, s'annulant l'une en A, B, C, D, l'autre en A_1, B_1, C_1, D_1 ; mais alors l'expression,

$$\lambda_1 f_1(u) + \lambda_2 f_2(u) = 0 \tag{7}$$

où $\lambda_1 : \lambda_2$ est un paramètre variable, définit sur $\mathcal{B}$ ∞^1 quadruples et les mêmes raisonnements que précédemment prouvent que les faces de ces tétraèdres enveloppent une développable de classe 4 et genre 1 : cette développable est tangente aux faces de ABCD ($\lambda_2 = 0$), aux faces de $A_1B_1C_1D_1$ ($\lambda_1 = 0$), *donc elle coïncide avec $\mathcal{D}$ si la quantité* $2a$ *n'est pas demi-période.*

(¹) Certaines raisons d'opportunité, au paragraphe **6**, font adopter la notation $(2a)$, qui pourrait paraître moins naturelle que (a).

La quantité $(2a)$ est déterminée à une période près $4mK + 4niK'$; dans certaines questions, il se trouve que la moitié de $(2a)$, qui a quatre déterminations quand $(2a)$ est fixée, joue un rôle important et c'est ce qui a finalement déterminé le choix de la notation $(2a)$.

Par suite, si nous écrivons l'équation (7), nous définissons ∞^1 tétraèdres qui satisfont aux conditions posées au début de ce paragraphe, car il suffit d'inscrire dans la développable de classe 4, enveloppe des faces, une quadrique Σ [et cette conclusion est vraie même si $2a$ est une demi-période; bien que ABCD et $A_1B_1C_1D_1$ ne définissent plus par leurs huit faces une seule développable, l'équation (7) continue à définir *une seule* développable de classe 4; *le cas où $2a$ est demi-période sera d'ailleurs étudié à part*; il est bon de rappeler que *les points u et $u+2K$ se correspondent dans l'involution biaxiale relative à un couple d'arêtes opposées de Θ*; *u et $u+2iK'$ se rapportent à un autre couple; u et $u+2(K+iK')$ au dernier couple; la relation $u_1+u_2+u_3+u_4=2K$ exprime que le plan BCD recoupe $\mathcal{B}$ au point E, distinct de B, C, D, homologue de A dans l'involution relative à u et $u+2K$*].

La construction que nous avons ainsi donnée synthétiquement fait intervenir pour $(\mathcal{B}, \Sigma)$ un total de 22 paramètres : 16 pour $\mathcal{B}$, 4 pour la droite δ

$$\delta\begin{cases}\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z+\alpha_4=0\\ \beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z+\beta_4=0\end{cases}$$

1 pour la constante a, 1 pour le choix de Σ parmi les quadriques inscrites dans $\mathcal{B}$. *On peut dire que l'on mène par δ un plan arbitraire qui coupe $\mathcal{B}$ en quatre points $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ d'arguments $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{u_3}$, $\overline{u_4}$ et l'on prend les points $\overline{u_1}+\frac{a}{2}$, $\overline{u_2}+\frac{a}{2}$, $\overline{u_3}+\frac{a}{2}$, $\overline{u_4}+\frac{a}{2}$ comme points* A, B, C, D. Comme $2a$ est définie à une expression additive près $4mK+4m'iK'$ (m, m' entiers arbitraires), $\frac{a}{2}$ est définie à $mK+m'iK'$ près, de sorte qu'*il y a 16 façons différentes d'obtenir la droite δ pour une même série de ∞^1 tétraèdres*. Cette question a un rapport étroit avec les transformations *homographiques* (et non simplement *birationnelles*) de $\mathcal{B}$ en elle-même : la correspondance $(u, u+mK+m'iK')$ fournit en effet une transformation homographique (non involutive, sauf si m et m' sont pairs) de $\mathcal{B}$ en elle-même [la correspondance $(u, -u+mK+m'iK')$ fournit des transformations *homographiques involutives* que nous retrouverons plus loin].

Il s'agit maintenant de prouver que, *seul*, *le cas où C_A se réduit systématiquement à une droite Δ_A conduit à l'hypothèse étudiée à priori dans ce paragraphe :* nous y arriverons en montrant que, contrairement à la première apparence, les deux plans tangents à Σ menés par Δ_A se séparent *rationnellement*.

5. Étude du cas où Σ coupe suivant quatre droites une quadrique du faisceau $\mathcal{B}$. — Le lieu du point A_1^h

$$(A_1^h)\qquad p+qh+rh^2,\quad p'+q'h+r'h^2,\quad p''+q''h+r''h^2,\quad p'''+q'''h+r'''h^2$$

ne se réduit à une droite que dans deux cas : soit si les quatre trinomes en h ont une racine commune, soit si tout point du lieu est obtenu pour deux valeurs de h; *cette dernière hypothèse conduirait, en réalité, au cas où* C_A *se réduit à un point : nous le montrerons en fin de ce travail.* Nous nous bornons donc pour le moment *au cas où les quatre trinomes ont une racine commune* h_0; le correspondant du point *particulier* A étudié, quand $Q + h_0 Q_1 = 0$ est associée à Σ, est indéterminé et cela ne se produit, d'après les résultats rappelés au paragraphe **2**, que si $Q + h_0 Q_1 = 0$ coupe Σ suivant quatre droites; et de plus, cela prouve que, A *variant* sur $\mathcal{B}$, les quatre trinomes ont toujours h_0 pour racine commune, résultat important, car on aurait pu s'attendre au cas où C_A ne se réduirait à une droite que pour des positions spéciales de A, ou au cas où, C_A étant réduite à une droite quel que soit A, la valeur h_0 dépendrait de A. *La réciproque est immédiate* : si $Q + h_0 Q_1 = 0$ coupe Σ suivant quatre droites, faisons un changement de notations de façon qu'elle devienne la quadrique $Q_1 = 0$; on a alors $r = r' = r'' = r''' = 0$ et le lieu de A_1^h est une droite Δ_A. De Δ_A sont issus deux plans tangents à Σ, soient α et α'; A *se déplaçant sur* $\mathcal{B}$ *et suivi par continuité en même temps que* α, *chaque couple* (A, α) *fournit un unique tétraèdre* ABCD *inscrit dans* $\mathcal{B}$ *et circonscrit à* Σ; *il en est de même de chaque couple* (A, α').

Cherchons le nombre de paramètres mis en jeu; on peut donner d'abord $\mathcal{B}$ (16 paramètres), une quadrique Q_1 déterminée, issue de $\mathcal{B}$ (1 paramètre), un quadrilatère gauche sur Q_1 (4 paramètres), puis une quadrique Σ contenant ce quadrilatère (1 paramètre) : on a $16 + 1 + 4 + 1$ ou 22 paramètres. *Le total* 22 *coïncide avec celui du paragraphe précédent* : la construction synthétique du paragraphe précédent fournit une configuration ($\mathcal{B}$, Σ) engendrant une variété V_{22}; la configuration ($\mathcal{B}$, Σ) de ce paragraphe engendre une variété W_{22} à 22 paramètres aussi.

Une circonstance assez imprévue se présente : les deux plans α, α' sont obtenus au moyen d'une équation du second degré; l'irrationnelle qui s'introduit en résolvant cette équation est, comme l'on sait, la même que si l'on cherchait les points où Δ_A coupe Σ; nous devons prouver que *la quantité sous le radical ne dépend que des coefficients de* Q, Q_1, Σ *mais non des coordonnées de* A, *de sorte que les deux plans* α, α' *se séparent rationnellement* (¹). En effet, il est commode d'écrire ici

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{ll} Q_1 \equiv x^2 + y^2 + m(z^2 + t^2), & \Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \\ Q \equiv Ax^2 + A'y^2 + \ldots + 2C''zt. & \end{array}\right.$$

Les points où Δ_A coupe Σ s'obtiennent en résolvant l'équation

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} p^2 + p'^2 + p''^2 + p'''^2 + 2h(pq + p'q' + p''q'' + p'''q''') \\ \qquad + h^2(q^2 + q'^2 + q''^2 + q'''^2) \qquad = 0. \end{array}\right.$$

(¹) La séparation n'est pas rationnelle par rapport aux coefficients *numériques littéraux* qui entrent dans Q, Q_1, Σ, mais l'irrationnelle ne contient pas les coordonnées de A et c'est la seule chose qui importe.

Les coefficients de cette équation sont du second degré en x_0, y_0, z_0, t_0 : nous allons prouver qu'ils se réduisent, à un facteur numérique près, à $x_0^2+y_0^2+z_0^2+t_0^2$, de sorte que l'équation (9) prend la forme

$$(9') \qquad (x_0^2+y_0^2+z_0^2+t_0^2)(\alpha+2h\beta+h^2\gamma)=0,$$

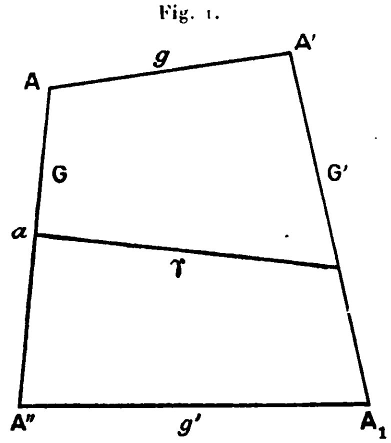
où α, β, γ sont indépendants de x_0, y_0, z_0, t_0 et sont certaines fonctions des coefficients m, A, ..., C″ qui figurent dans les équations (8). (Bien entendu, on pourrait remplacer le groupe $x_0^2+y_0^2+z_0^2+t_0^2$ soit par $x_0^2+y_0^2$, soit par $z_0^2+t_0^2$ ou encore par $x_0^2+y_0^2+\lambda(z_0^2+t_0^2)$, mais cela n'a qu'une importance minime). Il suffit de prouver que *la droite Δ_A correspondant à l'un des points où $\mathcal{B}$ rencontre Σ est une génératrice de Σ*; admettons ce résultat un instant : pour un tel point A, on aura donc

$$p^2+p'^2+p''^2+p'''^2=0, \qquad pq+p'q'+p''q''+p'''q'''=0, \qquad q^2+q'^2+q''^2+q'''^2=0.$$

Ces trois équations, si l'on y regarde x_0, y_0, z_0, t_0 comme des variables, représentent des quadriques qui contiennent donc les points communs à Q, Q_1, Σ; les premiers membres de leurs équations se ramènent donc à la forme $p^2+p'^2+p''^2+p'''^2 \equiv \alpha\Sigma+\alpha_1 Q+\alpha_2 Q_1$ et résultat semblable pour $pq+\ldots$ ou $q^2+\ldots$; α, α_1, α_2 sont certaines constantes; pour un point situé sur $\mathcal{B}$, $p^2+p'^2+p''^2+p'''^2$ peut être réduit à $\alpha\Sigma$ et notre résultat, pour la forme (9′), est obtenu.

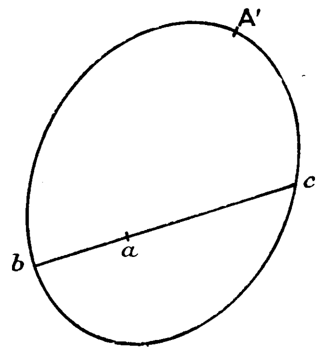
Il reste à établir le résultat signalé pour les points communs à $\mathcal{B}$ et Σ. Soient deux quadriques Q, Σ quelconques et un point A de Q *situé sur* Σ; le point A_1 correspondant à A s'obtient ainsi : de A sont issues sur Σ deux génératrices g, G et elles recoupent Q en A′, A″ (*fig.* 1); les nouvelles généra-

Fig. 1.



trices G′, g' issues sur Σ de A′ et A″ se recoupent au point A_1 cherché; en effet, puisque ce point A_1 est sur Σ, les plans tangents à Σ, issues de A_1, sont ceux qui pivotent, soit autour de G′, soit autour de g'; prenons un plan α passant par G′; la conique (Q, α) passe en A′; le cône S, circonscrit de A à Σ, dégénère, *tangentiellement*, en g et G, de sorte que la conique (S, α) dégénère en deux points (A′, a); mais alors, la conique (Q, α), (*fig.* 2), est capable de ∞^1 triangles A′bc circonscrits à la conique dégénérée (A′, a), bc étant une corde quelconque de (Q, α) menée par a. Cela posé, revenons *au cas des deux quadriques* Q_1, Σ *ayant quatre droites communes*, dont l'une est appelée g; la courbe $\mathcal{B}$ est tracée sur Q_1 et coupe g en A, A′ (de sorte qu'avec ces notations nous pouvons employer la figure 1); si h varie, la construction du point A_1^h emploie la génératrice *fixe* G′ de Σ et la génératrice g' *mobile avec h* (exceptionnellement fixe elle aussi); donc le lieu de A_1^h est la génératrice G′ de Σ et le résultat est établi [1].

Fig. 2.



[Il convient de faire constater que, pour ce cas de dégénérescence de la configuration de coniques étudiée en fin du paragraphe **2**, le faisceau de coniques ($Q + hQ_1$, α) ne contient plus un triangle formé par trois points de base de ce faisceau et circonscrit à la conique dégénérée (A′, a); l'un des points de base est A′ et cette condition suffit pour que *chaque* conique du faisceau soit capable de ∞^1 triangles circonscrits à la conique dégénérée (A′, a), mais rien n'oblige deux des trois autres points de base à se trouver alignés avec a; mais deux plans *spéciaux*, issus de G′, donnent ce résultat, de sorte que G′ fournit, tout comme une droite Δ relative à un point quelconque de $\mathcal{B}$, deux plans (mais non une infinité), supportant la base d'un tétraèdre de l'espèce étudiée; le problème revient en effet, pour ce cas spécial, à mener par G′

---

(1) Si A_1^h est fixe, il vérifie l'équation de Σ, de sorte que le premier membre de (9) est un trinome du second degré en h, *nul quel que soit* h, de sorte que Σp^2, Σpq, Σq^2 sont encore nuls pour le point A et c'est le seul résultat indispensable pour nous. Pour réaliser ce cas, on prendrait une quadrique Q_1 arbitraire, un quadrilatère gauche arbitraire sur Q_1 et une courbe $\mathcal{B}$ également arbitraire sur Q_1; si g et g' désignent deux côtés opposés de ce quadrilatère, A étant un point commun à g et $\mathcal{B}$, A″ un point commun à g' et $\mathcal{B}$, la quadrique Σ sera déterminée par le quadrilatère gauche et la droite AA″. D'ailleurs ce cas conduirait aux couples de Möbius.

un plan tel que le point a où il coupe G soit en ligne droite avec deux des points B, C (autres que A′) où il coupe $\mathcal{B}$; le tétraèdre AA′BC répond alors aux conditions, car les deux faces AA′B, AA′C contiennent g; la face ABC contient G et la face A′BC contient G′.]

Mais alors, en revenant au point A général de $\mathcal{B}$, on construit la droite Δ_A : *les deux plans* α, α' *tangents à* Σ, *issus de* Δ_A, *se séparent rationnellement, chacun correspondant rationnellement à* A ; dans le plan α, les points B, C, D, E se séparent, comme il a été dit, de façon à obtenir un *seul* tétraèdre ABCD, et nous sommes dans les conditions énoncées au début du paragraphe précédent; l'ensemble des ∞^1 tétraèdres de cette série (A, α) se trouve donc représenté par l'équation (7) : les couples ($\mathcal{B}$, Σ) étudiés ici forment donc une variété W_{22}, qui est à 22 paramètres, et qui, de plus, se trouve incluse dans la variété V_{22}, à 22 paramètres aussi, construite synthétiquement au paragraphe précédent; V_{22} est indécomposable, W_{22} aussi; *donc* W_{22}, *qui est contenue dans* V_{22}, *épuise* V_{22} ; *autrement dit, le cas de* ∞^1 *tétraèdres s'obtient exclusivement en supposant que le lieu* C_A *est une droite, c'est-à-dire que* Σ *coupe suivant quatre droites une quadrique (et une seule) du faisceau* Q, Q_1. *Le cas où* C_A *est une conique effective ne peut donc donner que six tétraèdres, mais jamais* ∞^1. Ce dernier résultat avait été annoncé au paragraphe 3, mais nous n'avions pas encore les moyens de le démontrer ([1]). (A l'extrême rigueur il pourrait exister certaines configurations appartenant à V_{22}, mais non à W_{22} : elles dépendraient de moins de 22 paramètres et seraient des dégénérescences de types fournis par W_{22}.)

Il n'est pas sans intérêt philosophique d'insister sur le genre de raisonnement employé : nous avons considéré comme presque évident que, si une variété V_m, à m dimensions, définie par des opérations *algébriques* portant sur m arbitraires *complexes*, est *indécomposable* et contient une variété W_m à m dimensions aussi, cette variété W_m coïncide nécessairement avec V_m. On peut dire que cette proposition revient au célèbre théorème de d'Alembert; en effet, il s'agit de montrer que tout élément de V_m est élément de W_m ; en identifiant un élément *arbitraire* donné, v de V_m, avec un élément inconnu w de W_m, on obtient un système d'équations algébriques où les inconnues sont en même nombre que les équations; l'élimination de toutes les inconnues, sauf une, est *toujours* possible (du moins si v est l'élément *général* de V_m), car si cela n'avait pas lieu, il faudrait que l'élément v, pour être w, satisfasse à un certain nombre

([1]) Sans le principe qui vient d'être utilisé, nous aurions eu à faire les calculs suivants : en exprimant que le plan de C_A touche Σ, on obtient une équation homogène, de degré 6 en (x_0, y_0, z_0, t_0), représentant une surface (s) de degré 6; il aurait fallu exprimer que (s) contient $\mathcal{B}$ tout entière; au bout de calculs inextricables, nous eussions reconnu que cette surface (s) peut effectivement contenir $\mathcal{B}$, mais alors une discussion plus approfondie aurait montré que le plan de C_A est *indéterminé*, c'est-à-dire que C_A se réduit à une droite ou à un point.

de conditions, de sorte que *tout* v, qui est un w, dépendrait de moins de m arbitraires, ce qui est contraire à l'hypothèse, puisque *n'importe quel* w (à m paramètres) est un v particulier (à m paramètres). La démonstration n'exclut pas la possibilité pour certains éléments *non généraux* de V_m de ne pas appartenir à W_m. Il reste donc une équation unique à une inconnue et cette équation a des solutions, d'après d'Alembert. Nous voyons ainsi pourquoi *nous devons nous borner aux domaines à la fois algébriques et complexes.* D'autre part, la notion à préciser est celle de variété *indécomposable* : l'ensemble des courbes gauches de degré 4 forme une variété *décomposable* à 16 *paramètres,* somme de la variété formée par les biquadratiques et de la variété formée par les courbes gauches unicursales de degré 4, et chacune de ces deux variétés séparées est *indécomposable*; cet exemple simple suffit pour préciser cette notion de *non-décomposition.* Il y a d'autre part une raison profonde qui montre bien l'identité de la proposition étudiée ici avec le théorème de d'Alembert; si l'on écrit le polynome $z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m$, on voit qu'il est représenté par le point $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ qui décrit un espace complexe V_m à m dimensions; le polynome à m racines $(z + a_1)(z + a_2)\ldots(z + a_m)$ est, d'autre part, parfaitement représenté par le point $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$; si l'on pose

$$S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_m, \qquad S_2 = a_1 a_2 + \ldots, \qquad \ldots, \qquad S_m = a_1 a_2 \ldots a_m,$$

on obtient un point $(S_1, S_2 \ldots, S_m)$ qui décrit un espace W_m à m dimensions : la proposition de d'Alembert revient précisément à montrer que l'espace W_m remplit tout V_m et, par suite, c'est bien la même question qui se pose : *prouver qu'une variété algébrique* W_m, *à m dimensions, contenue dans une variété algébrique* V_m *indécomposable à m dimensions, remplit* V_m *complètement, étant bien entendu qu'il s'agit de variétés complexes.* On remarquera aussi qu'il peut être utile de spécifier si les variétés sont *ouvertes* ou *fermées;* par exemple le plan complexe, formé de la réunion des points réels ou imaginaires (x, y) à *distance finie*, forme une variété W_2 *ouverte* qui n'épuise pas complètement le même plan auquel on adjoint la droite de l'infini, c'est-à-dire la variété définie par trois coordonnées *homogènes* (réelles ou complexes) (X, Y, Z) où Z peut s'annuler; cette dernière variété V_2 est *fermée;* W_2 est contenue dans V_2 sans l'épuiser. Donc, il est nécessaire de spécifier qu'il s'agit de variétés toutes deux de même nature (ouvertes ou fermées); dans l'énoncé du théorème de d'Alembert, du moins sous la forme rappelée plus haut, il s'agit de deux variétés *ouvertes.* Pour les applications géométriques que nous faisons du principe en jeu, nous pouvons nous borner à des variétés *ouvertes* et du moment qu'il s'agit de deux variétés, toutes deux ouvertes, formées d'éléments dont les coordonnées sont *finies*, *sans autre restriction*, l'application du principe ne soulève plus aucune difficulté. La portée de ce principe dépasse de beaucoup le problème traité dans ce Mémoire et nous renvoyons le lecteur à une note additive.

Revenons maintenant *à la configuration* ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) *à* 21 *paramètres qui, au fond, est l'élément fondamental, plutôt que la configuration* ($\mathcal{B}$, Σ) *à* 22 *paramètres; cette configuration est de nature dualistique* [1] et nous l'avons obtenue par l'équation

$$\lambda_1\left[\alpha_1 \operatorname{sn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_2 \operatorname{cn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_3 \operatorname{dn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_4\right]$$
$$+\lambda_2\left[\beta_1 \operatorname{sn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\beta_2 \operatorname{cn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\beta_3 \operatorname{dn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\beta_4\right]=0$$

où $\lambda_1 : \lambda_2$ varie, tandis que les α_i et β_i et a sont des constantes; $\mathcal{B}$ est le lieu du point ($\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$) et $\mathcal{D}$ l'enveloppe du plan contenant trois des quatre points déterminés par l'équation qui précède. Il y a un fait que cette génération synthétique ne met pas en évidence, c'est *la génération de* ∞^1 *développables* $\mathcal{D}'$ *correspondant chacune birationnellement, plan pour plan, à* $\mathcal{D}$. Il suffit, en effet, de choisir l'une *quelconque* des ∞^1 quadriques Σ inscrites dans $\mathcal{D}$; $\mathcal{B}$ et Σ admettent ∞^1 tétraèdres, donc le lieu C_A est une droite Δ_A; les deux plans tangents à Σ, issus de Δ_A, sont d'abord BCD ou α, puis un autre plan α' qui enveloppe une développable $\mathcal{D}'$, qui est l'une des ∞^1 développables annoncées à l'instant; $\mathcal{D}'$ *est distincte de* $\mathcal{D}$ *si la quantité numérique* $\beta^2-\alpha\gamma$, *qui figure dans* (9′), *est différente de zéro :* il suffit de revenir à la construction *géométrique*, qui a été donnée au début de ce paragraphe pour obtenir une configuration ($\mathcal{B}$, Σ) à 22 paramètres, pour être certain qu'en général $\beta^2-\alpha\gamma$ n'est pas nulle (d'ailleurs nous allons voir, quelques lignes plus bas, que si la constante $2a$ qui figure dans la construction synthétique n'est pas une demi-période, $\mathcal{D}'$ est distincte, en général, de $\mathcal{D}$; nous arriverons plus loin, par bonds progressifs, à prouver que les deux conditions $\beta^2-\alpha\gamma=0$ et $2a=$ demi-période sont strictement équivalentes); le résultat qui a été obtenu grâce à l'équation (9′) est que, si l'*une* des droites Δ_A n'est pas tangente à Σ, *toutes* les droites Δ_A obtenues pour A variable possèdent cette même propriété; le plan α', autre que α, issu de Δ_A est donc distinct de α et enveloppe une développable $\mathcal{D}'$ qui doit pouvoir être obtenue elle aussi par la construction *synthétique* qui précède : nous allons prouver ce résultat important que *la constante* $2b$ (*somme des arguments des sommets des tétraèdres relatifs à* $\mathcal{D}'$) *est liée à la constante* $2a$ *relative à* $\mathcal{D}$ *par la relation* $2a+2b=0$ (*à une période près, bien entendu*). Autrement dit, *deux tétraèdres d'espèce différente ont leurs* 8 *sommets aux points communs à trois quadriques, tandis qu'en général deux tétraèdres de même espèce ont leurs* 8 *sommets sur une seule biquadratique, exception n'ayant lieu que si* $2a$ *est demi-période.* Pour démontrer cette relation $2a+2b=0$, remarquons que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, étant circonscrites à la même

---

(1) La configuration ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) dépend de 21 paramètres, tandis que ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, T) dépend de 22 paramètres; en effet, pour définir T, une fois ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) obtenue, il faut préciser la valeur de $\lambda_1 : \lambda_2$.

quadrique Σ, ont huit plans tangents communs; l'un de ces plans coupe $\mathcal{B}$ en quatre points dont il faut éliminer l'un pour avoir un tétraèdre de la série (A, α), et un autre pour un tétraèdre de la série (A, α'); donc les deux tétraèdres en jeu ont deux sommets communs $\overline{A}$, $\overline{B}$ dans ce plan, les troisièmes sommets situés dans le plan étant $\overline{C}$ et $\overline{C'}$ respectivement; $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ se complète par le sommet D, $\overline{A}\overline{B}\overline{C'}$ par $\overline{D'}$ et ces deux sommets $\overline{D}$, $\overline{D'}$ sont tous deux situés dans le plan tangent à Σ, autre que $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{C'}$, mené par $\overline{A}\overline{B}$; $\overline{D}$ et $\overline{D'}$ sont *distincts*, parce que nous savons que les deux plans α, α' qui correspondent à un même point A de $\mathcal{B}$ sont *toujours* distincts (parce que $\beta^2 - \alpha\gamma$ est différent de zéro et que la droite Δ_A n'est jamais tangente à Σ) : ici le plan $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ correspond à $\overline{D}$ dans la série (A, α) et à $\overline{D'}$ dans la série (A, α'). Si l'on appelle u_1, u_2, u_3, u_4 les arguments de $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, D, ceux de $\overline{C'}$ et $\overline{D'}$ sont respectivement $-(u_1 + u_2 + u_3)$ et $-(u_1 + u_2 + u_4)$; en exprimant que la somme des arguments de $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C'}$, $\overline{D'}$ est $2b$, on obtient $2a + 2b = 0$; ceci confirme que, si $2a$ n'est pas demi-période, *les deux séries* (A, α), (A, α') *sont distinctes, mais il faut bien se garder de croire que* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont elles-mêmes distinctes pour cette raison;* l'auteur s'excuse auprès du lecteur de prendre tant de précautions et de renvoyer à des résultats qui ne pourront être démontrés que plus tard; le résultat précis est le suivant : *Si* $2a$ *n'est pas demi-période et si le tétraèdre* Θ *conjugué par rapport aux quadriques issues de* $\mathcal{B}$ *n'est pas conjugué par rapport à* Σ, $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont distinctes; mais si* Θ *est conjugué par rapport à* Σ, $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *se confondent, bien que les deux plans* α, α' *soient distincts; les plans* α, α' *réalisent alors une transformation birationnelle de* $\mathcal{D}$ *en elle-même.* Le fait que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ coïncident dans ce cas spécial ne trouble pas notre raisonnement, basé sur l'existence d'un plan tangent commun à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$: au lieu d'en avoir 8, il y en a alors ∞^1. *Si* $2a$ *est demi-période,* $2a$ *et* $2b$ *coïncident et nous verrons que* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *coïncident parce que* Δ_A *est constamment tangente à* Σ *de sorte que* α, α' *coïncident* (*nous montrerons que l'on a alors* $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$ *et que l'unique série de tétraèdres obtenue est formée de tétraèdres tous conjugués par rapport à une quadrique fixe* σ, *ces diverses propriétés étant conséquence de l'une quelconque d'entre elles*).

Cela posé, *si* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont distinctes,* Σ *est la seule quadrique inscrite simultanément dans* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$; si nous remplaçons Σ par l'une quelconque Σ_1 des ∞^1 quadriques inscrites dans $\mathcal{D}$, chaque tétraèdre ABCD est aussi circonscrit à Σ_1, de sorte que $\mathcal{B}$ et Σ_1 admettent ∞^1 tétraèdres (Σ_1 *coupe donc suivant quatre droites une quadrique, et une seule, du faisceau ponctuel déterminé par* $\mathcal{B}$; *en vertu de la dualité, une quadrique quelconque du faisceau ponctuel issu de* $\mathcal{B}$ *coupe suivant quatre droites une quadrique et une seule du faisceau tangentiel déterminé par* $\mathcal{D}$: on a ainsi une correspondance *homographique* entre les quadriques de ces deux faisceaux). Le tétraèdre $AB'C'D'$ de la série (A, α') relative à $(\mathcal{B}, \Sigma)$ n'est pas circonscrit à Σ_1, de sorte que $(\mathcal{B}, \Sigma_1)$ déterminent une autre développable $\mathcal{D}'_1$ associée à $\mathcal{D}$ et correspondant à la même constante $2b$ que $\mathcal{D}'$; de même en remplaçant Σ par une quadrique inscrite dans $\mathcal{D}'$, on peut remplacer $\mathcal{D}$ par une autre développable $\mathcal{D}_1$. On peut prolonger indéfiniment l'application de ce procédé. Or la configuration constituée d'une biquadratique et d'une développable de classe 4, admettant ∞^1 tétraèdres inscrits dans l'une et circonscrits à l'autre, dépend de 21 paramètres; ici $\mathcal{B}$ est fixe, ainsi que $2a$: donc il ne reste que 4 paramètres disponibles, de sorte que le nombre de paramètres effectivement atteint au cours des opérations indéfinies que nous avons indiquées ne peut dépasser 4; il y aurait là une étude à faire, mais je me contenterai d'amorcer la question : on suppose ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) *connues*; il y a ∞^1 quadriques Σ inscrites dans $\mathcal{D}$; on obtient donc ∞^1 développables $\mathcal{D}'$; l'une d'elles étant choisie, on en déduit ∞^1 développables $\mathcal{D}_1$, de sorte que, si $\mathcal{D}$ est donnée, l'ensemble ($\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}_1$) dépend de deux paramètres; mais rien n'autorise à penser que $\mathcal{D}_1$ dépend de deux paramètres; il pourrait se faire en effet que le passage de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}_1$ puisse se faire au moyen de l'une *quelconque* des ∞^1 développables $\mathcal{D}'$, auquel cas il y aurait un seul paramètre pour $\mathcal{D}_1$ et un théorème de *permutabilité* correspondant au schéma

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D}' & \\ \mathcal{D} & & \mathcal{D}_1 \\ & \overline{\mathcal{D}}' & \end{array}$$

et s'il en était ainsi, la transformation appliquée à $\mathcal{D}_1$, devant fournir ∞^1 développables, ne ferait que donner à nouveau les ∞^1 développables $\mathcal{D}'$, $\overline{\mathcal{D}}'$, ..., déjà obtenues au moyen de $\mathcal{D}$: la transformation ne ferait donc intervenir qu'un paramètre.

Nous allons montrer maintenant que $\beta^2-\alpha\gamma=0$ *entraîne* $2a=$ *demi-période* [rappelons que α, β, γ sont toujours les coefficients figurant dans l'équation (9')]. En effet, quand $\beta^2-\alpha\gamma$ n'est pas nul, on obtient deux séries de tétraèdres correspondant aux valeurs respectives $(2a)$ et $(-2a)$ pour la somme des arguments; si les coefficients de Σ varient de façon que $\beta^2-\alpha\gamma$ tende vers zéro, ces deux séries de tétraèdres tendent à se confondre, donc $(2a)$ et $(-2a)$ sont voisines et, à la limite, quand $\beta^2-\alpha\gamma$ est nul, $(2a)$ est une demi-période. Quand $\beta^2-\alpha\gamma$ est nul, le couple ($\mathcal{B}$, Σ) dépend de 21 paramètres, au lieu de 22; le couple ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) dépend alors de 20 paramètres et constitue une variété W_{20}; or, quand on considère la construction synthétique fournie par l'équation (7) et que l'on y suppose $2a=$ demi-période, on définit un couple ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) engendrant une variété V_{20} (16 paramètres pour $\mathcal{B}$, 4 pour la droite δ); d'après ce qui a été expliqué à l'instant, W_{20} est tout entière incluse dans V_{20} et le principe que nous avons développé, par analogie avec le théorème de d'Alembert, entraîne que W_{20} épuise complètement V_{20} (car il s'agit de variétés manifestement indécomposables; d'autre part, puisque nous parlons de la condition $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, cela entraîne que nous restons dans le cas où le lieu de A_1^h est *une droite, et non un point*) : par conséquent *les relations* $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$ *et* $2a =$ *demi-période sont strictement équivalentes.* Dans ce cas $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, la développable $\mathcal{D}$ donne ∞^1 quadriques Σ' qui lui sont inscrites; prenons l'une, Σ'; puisque $2a =$ demi-période, on a $\beta'^2 - \alpha'\gamma' = 0$, en appelant α', β', γ' les coefficients obtenus pour Σ', analogues à ceux que Σ avait donnés; donc la droite Δ'_A obtenue en associant $\mathcal{B}$ à Σ' est elle aussi tangente à Σ' et l'on n'obtient encore que l'unique tétraèdre ABCD : *par conséquent nous ne pouvons déduire de $\mathcal{D}$ d'autre développable, par le procédé indiqué plus haut.* Nous démontrerons au paragraphe **7** que ce cas ($2a =$ demi-période et $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$) fournit des tétraèdres tous conjugués par rapport à une même quadrique σ, la courbe $\mathcal{B}$ et la développable $\mathcal{D}$ s'échangeant l'une en l'autre par polarité relative à σ.

6. Étude du cas où $\mathcal{B}$ et Σ ont un tétraèdre conjugué commun. — Nous allons montrer que, si $\mathcal{B}$ et Σ ont un tétraèdre conjugué commun, les développables $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, enveloppes des plans *distincts* α, α', *coïncident;* la droite Δ_A est la même pour toutes les quadriques inscrites dans $\mathcal{D}$, de sorte que la génération de nouvelles développables à partir de $\mathcal{D}$ échoue (à la fin du paragraphe précédent, il y a aussi échec, mais dans des circonstances bien différentes : *coïncidence de α et α'*). On peut, sans restreindre, prendre Θ pour tétraèdre de référence et écrire

$$(10) \qquad \begin{cases} Q \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0, \qquad Q_1 \equiv x^2 + z^2 - m(y^2 + t^2) \\ \Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0. \end{cases}$$

Bien entendu, on pourrait remplacer Q par une quadrique quelconque du faisceau Q, Q_1, donc supposer $A = 0$; il entre donc, pour ($\mathcal{B}$, Σ), 18 paramètres (au lieu de 22 quand il n'y a pas de tétraèdre conjugué commun) et 17 pour ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$). Le point A est (x_0, y_0, z_0, t_0); les coordonnées de A_1^h sont obtenues en multipliant x_0, y_0, z_0, t_0 respectivement par les nombres

$$(11) \qquad \begin{cases} (A+B+C+D)^2 - 4(BC+CD+DB) - 4A^2 + 4(C-A)h(1+m) = H + \lambda(C-A), \\ (A+B+C+D)^2 - 4(AC+CD+DA) - 4B^2 + 4(B-D)h(1+m) = K + \lambda(B-D), \\ (A+B+C+D)^2 - 4(AB+BD+DA) - 4C^2 + 4(A-C)h(1+m) = L + \lambda(A-C), \\ (A+B+C+D)^2 - 4(AB+BC+CA) - 4D^2 + 4(D-B)h(1+m) = M + \lambda(D-B), \end{cases}$$

où l'on a posé ([1]) $\lambda = 4h(1+m)$; les points où Δ_A coupe Σ sont fournis par l'équation du second degré en λ

$$(12) \qquad \begin{cases} H^2x_0^2 + K^2y_0^2 + L^2z_0^2 + M^2t_0^2 + 2\lambda[(Hx_0^2 - Lz_0^2)(C-A) + (Ky_0^2 - Mt_0^2)(B-D)] \\ \qquad + \lambda^2[(A-C)^2(x_0^2 + z_0^2) + (B-D)^2(y_0^2 + t_0^2)]. \end{cases}$$

([1]) Le cas $m = -1$ entraîne la coïncidence de Σ et Q_1; ce cas donnerait des couples de Möbius : nous en verrons un exemple étudié en détail au paragraphe suivant; Σ, coïncidant avec Q_1, doit être considérée comme coupant Q_1 suivant 4 droites et même Q_1 se trouve comptée pour *deux*.

En exprimant x_0^2 et z_0^2 au moyen de y_0^2 et t_0^2, le terme constant de (12) prend la forme

$$\left(H^2\frac{B+Cm}{C-A}+L^2\frac{B+Am}{A-C}+K^2\right)y_0^2+\left(H^2\frac{D+Cm}{C-A}+L^2\frac{D+Am}{A-C}+M^2\right)t_0^2.$$

Le coefficient de y_0^2 s'écrit $\dfrac{(H^2-L^2)(Am+B)}{C-A}+H^2m+K^2$ et puisque

$$\frac{H-L}{C-A}=4(A+C-B-D),$$

on trouve

$$4(H+L)(A+C-B-D)(Am+B)+mH^2+K^2.$$

Le coefficient de t_0^2 se déduit de celui-là en échangeant A et C, B et D, H et L, K et M et l'on constate sans peine que la nouvelle expression est égale à la première. En tenant compte de $H+K+L+M=0$, le terme en 2λ se réduit à $2\lambda[m(LA+HC)-MB-KD](y_0^2+t_0^2)$. Finalement l'équation (12) contient $y_0^2+t_0^2$ en facteur et prend la forme

$$(12') \qquad \begin{aligned}&[mH^2+K^2+4(A+C-B-D)(H+L)(Am+B)]\\ &\quad+2\lambda[m(LA+HC)-MB-KD]+\lambda^2[m(A-C)^2+(B-D)^2]=0.\end{aligned}$$

C'est bien conforme aux prévisions (d'ailleurs c'est l'étude directe de ce cas particulier qui a mis l'auteur sur la piste de ces diverses propriétés); l'équation (12′) est *indépendante* du choix précis de A sur $\mathcal{B}$; (pour les points où $\mathcal{B}$ coupe Σ, à cause du facteur $y_0^2+t_0^2$, la droite Δ_A est tout entière sur Σ). La droite lieu du point A_1^h contient le point $(-x_0, y_0, -z_0, t_0)$ qui correspond à A dans l'involution biaxiale de directrices $(x=z=0)$, $(y=t=0)$: on s'en aperçoit [1] en remarquant que les nombres $\frac{x_1}{x_0}$, $\frac{y_1}{y_0}$, $\frac{z_1}{z_0}$, $\frac{t_1}{t_0}$, où (x_1, y_1, z_1, t_1) désigne A_1^h, ont une somme nulle; si donc on peut avoir à la fois $\frac{x_1}{x_0}=\frac{z_1}{z_0}$ et $\frac{y_1}{y_0}=\frac{t_1}{t_0}$, on aura $\frac{x_1}{x_0}+\frac{y_1}{y_0}=0$ et le point (x_1, y_1, z_1, t_1) sera le point $(-x_0, y_0, -z_0, t_0)$ annoncé. Or $\frac{x_1}{x_0}=\frac{z_1}{z_0}$ revient à $8(1+m)h=\frac{H-L}{A-C}$ et $\frac{y_1}{y_0}=\frac{t_1}{t_0}$ à $8(1+m)h=\frac{K-M}{D-B}$; d'après un calcul déjà fait, on a $\frac{H-L}{A-C}=4(B+D-A-C)$ et, comme l'expression $\frac{K-M}{B-D}$ se déduit de la précédente par une permutation circulaire sur A, B, C, D, la vérification est faite; Q_1 et Σ, ayant 4 droites communes, ont ∞^2 tétraèdres conjugués

---

[1] On s'en aperçoit encore plus aisément en remarquant que la quadrique

$$(A+h)x^2+(C+h)z^2+(B-hm)y^2+(D-hm)t^2=0$$

est Möbius-ment circonscrite à Σ, relativement au couple

$$(x=z=0), \quad (y=t=0) \qquad \text{si} \qquad A+C+2h=B+D-2hm.$$

communs admettant tous pour l'un de leurs couples d'arêtes opposées les deux axes de l'involution biaxiale en jeu; le plan de la face BCD passe par le point homologue de A, mais ce point ne joue pas le rôle de E, c'est au contraire l'un des points B, C, D : nous supposerons que c'est B et par suite *tous les tétraèdres que nous trouverons sont tels que* (A, B) *d'une part* (C, D) *de l'autre se correspondent dans l'involution en jeu* (c'est parce que les plans α, α' sont distincts, que $2a$ n'est pas une demi-période et que le point E n'est pas l'homologue de A dans l'une des involutions biaxiales relatives à Θ).

L'équation (12') définit deux valeurs de λ, que nous supposons d'abord distinctes (pour que α et α' soient distincts). Quand on résout (12'), la quantité sous le radical est

$$(13)\qquad \begin{aligned}\rho = {} & 4(\mathrm{AC}m^2+\mathrm{BD}) \\ & + m(2\mathrm{AB}+2\mathrm{AC}+2\mathrm{AD}+2\mathrm{BC}+2\mathrm{BD}+2\mathrm{CD}-\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2-\mathrm{C}^2-\mathrm{D}^2).\end{aligned}$$

Nous allons chercher les équations de $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}'$ (équations qui doivent se séparer rationnellement) et nous constaterons que ces équations coïncident. Toutes les relations entre x_0, y_0, z_0, t_0 et u, v, w, r, pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$, sont

$$(14)\qquad x_0^2 = \frac{(\mathrm{B}+\mathrm{C}m)y_0^2+(\mathrm{D}+\mathrm{C}m)t_0^2}{(\mathrm{C}-\mathrm{A})}, \qquad z_0^2 = \frac{(\mathrm{B}+\mathrm{A}m)y_0^2+(\mathrm{D}+\mathrm{A}m)t_0^2}{\mathrm{A}-\mathrm{C}},$$

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} & u^2+v^2+w^2+r^2=0, \\ & ux_0-vy_0+wz_0-rt_0=0, \\ & \mathrm{H}ux_0+\mathrm{K}vy_0+\mathrm{L}wz_0+\mathrm{M}rt_0=0.\end{aligned}\right.$$

Les équations (14) sont celles de $\mathcal{B}$, résolues en x_0^2 et z_0^2 : pour des raisons évidentes les variables x_0, z_0 d'une part, y_0, t_0 de l'autre s'associent et les échanges simples déjà signalés

$$\begin{matrix} x_0, & y_0, & z_0, & t_0, & \mathrm{A}, & \mathrm{B}, & \mathrm{C}, & \mathrm{D}, & u, & v, & w, & r, \\ z_0, & t_0, & x_0, & y_0, & \mathrm{C}, & \mathrm{D}, & \mathrm{A}, & \mathrm{B}, & w, & r, & u, & v \end{matrix}$$

permettent de déduire divers résultats l'un de l'autre. En éliminant (x_0, y_0, z_0, t_0) entre les deux équations (14) et les deux dernières équations (15) nous aurons une nouvelle équation à adjoindre à $u^2+v^2+w^2+r^2=0$ pour obtenir l'ensemble de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (le calcul se ferait de manière toute semblable même si Θ n'était pas conjugué par rapport à Σ; l'équation qui vient d'être annoncée se séparerait, rationnellement, en tenant compte de l'équation tangentielle de Σ, en deux facteurs *distincts* du second degré en u, v, w, r). Cette élimination se fait en résolvant en ux_0, wz_0 les deux dernières équations (15), ce qui donne

$$(16)\qquad ux_0 = \frac{(\mathrm{K}+\mathrm{L})vy_0+(\mathrm{M}+\mathrm{L})rt_0}{\mathrm{L}-\mathrm{H}}, \qquad wz_0 = \frac{(\mathrm{K}+\mathrm{H})vy_0+(\mathrm{M}+\mathrm{H})rt_0}{\mathrm{H}-\mathrm{L}}.$$

En remarquant que l'on a

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{K}+\mathrm{L} = -(\mathrm{M}+\mathrm{H}) = 2(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}-\mathrm{D})(\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{D}), \\ & \mathrm{M}+\mathrm{L} = -(\mathrm{K}+\mathrm{H}) = 2(\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C}+\mathrm{D})(\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{D}), \\ & \mathrm{H}-\mathrm{L} = 4(\mathrm{C}-\mathrm{A})(\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{D}),\end{aligned}\right.$$

on obtient

$$(16')\qquad \begin{cases} ux_0 = \dfrac{(A+B-C-D)vy_0+(A-B-C+D)rt_0}{2(A-C)}, \\ wz_0 = \dfrac{(A-B-C+D)vy_0+(A+B-C-D)rt_0}{2(A-C)}. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs de x_0, z_0 dans les équations (14), on a deux équations du second degré en $\frac{y_0}{t_0}$,

$$(18)\qquad \begin{cases} y_0^2[(A+B-C-D)^2v^2-4(C-A)(B+Cm)u^2] \\ \quad +2(A+B-C-D)(A-B-C+D)vry_0t_0 \\ \quad +t_0^2[(A-B-C+D)^2r^2-4(C-A)(D+Cm)u^2]=0, \\ y_0^2[(A-B-C+D)^2v^2+4(C-A)(B+Am)w^2] \\ \quad +2(A+B-C-D)(A-B-C+D)vry_0t_0 \\ \quad +t_0^2[(A+B-C-D)^2r^2+4(C-A)(D+Am)w^2]=0. \end{cases}$$

Or, comme le terme en vry_0t_0 est le même, il est naturel de retrancher les deux équations (18), ce qui donne, pour remplacer l'une,

$$(19)\qquad \begin{aligned} & y_0^2[(B-D)v^2+B(u^2+w^2)+m(Aw^2+Cu^2)] \\ & +t_0^2[(D-B)r^2+D(u^2+w^2)+m(Aw^2+Cu^2)]=0. \end{aligned}$$

Or, en vertu de $u^2+v^2+w^2+r^2=0$, les coefficients de y_0^2 et t_0^2 sont égaux, car leur différence est $(B-D)(u^2+v^2+w^2+r^2)$; donc l'équation (19) contient le facteur $y_0^2+t_0^2$, qui n'est pas constamment nul sur $\mathcal{B}$, et elle se réduit, ce facteur enlevé, à une équation ne contenant plus que u, v, w, r, *du second degré,* ce qui prouve que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ *coïncident.* [Si l'on appliquait aux équations *particulières* (18) la méthode *générale* d'élimination, on trouverait pour résultant un polynome de degré 4, qui serait de la forme

$$(u^2+v^2+w^2+r^2)f(u, v, w, r)+[\varphi(u, v, w, r)]^2,$$

où f et φ sont des polynomes homogènes de degré 2 et ceci confirme bien que les deux développables $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, distinctes en général, se sont confondues]. Nous pouvons prendre pour équations de $\mathcal{D}$

$$(20)\qquad \begin{cases} (B-D)v^2+(B+Cm)u^2+(B+Am)w^2=0, \\ (D-B)r^2+(D+Cm)u^2+(D+Am)w^2=0, \end{cases}$$

ou les équations équivalentes

$$(20')\qquad \begin{cases} u^2+v^2+w^2+r^2=0, \\ m(Aw^2+Cu^2)-Dv^2-Br^2=0. \end{cases}$$

On sait que l'élimination de $\frac{y_0}{t_0}$ entre les deux équations (18) a pour effet, en premier lieu, de faire disparaître $\frac{y_0}{t_0}$, en second lieu de le faire réapparaître en fonction de u, v, w, r; les deux équations (18) ont deux racines communes en $\frac{y_0}{t_0}$ et il suffit de résoudre la première; on a ainsi

$$(21)\quad \frac{y_0}{t_0} = \frac{\left\{\begin{array}{l} -(A+B-C-D)(A-B-C+D)vr \pm 2u(C-A) \\ \times\sqrt{(B+Cm)(A-B-C+D)^2r^2+(D+Cm)(A+B-C-D)^2v^2-4(C-A)(B+Cm)(D+Cm)u^2} \end{array}\right\}}{(A+B-C-D)^2v^2-4(C-A)(B+Cm)u^2}.$$

La quantité sous le radical peut, par élimination de v^2 et r^2 au moyen de (20), s'écrire

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} (B+Cm)(A-B-C+D)^2[D(u^2+w^2)+m(Aw^2+Cu^2)] \\ -(D+Cm)(A+B-C-D)^2[B(u^2+w^2)+m(Aw^2+Cu^2)] \end{array}\right\}}{B-D}$$
$$-4(C-A)(B+Cm)(D+Cm)u^2.$$

On constate qu'elle se réduit à ρw^2; l'homogénéité permet donc de prendre y_0 égal au numérateur de la fraction (21) et t_0 égal au dénominateur; on porte ces valeurs de y_0, t_0 dans (16′) et l'on obtient finalement (avec $\varepsilon = +1$ ou -1)

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} x_0 = \quad 2(B+Cm)(A-B-C+D)ur - \varepsilon vw(A+B-C-D)\sqrt{\rho}, \\ y_0 = -(A+B-C-D)(A-B-C+D)vr + 2\varepsilon uw(C-A)\sqrt{\rho}, \\ z_0 = -2(B+Am)(A+B-C-D)wr - \varepsilon uv(A-B-C+D)\sqrt{\rho}, \\ t_0 = \quad (A+B-C-D)^2v^2 - 4(C-A)(B+Cm)u^2 \\ \quad = -\frac{1}{m}[(B+mA)(B+mC)r^2 - \rho v^2]. \end{array}\right.$$

La dernière forme de t_0 s'obtient en calculant u^2 au moyen de v^2 et r^2 par élimination de w^2 entre les équations (20); elle est plus commode pour élucider le cas $\rho = 0$. Bien entendu, dans (22), (u, v, w, r) sont supposées vérifier les équations (20) et l'on a ainsi les expressions *rationnelles* de x_0, y_0, z_0, t_0 en u, v, w, r. Il y a lieu maintenant d'obtenir inversement les expressions de u, v, w, r en fonction de x_0, y_0, z_0, t_0; il suffit de porter les valeurs de u, w données par (16′) dans l'une, convenablement choisie, des équations de $\mathcal{D}$; si, par exemple, nous utilisons l'équation

$$(Am+D)v^2 + (Am+B)r^2 + (A-C)mu^2 = 0,$$

résultant de l'élimination de w^2 entre (20) [équation d'ailleurs déjà utilisée pour transformer t_0 dans (22)], nous obtenons une équation du second degré en $\frac{v}{r}$ et, après quelques calculs simples, on obtient les formules analogues à (22), où ε' signifie $+1$ ou -1,

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} u = -2(mA+D)(A-B-C+D)x_0t_0 + \varepsilon' y_0z_0(A+B-C-D)\sqrt{\rho}, \\ v = \quad m(A+B-C-D)(A-B-C+D)y_0t_0 + 2\varepsilon' x_0z_0(A-C)\sqrt{\rho}, \\ w = \quad 2(mC+D)(A+B-C-D)z_0t_0 + \varepsilon' x_0y_0(A-B-C+D)\sqrt{\rho}, \\ r = \quad 4(C-A)(mA+D)x_0^2 - m(A+B-C-D)^2y_0^2. \end{array}\right.$$

Il s'agit de raccorder ces formules avec (22), de façon à savoir si ε' est égal à ε ou $-\varepsilon$; il suffit, entre autres moyens, de remplacer, dans le second membre de la première formule (22), u, v, w, r par les expressions (23); le résultat doit contenir x_0 en facteur; cela revient à dire que

$$(B + Cm)\varepsilon' y_0^2 + (D + Cm)\varepsilon t_0^2$$

contient x_0 en facteur : il suffit de regarder la première équation (14) pour voir que ε *et* ε' *sont égaux :* donc le raccord est fait entre les formules réciproques (22), (23), qui donnent la correspondance *birationnelle* entre le point A de $\mathcal{B}$ et le plan tangent α de $\mathcal{D}$. Si, dans (22), on remplace ε par $-\varepsilon$ et u, v, w, r par u', v', w', r', on a les expressions de x_0, y_0, z_0, t_0 au moyen de u', v', w', r', coordonnées du plan α'; remplaçant alors x_0, y_0, z_0, t_0 par ces valeurs dans (23), nous avons les expressions *rationnelles* de u, v, w, r au moyen de u', v', w', r'.

Le cas $\rho = 0$ *entraîne que* α *et* α' *coïncident;* pour $\rho \neq 0$, on peut mener de Δ_A à $\mathcal{D}$ deux plans tangents; à mesure que ρ tend vers zéro, ces deux plans tendent à se confondre et, à la limite, on voit que si $\rho = 0$, la droite Δ_A devient *la génératrice de* $\mathcal{D}$ (¹). Les formules (22) se simplifient, puisque r est en facteur : elles sont de la forme

$$x_0 = au, \qquad y_0 = bv, \qquad z_0 = cw, \qquad t_0 = dr,$$

où a, b, c, d sont constants : cela prouve que $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ sont réciproques par rapport à la quadrique σ d'équation tangentielle

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + dr^2 = 0,$$

de sorte que *les tétraèdres* ABCD *sont conjugués par rapport à* σ. Nous retrouverons cet exemple par d'autres méthodes.

Il y a lieu maintenant de retrouver, par une voie purement géométrique, tous ces résultats. Nous allons, pour désigner les périodes, employer les notations 2ω, $2\omega'$ de Weierstrass (au lieu de $4K$ et $4iK'$); nous avons indiqué que A et B se correspondent dans une involution biaxiale relative à Θ, ainsi que C et D. On peut donc prendre les arguments de A, B, C, D sous la forme

A	B	C	D
u_1	$u_1 + \omega$	$a - u_1$	$a + \omega - u_1$

de sorte que la somme des arguments soit $2a$; il existe un nouveau tétraèdre,

(¹) Cette conclusion suppose que Θ est conjugué par rapport à Σ de façon que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ coïncident; si Θ n'est pas conjugué par rapport à Σ, et si $\beta^2 - \alpha\gamma$ est nulle, la droite Δ_A est tangente à Σ et $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ qui étaient distinctes tant que $\beta^2 - \alpha\gamma$ n'était pas nulle viennent se confondre, mais rien n'autorise à dire que Δ_A est génératrice de $\mathcal{D}$; en tout cas l'auteur n'a pas élucidé ce point, d'ailleurs accessoire.

issu de A; il admet B aussi pour sommet; les deux autres sont C′ et D′ et les arguments sont

A	B	C′	D′
u_1	$u_1+\omega$	$b-u_1$	$b+\omega-u_1$

ABC, ABD sont deux plans tangents à $\mathcal{D}$ issus de AB; ABC′, ABD′ aussi; comme $\mathcal{D}$ est circonscrite à une quadrique, on ne peut lui mener par une droite que o, 1 ou 2 plans tangents; donc ABC′ doit coïncider avec ABD (du moins en disposant convenablement des notations) et ABD′ avec ABC; ABCD′ étant coplanaires, on a $a+b=0$ et, par suite, les arguments sont [1]

A	B	C	D	C′	D′
u_1	$u_1+\omega$	$a-u_1$	$a+\omega-u_1$	$-a-u_1$	$-a+\omega-u_1$

La seule inspection de ce Tableau prouve que les tétraèdres ABCD sont inscrits dans $\mathcal{B}$ et que leurs faces enveloppent une développable de classe 4 (nous préciserons plus bas la nature de cette développable); on se rappellera que la correspondance $(u, u+\alpha)$ sur $\mathcal{B}$ est *birationnelle*, mais n'est *involutive* que si α est égale à une demi-période; le tétraèdre, analogue à ABCD, relatif au sommet $\overline{\text{A}}$ d'argument $v=u_1+2a$ donne un tétraèdre $\overline{\text{A}}\,\overline{\text{B}}\,\overline{\text{C}}\,\overline{\text{D}}$, pour lequel la face $\overline{\text{B}}\,\overline{\text{C}}\,\overline{\text{D}}$ passe en A, sans que A soit sommet; les arguments de $\overline{\text{B}}$, $\overline{\text{C}}$, $\overline{\text{D}}$ sont $u_1+2a+\omega$, $-a-u_1$, $-a+\omega-u_1$ de sorte que $\overline{\text{C}}=\text{C}'$, $\overline{\text{D}}=\text{D}'$; le plan $\text{A}\,\overline{\text{B}}\,\overline{\text{C}}\,\overline{\text{D}}$ n'est autre que le plan AC′D′ qui intervient pour le tétraèdre AB′C′D′ et pour $\mathcal{D}'$: *donc $\mathcal{D}'$ coïncide avec $\mathcal{D}$*; nous avons ainsi retrouvé très rapidement les résultats obtenus analytiquement. En même temps, cela précise que l'équation

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1\left[\alpha_1 \operatorname{sn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_2 \operatorname{cn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_3 \operatorname{dn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_4\right] \\ &+\lambda_2\left[\beta_1 \operatorname{sn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\beta_2 \operatorname{cn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\beta_3 \operatorname{dn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\beta_4\right]=0 \end{aligned}\right.$$

[1] Nous avons ainsi retrouvé directement, pour ce cas spécial, la relation $2a+2b=0$ et même trouvé la relation précise entre a, b; remarquons que si l'on avait disposé autrement des notations, si l'on avait appelé ABCC′ les points coplanaires (et non ABCD′) on aurait trouvé $a+b=\omega$, de sorte que b n'a que les valeurs possibles $(-a)$, $(-a+\omega)$, mais ne prend pas les valeurs

$$-a\pm\omega', \qquad -a\pm\omega\pm\omega'.$$

est, pour la génération relative à α', remplacée par une équation analogue où a est remplacée par $(-a)$; d'autre part l'équation (24) est telle, dans le cas présent, que si u est racine, $u+2K$ (en reprenant les notations de Jacobi) est aussi racine; si l'on se rappelle les relations

$$\operatorname{sn}(u+2K) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{cn}(u+2K) = -\operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{dn}(u+2K) = \operatorname{dn} u,$$

on voit que l'équation (24) peut être ramenée à l'une ou l'autre forme

$$\boxed{\operatorname{dn}\left(u-\frac{a}{2}\right) = \operatorname{dn}\left(u_1-\frac{a}{2}\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{\operatorname{sn}\left(u-\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{cn}\left(u-\frac{a}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sn}\left(u_1-\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{cn}\left(u_1-\frac{a}{2}\right)}},$$

où *a est constant, tandis que u_1 est considéré comme paramètre variable;* d'ailleurs la relation

$$\operatorname{dn}(u+iK') = -i\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$$

prouve que les deux formes reviennent l'une à l'autre. Les relations

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(u+2K) = \operatorname{dn}(-u)$$

prouvent que, u_1 étant manifestement racine, les racines sont

$$u_1, \quad u_1+2K, \quad a-u_1, \quad a+2K-u_1,$$

c'est-à-dire les arguments qui ont été donnés plus haut pour A, B, C, D. Les ∞^1 tétraèdres T' de la série (A, α') s'obtiennent par l'équation

$$\boxed{\operatorname{dn}\left(u+\frac{a}{2}\right) = \operatorname{dn}\left(u_1+\frac{a}{2}\right)}$$

obtenue en changeant a en $(-a)$ dans l'équation précédente. On a ainsi retrouvé les 17 paramètres de cette configuration ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) spéciale : 16 pour $\mathcal{B}$, et ensuite la constante a; la droite δ qui intervient ici pour cette courbe ($\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, 1) est soit la droite $x=y=0$, soit l'arête opposée $z=t=0$; ici δ n'a que deux positions au lieu de 16. Les deux autres couples d'arêtes opposées de Θ fournissent les séries analogues définies par $\operatorname{sn}\left(u\pm\frac{a}{2}\right) = \operatorname{sn}\left(u_1\pm\frac{a}{2}\right)$ concernant l'involution $(u, u+2iK')$ et par $\operatorname{cn}\left(u\pm\frac{a}{2}\right) = \operatorname{cn}\left(u_1\pm\frac{a}{2}\right)$ concernant l'involution $(u, u+2K+2iK')$. Je signale encore un autre procédé très simple de trouver *a priori* ces résultats; sur $\mathcal{B}$, la relation $u_1+u_2=a$, où u_1, u_2 sont les paramètres des extrémités d'une corde et a une constante, définit une semi-quadrique, car $v_1+v_2=-a$ définit une surface réglée dont chaque génératrice est coplanaire avec chaque génératrice de la précédente, de sorte que ces deux surfaces sont nécessairement deux semi-quadriques complémentaires; par suite, si les arguments de A, B, C, D, C′, D′ sont ceux qui ont été indiqués au dernier tableau, AC, BD engendrent (¹) la semi-quadrique $Q(a)$, tandis que CB, DA engendrent la semi-quadrique $Q(a+\omega)$; AC′, BD′ engendrent la semi-quadrique, $Q(-a)$, C′B, D′A la semi-quadrique $Q(-a-\omega)$; on sait, si l'on a un peu approfondi la théorie des biquadratiques, que les quadrilatères gauches inscrits dans $\mathcal{B}$, tels que les côtés opposés appartiennent à une même semi-quadrique sont tous obtenus par ce procédé : suivant que l'on adopte ω, ω', $\omega+\omega'$ comme demi-période, les sommets opposés se correspondent dans l'involution biaxiale relative au couple d'arêtes opposées correspondant à cette demi-période; pour le choix ω, les sommets du quadrilatère gauche ACBD ou AC′BD′ fournissent nos tétraèdres; lorsque la quadrique (totale) $Q(\pm a)$ est connue, les deux systèmes de génératrices se séparent, par une extraction de racine carrée *numérique*, de sorte que, A étant fixé, les génératrices initiales AC ou AC′ (d'où résultent ensuite B, D, B′, D′) s'obtiennent *rationnellement* (par rapport aux coordonnées de A), et c'est ce qui explique pourquoi les plans α, α' s'obtiennent *rationnellement*. D'autre part, les faces du tétraèdre ABCD sont les plans de deux côtés consécutifs du quadrilatère gauche ABCD, de sorte que ces plans sont tangents aux quadriques $Q(\pm a)$, $Q(\pm a+\omega)$ et par suite tangents à la développable de classe 4 définie tangentiellement par ces deux quadriques. Le fait que Σ (quadrique quelconque inscrite dans $\mathcal{B}$) est conjuguée par rapport à Θ résulte de ce fait que A et B, les plans ACD, BCD s'échangent dans l'involution biaxiale relative à ω et que, en augmentant les arguments de ω' ou $\omega+\omega'$ pour chaque sommet, on a un nouveau tétraèdre de l'espèce étudiée; donc Σ reste invariante par les trois involutions biaxiales en jeu et admet Θ comme tétraèdre conjugué. Autre raison : Θ est conjugué par rapport à $Q(\pm a)$, $Q(\pm a+\omega)$, donc à toutes les quadriques Σ inscrites dans la développable en jeu.

Ces deux associations (A, α), (A, α'), qui se séparent rationnellement, fournissent deux séries de tétraèdres; *les sommets de deux tétraèdres d'espèce différente sont huit points bases d'un réseau de quadriques; si a n'est pas égal à $m\frac{\omega}{2}+n\frac{\omega'}{2}$ (où m, n sont des entiers arbitraires qui ne doivent pas être pairs tous deux, car $2a$ ne doit pas être nulle), les sommets de deux tétraèdres de même espèce ne sont pas bases d'un réseau de quadriques.*

Étudions donc les cas *particuliers* que nous avons mis en évidence : supposons $a=\frac{\omega}{2}$, de sorte que la somme des arguments de chaque tétraèdre est une demi-période (cette demi-période étant, *de plus*, celle qui joue pour l'involu-

---

(¹) Ce résultat explique pourquoi l'auteur a employé la notation $(2a)$ plutôt que (a) pour la somme des arguments.

tion A, B ou C, D). Les semi-quadriques $Q(a)$ et $Q(a+\omega)$ sont *complémentaires :* elles forment la quadrique $Q\left(\pm\frac{\omega}{2}\right)$. Nous avons le tableau d'arguments

A	B	C = D′	D = C′
u_1	$u_1+\omega$	$\frac{\omega}{2}-u_1$	$-\frac{\omega}{2}-u_1$

Les deux séries de tétraèdres coïncident, comme nous l'avons prévu ($\rho=0$ avec les notations qui ont été employées au début de ce paragraphe); *le plan* ABC *est tangent à* $\mathcal{B}$ *en* C *et le plan* ABD *en* D; nous avions signalé ces propriétés plus haut, nous les retrouverons au paragraphe suivant. Nous signalerons aussi cette propriété curieuse pour cet exemple actuel : *$\mathcal{B}$ est tracée sur la développable $\mathcal{D}$.* Si l'on avait pris $a=\frac{\omega}{2}+\omega'$, nous aurions une nouvelle série de tétraèdres de même nature. Nous avons dit que chacune de ces séries $\left(a=\frac{\omega}{2}\text{ ou } a=\frac{\omega}{2}+\omega'\right)$ fournit des *tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique fixe σ ou σ'.* Il faut remarquer que, pour a quelconque, nous avions envisagé les semi-quadriques

$$\begin{array}{ll} Q(-a), & Q(-a-\omega) \\ Q(a), & Q(a+\omega), \end{array}$$

et si nous voulons que le quadrilatère gauche ait ses côtés tous portés par la même quadrique (totale) on doit écrire

$$2a+\omega=0 \qquad \text{ou} \qquad a=-\frac{\omega}{2}+p\omega+q\omega'$$

et nous retrouvons ainsi les cas spéciaux $a=\frac{\omega}{2}$ et $a=\frac{\omega}{2}+\omega'$, qui viennent d'être envisagés. Ces quadriques spéciales $Q\left(\pm\frac{\omega}{2}\right)$ et $Q\left(\pm\frac{\omega}{2}+\omega'\right)$ jouent un grand rôle dans l'étude des transformations *homographiques* d'une biquadratique en elle-même [1].

---

[1] Il suffit d'une indication rapide pour trouver toutes les transformations homographiques; elles sont incluses dans les transformations birationnelles, donc de la forme $(u, \varepsilon u+a)$, où a est une constante à choisir convenablement et $\varepsilon=\pm 1$; quatre points coplanaires u_i sont remplacés par quatre points coplanaires, donc $4a=0$, ou $a=m\frac{\omega}{2}+m'\frac{\omega'}{2}$ où m, m' sont des entiers *quelconques* (sans restriction pour la parité). On a ainsi trouvé les 32 homographies de la courbe $\mathcal{B}$ en elle-même.

Le cas $a = \frac{\omega'}{2}$ *fournit une particularité tout autre*. Nous avons alors le tableau

A	B	C	D	C′	D′
u_1	$u_1 + \omega$	$\frac{\omega'}{2} - u_1$	$\omega + \frac{\omega'}{2} - u_1$	$-\frac{\omega'}{2} - u_1$	$-\frac{\omega'}{2} + \omega - u_1$

Cette fois les deux tétraèdres ABCD, ABC′D′ issus de A comme sommet sont *distincts* et par suite, pour qu'il n'y ait pas de faute dans les raisonnements précédents [raisonnements établissant que $(2a)$ = demi-période entraîne la coïncidence des deux tétraèdres issus de A, pourvu que le lieu de A_1^h soit *une droite et non un point*], il faut que le lieu de A_1^h soit *un point*, autrement dit *que l'on soit dans le cas des tétraèdres de Möbius;* effectivement les points $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ où BCD, CDA, DAB, ABC recoupent $\mathcal{B}$ sont :

$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$\bar{D}$
$u_1 + \omega'$	$u_1 + \omega' + \omega$	$-\frac{\omega'}{2} - u_1$	$-\frac{\omega'}{2} + \omega - u_1$

C'est le tétraèdre de la même série, obtenu pour $u_1 + \omega'$ au lieu de u_1, et il est en position de Möbius avec le précédent *pour le couple d'arêtes de* Θ *relatif à* ω'; $\bar{C}$ coïncide d'ailleurs avec C′ et $\bar{D}$ avec D′. (D, C′, D′ correspondent à C dans les involutions biaxiales fournies par ω, ω', $\omega + \omega'$). Ce cas sera repris au paragraphe suivant.

Le cas $a = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}$ fournit le résultat analogue pour le couple d'arêtes de Θ relatif à $\omega + \omega'$.

7. Tétraèdres inscrits dans une biquadratique $\mathcal{B}$ et conjugués par rapport a une quadrique σ. — J'ai déterminé dans un Mémoire, rédigé en collaboration avec M. Labrousse (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1940, p. 177-222), les couples, formés d'une biquadratique $\mathcal{B}$ et d'une quadrique σ, qui admettent ∞^1 tétraèdres inscrits dans $\mathcal{B}$ et conjugués par rapport à σ; *ces couples* $\mathcal{B}$, σ *dépendent de* 20 *paramètres;* la réciproque de $\mathcal{B}$ par rapport à σ est une développable $\mathcal{D}$ à laquelle toutes les faces de ces tétraèdres sont tangentes et le couple ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) dépend de 20 paramètres.

Je rappelle d'ailleurs quelques résultats : un couple ($\mathcal{B}$, σ) *quelconque* dépend de 25 paramètres et n'admet aucun tétraèdre; si σ est harmoniquement inscrite dans *deux* quadriques issues de $\mathcal{B}$, elle l'est automatiquement dans toutes les autres, et le couple ($\mathcal{B}$, σ) ne dépend plus que de 23 paramètres; il y a *deux* tétraèdres inscrits dans $\mathcal{B}$, conjugués par rapport à σ; la somme des arguments pour le premier tétraèdre est $2a$, pour le second $(-2a)$, où $2a$ est une certaine constante, *non égale à une demi-période*. Si l'on choisit un tétraèdre T, inscrit dans $\mathcal{B}$, dont la somme des arguments vaut ω, puis une quadrique σ *au hasard* parmi celles qui sont conjuguées par rapport à T, on a engagé $16+3+3$ ou 22 paramètres et le couple $(\mathcal{B}, \sigma)$ n'admet plus que cet unique tétraèdre T *comptant pour deux tétraèdres confondus;* mais, parmi les ∞^3 quadriques conjuguées par rapport à T, *il y en a* ∞^2 *qui admettent avec* $\mathcal{B}$ *une série de* ∞^1 *tétraèdres;* on peut obtenir une telle quadrique en choisissant, au hasard, un nouveau tétraèdre T_1 de même définition que T et prenant la quadrique, *unique*, σ, conjuguée par rapport à T et T_1; $(\mathcal{B}, T, T_1, \sigma)$ dépendent de 22 paramètres, mais $(\mathcal{B}, \sigma)$ de 20 seulement.

Revenant alors à ces couples $(\mathcal{B}, \sigma)$ *ou* $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ *à* 20 *paramètres, et aux* ∞^1 *tétraèdres correspondants, inscrits dans* $\mathcal{B}$, *conjugués par rapport à* σ, *circonscrits à* $\mathcal{D}$, il s'agit de prouver, toujours par application du principe équivalent au théorème de d'Alembert, que *ces couples* $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ *s'obtiennent en reprenant l'équation*

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1\left[\alpha_1\,\mathrm{sn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_2\,\mathrm{cn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_3\,\mathrm{dn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_4\right]\\ &+\lambda_2\left[\beta_1\,\mathrm{sn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\beta_2\,\mathrm{cn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\beta_3\,\mathrm{dn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\beta_4\right]=0\end{aligned}\right.$$

et y remplaçant $(2a)$, *somme des arguments pour chaque tétraèdre, par une demi-période*. On a ainsi 20 paramètres (au lieu de 21 pour a quelconque). Ce serait immédiat, *s'il n'existait pas des systèmes* $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$, *à* 20 *paramètres aussi, admettant* ∞^2 *tétraèdres inscrits dans* $\mathcal{B}$, *circonscrits à* $\mathcal{D}_1$, *avec cette particularité n'existant pas pour* $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ *qu'il existe même* ∞^2 *couples de Möbius, mais, ayant perdu par rapport à* $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ *la propriété que les tétraèdres soient tous conjugués par rapport à une même quadrique; la somme des arguments des sommets est encore, pour* $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$, *égale à une demi-période*.

La démonstration est très simple, mais assez subtile; nous avons constaté, d'après le paragraphe précédent (tétraèdres u_1, $u_1+\omega$, $\frac{\omega}{2}-u_1$, $-\frac{\omega}{2}-u_1$), qu'il y a des systèmes $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ *particuliers* qui sont obtenus comme cas particuliers de l'équation (26), en y faisant $a=\frac{\omega}{2}$ et particularisant convenablement les constantes α_i, β_j; d'autre part, ces systèmes ne sont pas un cas particulier de $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$ (¹); *il n'y a, d'autre part, que les systèmes* $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$, $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$ *qui soient à* 20 *paramètres et possèdent* ∞^1 *ou* ∞^2 *tétraèdres, la somme des arguments étant égale à une demi-période pour chacun d'eux;* le système (26) pour $a=\frac{\omega}{2}$ donne

(¹) Pour un système $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$, chaque point A de $\mathcal{B}$ donne, comme lieu de A_1^h, quand on a choisi une quadrique Σ inscrite dans $\mathcal{D}$, une droite et non un point; pour un système $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$ chaque A de $\mathcal{B}$ donne, comme lieu de A_1^h, un point unique et les systèmes $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$ admettent des couples de Möbius.

aussi un spécimen de tels tétraèdres; donc *l'un des systèmes* $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ *ou* $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$ *épuise la variété* V_{20} *obtenue en remplaçant* $2a$ *dans* (26) *par une demi-période;* si c'était l'ensemble des $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$ qui épuisait V_{20}, tout $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ qui est contenu dans V_{20} serait contenu dans $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$; or nous avons obtenu un système $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ qui appartient à V_{20}, mais non à $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$; *donc c'est l'ensemble* $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ *qui épuise* V_{20}. On pourra remarquer la difficulté d'arriver à ce résultat par le calcul; c'est une chance inespérée d'avoir trouvé le spécimen $\left(u_1, u_1+\omega, \frac{\omega}{2}-u_1, -\frac{\omega}{2}-u_1\right)$ qui rentre dans V_{20}, mais non dans $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$. Il n'y a, d'autre part, aucune contradiction dans le fait que nous avons trouvé un système spécial tel que $\left(u_1, u_1+\omega, \frac{\omega'}{2}-u_1, \omega+\frac{\omega'}{2}-u_1\right)$ qui rentre à la fois dans le type $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$ à 20 paramètres (parce que chaque tétraèdre de cette série est complété par un autre de cette série, en position de Möbius avec lui, relativement au couple de Θ donné par la demi-période ω') et dans le type V_{20} (parce qu'il correspond à $2a=\omega'$; mais, par opposition aux séries de V_{20}, le lieu du point A_1^h n'est pas une droite, mais un point); il est donc utile de montrer que les tétraèdres $\left(u_1, u_1+\omega, \frac{\omega'}{2}-u_1, \omega+\frac{\omega'}{2}-u_1\right)$ restent bien conjugués par rapport à une quadrique fixe (comme toutes les séries de V_{20}). En réalité, il faut tenir compte du fait qu'un couple de Möbius (ABCD), (A'B'C'D') fournit en réalité quatre couples de Möbius, d'après le schéma

$$\begin{Bmatrix} \text{ABCD} \\ \text{A'B'C'D'} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \text{ABC'D'} \\ \text{A'B'CD} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \text{AB'CD'} \\ \text{A'BC'D} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \text{AB'C'D} \\ \text{A'BCD'} \end{Bmatrix}$$

Le premier couple du système spécial que nous nous proposons d'étudier fournit une quadrique σ_1, unique, conjuguée par rapport à ces deux tétraèdres et, quand ABCD *varie* d'une façon continue par déplacement de A sur $\mathcal{B}$, les tétraèdres de cette série restent conjugués par rapport à σ_1, qui reste *fixe*. Le second couple fournit une quadrique analogue σ_2, distincte de σ_1, puisque le plan polaire de A est BCDA' pour σ_1 et BC'D'A' pour σ_2; de même on a σ_3, σ_4 pour le troisième et quatrième couples. Je rappelle les arguments de (A, B, C, D), (A', B', C', D'), ceux des points accentués étant obtenus en augmentant de $\pm\omega'$ (au choix pour + ou —) l'argument du même point non accentué.

A	B	C	D
u_1	$u_1+\omega$	$\frac{\omega'}{2}-u_1$	$\omega+\frac{\omega'}{2}-u_1$
A'	B'	C'	D'
$u_1+\omega'$	$u_1+\omega+\omega'$	$-\frac{\omega'}{2}-u_1$	$\omega-\frac{\omega'}{2}-u_1$

Il y aura donc une certaine équation du type (26) pour la série (ABCD) ou (A′B′CD′), (qui ne forme qu'une série), puis une *autre* équation pour la série (ABC′D′) ou (A′B′CD), et de même deux autres équations pour (AB′CD′), (A′BC′D) ou pour (AB′C′D) et (A′BCD′). Nous allons le vérifier, sous forme *algébrique* (au lieu de *transcendante*) en nous reportant à mon Mémoire déjà cité sur les *Couples de tétraèdres de Möbius* [*Annales de l'École Normale* (3), LVI, 1939, p. 71-118]; en utilisant les résultats de la page 105 (dont certains seront rappelés au paragraphe 8) on voit que les couples de Möbius inscrits dans une biquadratique $\mathcal{B}$ et circonscrits à une quadrique Σ *admettant* Θ *pour tétraèdre conjugué* correspondent à la forme canonique

$$(\mathcal{B}) \qquad \begin{cases} (Q) & x^2+y^2+z^2+t^2=0, \\ (Q_1) & x^2+y^2+m(z^2-t^2)=0, \end{cases}$$

$$(\Sigma) \qquad [c+d+m(c-d)]u^2+[c+d-m(c-d)]v^2+2cw^2+2rd^2=0,$$

étant entendu que l'involution biaxiale, relative à ω', correspond aux axes $x=y=0$, $z=t=0$. Σ dépend linéairement du paramètre arbitraire $c:d$; elle reste donc inscrite dans une développable $\mathcal{D}$ de classe 4, qui est celle que nous cherchons ici; il y a lieu aussi de chercher, parmi les quadriques inscrites dans $\mathcal{D}$, celles qui, étudiées ponctuellement, appartiennent au faisceau $\mathcal{B}$. Or, un peu d'attention montre que ces quadriques sont

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} q \equiv u^2+v^2+w^2+r^2=0, \\ q_1 \equiv m(u^2-v^2)+w^2-r^2=0, \end{cases}$$

car $\Sigma \equiv (c+d)q+(c-d)q_1$. Par conséquent, ce sont les quadriques Q, Q_1 elles-mêmes, qui jouent le rôle des quadriques appelées $Q\left(\pm\frac{\omega'}{2}\right)$, $Q\left(\pm\frac{\omega'}{2}+\omega\right)$ au paragraphe précédent. Chacune des quadriques Q, Q_1 est à elle-même sa réciproque par rapport à chacune des quadriques

$$\sigma_1 \equiv xz+yt=0, \qquad \sigma_2 \equiv xz-yt=0,$$
$$\sigma_3 \equiv xt-yz=0, \qquad \sigma_4 \equiv xt+yz=0.$$

On vérifie, sans peine, que si A $(x, y\ z, t)$ est un point de $\mathcal{B}$, on peut prendre pour coordonnées des divers sommets indiqués

$$\begin{array}{llll} A\,(x, y, z, t); & B\,(x, -y, -z, t); & C\,(-y, x, -t, z); & D\,(-y, -x, t, z), \\ A'(-x, -y, z, t); & B'(x, -y, z, -t); & C'(-y, x, t, -z); & D'(y, x, t, z). \end{array}$$

La série de couples (ABCD), (A′B′C′D′) reste conjuguée par rapport à σ_1; (ABC′D′), (A′B′, C, D) par rapport à σ_2; (AB′CD′), (A′BC′D) par rapport à σ_3 et (AB′C′D), (A′BCD′) par rapport à σ_4; on voit que l'involution ω est relative aux axes $(x=t=0)$, $(y=z=0)$ et l'involution $\omega+\omega'$ aux axes $(x=z=0)$, $(y=t=0)$.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer qu'avec les notations du paragraphe précédent nous avions deux quadrilatères gauches ACBD, AC′BD′ correspondant respectivement aux semi-quadriques $[Q(a), Q(a+\omega)]$ et aux semi-quadriques complémentaires $[Q(-a), Q(-a+\omega)]$.

Ici ACBD donne $Q\left(\frac{\omega'}{2}\right)$, $Q\left(\omega+\frac{\omega'}{2}\right)$ et AC′BD′ donne $Q\left(-\frac{\omega'}{2}\right)$, $Q\left(-\frac{\omega'}{2}+\omega\right)$; les tétraèdres ACB′D′ et AC′B′D correspondent respectivement aux semi-quadriques $Q\left(\frac{\omega'}{2}\right)$ et $Q\left(\overline{\omega+\omega'}+\frac{\omega'}{2}\right)$ et aux semi-quadriques complémentaires $Q\left(-\frac{\omega'}{2}\right)$ et $Q\left(\overline{\omega+\omega'}-\frac{\omega'}{2}\right)$(¹); cette fois l'involution $\omega(x=t=0, y=z=0)$ relative au couple (ACBD) ou (AC′BD′) a été remplacée par l'involution $\omega+\omega'$ relative au couple (ACB′D′) ou (AC′B′D) et aux axes $(x=z=0, y=t=0)$ de sorte qu'il n'y a finalement que trois développables différentes $\mathcal{D}$ à associer à $\mathcal{B}$, une pour chaque couple d'arêtes opposées de Θ et, à chaque fois, ce sont les deux quadriques harmoniquement inscrites-circonscrites l'une à l'une et relatives à ce couple d'arêtes opposées qui interviennent soit pour définir $\mathcal{B}$ ponctuellement, soit $\mathcal{D}$ tangentiellement.

Nous allons, maintenant que ce cas très particulier est traité, donner *algébriquement* (sans élément *transcendant*) la génération des tétraèdres inscrits dans une biquadratique $\mathcal{B}$, conjugués par rapport à une quadrique σ, formant une série ∞^1. On définit $\mathcal{B}$ et σ par les équations

$$(\mathcal{B}) \qquad \begin{cases} Q \equiv x^2-y^2+m(z^2-t^2)=0, \\ Q_1 \equiv x^2+y^2-z^2-t^2=0, \end{cases}$$

$$\sigma \equiv (\lambda+\mu)x^2+(\lambda-\mu)y^2+(\lambda-m\mu)z^2+(m\mu+\lambda)t^2 + 2Byz+2B'zx+2Cxt+2C'yt=0,$$

avec la relation

$$(27) \qquad 2\lambda\mu(1-m^2)+(B^2-C^2)(1-m)+(C'^2-B'^2)(1+m)=0.$$

Ces résultats ont été établis dans le Mémoire, déjà cité, écrit en collaboration avec M. Labrousse; on a bien 20 paramètres : 15 pour l'homographie générale, puis un pour la constante m, enfin les six paramètres homogènes λ; μ; B; B′; C; C′ liés par la relation (27). [Le cas $m=0$ donne la solution générale pour le cas particulier où $\mathcal{B}$ dégénère en deux coniques. Le cas $\lambda=\mu=0$ donne la solution générale $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ où il y a ∞^1 *couples de Möbius* inscrits dans $\mathcal{B}$,

---

(¹) Nous remarquons que la semi-quadrique $Q\left(\overline{\omega+\omega'}+\frac{\omega'}{2}\right)$ coïncide avec la semi-quadrique $Q\left(\omega-\frac{\omega'}{2}\right)$ déjà considérée et cela explique pourquoi les faces des huit tétraèdres étudiés ici sont tangentes à la même développable $\mathcal{D}$ circonscrite aux quadriques $Q\left(\pm\frac{\omega'}{2}\right)$, $Q\left\{\pm\left(\omega+\frac{\omega'}{2}\right)\right\}$.

circonscrits à $\mathcal{D}$ et conjugués par rapport à une quadrique σ : nous y revenons plus bas; il y a alors 18 paramètres et les couples de Möbius étudiés précédemment en sont un type très particulier à 16 paramètres seulement.]

Écartons $\lambda = \mu = 0$; il y a un exemple numérique particulièrement simple, pour lequel la vérification de toutes les propriétés est immédiate : supposons que σ admette Θ aussi pour tétraèdre conjugué; (27) devient $\lambda\mu(1-m^2) = 0$; le cas $m = \pm 1$ donnerait une courbe $\mathcal{B}$ réduite à quatre droites; donc prenons λ ou μ nul; les deux cas reviennent d'ailleurs l'un à l'autre, par un changement de notations facile à trouver. Prenons $\mu = 0$ de façon à avoir $\sigma \equiv x^2+y^2+z^2+t^2 = 0$. On constate aussitôt que le tableau

$$(28)\qquad \begin{cases} x & y & z & t \\ -x & -y & z & t \\ y & -x & -t & z \\ -y & x & -t & z \end{cases}$$

fournit quatre points de $\mathcal{B}$, sous la seule condition que le premier point soit sur $\mathcal{B}$; ces quatre points sont deux à deux conjugués par rapport à σ : cela revient à vérifier que le produit de deux lignes quelconques de ce tableau est nul : or quatre de ces produits sont nuls *identiquement* et le produit des deux premières, ou des deux dernières, est nul en vertu de $Q_1 = 0$. Les réciproques q, q_1 de Q et Q_1 par rapport à σ sont les quadriques d'équation tangentielle

$$(29)\qquad \begin{cases} q \equiv u^2 - v^2 + m(w^2 - r^2) = 0, \\ q_1 \equiv u^2 + v^2 - w^2 - r^2 = 0. \end{cases}$$

La quadrique q_1 coïncide d'ailleurs avec Q_1; mais q est distincte de Q. [On remarquera que la quadrique $xy + zt = 0$ aurait donné les mêmes réciproques (¹).] Si nous choisissons comme quadrique Σ, définie tangentiellement,

$$(30)\qquad \Sigma \equiv q + kq_1 \equiv (1+k)u^2 + (k-1)v^2 + (m-k)w^2 - (m+k)r^2 = 0,$$

chaque tétraèdre T, du tableau 28, a ses faces tangentes à Σ; si nous prenons la quadrique $Q + hQ_1 = 0$, qui va jouer le rôle de la quadrique $Ax^2 + \ldots$ du paragraphe **2**, on trouve en associant $Q + h\,Q_1 = 0$ à Σ

$$(31)\qquad \begin{cases} H = 4(m^2-1)(h+k)(k+h+2), \\ K = 4(m^2-1)(h+k)(k+h-2), \\ L = 4(m^2-1)(h+k)[-(k+h)+2m], \\ M = 4(m^2-1)(h+k)[-(k+h)-2m]. \end{cases}$$

Ceci met en évidence que, *dans le faisceau tangentiel* (q, q_1), *la qua-*

(¹) La polarité par rapport à $xy + zt = 0$ remplace un de nos tétraèdres par celui qui lui correspond dans la transformation $u = Y$, $v = X$, $w = T$, $r = Z$; (x, y, z, t) étant un sommet du premier, (y, x, t, z) est un sommet du second.

drique $q + kq_1 = 0$ coupe suivant quatre droites la quadrique $Q - kQ_1 = 0$ du faisceau ponctuel $\mathcal{B}$. Le point A_1^h a pour coordonnées

$$(A_1^h) \qquad x_0(k+h+2), \quad y_0(k+h-2), \quad z_0[-(k+h)+2m], \quad t_0[-(k+h)-2m].$$

Le lieu de A_1^h, quand h varie tandis que k est fixe, est la droite Δ_A d'équations

$$(32) \qquad xx_0 + yy_0 + zz_0 + tt_0 = 0, \qquad \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} + \frac{t}{t_0} = 0.$$

Cette droite Δ_A ne dépend d'ailleurs pas de k; si l'on écrit que le plan

$$x\left(x_0 + \frac{\lambda}{x_0}\right) + y\left(y_0 + \frac{\lambda}{y_0}\right) + z\left(z_0 + \frac{\lambda}{z_0}\right) + t\left(t_0 + \frac{\lambda}{t_0}\right) = 0$$

est tangent à Σ, on trouve $\lambda^2 = 0$: *la droite Δ_A n'est donc autre que la génératrice de la développable $\mathcal{D}$ circonscrite au faisceau tangentiel* (q, q_1); le plan $xx_0 + yy_0 + zz_0 + tt_0 = 0$, qui est le plan polaire de A par rapport à σ, est aussi le plan BCD; comme la quadrique Q_1 est à elle-même sa polaire réciproque q_1 par rapport à σ, le point A de $\mathcal{B}$ a pour transformé le plan BCD qui est tangent à q_1, le point de contact étant $(-x_0, -y_0, z_0, t_0)$, donc l'un des points B, C, D; nous pouvons, en respectant l'ordre du tableau (28) appeler B ce sommet, de sorte qu'en B le plan BCD est tangent à $\mathcal{B}$ (ce point B joue donc en même temps le rôle du point E). LA DROITE Δ_A CONTIENT LE POINT B, DE SORTE QUE $\mathcal{B}$ EST TRACÉE SUR $\mathcal{D}$. Cet exemple particulier coïncide avec celui qui a été obtenu au paragraphe précédent, en formant le tableau

A	B	C	D	C′	D′
u_1	$u_1 + \omega$	$a - u_1$	$a + \omega - u_1$	$-a - u_1$	$-a + \omega - u_1$

et supposant que a ait l'une des valeurs $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + \omega'$ de façon que C et D′ coïncident, ainsi que D et C′; ces deux cas $a = \frac{\omega}{2}$, ou $a = \frac{\omega}{2} + \omega'$ correspondent aux deux cas $\lambda = 0$, $\mu = 0$ qui donnent, pour une même courbe $\mathcal{B}$, deux séries distinctes (chacune des séries fournit une quadrique σ distincte de la quadrique σ' relative à l'autre. On constate, conformément aux prévisions du paragraphe qui précède que la développable $\mathcal{D}$ (pour $\mu = 0$) ne contient plus que la quadrique q_1 qui appartienne, du point de vue *ponctuel*, au faisceau linéaire défini par $\mathcal{B}$.

8. ÉTUDE DU CAS OÙ Σ COUPE SUIVANT QUATRE DROITES, DEUX QUADRIQUES DU FAISCEAU $\mathcal{B}$. — Le lieu de A_1^h

$$(A_1^h) \qquad p + qh + rh^2, \quad p' + q'h + r'h^2, \quad p'' + q''h + r''h^2, \quad p''' + q'''h + r'''h^2$$

ne se réduit à un point que si ces quatre trinomes sont proportionnels; ils ont donc les mêmes racines et réciproquement. Si ces racines sont distinctes, *il y a deux quadriques issues de $\mathcal{B}$ coupées par Σ suivant quatre droites;* si ces deux racines sont confondues, *il y a une seule quadrique du faisceau coupée par Σ suivant quatre droites, mais elle compte pour deux.* De toutes façons, il y a ∞^2 couples de Möbius inscrits dans $\mathcal{B}$ et circonscrits à Σ : *le résultat est basé sur la proposition géométrique de M. Rowe* et je renvoie le lecteur à mon Mémoire sur les *Couples de tétraèdres de Möbius* [*Annales de l'École Normale* (3), LVI, 1939, p. 71-118]. La biquadratique $\mathcal{B}$ est définie par les équations canoniques

$$(Q) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

$$(Q_1) \qquad x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2) = 0,$$

où figurent (non explicitement) les 15 paramètres de l'homographie générale et l'*invariant m* relatif à $\mathcal{B}$. La quadrique Σ a pour équation tangentielle

$$(\Sigma) \qquad au^2 + bv^2 + 2euv + cw^2 + dr^2 + 2fwr = 0.$$

avec les conditions

$$(33) \qquad a + b = c + d, \qquad a - b = m(c - d).$$

Avec les notations employées ici, *les deux quadriques coupées par Σ suivant quatre droites* sont $Q - \rho Q_1 = 0$, $Q + \rho Q_1 = 0$, où ρ est fourni par l'équation

$$(34) \qquad (1 - \rho^2)(ab - e^2) = (1 - m^2\rho^2)(cd - f^2).$$

Le lieu de A''_1 se réduit au point A' homologue de A dans l'involution biaxiale $(x = y = 0)$, $(z = t = 0)$. On choisit A au hasard sur $\mathcal{B}$, puis un plan tangent α quelconque de Σ issu de A'; ce plan recoupe $\mathcal{B}$ en B, C, D; nous appelons B′, C′, D′ les homologues de B, C, D dans l'involution en jeu et nous avons les tétraèdres

A B C D	A B C′D′	A B′C D′	A B′C′D
A′B′C′D′	A′B′C D	A′B C′D	A′B C D′

deux à deux en position de Möbius, inscrits dans $\mathcal{B}$, circonscrits à Σ; chaque point A de $\mathcal{B}$ fournit ∞^1 tétraèdres ayant un de leurs sommets en A, dont un seul a sa base dans le plan α choisi; chaque plan α tangent à Σ fournit quatre tétraèdres.

Si $ab - e^2 = cd - f^2$, l'équation (34) n'a que la racine double $\rho = 0$ et $Q = 0$ *est la seule quadrique issue de $\mathcal{B}$, coupée par Σ suivant quatre droites,* mais elle compte pour *deux*, de sorte que ce cas est bien distinct de celui où il y a une seule quadrique comptant pour *un* (et où il y a ∞^1 tétraèdres seulement, sans couple de Möbius). Ce cas $ab - e^2 = cd - f^2$ continue à donner ∞^2 couples de Möbius, le résultat s'obtenant par continuité, les deux quadriques $Q - \rho Q_1 = 0$, $Q + \rho Q_1 = 0$ tendant à se confondre, pendant que $ab - e^2$ et $cd - f^2$ tendent vers une valeur commune. Si l'on avait $ab - e^2 = m^2(cd - f^2)$, $Q_1 = 0$ serait, au lieu de Q, la seule quadrique coupant Σ suivant quatre droites.

La configuration générale $(\mathcal{B}, \Sigma)$ étudiée ici [en supposant que $ab - e^2 - (cd - f^2)$ et $ab - e^2 - m^2(cd - f^2)$ ne sont pas nulles], dépend de 19 paramètres : 16 pour $\mathcal{B}$, 3 pour Σ. La quadrique $Q - \rho Q_1 = 0$, où ρ est racine de (34), coupe Σ suivant quatre droites; si donc Σ est *distincte* de $Q - \rho Q_1$, il y a deux quadriques σ_1, σ_2 de la forme $\sigma \equiv Byz + B'zx + Cxt + C'yt = 0$, transformant $Q - \rho Q_1$ en Σ par polarité : il existe, dans l'ensemble des ∞^2 couples de Möbius relatifs à $(\mathcal{B}, \Sigma)$, une série ∞^1, dont tous les tétraèdres sont conjugués par rapport à σ_1, dont toutes les faces sont tangentes à $\mathcal{D}'$, réciproque de $\mathcal{B}$ par rapport à σ_1 (¹) (et de même une autre série pour σ_2, avec la développable $\mathcal{D}''$); la quadrique $Q + \rho Q_1 = 0$, où ρ a la même valeur, donne de même $(\sigma_3, \mathcal{D}''')$ et $(\sigma_4, \mathcal{D}'''')$; $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$, $\mathcal{D}'''$, $\mathcal{D}''''$ *sont distinctes*. Ces résultats se justifient en se souvenant que si deux quadriques Q, Σ se coupent suivant quatre droites, on peut ramener leurs équations à la forme réduite $\overline{Q} \equiv X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2$, $\Sigma \equiv \dfrac{X^2+Z^2}{\alpha} + \dfrac{Y^2+T^2}{\beta}$ ($Q - \rho Q_1$ joue le rôle de $\overline{Q}$); les axes $X = Y = 0$, $Z = T = 0$, rencontrent les couples de côtés opposés du quadrilatère gauche commun; si $\alpha \neq \beta$, $\overline{Q}$ et Σ sont *distinctes* et l'on ne trouve que $\sigma = ZX\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}} + YT = 0$ pour la polarité, la détermination du radical étant quelconque. Mais si $\alpha = \beta$, $\overline{Q}$ et Σ *coïncident*, et l'on trouve alors non plus *deux* mais ∞^1 quadriques :

$$C(YZ + \eta XT) + C'(ZX - \eta YT) = 0$$

où C et C' sont des constantes arbitraires et $\eta = \pm 1$. Étudions donc les divers cas possibles pour $\mathcal{B}$, Σ.

Si Σ n'admet pas Θ comme tétraèdre conjugué, elle ne peut coïncider avec $Q \pm \rho Q_1 = 0$ et par conséquent on ne trouve que quatre séries ∞^1 de couples de Möbius (2 pour $Q - \rho Q_1 = 0$, 2 pour $Q + \rho Q_1 = 0$) à extraire de l'ensemble ∞^2 relatif à $(\mathcal{B}, \Sigma)$. Ceci a été signalé dans mon Mémoire déjà cité sur les couples de Möbius.

Mais ce Mémoire a une lacune pour le cas où Θ est conjugué par rapport

---

(¹) Chaque plan tangent de $\mathcal{D}'$ supporte quatre tétraèdres inscrits dans $\mathcal{B}$ circonscrits à $\mathcal{D}'$, mais il n'y en a qu'un qui soit conjugué par rapport à σ_1. Les coefficients des quadriques σ satisfont à la relation

$$(m-1)(B'^2 - C'^2) + (m+1)(B^2 - C^2) = 0$$

qui exprime que la quadrique Q' réciproque de Q est Möbius-ment inscrite dans Q_1 et aussi que Q'_1 l'est dans Q et c'est la forme de cette relation qui conduit à envisager le cas précis $B^2 = C^2$, $B'^2 = C'^2$ indiqué plus bas.

à Σ; on suppose $e=f=0$, et les équations (33) montrent qu'en posant

$$q \equiv u^2+v^2+w^2+r^2=0, \qquad q_1 \equiv m(u^2-v^2)+w^2-r^2=0,$$

de sorte que q et q_1 sont les quadriques Q, Q_1 définies cette fois *tangentiellement*, on a pour équation tangentielle de Σ, $\Sigma \equiv (c+d)q+(c-d)q_1=0$, où c et d sont constants; Σ ne peut donc coïncider avec une quadrique du faisceau *ponctuel* $Q \pm \rho Q_1=0$, que si ρ est nul ou infini et Σ se réduit à q ou q_1. Il n'y a donc, *en général*, que quatre séries ∞^1 de tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique fixe σ (chaque série donne une quadrique σ différente), *même si Σ est conjugué par rapport à Θ.*

Mais il y a deux cas exceptionnels qui sont ceux où Σ coïncide soit avec q soit avec q_1 : il suffit d'étudier l'un, par exemple le cas où Σ coïncide avec q. Si nous prenons

$$\sigma \equiv \eta(Cyz - C'zx) + Cxt + C'yt,$$

la développable $\mathcal{D}$ réciproque de $\mathcal{B}$ par rapport à σ est définie par les deux quadriques, réciproques de Q et Q_1,

$$q \equiv u^2+v^2+w^2+r^2,$$
$$q_1 \equiv (C'^2-C^2)[m(u^2-v^2)+w^2-r^2]-4CC'(muv+\eta wr).$$

On peut remarquer que la quadrique nouvelle (avec le même η)

$$\bar\sigma \equiv \eta(C'yz + Czx) + C'xt - Cyt$$

donne les *mêmes* réciproques, car le quotient $\dfrac{C\,C'}{C'^2-C^2}$ ne change pas si l'on remplace $\dfrac{C}{C'}$ par $-\dfrac{C'}{C}$: *donc cette fois chaque plan tangent de $\mathcal{D}$ supporte quatre tétraèdres inscrits dans $\mathcal{B}$, circonscrits à $\mathcal{D}$: l'un est conjugué par rapport à σ, un autre par rapport à $\bar\sigma$, mais les deux autres ne restent pas conjugués par rapport à une quadrique fixe quand le plan tangent à $\mathcal{D}$ varie.* Du moins l'énoncé qui vient d'être donné suppose $C\,C' \neq 0$; *si* C *ou* C' *est nul, on voit que chaque quadrique*

$$\sigma_1 \equiv xz+yt=0, \qquad \sigma_2 \equiv xz-yt=0, \qquad \sigma_3 \equiv xt-yz=0, \qquad \sigma_4 \equiv xt+yz=0$$

donne la même développable transformée $\mathcal{D}$ ($q=0$, $q_1=0$), de sorte que les quatre tétraèdres portés par un même plan tangent de $\mathcal{D}$ restent, chacun, conjugués par rapport à une quadrique fixe, σ_1, σ_2, σ_3 ou σ_4; ce cas a été signalé au paragraphe précédent. Finalement, si Σ coïncide avec q ou q_1, on voit que les ∞^2 tétraèdres relatifs à $\mathcal{B}$ et Σ ont été répartis en ∞^1 séries, chaque série étant caractérisée par la valeur de $\dfrac{C}{C'}$ et dans chaque série il y a ∞^1 tétraèdres conjugués par rapport à une même quadrique.

On peut dire que les 19 paramètres relatifs à $\mathcal{B}$ et Σ, en revenant au cas général étudié dans ce paragraphe sont obtenus ainsi : $\mathcal{B}$ donne 16 paramètres;

on choisit ensuite pour B, B′, C, C′ une solution de l'équation

$$(m-1)(B'^2-C'^2)+(m+1)(B^2-C^2)=0 \tag{35}$$

qui exprime que les réciproques de Q et Q_1 par rapport à σ sont Möbius-ment inscrites dans Q_1 et Q respectivement : cette relation se déduit d'ailleurs de (27) en y faisant $\lambda=\mu=0$ (et tenant compte d'un changement de notations imposé par l'opportunité : on a changé z et t en iz, it de sorte qu'il a fallu remplacer m par $-m$). On choisit ensuite une constante arbitraire ρ et l'équation de Σ devient

$$\begin{aligned}[t]&[(1+m\rho)B^2+(1-m\rho)C'^2]u^2+[(1+m\rho)B'^2+(1-m\rho)C^2]v^2\\&+2[(m\rho-1)CC'-(1+m\rho)BB']uv+[(1+\rho)C^2+(1-\rho)C'^2]w^2\\&+[(1-\rho)B^2+(1+\rho)B'^2]r^2+2[(\rho-1)BC'-B'C(1+\rho)]wr=0.\end{aligned} \tag{36}$$

On a ainsi retrouvé les 19 paramètres de $(\mathcal{B}, \Sigma)$ *mais ce procédé ne montre pas que Σ peut être obtenue ainsi de quatre façons différentes* (ρ ayant deux valeurs possibles, opposées, et chaque valeur de ρ fournissant deux systèmes distincts B : B′ : C : C′); *il y a même un cas particulier où Σ peut être obtenue de ∞^1 façons par le procédé* (en prenant $B^2-C^2=0$, $B'^2-C'^2=0$ et $\rho=0$ ou ∞).

Cherchons maintenant *à associer à $\mathcal{B}$ une développable $\mathcal{D}_1$ admettant ∞^1 couples de Möbius inscrits dans $\mathcal{B}$, circonscrits à $\mathcal{D}_1$, sans autre condition.* Nous trouvons une variété à 20 paramètres, définie par les équations

$$\mathcal{B} \qquad x^2+y^2+z^2+t^2=0, \qquad x^2-y^2+m(z^2-t^2)=0;$$

$$\mathcal{D}_1 \qquad \begin{cases} au^2+bv^2+cw^2+dr^2+2euv+2fwr=0,\\ a'u^2+b'v^2+c'w^2+d'r^2+2e'uv+2f'wr=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=c+d, & a-b=m(c-d),\\ a'+b'=c'+d', & a'-b'=m(c'-d');\end{cases} \tag{37}$$

$$ab'+ba'-2ee'=0, \qquad cd'+dc'-2ff'=0. \tag{38}$$

Les équations (37) sont les équations *strictement nécessaires et suffisantes;* mais, pour ne pas introduire de paramètres superflus, on doit astreindre l'ensemble des deux quadriques tangentielles, définissant $\mathcal{D}_1$, à deux conditions (qui dépendent plus ou moins de l'arbitraire du chercheur); il est commode de choisir précisément les deux quadriques harmoniquement circonscrites-inscrites l'une à l'autre, relatives au couple d'arêtes $(x=y=0)$, $(z=t=0)$ et cela donne les conditions (38). On a ainsi un système $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$ à 20 paramètres : un plan tangent quelconque de $\mathcal{D}_1$ coupe $\mathcal{B}$ en quatre points, dont on élimine l'un, au hasard, pour le remplacer par son homologue dans l'involution biaxiale $(x=y=0)$, $(z=t=0)$: chaque plan tangent de $\mathcal{D}_1$ donne ainsi quatre tétraèdres ayant une face dans ce plan : ABCD étant l'un, et A′, B′, C′, D′ étant les homologues respectifs de ABCD, les deux tétraèdres ABCD, A′B′C′D′ forment le couple de Möbius général annoncé. On sait que ABCD et A′B′C′D′ sont *chacun conjugué par rapport à une quadrique σ unique, qui, en* *général, varie quand* ABCD *varie*, A *décrivant* $\mathcal{B}$. Mais si nous introduisons les deux équations complémentaires

$$(39) \qquad ab - e^2 = cd - f^2, \qquad a'b' - e'^2 = m^2(c'd' - f'^2),$$

on obtient une *configuration* ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) *à dix-huit paramètres possédant cette propriété que* ∞^1 *tétraèdres (choisis convenablement sur le total* ∞^1 *trouvé) sont tous conjugués par rapport à une même quadrique* $\sigma \equiv Byz + B'zx + Cxt + C'yt$, au lieu d'avoir une quadrique σ variable avec le couple de Möbius adopté; par polarité, σ transforme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ en la première quadrique $au^2 + \ldots = 0$ qui définit $\mathcal{D}_1$ et la seconde quadrique $x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2) = 0$ en la seconde quadrique $a'u^2 + \ldots = 0$ définissant $\mathcal{D}$.

Les couples ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) *à* 18 *paramètres peuvent être obtenus par particularisations successives de l'équation*

$$(40) \qquad \lambda_1\left[\alpha_1 \operatorname{sn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \ldots + \alpha_4\right] + \lambda_2\left[\beta_1 \operatorname{sn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \ldots + \beta_4\right] = 0$$

écrite déjà plusieurs fois; on y remplace d'abord ($2a$) par une demi-période, ce qui réduit le nombre de paramètres de ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) à 20, au lieu de 21 (introduction d'une quadrique σ conjuguée par rapport aux tétraèdres de la série); on ajoute ensuite deux conditions convenables nouvelles entre les α_i, β_i pour obtenir des *couples de Möbius;* ces conditions reviennent à écrire que, pour une valeur nouvelle de $\lambda_1 : \lambda_2$, l'équation (40) a pour racines celles de la première équation augmentées chacune de cette demi-période adoptée. L'une des façons d'obtenir ce résultat est d'écrire

$$(41) \qquad \begin{aligned} &\lambda_1\left[\alpha_1 \operatorname{sn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \alpha_2 \operatorname{cn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \alpha_3 \operatorname{dn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \alpha_4\right] \\ &+ \lambda_2\left[\alpha_1 \operatorname{sn}\left(u + \frac{3a}{2}\right) + \alpha_2 \operatorname{cn}\left(u + \frac{3a}{2}\right) + \alpha_3 \operatorname{dn}\left(u + \frac{3a}{2}\right) + \beta_4\right] = 0. \end{aligned}$$

où $2a$ est égal à $2K$, $2iK'$, ou $2(K + iK')$: dans ces conditions, les valeurs de $\lambda_1 : \lambda_2$ correspondant à deux tétraèdres en position de Möbius sont inverses l'une de l'autre. Si, pour fixer les idées, on prend $2a = 2K$, on a comme conséquence des relations

$$\operatorname{sn}(u + 2K) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{cn}(u + 2K) = \operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u$$

l'équation suivante :

$$\lambda_1[\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4] + \lambda_2[-\alpha_1 x - \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4] = 0.$$

ou plus simplement

$$(42) \qquad \mu_1(y - Cx) + \mu_2(z - C_1) = 0,$$

où C, C_1, sont des constantes *données*, $\mu_1 : \mu_2$ un paramètre *arbitraire;* on coupe $\mathcal{B}$ par le plan variable (42), qui pivote autour d'une droite fixe, δ s'appuyant sur les arêtes $(x=y=0)$, $(z=t=0)$ de Θ; si $\overline{u}_i$ est l'argument d'un point d'intersection de $\mathcal{B}$ par ce plan et si $2a$ désigne toujours la période relative à ce couple d'arêtes, on a $u_i=\overline{u}_i+\frac{a}{2}$ pour le premier tétraèdre et $v_i=\overline{u}_i-\frac{3a}{2}$ pour le second. On a retrouvé les 18 paramètres (16 pour $\mathcal{B}$, puis les deux constantes C, C_1).

Il importe d'insister sur ces configurations $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ à 18 paramètres [au lieu de 20 comme celles appelées $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$ pour pouvoir différencier les deux cas]; elles jouent un rôle fondamental, du moins dans la théorie des couples de Möbius. Je rappelle que si une quadrique Q et une quadrique Σ admettent *un* couple de Möbius inscrit dans Q, circonscrit à Σ, elles en admettent ∞^4; les droites AA′, BB′, CC′, DD′ rencontrent deux droites fixes Δ, Δ' qui sont conjuguées par rapport à Q et aussi Σ; les équations de Q et Σ, si Δ est $(x=y=0)$, Δ' $(z=t=0)$, sont

$$Q \equiv Ax^2+By^2+Cz^2+Dt^2+2Exy+2Fyz,$$
$$\Sigma \equiv au^2+bv^2+cw^2+dr^2+2euv+2fwr,$$

avec la condition *nécessaire et suffisante*

$$Aa+Bb+2Ee=Cc+Dd+2Ff$$

pour laquelle j'ai employé la locution suivante : Σ *est Möbius-ment inscrite dans* Q, *relativement au couple* Δ, Δ'. Les ∞^4 couples se répartissent alors en ∞^3 familles, chaque famille correspondant à une quadrique

$$\sigma \equiv \beta yz+\beta' zx+\gamma xt+\gamma' yt$$

contenant Δ, Δ'; cette famille comprend ∞^1 couples tous conjugués par rapport à σ : les faces des couples de cette famille sont tangentes à la quadrique Q′ réciproque de Q par rapport à σ; comme ces faces sont aussi tangentes à Σ, elles sont tangentes à la développable $\mathcal{D}$ déterminée tangentiellement par Q′ et Σ (Σ est distincte de Q′, si l'on suppose que Σ ne coupe pas Q suivant quatre droites; Q′ coupe Q suivant quatre droites, en raison du choix de la quadrique σ). Pour la même raison les sommets des couples de cette famille sont sur la quadrique Q_1 réciproque de Σ par rapport à σ, donc sur la courbe $\mathcal{B}$ intersection de Q et Q_1. Nous retrouvons ainsi une configuration $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ à 18 paramètres : la configuration $(\mathcal{B}, \Sigma)$ dépend de 19 paramètres parce que, pour l'obtenir, nous devons *obligatoirement* passer par l'intermédiaire d'une développable $\mathcal{D}$ associée à $\mathcal{B}$, et nous inscrivons ensuite une quadrique quelconque dans $\mathcal{D}$, ce qui introduit un paramètre nouveau et un seul; nous savons d'ailleurs que Σ peut être obtenue de cette façon quatre fois (et même ∞^1 fois).

Nous avons maintenant à traiter un problème qui a été omis dans mon Mémoire sur les couples de Möbius : une de ces configurations $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ à

18 paramètres étant donnée, chaque plan tangent de $\mathcal{D}$ est support, exactement comme pour une configuration ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}_1$) à 20 paramètres, de quatre tétraèdres ayant une face dans ce plan : *en général, il n'y en a qu'un qui soit conjugué par rapport à la quadrique fixe* σ *en jeu;* si l'on appelle

A B C D	A B C'D'	A B'C D'	A B'C'D
A'B'C'D'	A'B'C D	A'B C'D	A'B C D'

les quatres couples de Möbius relatifs aux tétraèdres

ABCD A'B'CD A'BC'D A'BCD'

qui ont une face dans le plan tangent considéré (coupant $\mathcal{B}$ en A', B, C, D), le couple ABCD, A'B'C'D' définit une quadrique σ *qui reste fixe* quand ABCD se déplace en engendrant la série ∞^1 annoncée; mais le couple ABC'D', A'B'CD par exemple est formé de deux tétraèdres conjugués par rapport à une même quadrique σ' et *cette quadrique* σ' *varie* quand le couple, suivi par continuité, se déplace; de même pour chaque couple (AB'CD', A'BC'D) ou (AB'C'D, A'BCD'). Autrement dit, quand nous considérons *les configurations* ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}_1$) *à* 20 *paramètres, elles définissent non pas une seule série* ∞^1 *de couples de Möbius, mais quatre séries* ∞^1 : chaque plan tangent de $\mathcal{D}_1$ donnant quatre couples (ce plan coupe $\mathcal{B}$ en quatre points donnés par une équation *irréductible* de degré 4); *pour les systèmes* ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) *à* 18 *paramètres, on trouve encore quatre séries* ∞^1, *mais l'une d'elles se sépare rationnellement de l'ensemble des trois autres:* chaque plan tangent de $\mathcal{D}$ fournit quatre points d'intersection avec $\mathcal{B}$, et l'un des points d'intersection se détermine rationnellement en u, v, w, r; *c'est la série correspondante qui est fournie par l'équation* (41) *ou* (42) *formée plus haut; mais les trois autres séries échappent à ce procédé, exactement comme pour* ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}_1$).

Nous avons obtenu précédemment des systèmes particuliers ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) où *non seulement une série, mais deux séries se séparent rationnellement,* donnant chacune une quadrique fixe σ' ou σ'', et même un système particulier ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) où les *quatre séries se séparent rationnellement,* chacune avec une quadrique qui lui est propre.

Nous voulons maintenant trouver tous les systèmes inclus dans les configurations ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) où deux séries ∞^1 de couples de Möbius (sur l'ensemble des quatre séries) se séparent rationnellement, les tétraèdres de chacune de ces deux séries étant conjugués par rapport à une même quadrique. Le problème revient analytiquement à ceci : on a deux quadriques

$$(43)\qquad \begin{cases} (Q) & x^2+y^2+z^2+t^2 = 0, \\ (Q_1) & x^2-y^2+m(z^2-t^2)=0. \end{cases}$$

Nous les transformons par polarité relativement à une quadrique σ

$$(44)\qquad (\sigma)\quad Byz+B'zx+Cxt+C'yt=0.$$

où les coefficients B, B′, C, C′ satisfont à la condition déjà donnée

$$B^2+C'^2-B'^2-C^2=m(C^2+C'^2-B^2-B'^2). \tag{45}$$

Nous obtenons ainsi deux quadriques transformées

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &(q)\quad (B^2+C'^2)u^2+(B'^2+C^2)v^2-2(BB'+CC')uv\\ &\qquad\quad +(C^2+C'^2)w^2+(B^2+B'^2)t^2-2(BC'+B'C)wt=0,\\ &(q_1)\quad m(C'^2-B^2)u^2+m(C^2-B'^2)v^2+2m(BB'-CC')uv\\ &\qquad\quad +(C'^2-C^2)w^2+(B^2-B'^2)t^2+2(B'C-BC')wt=0. \end{aligned}\right.$$

La biquadratique $\mathcal{B}(Q, Q_1)$, réunie à la développable $\mathcal{D}(q, q_1)$ forme cette configuration à 18 paramètres admettant *une* série ∞^4 de couples de Möbius, tous conjugués par rapport à σ. S'il existe une seconde série analogue relative à une autre quadrique $\bar{\sigma}$, cela prouve que la nouvelle quadrique

$$(\bar{\sigma})\qquad \bar{B}yz+\bar{B}'zx+\bar{C}xt+\bar{C}'yt=0$$

transforme ([1]) aussi Q en q et Q_1 en q_1 et réciproquement. Les conditions nécessaires et suffisantes sont donc

$$\frac{\bar{B}^2+\bar{C}'^2}{B^2+C'^2}=\frac{\bar{B}'^2+\bar{C}^2}{B'^2+C^2}=\frac{\bar{B}\bar{B}'+\bar{C}\bar{C}'}{BB'+CC'}=\frac{\bar{C}^2+\bar{C}'^2}{C^2+C'^2}=\frac{\bar{B}^2+\bar{B}'^2}{B^2+B'^2}=\frac{\bar{B}\bar{C}'+\bar{B}'\bar{C}}{BC'+B'C}, \tag{47}$$

$$\frac{\bar{C}'^2-\bar{B}^2}{C'^2-B^2}=\frac{\bar{C}^2-\bar{B}'^2}{C^2-B'^2}=\frac{\bar{B}\bar{B}'-\bar{C}\bar{C}'}{BB'-CC'}=\frac{\bar{C}'^2-\bar{C}^2}{C'^2-C^2}=\frac{\bar{B}^2-\bar{B}'^2}{B^2-B'^2}=\frac{\bar{B}'\bar{C}-\bar{B}\bar{C}'}{B'C-BC'}. \tag{48}$$

On remarque, en vertu des identités

$$(B^2+C'^2)(B'^2+C^2)-(BB'+CC')^2\equiv(BC-B'C')^2,$$
$$(C'^2-B^2)(C^2-B'^2)-(BB'-CC')^2\equiv-(BC-B'C')^2,$$

que la valeur commune des rapports (47) est $\varepsilon\left(\dfrac{\bar{B}\bar{C}-\bar{B}'\bar{C}'}{BC-B'C'}\right)$ et celle des rapports (48), $\varepsilon'\left(\dfrac{\bar{B}\bar{C}-\bar{B}'\bar{C}'}{BC-B'C'}\right)$ où ε et ε' sont égaux à $+1$ ou -1, et cela indépendamment l'un de l'autre; d'ailleurs $BC-B'C'$ ou $\bar{B}\bar{C}-\bar{B}'\bar{C}'$ ne sont pas nuls, sinon σ ou σ' se décomposerait en deux plans; il y a donc deux cas à distinguer : $\varepsilon=\varepsilon'$, les rapports (47), (48) sont tous égaux, puis $\varepsilon=-\varepsilon'$, les rapports (48) sont tous égaux à la valeur opposée des rapports (47).

Le premier cas entraîne les conditions nécessaires et suffisantes

$$\frac{\bar{B}^2}{B^2}=\frac{\bar{B}'^2}{B'^2}=\frac{\bar{C}^2}{C^2}=\frac{\bar{C}'^2}{C'^2}=\frac{\bar{B}\bar{B}'}{BB'}=\frac{\bar{B}\bar{C}'}{BC'}=\frac{\bar{B}'\bar{C}}{B'C}=\frac{\bar{C}\bar{C}'}{CC'}$$

et si aucun des nombres B, B′, C, C′ n'est nul, on voit aussitôt que $\bar{\sigma}$ coïncide

---

([1]) Q et q se coupent suivant quatre droites; Q_1 et q_1 aussi; mais Q et q_1 ne se coupent pas suivant quatre droites, non plus que Q_1 et q; c'est donc Q et q qui s'associent, ainsi que Q_1 et q_1.

avec σ; si B est nul, $\overline{B}$ doit être nul aussi et, en remarquant que $B'C'$ ne peut être nul, si C n'est pas nul lui-même, σ et $\overline{\sigma}$ coïncident encore; donc on doit essayer $B = C = \overline{B} = \overline{C} = o$, et les conditions reviennent simplement à

$$\frac{\overline{C}'^2}{C'^2} = \frac{B'^2}{\overline{B}'^2}$$

et alors nous avons, d'après (45),

$$(m-1)(C'^2 - B'^2) = o.$$

La relation $m = 1$ donnerait une courbe $\mathcal{B}$ dégénérée en quatre droites; donc on doit prendre $C'^2 = B'^2$ et nous avons la solution

$$\sigma \equiv zx + yt, \qquad \overline{\sigma} \equiv zx - yt.$$

Nous retrouvons un cas déjà signalé (où les quatre séries de tétraèdres données par $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ conviennent toutes les quatre). Si nous avions essayé $B' = o$, on aurait de même trouvé $B' = C' = \overline{B}' = \overline{C}' = o$, $B^2 - C^2 = o$ et

$$\sigma \equiv yz + xt, \qquad \overline{\sigma} = yz - xt,$$

de sorte que nous retrouvons les quatre séries en jeu relatives à la développable

$$u^2 + v^2 + w^2 + r^2 = o, \qquad m(u^2 - v^2) + w^2 - r^2 = o.$$

Il reste donc à étudier le cas où les rapports (47), tous égaux entre eux, sont opposés aux rapports (48) : les conditions nécessaires et suffisantes sont alors

$$\frac{\overline{B}^2}{C'^2} = \frac{\overline{C}'^2}{B^2} = \frac{\overline{B}'^2}{C^2} = \frac{\overline{C}^2}{B'^2} = \frac{\overline{C}\,\overline{C}'}{BB'} = \frac{\overline{B}\,\overline{B}'}{CC'} = \frac{\overline{C}^2}{C'^2} = \frac{\overline{C}'^2}{C^2} = \frac{\overline{B}^2}{B'^2} = \frac{\overline{B}'^2}{B^2} = \frac{\overline{B}\,\overline{C}'}{B'C} = \frac{\overline{B}'\overline{C}}{BC'}.$$

On a toujours à distinguer le cas où le produit $BCB'C'$ est nul ou non. Si l'on suppose $B = o$, on devra avoir aussi $C = B' = C' = o$ et l'on trouve les associations

$$\overline{\sigma} \equiv yz + \varepsilon xt, \qquad \sigma \equiv zx + \eta yt \qquad (\varepsilon = \pm 1,\ \eta = \pm 1),$$

qui donnent le même résultat que précédemment, avec une autre association des quadriques σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 précédemment obtenues, résultat évident *a priori* [σ_1 et σ_2 s'associent pour le premier type de solution indiqué ici, ainsi que σ_3 et σ_4; mais σ_1 s'associe avec σ_3 ou σ_4 pour le second type de solution indiqué ici, de même σ_2 s'associe avec σ_3 ou σ_4].

Si $BCB'C' \neq o$, une discussion, assez longue mais facile, prouve que l'on obtient deux solutions : d'abord

$$(49)\quad \left\{\begin{array}{l} q \equiv (C^2 + C'^2)(u^2 + v^2 + w^2 + r^2) - 4CC'(uv + \eta wr) = o, \\ q_1 \equiv m(u^2 - v^2) + w^2 - r^2 = o, \\ \sigma \equiv \eta(Cyz + C'zx) + Cxt + C'yt \qquad (\eta = \pm 1), \\ \overline{\sigma} \equiv \eta(C'yz + Czx) + C'xt + Cyt, \end{array}\right.$$

ou bien

$$
(50) \quad \begin{cases} q \equiv u^2 + v^2 + w^2 + r^2 = 0, \\ q_1 \equiv (C'^2 - C^2)[m(u^2 - v^2) + w^2 - r^2] - 4CC'(muv + \eta wr) = 0, \\ \sigma \equiv \eta(Cyz - C'zx) + Cxt + C'yt \qquad (\eta = \pm 1), \\ \sigma' \equiv \eta(C'yz + Czx) + C'xt - Cyt. \end{cases}
$$

Les deux cas reviennent d'ailleurs l'un à l'autre par un changement de notations, mais pour une courbe $\mathcal{B}$ *donnée* ils donnent des solutions différentes. Dans le premier cas, si l'on prend pour équation de q

$$
u^2 + v^2 + w^2 + r^2 - 2k(uv + \eta wr) = 0,
$$

on détermine $C:C'$ par l'équation $k = \dfrac{2CC'}{C'+C'^2}$ et cela explique pourquoi σ a deux déterminations; de même pour l'autre cas. Les formules (49), (50) donnent donc tous les systèmes ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) possédant *deux* systèmes de couples de Möbius conjugués par rapport à une quadrique fixe; ils dépendent de 17 paramètres exactement.

9. Cas où $\mathcal{B}$ dégénère en deux coniques. — Quand $\mathcal{B}$ est constituée des deux coniques bisécantes Γ_1, Γ_2 et que Σ est *quelconque* vis-à-vis de ces deux coniques, *on n'obtient plus que 4 tétraèdres* non dégénérés, deux sommets sont sur l'une des coniques, et les deux autres sur l'autre. On le vérifie aisément dans le cas où il existe un tétraèdre conjugué commun à Σ et aux quadriques du faisceau (Γ_1, Γ_2) : on reprend les équations (5) et l'on y suppose $n' = 0$. Il est facile d'expliquer pourquoi on trouve quatre tétraèdres au lieu de six (que le tétraèdre conjugué en jeu existe ou non); si A, C sont les points communs aux deux coniques, on peut mener de AC deux plans α, γ tangents à Σ, il y a deux tétraèdres dégénérés qui viennent compléter les 4 non dégénérés; deux sommets sont réunis en A, deux en C; quatre arêtes sont confondues avec AC; deux faces sont confondues avec α, deux avec γ; la trace de α sur le plan tangent en A aux quadriques du faisceau Γ_1, Γ_2, et la trace de β sur le plan analogue relatif à C forment les deux autres arêtes; en intervertissant les rôles α de β on a l'autre tétraèdre dégénéré; tous ces résultats se voient aisément en imaginant un point A_1 de Γ_1, un point A_2 de Γ_2, voisins tous deux de A; de même C_1 et C_2 voisins de C sur Γ_1 ou Γ_2.

On réalise sans peine le cas de ∞^1 tétraèdres, dont deux sommets sont sur Γ_1 et les deux autres sur Γ_2 : on choisit une quadrique Q_1 arbitraire (neuf paramètres), on trace sur elle deux coniques Γ_1, Γ_2 arbitraires ($3+3$ paramètres), un quadrilatère gauche arbitraire (quatre paramètres) et enfin on construit une quadrique Σ issue de ce quadrilatère (un paramètre); on a ainsi un total de 20 pour ($\mathcal{B}$, Σ), au lieu de 22 quand $\mathcal{B}$ n'est pas décomposée; chaque point A pris sur Γ_1 ou Γ_2 donne encore deux faces opposées α ou α' qui se séparent rationnellement; l'association (A, α) donne une développable $\mathcal{D}$, tandis que (A, α') donne $\mathcal{D}'$; supposons A, B sur Γ_1 et C, D sur Γ_2; ABCD est supposé relatif à (A, α) ou à $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$; à un point mobile A sur Γ_1 correspond ainsi un seul point B (pour la série A, α); réciproquement, à B correspond A; il en résulte que l'association (A, B) sur Γ_1 est involutive et que AB passe par un point fixe S_1 du plan de Γ_1; de même CD passe par un point fixe S_2 du plan de Γ_2; les faces ABC, ABD enveloppent donc le cône de sommet S_1 circonscrit à Σ et les faces CDA, CDB le cône analogue de sommet S_2; *la développable* $\mathcal{D}$ *est donc dégénérée, ponctuellement en les cônes circonscrits de* S_1 *et* S_2 *à* Σ, *tangentiellement en deux points* S_1, S_2; *on retrouve la nature dualistique signalée pour* $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ *dans le cas général;* d'autre part *les droites* AS_1B, CS_2D *se correspondent homographiquement;* si A vient en l'un des points u, v communs à Γ_1 et Γ_2, en u par exemple, les points C, D ne peuvent être tous deux distincts de u, car le plan uCD se confondrait avec celui de Γ_1 et nous n'avons pas supposé que Σ soit tangente au plan Γ_1 ni de Γ_2; donc *les droites* S_1u, S_2u *se correspondent, ainsi que* S_1v *et* S_2v; on voit que l'on peut réaliser les 20 paramètres pour $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Sigma)$ ainsi : on se donne les deux coniques bisécantes Γ_1, Γ_2 (14 paramètres), les points S_1, S_2 repectivement dans les plans de Γ_1, Γ_2 ($2 + 2$ paramètres), puis l'homographie en jeu (un paramètre, puisque l'on connaît deux couples de rayons homologues); on a aussi 19 paramètres; les deux cônes S_1, S_2 se trouvent déterminés et Σ est l'une des quadriques inscrites simultanément dans ces deux cônes. Une réalisation intéressante, tenant compte de l'homographie qui est permise, s'obtient en supposant que Γ_1, Γ_2 sont deux cercles égaux, de même axe; u et v sont les points cycliques du plan de Γ_1 ou Γ_2 de sorte que les rayons homologues S_1m_1, S_2m_2 s'obtiennent en faisant tourner S_1m_1 dans son plan d'un angle constant ω et transportant, parallèlement à lui-même, le rayon ainsi obtenu. Ceci permet de réaliser aisément *le cas où les tétraèdres restent conjugués par rapport à une quadrique fixe* σ : en effet, s'il en est ainsi, le plan BCD doit recouper la courbe (Γ_1, Γ_2) en un point A' qui correspond à A dans l'une des involutions biaxiales relatives à un couple d'arêtes opposées de l'un des ∞^1 tétraèdres Θ; A et B sont sur Γ_1, C et D sur Γ_2; donc A' est sur Γ_1 et le couple d'arêtes est celui qui est commun aux ∞^1 tétraèdres Θ; ici, c'est le symétrique de A par rapport à l'axe commun des deux cercles; la droite BA' est parallèle à CD : or l'angle ω est l'angle (BS_1A, BA') : *il est droit et réciproquement* (quand on n'a pas effectué cette transformation homographique, il suffit de dire que les deux rayons homologues S_1m_1, S_2m_2 coupent la droite uv en deux points m_1, m_2 conjugués par rapport à u, v). D'ailleurs les résultats obtenus au paragraphe **7** permettent aussi de retrouver ces tétraèdres inscrits dans Γ_1, Γ_2, conjugués par rapport à une quadrique σ : il suffit de reprendre l'équation (27) et les équations Q, Q_1, σ précédant immédiatement et d'y faire $m = 0$.

On peut maintenant étudier *le cas des couples de Möbius inscrits dans une biquadratique décomposée* Γ_1, Γ_2 *et circonscrits à une quadrique* Σ. Comme dans l'exemple qui précède, le point A′, relatif au tétraèdre ABCD, où le plan BCD recoupe Γ_1, Γ_2 est sur Γ_1 si A et B sont sur Γ_1. On écrit donc la forme réduite

$$(51)\qquad \begin{cases} Q \equiv x^2+y^2+z^2+t^2=0, & Q_1 \equiv z^2-t^2=0, \\ \Sigma \equiv au^2+bv^2+c(w^2+r^2)+2euv+2fwr, \end{cases}$$

avec la condition

$$(52)\qquad a+b=2c,$$

de sorte que Σ soit Möbius-ment inscrite dans Q, Q_1 pour le couple d'arêtes $(x=y=0)$, $(z=t=0)$ commun aux ∞^1 tétraèdres conjugués par rapport à Q, Q_1. Les deux quadriques $Q+\rho Q_1=0$, $Q-\rho Q_1=0$ coupées par Σ suivant quatre droites sont données par

$$(53)\qquad 1-\rho^2=\frac{ab-e^2}{c^2-f^2}.$$

On a alors une configuration $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Sigma)$ dépendant de 17 paramètres : 15 pour la transformation homographique générale, puis trois paramètres non homogènes indépendants, à savoir $a:b:e:f$; du total 18, on retranche une unité, car il y a ∞^1 transformations

$$(x, y;\ X\cos\alpha - Y\sin\alpha,\ X\sin\alpha + Y\cos\alpha),$$

conservant la forme de réduction canonique. Il y a ∞^2 couples de Möbius inscrits dans Γ_1, Γ_2 et circonscrits à Σ, et chaque plan tangent à Σ en supporte 4.

On peut continuer et *chercher ∞^1 couples de Möbius inscrits dans* Γ_1, Γ_2 *et circonscrits à une développable* (Σ, Σ'). *On écrit*

$$(54)\qquad \begin{cases} Q \equiv x^2+y^2+z^2+t^2=0, & Q_1 \equiv z^2-t^2=0, \\ \Sigma \equiv au^2+bv^2+c(w^2+r^2)+2euv+2fwr, \\ \Sigma' = a'u^2+b'v^2+c'(w^2+r^2)+2e'uv+2f'wr, \end{cases}$$

puis

$$(55)\qquad \begin{cases} a+b=2c, & ab'+ba'-2ee'=0; \\ a'+b'=2c', & cc'-ff'=0, \end{cases}$$

en supposant, pour ne pas avoir de paramètres superflus, que Σ et Σ' sont harmoniquement inscrite-circonscrite l'une à l'autre. On doit remarquer que, si l'on donne A sur Γ_1, par exemple, on prend l'homologue A′ de A par rapport à l'involution $(x=y=0)$, $(z=t=0)$; ce point A′ est encore sur Γ_1 et l'on mène de A′ un plan tangent à la développable (Σ, Σ'); il en existe quatre et chacun donne un tétraèdre; *il n'y aucune raison pour que la développable* (Σ, Σ') *dégénère. Le système* (Q, Q_1), (Σ, Σ') *dépend de* 18 *paramètres.*

Si l'on cherche maintenant à obtenir ∞^1 *couples de Möbius inscrits dans* Γ_1, Γ_2, *circonscrits à une développable de classe* 4, *et conjugués par rapport à une* *quadrique* σ, il faudra que σ transforme par dualité la courbe $\mathcal{B}$ dégénérée (Γ_1, Γ_2) en *une développable* $\mathcal{D}$ *également dégénérée, donc réduite à deux cônes*. On écrit donc les équations

$$(56)\qquad Q \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \qquad Q_1 \equiv z^2 - t^2 = 0;$$

$$(57)\qquad \sigma \equiv Byz + B'zx + Cxt + C'yt,$$

$$(58)\qquad B^2 + B'^2 = C^2 + C'^2.$$

Moyennant la condition (58), Q se transforme en une quadrique q non dégénérée Möbius-ment inscrite dans la quadrique Q_1, et la quadrique dégénérée Q_1 en deux points Möbius-ment inscrits dans Q. Les équations de q et q_1, réunies, sont celles de la développable $\mathcal{D}$ cherchée

$$(59)\qquad \begin{cases} q = (Br - C'w)^2 + (Cw - Br)^2 + (Cv - C'u)^2 + (Bu - B'v)^2, \\ q_1 \equiv (Cv - C'u)^2 - (Bu - B'v)^2. \end{cases}$$

On pourrait d'ailleurs remarquer que les résultats obtenus (54), (55), pour le cas où σ n'existe pas, ou (56) à (59) quand σ existe, peuvent se déduire des problèmes correspondants relatifs à la courbe $\mathcal{B}$ non dégénérée définie par

$$Q \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad Q_1 \equiv x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2) = 0,$$

en faisant $m = \infty$ dans les équations $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}_1$, (37), (38) données plus haut, [auxquelles on joint (39) si σ existe].

Comme plus haut, la configuration spéciale $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ obtenue ici, quand la quadrique σ existe, fournit pour chaque plan tangent à $\mathcal{D}$ (c'est-à-dire tangent à l'un des deux cônes du second degré), 4 couples de Möbius, *mais un seul de ces 4 couples se compose de tétraèdres conjugués par rapport à* σ; comme plus haut, si σ est l'une des quadriques $zx \pm yt = 0$, $yz \pm xt = 0$, la développable $\mathcal{D}$ a pour équations

$$(60)\qquad u^2 + v^2 + w^2 + r^2 = 0, \qquad u^2 - v^2 = 0$$

et chacun des 4 couples donne une série conjuguée par rapport à l'une de ces 4 quadriques.

Si σ est la quadrique

$$\sigma \equiv \eta(Cyz + C'zx) + Cxt + C'yt = 0$$

où

$$\bar{\sigma} \equiv \eta(C'yz + Czx) + C'xt + Cyt = 0,$$

la développable $\mathcal{D}$ a pour équations

$$(61)\qquad (C^2 + C'^2)(u^2 + v^2 + w^2 + r^2) - 4CC'(uv + \eta wr) = 0, \qquad u^2 - v^2 = 0,$$

Sur les 4 couples, un est toujours conjugué par rapport à σ, un autre par rapport à $\bar{\sigma}$ (η signifie $+1$ ou -1, de sorte que l'on a deux développables $\mathcal{D}$ différentes si η est changé de signe).

Si l'on choisit

$$\sigma \equiv \eta(C\,yz - C'zx) + C\,xt + C'yt$$

ou

$$\bar{\sigma} \equiv \eta(C'yz + C\,zx) + C'xt - C\,yt,$$

la développable $\mathcal{D}$ a pour équations

$$(62) \qquad u^2 + v^2 + w^2 + r^2 = 0, \qquad (C'^2 - C^2)(u^2 - v^2) - 4CC'uv = 0,$$

de sorte que le signe de η n'intervient pas et l'on a un système ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) pour lequel chacun des 4 couples donne des tétraèdres conjugués par rapport à une même quadrique.

10. Cas où $\mathcal{B}$ dégénère en deux coniques, le plan de l'une étant tangent à Σ. — Supposons que $\mathcal{B}$ se compose de deux coniques Γ_1, Γ_2 et que le plan de Γ_1 soit tangent à Σ. Le plan de Γ_1 contient deux génératrices g, γ de Σ; g coupe Γ_1 en A, B d'où sont issues deux génératrices γ_1, γ_2 de Σ; de même γ coupe Γ_1 en C, D d'où partent deux génératrices g_1, g_2 de Σ; le quadrilatère gauche $g_1\,\gamma_1\,g_2\,\gamma_2$ a chacun de ses côtés coupé en un point par Γ_1, de sorte que Γ_1 et ce quadrilatère déterminent *une quadrique q et une seule, qui est le lieu des points* M *tels que le cône* S *de sommet* M *et directrice* Γ_1 *soit capable de* ∞^1 *trièdres circonscrits au cône* S_1 *de sommet* M *circonscrit à* Σ : c'est un théorème que M. Rowe a établi : le Mémoire Gambier-Rowe déjà cité en donne la démonstration (et ce même théorème fournit l'une des deux démonstrations géométriques de M. Rowe pour l'existence des ∞^5 tétraèdres inscrits dans q et circonscrits à Σ); en coupant S par le plan de Γ_1, on obtient une conique c telle qu'il existe ∞^1 triangles inscrits dans Γ_1 et circonscrits à c; les tétraèdres de sommet M ayant un tel triangle pour base sont circonscrits à Σ. Soit maintenant une conique Γ_2, bisécante à Γ_1; (Γ_1, Γ_2) forment une biquadratique dégénérée; Γ_2 coupe q en quatre points, dont deux sont sur Γ_1 et ne nous intéressent pas; les deux autres P, Q fournissent chacun ∞^1 tétraèdres inscrits dans (Γ_1, Γ_2), circonscrits à Σ; la développable enveloppe des faces (autres que celle qui repose sur le plan de Γ_1) dégénère en un ensemble de deux cônes de sommets P ou Q; à chaque point A de Γ_1 correspondent deux tétraèdres dont l'un a un sommet en P, l'autre en Q.

Ici, il y a quelques différences avec les résultats obtenus quand $\mathcal{B}$ n'est pas dégénérée; considérons une quadrique Q quelconque contenant Γ_1, Γ_2 et appelons Q_1 l'ensemble des plans de Γ_1 et Γ_2; le faisceau ponctuel $Q + hQ_1 = 0$ nous fait envisager un point A variable sur Γ_1 ou Γ_2 et son correspondant A_1^h relativement à Σ (au sens indiqué au paragraphe **2**); si A est fixe sur Γ_2, mais *quelconque*, le lieu de A_1^h est une conique dont le plan n'est jamais tangent à Σ; *si* A *vient en* P *ou* Q, le lieu de A_1^h est une conique située dans le plan de Γ_1; si A est situé sur Γ_1, le lieu est une droite tangente aux deux cônes circonscrits à Σ, de sommet respectif P ou Q.

Il pourrait arriver que l'un des deux points P, Q (ou même tous deux) viennent se placer sur Γ_1 : cela arrive si Γ_2 est tangente à q en P ou Q, ou en chacun de ces deux points; il y a alors une ou deux séries de tétraèdres qui disparaissent.

Un autre cas très spécial est celui où Γ_2 est tracée sur q : on a alors ∞^2 tétraèdres, puisque chaque point de Γ_2 donne ∞^1 tétraèdres.

On voit que l'on peut encore réaliser d'autres cas particuliers : on peut supposer que nous tracions deux coniques bisécantes Γ_1, Γ_2 (14 paramètres), puis que nous construisions une quadrique Σ tangente aux plans de Γ_1, Γ_2 (7 paramètres) : en général, nous obtenons quatre séries de ∞^1 tétraèdres, dont chacune enveloppe un cône du second degré : en effet Γ_1 détermine, avec Σ, la quadrique q_1 qui a été signalée plus haut et q_1 coupe Γ_2 aux deux points P_1, Q_1 indiqués plus haut; de même Γ_2 donne q_2 et P_2, Q_2 situés sur Γ_1; les 4 cônes, circonscrits à Σ, de sommet P_1, Q_1, P_2, Q_2 constituent l'enveloppe des faces; il faut d'ailleurs y joindre le plan de Γ_1 et celui de Γ_2 qui supportent chacun une infinité de bases. Cet exemple montre que, dans ces cas de dégénérescence, il n'y a plus de nature dualistique pour les configurations $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ trouvées.

11. Quelques propriétés géométriques relatives aux systèmes ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) a deux tétraèdres. — Donnons-nous arbitrairement une courbe $\mathcal{B}$ (16 paramètres), une développable $\mathcal{D}$ (16 paramètres): *il n'existe aucun tétraèdre inscrit dans $\mathcal{B}$, circonscrit à $\mathcal{D}$.* On peut *essayer* de le prévoir en prenant comme inconnues les positions de quatre points sur $\mathcal{B}$; on a huit équations entre ces quatre inconnues, pour exprimer que les faces du tétraèdre touchent $\mathcal{D}$ et nous allons voir qu'il y a effectivement *quatre* conditions de compatibilité; en effet, si nous partons d'un tétraèdre T arbitraire (12 paramètres), d'une biquadratique $\mathcal{B}$ circonscrite (8 paramètres), d'une développable $\mathcal{D}$ inscrite (8 paramètres), nous formons une figure (T, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) dépendant de 28 paramètres; il faut vérifier maintenant que ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) dépend aussi de 28 paramètres, précisément parce que ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) ne peut que : ou bien admettre un seul tétraèdre ou un nombre fini, auquel cas ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) et ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, T) dépendent du même nombre de paramètres, ou bien admettre ∞^1 tétraèdres, auquel cas ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) d'après notre étude, dépendrait de 21 paramètres et ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, T) de 22; ce dernier nombre est différent de 28; donc le système ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) obtenu par le procédé qui vient d'être exposé n'admet que le seul tétraèdre T (du moins, ce qui suit immédiatement prouve que le cas d'un nombre fini, supérieur à l'unité, de tétraèdres n'existe pas).

On peut de même choisir deux tétraèdres T_1, T_2 *au hasard* (24 paramètres); les huit sommets sont *quelconques* et déterminent une seule biquadratique $\mathcal{B}$; les huit faces déterminent de même une seule développable $\mathcal{D}$ de classe 4 et genre 1; le système (T_1, T_2, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) dépend de 24 paramètres; ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) aussi [car s'il y avait ∞^1 tétraèdres associés à $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, ce système ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) dépendrait de 21 paramètres et ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, T_1, T_2) de 23 et non 24]. *Il y a donc huit conditions effectives de compatibilité à former entre les coefficients de deux figures $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ indéterminées, si l'on désire 2 tétraèdres :* $32 - 8 = 24$.

Mais à partir de ce moment, le raisonnement ne se poursuit plus : *l'existence de* 3 *tétraèdres pour une $\mathcal{B}$ et une $\mathcal{D}$ indéterminées n'entraîne plus* 12 *conditions de possibilité*, car nous avons montré que le système le plus général ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) à ∞^1 tétraèdres dépend de 21 paramètres : *il y a* 11 *conditions de compatibilité pour obtenir ∞^1 tétraèdres.* On peut se demander maintenant le nombre maximum de tétraèdres qu'une $\mathcal{B}$ et une $\mathcal{D}$ peuvent admettre sans en avoir une infinité : au paragraphe **3** nous avons donné un exemple précis du cas où il y a 4 tétraèdres sans qu'il en existe une infinité : il s'agit d'une courbe $\mathcal{B}$ quelconque et d'une quadrique Σ quelconque parmi celles qui sont conjuguées relativement au tétraèdre Θ conjugué au faisceau $\mathcal{B}$: $\mathcal{D}$ est déterminée par 4, convenablement choisis, des six tétraèdres relatifs à $\mathcal{B}$ et Σ; $\mathcal{D}$ est circonscrite à Σ parce qu'il y a 16 plans tangents communs à Σ et $\mathcal{D}$; tout tétraèdre inscrit dans $\mathcal{B}$, circonscrit à $\mathcal{D}$, est donc circonscrit à Σ, de sorte que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ ne peuvent admettre que des tétraèdres relatifs à $\mathcal{B}$ et Σ, donc un nombre fini et ce nombre est exactement quatre [1]. Comme une courbe $\mathcal{B}$ et une quadrique Σ ne peuvent admettre que six tétraèdres exactement ou une infinité, le nombre maximum indiqué plus haut ne peut donc être que *quatre, cinq ou six : à partir de sept il y a sûrement une infinité.*

Nous avons maintenant d'autres remarques intéressantes à faire : prenons, sur une $\mathcal{B}$ quelconque, *au hasard*, un groupe de quatre points A_1, B_1, C_1, D_1 et un second groupe analogue A_2, B_2, C_2, D_2; la somme des arguments des huit points n'est pas nulle, la somme des arguments du premier groupe n'est pas égale à la somme relative au second groupe; il existe donc une $\mathcal{D}$, et une seule, tangente aux huit faces; on a retrouvé pour $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ le total 24 annoncé plus haut $(16 + 4 + 4)$ et ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) admettent les deux seuls tétraèdres en question.

Supposons maintenant que la somme des arguments de A_1, B_1, C_1, D_1 soit toujours quelconque (donc différente d'une demi-période) *et que* A_2, B_2, C_2, D_2 *soient choisis de façon à donner le même total :* il existe toujours une seule $\mathcal{D}$ tangente aux huit faces et le système ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, T_1, T_2) dépend de 23 paramètres; ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) admettent ∞^1 tétraèdres : c'est le raisonnement du paragraphe **4**, fondé sur l'équation (7); ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) dépendent de 21 paramètres.

Prenons quatre points A_1, B_1, C_1, D_1 toujours quelconques, puis quatre points A_2, B_2, C_2, D_2 *donnant pour somme d'arguments la somme opposée à celle donnée par* A_1, B_1, C_1, D_1; cette fois il y a encore 23 paramètres engagés

---

[1] Le paragraphe **3** prouve aussi qu'une $\mathcal{B}$ et une $\mathcal{D}$ qui admettent *deux* tétraèdres n'ont aucune raison d'en admettre un troisième et cette remarque est nécessaire pour bien justifier les résultats qui précèdent.

pour $\mathcal{B}$, T_1, T_2, mais il y a ∞^2 développables $\mathcal{D}$ tangentes aux huit faces de T_1, T_2, et un tel système ($\mathcal{B}$, T_1, T_2, $\mathcal{D}$) dépend de 25 paramètres : *le système* ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) *tout seul n'admet que* T_1 *et* T_2, car s'il admettait ∞^1 tétraèdres, ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) ne pourrait dépendre que de 21 paramètres au plus, ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, T_1, T_2) de 23 au plus et non 25. *On a ainsi obtenu des systèmes* ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) *particuliers admettant* 2 *tétraèdres et dépendant de* 25 *paramètres et non plus* 24 : ce résultat était assez difficile à prévoir; ce système à 25 paramètres n'est pas un cas particulier du système à 24 paramètres trouvé plus haut, mais inversement le système à 24 paramètres n'est pas un cas particulier du système à 25 paramètres (dans le système à 24 paramètres, les huit points sont quelconques, dans le système à 25 paramètres les huit points forment un ensemble à 21 paramètres seulement). Ici, il se produit donc cette circonstance curieuse, tenant à une hiérarchie dans les paramètres; le groupe primitif (A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2) *quelconque* dépend de 24 paramètres, tout comme le système (A_1, ..., D_2, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) qui s'en déduit; quand les huit points sont bases de ∞^2 quadriques et ∞^2 biquadratiques, le système (A_1, ..., D_2), qui dépend de 21 paramètres seulement, est un cas particulier du système général (à 24 paramètres) de huit points, mais (A_2, ..., D_2, $\mathcal{B}$), bien que ne dépendant plus que de 23 paramètres, au lieu de 24, n'est pas un cas particulier du système formé par huit points quelconques et la biquadratique unique qui les réunit : on s'en aperçoit au moment où l'on cherche à déterminer $\mathcal{B}$; on s'en aperçoit encore mieux si l'on prend (A_1, ..., D_2, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) qui, dans le cas spécial où nous sommes, dépend de 25 paramètres et ne peut donc être un cas particulier d'un système à 24 paramètres.

On peut se poser le problème suivant : pour un système ($\mathcal{B}$, T_1, T_2), où les sommets de T_1 et T_2 sont bases d'un réseau de quadriques, il existe ∞^2 développables inscrites dans les huit faces; en existe-t-il qui admettent avec $\mathcal{B}$, ∞^1 tétraèdres?; comme nous avons supposé que la somme des arguments pour T_1 n'est pas une demi-période, la réponse ne peut être affirmative que si T_1, T_2 sont deux tétraèdres d'espèce différente relatifs à $\mathcal{B}$ et à l'une des ∞^6 quadriques Σ attachées à $\mathcal{B}$ et si les deux développables $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ correspondant à ($\mathcal{B}$, Σ) se confondent; donc, avec un choix convenable de notations, nous aurons pour les sommets les arguments donnés par le tableau ci-dessous (*voir* paragraphe 6)

A_1	C_1	B_1	D_1	A_2	C_2	B_2	D_2
u_1	$a-u_1$	$u_1+\omega$	$a+\omega-u_1$	u_2	$-a-u_2$	$u_2+\omega$	$-a+\omega-u$

Les huit sommets, à choisir sur $\mathcal{B}$, ne dépendent que des trois paramètres a, u_1, u_2; (A_1, B_1), (A_2, B_2), (C_1, D_1), (C_2, D_2) sont des couples qui se correspondent dans l'involution biaxiale relative à un certain couple d'arêtes opposées de Θ; la développable $\mathcal{D}$ est unique; elle admet Θ aussi comme tétraèdre conjugué par rapport aux quadriques inscrites dans $\mathcal{D}$; le nombre de paramètres est : 16 pour $\mathcal{B}$, puis a, u_1, u_2 soit 19 au total; on a une vérification en comptant autrement; $\mathcal{D}$ dépend du paramètre unique a, une fois $\mathcal{B}$ donnée; on a ensuite un paramètre pour chacun des deux tétraèdres (de série différente) et $16+1+1+1$ reproduit 19.

Reprenons le système à 23 paramètres ($\mathcal{B}$, T_1, T_2) où l'on a supposé que la somme des arguments des huit sommets est nulle; existe-t-il une ou plusieurs quadriques Σ inscrites dans (T_1, T_2) et admettant, avec $\mathcal{B}$, ∞^1 tétraèdres? La quadrique en jeu doit figurer dans la série ∞^2 définie tangentiellement par T_1 et T_2; elle dépend donc de 0, 1, ou 2 paramètres; soit p l'entier précis (0, 1, 2); ensuite, comme il ne peut être question de couples de Möbius, puisque $2a$, somme des arguments pour T_1 n'est pas demi-période, chaque tétraèdre dépend de 1 paramètre seulement, quand $\mathcal{B}$ et Σ sont connues; donc *si la quadrique* Σ *existe*, on doit trouver pour ($\mathcal{B}$, Σ, T_1, T_2) si l'on compte les paramètres dans cet ordre $22+1+1$ ou 24 puisque les systèmes ($\mathcal{B}$, Σ) à ∞^1 paramètres dépendent de 22 paramètres, et si l'on compte dans l'ordre ($\mathcal{B}$, T_1, T_2, Σ) $23+p$; donc $p=1$.

Soit maintenant le cas où les deux tétraèdres T_1, T_2 inscrits dans $\mathcal{B}$ sont choisis de sorte que la somme des arguments pour T_1, ou pour T_2, soit égale à la même demi-période; ($\mathcal{B}$, T_1, T_2) dépend donc de 22 paramètres; il existe une quadrique σ, et une seule, conjuguée par rapport à T_1, T_2 simultanément; il existe ∞^1 tétraèdres inscrits dans $\mathcal{B}$, conjugués par rapport à σ (résultat rappelé au paragraphe 7); si l'on prend la réciproque $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$ par rapport à σ, tous les tétraèdres en jeu ont leurs faces tangentes à $\mathcal{D}$ de sorte que ($\mathcal{B}$, T_1, T_2), ($\mathcal{B}$, T_1, T_2, σ) dépendent de 22 paramètres, mais ($\mathcal{B}$, σ) et ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) de 20 paramètres seulement; si l'on prend une développable *quelconque* $\overline{\mathcal{D}}$, tangente aux huit faces de T_1, T_2, le système $(\mathcal{B}, T_1, T_2, \overline{\mathcal{D}})$ dépend de 24 paramètres; le système $(\mathcal{B}, \overline{\mathcal{D}})$ dépend aussi de 24 paramètres, parce qu'il n'admet que (T_1, T_2) [ou du moins un nombre fini de tétraèdres] : en effet nous avons vu qu'un système ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$), à ∞^1 tétraèdres, dépend de 21 paramètres au plus; si $(\mathcal{B}, \overline{\mathcal{D}})$ admettait ∞^1 tétraèdres, il dépendrait de 22 paramètres, ce qui est impossible; on remarquera que nous avons ainsi trouvé un système $(\mathcal{B}, \overline{\mathcal{D}})$ à 24 paramètres, n'admettant que deux tétraèdres, essentiellement distinct des systèmes ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) à 24 paramètres aussi, n'admettant que deux tétraèdres, cités au début de ce paragraphe : dans les systèmes ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$), les huit points ne sont pas bases d'un réseau de quadriques, dans les systèmes $(\mathcal{B}, \overline{\mathcal{D}})$ les huit points sont bases de ∞^2 quadriques et ∞^2 biquadratiques, les huit faces bases de ∞^2 quadriques tangentielles et ∞^2 développables de classe 4 et genre 1 : la développable contenue dans $(\mathcal{B}, \overline{\mathcal{D}})$ est *quelconque* par rapport aux huit faces, mais la biquadratique $\mathcal{B}$ n'est pas quelconque par rapport aux huit sommets;

elle a été choisie parmi les ∞^2 biquadratiques circonscrites de façon que les arguments de chaque tétraèdre T_1 ou T_2 donnent une demi-période pour somme; ce système $(\mathcal{B}, \overline{\mathcal{D}})$ à 24 paramètres est donc un cas particulier des systèmes $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ à 25 paramètres définis par deux tétraèdres T_1, T_2 dont les huit sommets sont bases de ∞^2 quadriques : il y a ∞^1 biquadratiques possibles à choisir parmi les ∞^2 circonscrites à T_1, T_2. Toutes ces distinctions subtiles ne pouvaient guère être faites qu'après la rédaction complète du mémoire actuel; il est très remarquable d'avoir ainsi trouvé deux familles distinctes $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$, $(\mathcal{B}, \overline{\mathcal{D}})$ à 24 paramètres chacune n'admettant que deux tétraèdres, et aussi d'avoir trouvé les systèmes $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ à 25 paramètres qui n'admettent que deux tétraèdres.

Voici encore un autre résultat qui découle d'un décompte de paramètres, fait avec les précautions nécessaires. Si l'on prend la variété $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$ à 20 paramètres du paragraphe **8**, où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}_1$ admettent ∞^1 couples de Möbius, sans que les tétraèdres soient tous conjugués par rapport à une quadrique fixe, le système $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1, T_1, T_2)$, (où T_2 n'est pas le tétraèdre en position de Möbius avec T_1), dépend de 22 paramètres; la somme des arguments pour T_1 ou T_2 est égale à une même demi-période; or le système $(\mathcal{B}, T_1, T_2)$ détermine $\mathcal{D}_1$, qui doit toucher les faces de T_1, T_2 et aussi celles des tétraèdres T'_1, T'_2 en position de Möbius avec T_1 et T_2 respectivement, inscrits dans $\mathcal{B}$: T'_1 se déduit de T_1 en prenant les correspondants des sommets de T_1 dans l'involution biaxiale relative au couple choisi d'arêtes opposées de Θ; donc $\mathcal{D}_1$ est unique et $(\mathcal{B}, T_1, T_2)$ dépend, comme $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1, T_1, T_2)$, de 22 paramètres, de sorte que T_1 et T_2 sont les tétraèdres *généraux* donnant la demi-période en jeu pour somme des arguments de leurs sommets.

Dans le même ordre d'idées si l'on désirait que $(\mathcal{B}, T_1, T_2)$ déterminent une développable $\mathcal{D}$, admettant avec $\mathcal{B}$ ∞^1 couples de Möbius, et cette condition complémentaire, que ces couples soient formés de tétraèdres tous conjugués par rapport à une même quadrique, on ne pourrait donner que T_1 (avec une somme d'arguments égale à une demi-période); le tétraèdre T'_1 en position de Möbius avec T_1 est déterminé d'une façon unique, par l'involution biaxiale en jeu, exécutée sur T_1; la quadrique σ conjuguée par rapport à T_1 et T'_1 est déterminée et unique et $\mathcal{D}$ est la réciproque de $\mathcal{B}$ par rapport à σ : $(\mathcal{B}, T_1, \mathcal{D})$ dépendent de 19 paramètres et $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ de 18; la connaissance d'un sommet de T_2 détermine les 3 autres [1].

11. Propriétés géométriques relatives au cas de ∞^1 tétraèdres. — M. Rowe et moi avons montré, dans les Mémoires déjà cités, comme application de la

[1] Toutes les propositions, énoncées au paragraphe **10**, ou bien se correspondent à elles-mêmes par dualité, ou bien peuvent être converties, par dualité, en une proposition corrélative qui n'a peut-être pas été énoncée.

proposition de M. Rowe sur les quadriques ayant un quadrilatère gauche commun, que, *si une quadrique* Q *et une cubique* Γ ***admettent*** ∞^1 ***tétraèdres inscrits dans la cubique et circonscrits à la quadrique, les six points où*** Γ ***coupe*** Q ***sont répartis sur trois génératrices de même système de*** Q ***et réciproquement.***

De même, *si une cubique gauche* Γ *et une développable* Δ *de troisième classe admettent* ∞^1 *tétraèdres inscrits dans* Γ, *circonscrits à* Δ, *les* 12 *points où* Γ *perce* Δ (*étudiée ponctuellement*) *sont répartis en six couples de deux points appartenant à une génératrice de* Δ *et réciproquement.* Corrélativement, *les* 12 *plans tangents à* Γ *et* Δ *sont répartis en six couples de deux plans se croisant suivant une tangente de* Γ *et réciproquement.*

Nous allons généraliser ces résultats pour une biquadratique $\mathcal{B}$ et une quadrique Σ ou pour un système ($\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$) tel que ceux qui ont été étudiés ici.

Les quatre sommets d'un tétraèdre quelconque de la série à *un* paramètre relative à $\mathcal{B}$ et Σ, ou à ($\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$) sont fournis par les valeurs de u qui rendent la fraction

$$\varphi(u) \equiv \frac{\alpha_1 \operatorname{sn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_2 \operatorname{cn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_3 \operatorname{dn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_4}{\beta_1 \operatorname{sn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\beta_2 \operatorname{cn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\beta_3 \operatorname{dn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\beta_4}$$

égale à une même valeur; en faisant varier ensuite cette valeur, on obtient les autres tétraèdres de la série. (On n'étudie pas ici les ∞^2 couples de Möbius relatifs à une courbe $\mathcal{B}$ et à une quadrique Σ Möbius-ment inscrite dans $\mathcal{B}$, ni le cas des systèmes $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$ à 20 paramètres admettant ∞^1 couples de Möbius non conjugués par rapport à une même quadrique.) L'équation $\varphi'(u)=0$ a huit solutions dans le parallélogramme de sommets $[0,\ 4K,\ 4iK',\ 4K+4iK']$, car $\varphi(u)$ a quatre pôles simples, et $\varphi'(u)$ quatre pôles doubles; u_1 étant racine de $\varphi'(u)$, l'équation $\varphi(u)-\varphi(u_1)=0$ a la racine double u_1, et deux racines simples u_3, u_4; le trétraèdre AACD obtenu est la limite du tétraèdre général ABCD, quand A et B viennent se confondre; AB *est devenue la tangente* AA à $\mathcal{B}$; les faces ACD, BCD tangentes à $\mathcal{O}$ se sont confondues en une seule ACD, de sorte que CD *est devenue génératrice de* $\mathcal{O}$, tandis que les deux plans ABC, ABD sont devenus *deux plans tangents à* $\mathcal{O}$ *se coupant suivant une tangente de* $\mathcal{B}$. La développable $\mathcal{O}$ est de classe 4, de degré 8, de sorte que $\mathcal{B}$ coupe $\mathcal{O}$ en 32 points; 16 *de ces points sont répartis en* 8 *couples*, *les deux points d'un couple étant sur une génératrice de* $\mathcal{O}$ (génératrice CD du tétraèdre AACD); corrélativement, $\mathcal{B}$ est de classe 8 et admet, avec $\mathcal{O}$, 32 plans tangents communs : 16 *de ces plans se répartissent en* 8 *couples*, *les deux points d'un couple se croisant suivant une tangente de* $\mathcal{B}$ (tangente AA dans le tétraèdre AACD). Ces deux parties de l'énoncé sont corrélatives l'une de l'autre; on remarquera que *le plan tangent à* $\mathcal{O}$ *le long de* CD *contient le point* A *de* $\mathcal{B}$ (tétraèdre AACD) et cette dernière proposition est à elle-même sa corrélative.

Maintenant que ces propositions analogues à celles qui concernent les cubiques et les développables cubiques ont été données, il s'agit de considérer les 16 points d'intersection restants, les 16 plans tangents communs restants.

Dans le tétraèdre ABCD, le plan BCD recoupe $\mathcal{B}$ en E; si A a pour argument u_1, l'argument de E est $u_1 - 2a$; l'équation

$$\varphi(u) = \varphi(u - 2a)$$

a huit racines; pour une racine u_1 (supposée correspondre à un point A de $\mathcal{B}$), le point E ou $(u_1 - 2a)$ est donc l'un des points B, C, D, car $u_1 - 2a$ est une racine, autre que u_1 de l'équation $\varphi(u) = \varphi(u_1)$; appelons B celui des points B, C, D qui se confond avec E; *le plan* BCD *est tangent en* B *à* $\mathcal{B}$; c'est d'ailleurs ce qu'exprime l'équation

$$u_1 + (u_1 - 2a) + u_3 + u_4 = 2a \qquad \text{ou} \qquad 2(u_1 - 2a) + u_3 + u_4 = 0.$$

On remarque maintenant que les plans tangents à $\mathcal{D}$ issus d'un point M de $\mathcal{D}$ d'argument v sont les trois faces de l'*unique* tétraèdre ayant un sommet en M, puis la face opposée à N (d'argument $v + 2a$) dans l'*unique* tétraèdre de sommet N; ici M est B, N est A; de la sorte le plan BCD est obtenu *deux fois* comme plan tangent à $\mathcal{D}$ issu de B : une première fois comme plan BCD du tétraèdre B (ACD), une seconde fois comme plan BCDE (avec $E = B$) du tétraèdre ABCD; donc B *est sur la développable* $\mathcal{D}$, puisque deux des plans tangents à $\mathcal{D}$ issus de B se confondent; *la génératrice de* $\mathcal{D}$ *contenue dans le plan* BCD *passe en* B, car cette génératrice est le lieu des points de contact de $\mathcal{D}$ avec son plan tangent BCD; on voit donc que $\mathcal{B}$ *est tangente en* B *à* $\mathcal{D}$; on a ainsi trouvé les 16 *autres intersections de* $\mathcal{B}$ *avec* $\mathcal{D}$ *: ce sont huit points de contact;* on a aussi trouvé *les* 16 *autres plans tangents communs à* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{D}$ *: ce sont huit plans de contact* (tels que BCD) : nous voyons ainsi que ces propriétés sont corrélatives dans leur ensemble.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $\mathcal{B}$ *et* Σ *admettent le même tétraèdre conjugué commun* Θ, de sorte que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ coïncident; en raisonnant sur l'association (A, α) qui conduit à $\mathcal{D}$, on sépare les 32 intersections de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ en deux groupes de 16, les 16 intersections du second groupe se réduisant à des contacts, les 16 intersections du premier groupe étant formées de huit couples portés par huit génératrices de $\mathcal{D}$; mais alors, utilisant l'association (A, α') qui conduit à $\mathcal{D}'$, développable coïncidant dans son ensemble avec $\mathcal{D}$, *on voit que toutes les intersections de* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{D}$ *se réduisent à des contacts; la tangente à* $\mathcal{B}$ *en un point de contact est la génératrice de* $\mathcal{D}$ *qui passe par ce point.* Il suffit de remarquer que, dans un tétraèdre *quelconque* ABCD, les points A, B (en conservant les notations du paragraphe 6) se correspondent dans l'involution biaxiale relative à la période 2ω, et de même C et D : si A se confond avec C ou D, B se confond avec D ou C; il n'y a plus de tétraèdre tel que AABD mais, des tétraèdres AABB, dont deux arêtes opposées AA, BB sont à la fois tangentes de $\mathcal{B}$ et génératrices de $\mathcal{D}$. En reprenant les valeurs des arguments

A	B	C	D	C′	D′
u_1	$u_1+\omega$	$a-u_1$	$a+\omega-u_1$	$-a-u_1$	$-a+\omega+u_1$

et exprimant que A coïncide avec C ou D, on a

$$u_1=\frac{a}{2}+m\omega+n\omega' \qquad \text{ou} \qquad u_1=\frac{a+\omega}{2}+m\omega+n\omega'$$

m et n étant deux entiers quelconques : on a ainsi huit positions de A (et huit de B qui ne sont autres que celles de A, les noms de A et B s'intervertissant; on n'a que huit points, au total, c'est-à-dire quatre couples A, B). En exprimant que le plan ABC ou ABD est tangent en A à $\mathcal{B}$, on a

$$u_1=-\frac{(a+\omega)}{2}+m\omega+n\omega' \qquad \text{ou} \qquad u_1=-\frac{a}{2}+m\omega+n\omega',$$

ce qui donne huit nouveaux points; comme les nouveaux points se déduisent des précédents en changeant a en $(-a)$, on voit que ces huit seraient obtenus aussi en écrivant qu'un tétraèdre de la seconde série a ses sommets A et C′ ou A et D′ confondus.

Ici il se produit une circonstance curieuse, *quand le tétraèdre Θ conjugué par rapport à $\mathcal{B}$ est aussi conjugué par rapport à $\mathcal{D}$*; reprenons l'équation $\varphi(u)=\varphi(u-2a)$ qui a servi pour déterminer le point d'argument $(u-2a)$ où $\mathcal{B}$ touche $\mathcal{D}$; le point u est le sommet A opposé à la face qui touche $\mathcal{B}$; le point de contact de $\mathcal{B}$ avec $\mathcal{D}$ était l'un des points B, C, D, et, quand nous n'avions pas restreint la liberté des notations, nous appelions B ce point de contact; or, ici, sur les trois points B, C, D, il y en a un, appelé B dans le tableau qui précède, qui est déduit de A par l'involution biaxiale relative à la période (2ω) : *ce n'est pas celui-là qui est le point de contact*, car si nous écrivons que BBCD sont coplanaires sur $\mathcal{B}$, *nous trouvons la relation $2a+\omega=0$ qui ne contient plus* B, *et qui n'est pas vérifiée en général*. Si nous exprimons que BCCD sont coplanaires, nous trouvons, pour argument de A, $u=\frac{3a}{2}+m\omega+n\omega'$ et pour argument de C, point de contact de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$, $-\frac{a}{2}+m\omega+n\omega'$ c'est-à-dire, l'une des valeurs indiquées précédemment, ce qui est une vérification; de même si BCDD sont coplanaires.

Mais, nous devons retenir l'équation de condition

$$2a+\omega=0 \qquad \text{ou} \qquad a=-\frac{\omega}{2}+m\omega+n\omega'$$

On peut se borner aux deux cas $a = \frac{\omega}{2}$ ou $a = \frac{\omega}{2} + \omega'$ qui ont été signalés précédemment; comme n'importe quel point de $\mathcal{B}$ se trouve être point de contact de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$, *on voit que $\mathcal{B}$ est tracée tout entière sur $\mathcal{D}$* : nous avons ainsi retrouvé sans effort une disposition remarquable. L'équation $\varphi(u) = \varphi(u - 2a)$ se trouve être devenue une identité, parce que $\varphi(u)$ admet la période $2a$; avec les notations de Jacobi, si $4K$ et $4iK'$ sont les périodes fondamentales de la fraction *générale* $\varphi(u)$ écrite plus haut, pour le cas particulier où $\varphi(u)$ se réduit à $\mathrm{dn}\left(u - \frac{a}{2}\right)$ ou à $\dfrac{\mathrm{sn}\left(u - \frac{a}{2}\right)}{\mathrm{cn}\left(u - \frac{a}{2}\right)}$, les périodes sont $2K$ et $4iK'$, parce que

$$\mathrm{dn}(u + 2K) = \mathrm{dn}\,u, \qquad \mathrm{sn}(u + 2K) = -\,\mathrm{sn}\,u, \qquad \mathrm{cn}(u + 2K) = -\,\mathrm{cn}\,u;$$

les deux formes de φ indiquées à l'instant sont équivalentes et s'échangent par remplacement de u par $u + iK'$. Les deux autres involutions biaxiales correspondent aux cas analogues où (φu) est

$$\mathrm{sn}\left(u - \frac{a}{2}\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{cn}\left(u - \frac{a}{2}\right)}{\mathrm{dn}\left(u - \frac{a}{2}\right)}$$

et

$$\mathrm{cn}\left(u - \frac{a}{2}\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{sn}\left(u - \frac{a}{2}\right)}{\mathrm{dn}\left(u - \frac{a}{2}\right)}.$$

Nous avons ainsi trouvé, en revenant à une forme algébrique, que la biquadratique d'équations

$$x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2) = 0, \qquad x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0,$$

est tracée sur chacune des développables obtenues en la transformant par polarité relativement à la quadrique $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ ou à la quadrique $x^2 - y^2 - m(z^2 - t^2) = 0$, et cela pour l'involution biaxiale $(x = y = 0)$ $(y = t = 0)$. Chacune des deux autres involutions biaxiales donne deux quadriques analogues et deux développables analogues.

Pour terminer ce paragraphe on remarquera que les couples $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ *quelconques* dépendent de 32 paramètres, tandis que ceux qui admettent ∞^1 tétraèdres ne dépendent que de 21 paramètres; donc toutes les conditions obtenues ici sur les intersections et contacts de ces systèmes ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$) doivent se réduire à 11 *conditions distinctes au plus;* si elles se réduisent effectivement à 11, elles entraînent l'existence de ∞^1 tétraèdres; si elles se réduisaient à moins de 11, ce qui semble peu probable, il y aurait d'autres conditions géométriques à trouver.

12. Deux propositions restées en souffrance. — **Au début du paragraphe 5, nous avons dit :**

Si le lieu du point A_1^h relatif à tout point de A de $\mathcal{B}$ est *une droite*, il faut examiner le cas où cette circonstance se produirait parce que, A *restant fixe, chaque point du lieu serait obtenu successivement par deux quadriques*

$$Q + h_1 Q_1 = 0, \qquad Q + h_2 Q_1 = 0;$$

il s'agit de montrer que cette hypothèse conduit en réalité à *un lieu réduit à un point.* Considérons en effet l'un quelconque des huit points où $\mathcal{B}$ perce Σ et reportons-nous à la figure 1 : si $Q + h_1 Q_1 = 0$, $Q + h_2 Q_1 = 0$, jouant successivement le rôle attribué à Q dans cette figure, donnent toutes deux le même correspondant A_1, c'est ce que A' et A'' sont les mêmes pour $Q + h_1 Q_1$ et $Q + h_2 Q_1$, de sorte que A', A'' sont encore *deux points de* $\mathcal{B}$: par suite $Q + h Q_1 = 0$ donne, *quel que soit h*, le même homologue pour ce point A *particulier.* Or, si A *varie* sur $\mathcal{B}$, le passage de A_1^h à $A_1^{h'}$, où $h' \neq h$, est inclus dans une certaine homographie; ici, cette homographie a huit points invariants, à savoir les huit points de Σ homologues des points où $\mathcal{B}$ perce Σ; (ces points sont sur une biquadratique non décomposée, à savoir la transformée de $\mathcal{B}$ par la transformation homographique qui fait passer de A à A_1^h, quand h est fixe et A variable); donc cette homographie $(A_1^h, A_1^{h'})$ est une simple *transformation identique* et le correspondant de *tout* point de $\mathcal{B}$ est *indépendant de h; le lieu de* A_1^h *est donc un point, pour* A *fixe et h variable;* nous sommes donc dans le cas où Σ coupe suivant quatre droites deux quadriques du faisceau $\mathcal{B}$.

Un autre résultat a besoin d'être précisé : au paragraphe 5, nous avons dit :

Si la droite Δ_A n'est pas tangente à Σ, et si Θ n'est pas conjugué par rapport à Σ, les deux développables $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ sont distinctes.

Les plans α, α' sont distincts, mais cela ne suffit pas pour assurer que $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ sont distinctes : le cas où Θ est conjugué par rapport à Σ entraîne précisément la coïncidence de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$; il faut montrer que cette coïncidence n'a lieu que dans ce cas.

Supposons donc que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ coïncident et analysons les conséquences : un plan tangent de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ coupe $\mathcal{B}$ en quatre points A, B, C, C′ et correspond, comme plan tangent de $\mathcal{D}$ à un point D, comme plan tangent de $\mathcal{D}'$ à un point D′; D et D′ sont *distincts* parce que *chaque* droite Δ_A coupe Σ en deux points distincts, et que *tout* point de $\mathcal{B}$ donne deux plans distincts, l'un de la série α, l'autre de la série α'; pour $\mathcal{D}$, l'un des points A, B, C, C′ doit être éliminé; supposons que ce soit C′; de même pour $\mathcal{D}'$, on élimine C; nous avons donc deux tétraèdres ABCD, ABC′D′; A est un point *quelconque* de $\mathcal{B}$ et nous voyons ainsi que les deux tétraèdres d'espèce différente ayant un sommet commun A ont un autre sommet commun, B. Inversement, comme chaque point de $\mathcal{B}$ ne donne que deux tétraèdres, le point B donne comme associé A;

donc A, B se correspondent algébriquement et involutivement sur $\mathcal{B}$, et même birationnellement; les paramètres de A, B sont donc u_1, $\varepsilon u_1 + k$, où $\varepsilon = \pm 1$ et où k est une constante; suivi par continuité, quand les coefficients de $\mathcal{B}$ et Σ varient, ε ne peut que rester fixe; donc, si Σ varie de façon à admettre Θ pour tétraèdre conjugué, ε prend la valeur 1; il est donc toujours égal à $+1$; or la correspondance $(u_1, u_1 + k)$ n'est involutive que si k est une demi-période; appelons ω cette demi-période; A, B ont pour arguments u_1, $u_1 + \omega$; C et D, derniers sommets du tétraèdre ABCD, sont nécessairement homologues et ont pour argument u_3, $u_3 + \omega$; la somme des arguments des quatre sommets est donc $2(u_1 + u_3)$; $u_1 + u_3$ est donc une constante a et nous retrouvons le tableau

A	B	C	D
u_1	$u_1 + \omega$	$a - u_1$	$a + \omega - u_1$

qui prouve que AC engendre la semi-quadrique $Q(a)$, et BC la semi-quadrique $Q(a + \omega)$; le plan ABC est toujours tangent à la quadrique $Q(\pm a)$, et à la quadrique $Q(\pm a + \omega)$, *de sorte que $\mathcal{O}$ et Σ admettent Θ pour tétraèdre conjugué.*

Première Note additive. — Il s'agit du principe, équivalent au théorème de d'Alembert, étudié au paragraphe 5.

Nous avons dit : si une variété W_m (algébrique ou transcendante) dépend *algébriquement* [1] de m constantes *complexes* et est incluse dans une variété V_m *indécomposable*, dépendant elle aussi algébriquement de m paramètres complexes, la variété W_m remplit totalement V_m, *ou du moins donne tous les éléments de V_m, sauf ceux d'une certaine variété V_p, de définition analogue, où p est un entier inférieur à m;* en général, on peut montrer que tout élément de V_p peut s'obtenir par dégénérescence de certains éléments inclus dans W_m, de sorte que l'exception est plus apparente que réelle.

Il suffit de donner quelques exemples simples pour éclaircir ce qui précède. Soit W_5 la variété définie par l'équation

$$y = \alpha x + \beta + \sqrt{\gamma x^2 + 2\delta x + \varepsilon},$$

où $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ sont des constantes arbitraires complexes; V_5 étant l'ensemble des coniques du plan, W_5 épuise V_5 ou du moins n'en diffère que par la variété V_4 définie par

$$y = \frac{px^2 + qx + r}{sx + t}.$$

[1] Une hélice circulaire, bien que transcendante, dépend algébriquement des constantes fixant le cylindre de révolution support, puis de son pas, et enfin du paramètre unicursal du point où elle rencontre une section droite du cylindre.

Pourtant, en résolvant l'équation du second degré en y

$$Cy^2 + 2(Bx+E)y + Ax^2 + 2Dx + F = 0,$$

on peut prendre, comme expression de y, l'une ou l'autre forme

$$\frac{-(Bx+E)+\sqrt{(Bx+E)^2 - C(Ax^2+2Dx+F)}}{C}$$
$$= \frac{Ax^2+2Dx+F}{-(Bx+E)-\sqrt{(Bx+E)^2 - C(Ax^2+2Dx+F)}}.$$

Si C tend vers zéro et si la détermination du radical est celle qui tend vers $(Bx+E)$, le second membre tend vers $\frac{-(Ax^2+2Dx+F)}{2(Bx+E)}$ et nous avons récupéré V_4; d'ailleurs, dans cet exemple, on pourrait chicaner encore un peu plus : ce n'est pas V_4 qui est le déficit de W_5 relativement à V_5, mais $(V_4 - V_2)$ où V_2 est l'ensemble des droites $y = ax + b$; ou encore, les courbes d'équation $x - a = 0$, ou $(x-a)(x-b) = 0$, ne sont contenues ni dans W_5, ni dans V_4.

Un autre exemple est fourni par la démonstration, que l'on peut faire suivant l'esprit de ce principe, de la propriété : *toute conique a deux axes de symétrie*. En effet nous choisissons un système d'axes $\omega\xi\eta$ fixe, un autre xOy mobile (3 paramètres), puis l'équation

$$ax^2 + by^2 - 1 = 0 \text{ (2 paramètres)}$$

nous avons ainsi une variété W_5 de courbes à 5 paramètres, contenue dans V_5, donc épuisant V_5; la proposition est donc acquise. Malheureusement l'ensemble V_4 des paraboles du plan fait exception; mais on sait que V_4 peut s'obtenir par dégénérescence à partir des coniques de W_5.

Nous sommes rassurés par ces explications sur la rigueur du procédé suivi aux paragraphes **4** et **5** : au paragraphe **4** nous avons construit synthétiquement une variété V_{22}, au moyen de l'équation (7) :

$$\lambda_1\left[\alpha_1 \operatorname{sn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \ldots + \alpha_4\right] + \lambda_2\left[\beta_1 \operatorname{sn}\left(u - \frac{a}{2}\right) + \ldots + \beta_4\right] = 0.$$

On a 16 constantes pour $\mathcal{B}$, quatre pour définir la droite

$$\delta(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_4 = 0,\ \beta_1 x + \ldots + \beta_4 = 0),$$

la constante a et enfin la constante individualisant Σ parmi les quadriques inscrites dans la développable $\mathcal{O}$ enveloppe des faces des tétraèdres; au paragraphe **5**, nous définissons une variété W_{22}, à 22 paramètres aussi, contenue dans V_{22}. Mais nous avons le scrupule suivant : au paragraphe **3**, nous avons une courbe $\mathcal{B}$ et une quadrique Σ : si *chaque* point A de $\mathcal{B}$ donnait pour lieu du point A_1^h (obtenu en associant $Q + hQ_1 = 0$ et Σ, puis faisant varier h), une conique C_A, telle que le plan de C_A soit *toujours tangent à* Σ

quand A *décrit* $\mathcal{B}$, nous définirions une variété $(\mathcal{B}, \Sigma)$ rentrant nécessairement dans V_{22} : *nous avons pu affirmer que ce cas ne peut se présenter*, précisément parce que ces configurations $(\mathcal{B}, \Sigma)$ devraient pouvoir être obtenues par dégénérescences de configurations prises dans W_{22} : mais pour W_{22}, le lieu de A_1^h est une *droite*; puisqu'une conique (de degré 2 effectif) ne peut être dégénérescence d'une droite, cette éventualité est irréalisable.

Seconde Note additive. — Nous avons obtenu deux sortes de configurations $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$, $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$ formées par une biquadratique et une développable de classe 4 et genre 1, admettant ∞^1 tétraèdres inscrits dans $\mathcal{B}$, circonscrits à $\mathcal{D}$.

Les systèmes *généraux* $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ dépendent de 21 paramètres; une fois $\mathcal{B}$ donnée, $\mathcal{D}$ est l'enveloppe des ∞^1 tétraèdres définis par la relation

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1\left[\alpha_1 \operatorname{sn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_2 \operatorname{cn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_3 \operatorname{dn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\alpha_4\right] \\ &+\lambda_2\left[\beta_1 \operatorname{sn}\left(u-\frac{a}{2}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\beta_4\right]=0, \end{aligned}\right.$$

où les α_i, β_i sont donnés ainsi que a, et où le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ varie d'un tétraèdre à l'autre; $\mathcal{B}$ donnée, $\mathcal{D}$ dépend de 5 paramètres.

Pour les systèmes $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$, nous n'avons pas, pour les ∞^1 tétraèdres obtenus, de représentation analytique de la forme (1); $\mathcal{B}$ donnée, $\mathcal{D}_1$ dépend de quatre paramètres seulement; *pour le type* $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ *chaque point de* $\mathcal{B}$ *est sommet d'un tétraèdre et un seul, et, dualistiquement, chaque plan tangent de* $\mathcal{D}$ *supporte un seul tétraèdre ayant une face dans ce plan; pour* $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$, *chaque point de* $\mathcal{B}$ *est sommet de quatre tétraèdres, chaque plan tangent de* $\mathcal{D}_1$ *est support de quatre tétraèdres;* de plus pour le type $(\mathcal{B}, \mathcal{D}_1)$ les tétraèdres s'associent 2 par 2 en *couples de Möbius*, tandis que $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ ne donne pas de tels couples (en général).

Pour $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ nous avons obtenu les spécialisations suivantes a, b, c, qui ont conduit à étudier le tétraèdre Θ conjugué commun aux quadriques issues de $\mathcal{B}$; en prenant pour $\mathcal{B}$ la courbe (sn, cn$u$, dn$u$, 1), les échanges $(u, u+2K)$, $(u, u+2iK')$, $(u, u+2K+2iK')$ produisent les involutionsb iaxiales relatives aux couples d'arêtes opposées de Θ.

a. Si $2a$ *est égale à l'une des quantités* $2K$, $2iK'$, $2K+2iK'$, *les* ∞^1 *tétraèdres sont conjugués par rapport à une quadrique fixe* σ; $\mathcal{B}$ donnée et le choix de a fait, la donnée de la droite δ fixe $\mathcal{D}$ d'une façon unique; $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ sont réciproques vis-à-vis de σ.

b. Cette spécialisation est une nouvelle spécialisation de la précédente : δ *rencontre les axes de l'involution biaxiale correspondant au choix* $2K$, $2iK'$ *ou* $2K+2iK'$ *fait pour* a*;* il existe, pour le système $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$, qui ne dépend plus que de 18 paramètres (16 pour $\mathcal{B}$, 2 pour δ), *quatre séries* ∞^1 *de couples de Möbius, dont une seule (qui se sépare rationnellement) est susceptible d'une* *représentation*

$$(2)\qquad \lambda_1\left[\operatorname{cn}\left(u-\frac{K}{2}\right)-\alpha\operatorname{sn}\left(u-\frac{K}{2}\right)\right]+\lambda_2\left[\operatorname{dn}\left(u-\frac{K}{2}\right)-\beta\right]=0,$$

comprise dans le type (1); [du moins nous avons pris a égal à $2K$; les cas $a=2iK'$, $a=2K+2iK'$ sont analogues et, au fond, ne diffèrent que par un choix de notations]; *deux valeurs opposées de* $\lambda_1:\lambda_2$ *donnent les deux tétraèdres d'un même couple de Möbius*. Les trois autres séries ∞^1 de couples de Möbius ne vérifient aucune relation de la forme (1) et ne sont conjuguées par rapport à aucune quadrique : elles appartiennent au type ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}_1$).

Il peut arriver qu'une nouvelle série ∞^1 de couples de Möbius, sur les trois restantes, donne une équation du type (2), avec d'autres valeurs de α et β, tout en conservant $\mathcal{D}$: *voir* les formules (49), (50) du paragraphe **8**; si dans ces formules, on fait C ou C′ nul, on obtient même *quatre* séries de couples de Möbius données par une équation du type (2).

c. Le paragraphe **6** a été consacré au cas si curieux *où* $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ *admettent un même tétraèdre conjugué commun aux quadriques issues de* $\mathcal{B}$ *ou inscrites dans* $\mathcal{D}$; a reste quelconque et l'équation (1) se réduit à l'une des formes

$$\operatorname{dn}\left(u-\frac{a}{2}\right)-\lambda=0,\qquad \operatorname{sn}\left(u-\frac{a}{2}\right)-\lambda=0,\qquad \operatorname{cn}\left(u-\frac{a}{2}\right)-\lambda=0,$$

où λ est variable d'un tétraèdre à l'autre. Nous avons vu, en nous bornant au cas $\operatorname{dn}\left(u-\frac{a}{2}\right)-\lambda=0$ que $a=K$ ou $a=K+2iK'$ fournit un cas rentrant dans (*a*), tandis que $a=iK'$ ou $a=iK'+2K$ donne un cas rentrant dans (*b*) : c'est même ce dernier cas qui donne les quatre séries ∞^1 de Möbius indiquées en fin de *b*.

Pour bien comprendre la structure de la série des ∞^1 tétraèdres du type ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}_1$), il est utile de rappeler la propriété fondamentale relative à $\mathcal{B}$ et *aux quadriques* Σ *qui lui sont Möbius-ment inscrites pour un couple d'arêtes opposées déterminé de* Θ. Pour conserver à $\mathcal{B}$ sa forme ($\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$, 1) définissons $\mathcal{B}$ par les équations

$$(3)\qquad y^2+x^2=t^2,\qquad z^2+k^2x^2=t^2.$$

Si Σ a pour équation tangentielle

$$(\Sigma)\qquad au^2+bv^2+cw^2+dr^2+2euv+2fwr=0,$$

on a, si le couple d'arêtes opposées est ($x=y=0$, $z=t=0$), les conditions suivantes qui expriment que Σ est Möbius-ment inscrite dans $\mathcal{B}$,

$$(4)\qquad a+b+d=0,\qquad k^2a-c+d=0,$$

de sorte que nous remplacerons d par $-(a+b)$ et c par $(k^2-1)a-b$. Coupons maintenant $\mathcal{B}$ par un plan tangent *quelconque* de Σ et appelons les points de rencontre A′, B, C, D; soient A, B′, C′, D′ les homologues de A′, B, C, D dans l'involution biaxiale adoptée ($x=y=0$, $z=t=0$); les tétraèdres

$$(5)\qquad \begin{matrix} \mathrm{ABCD} & \mathrm{ABC'D'} & \mathrm{AB'CD'} & \mathrm{AB'C'D} \\ \mathrm{A'B'C'D'} & \mathrm{A'B'CD} & \mathrm{A'BC'D} & \mathrm{A'BCD'} \end{matrix}$$

sont les quatre couples de Möbius inscrits dans $\mathcal{B}$, circonscrits à Σ, supportés par le plan choisi. Nous pouvons rattacher les ∞^2 couples ainsi obtenus aux systèmes ($\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$), à 18 paramètres du type (2), obtenus par la spécialisation (b) de cette Note. En effet si les paramètres α, β qui entrent dans l'équation (2) sont fixés, $\mathcal{D}$ est connue et, si Σ n'est pas inscrite dans $\mathcal{D}$, il y a exactement huit plans tangents communs à Σ et $\mathcal{D}$; choisissons l'un et appliquons-lui la règle indiquée pour obtenir le schéma (5) : d'après ce qui a été dit, [appliqué à Σ et à deux quadriques Σ', Σ'' inscrites dans $\mathcal{D}$ (1)], chacun des huit tétraèdres est circonscrit à Σ, Σ', Σ'' et le total, huit, de leurs faces coïncide avec celui des plans tangents à Σ, Σ', Σ''. On obtient ces tétraèdres analytiquement (ou du moins *deux* d'entre eux), en déterminant $\lambda_1:\lambda_2$ de sorte que les faces du tétraèdre défini par (2) soient tangentes à Σ; ce que nous avons dit prouve que, si l'*une* des faces est tangente à Σ, les autres le sont : l'équation de condition est donc rationnelle en $\lambda_1:\lambda_2$, a, b, e, f, k^2, α, β; par rapport à $\lambda_1:\lambda_2$, elle est du premier degré en $(\lambda_1:\lambda_2)^2$, puisque deux valeurs opposées de $\lambda_1:\lambda_2$ donnent un couple de Möbius. L'équation de condition est donc de la forme

$$(6)\qquad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2=\frac{F_1(a,b,e,f,\alpha,\beta,k^2)}{F_2(a,b,e,f,\alpha,\beta,k^2)},$$

où F_1, F_2 sont des polynomes entiers par rapport aux arguments explicités. *Mais alors l'élimination de $\lambda_1:\lambda_2$ entre* (2) *et* (6) *fournit l'équation*

$$(7)\qquad \left[\frac{\mathrm{dn}\left(u-\frac{K}{2}\right)-\beta}{\mathrm{cn}\left(u-\frac{K}{2}\right)-\alpha\,\mathrm{sn}\left(u-\frac{K}{2}\right)}\right]^2=\frac{F_1(a,b,e,f,\alpha,\beta,k^2)}{F_2(a,b,e,f,\alpha,\beta,k^2)}$$

qui donne, avec deux constantes arbitraires α, β les ∞^2 couples de Möbius annoncés relatifs à $\mathcal{B}$ et Σ.

Mais il y a lieu de donner quelques précisions sur la forme de F_1 et F_2 : F_1 *ne contient pas* α, F_2 *ne contient pas* β; car si nous lions α et β *a priori* par la relation $F_1=0$, les deux tétraèdres fournis par (7) vont se réduire à un seul, obtenu en résolvant l'équation

$$\mathrm{dn}\left(u-\frac{K}{2}\right)-\beta=0;$$

(1) Toutes les quadriques inscrites dans $\mathcal{D}$ sont Möbius-ment inscrites dans $\mathcal{B}$ pour le couple ($x=y=0$, $z=t=0$).

or la condition pour que les faces de ce tétraèdre touchent Σ ne concerne que β, et d'ailleurs c'est $F_1 = 0$, ce qui justifie l'assertion. Cette équation $\operatorname{dn}\left(u - \frac{K}{2}\right) - \beta = 0$, ou

$$\operatorname{dn}\left(u - \frac{K}{2}\right) = \operatorname{dn}\left(u_0 - \frac{K}{2}\right) \tag{8}$$

si l'on met une racine u_0 en évidence, a pour racines

$$u_0, \quad K - u_0, \quad u_0 + 2K, \quad -K - u_0. \tag{9}$$

Le quadrilatère gauche, dont les sommets correspondent à ces racines (9) dans l'ordre indiqué, a, pour côtés successifs, des génératrices des semi-quadriques complémentaires $u_0 + u_1 = K$ et $u_1 + u_2 = -K$. De même l'équation (10)

$$\frac{\operatorname{cn}\left(u - \frac{K}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(u - \frac{K}{2}\right)} = \frac{\operatorname{cn}\left(u_0 - \frac{K}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(u_0 - \frac{K}{2}\right)} \tag{10}$$

correspondant au cas où l'on suppose $F_2(a, b, e, f, \alpha, k^2) = 0$, a pour racines les nombres

$$u_1, \quad K + 2iK' - u_1, \quad u_0 + 2K, \quad -K + 2iK' - u_0 \tag{11}$$

et le quadrilatère gauche analogue au précédent, a pour côtés successifs, des génératrices des semi-quadriques complémentaires

$$u_1 + u_2 = K + 2iK', \qquad u_1 + u_2 = -(K + 2iK').$$

Les deux quadriques complètes ainsi trouvées sont celles qui appartiennent au faisceau $\mathcal{B}$ et sont harmoniquement circonscrites l'une à l'autre pour le couple d'arêtes opposées de Θ ($x = y = 0$, $z = t = 0$); nous les avons rencontrées aux paragraphes **6**, **7** et **8**; en posant $1 - k^2 = k'^2$, elles ont pour équation ($\varepsilon = \pm 1$)

$$\varepsilon k' x^2 + y^2 + \frac{\varepsilon k' - 1}{k^2} | z^2 + \varepsilon k' t^2 | = 0, \tag{12}$$

l'une correspondant à $\varepsilon = +1$, l'autre à $\varepsilon = -1$; quand u_0 varie, le tétraèdre (9) reste circonscrit à la développable $\mathcal{D}_0$ (qui n'est pas l'une de celles étudiées dans ce paragraphe, mais qui est l'une de celles étudiées aux paragraphes **6** et **7**) définie comme circonscrite à l'une des quadriques (12) le long de $\mathcal{B}$; quand u_1 varie, le tétraèdre (11) reste circonscrit à la développable de même définition $\mathcal{D}'_0$ relative à l'autre détermination de ε; tous les tétraèdres (9) restent, quand u_0 varie, conjugués par rapport à une même quadrique [*voir* paragraphes **6**, **7** et spécialisation (*c*) de cette Note]; de même pour les tétraèdres (11).

Ayant donc choisi les constantes u_0, u_1 $\left[\text{ou ce qui revient au même}\right.$ $\left.\beta = \mathrm{dn}\left(u_0 - \frac{K}{2}\right), \alpha = \frac{\mathrm{cn}\left(u_1 - \frac{K}{2}\right)}{\mathrm{sn}\left(u_1 - \frac{K}{2}\right)}\right]$, les valeurs (9) ou (11) définissent deux tétraèdres T_0, T_1 (¹), admettant une seule quadrique σ conjuguée par rapport à chacun d'eux; *la réciproque $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$ par rapport à σ est la développable $\mathcal{D}$ générale admettant avec $\mathcal{B}$ une série de ∞^1 couples de Möbius du type* (2) (où α, β restent égaux aux valeurs qui viennent d'être indiquées et où $\lambda_1 : \lambda_2$ varie). Nous avons, au paragraphe **11**, indiqué que, si une courbe $\mathcal{B}$ et une développable $\mathcal{D}$ admettent ∞^1 tétraèdres, la courbe $\mathcal{B}$ touche la développable $\mathcal{D}$ (étudiée ponctuellement en huit points : *ici pour les développables $\mathcal{D}(\alpha, \beta)$, les huit points sont les sommets de* T_0 *et* T_1; en effet, nous avons montré qu'il faut chercher un tétraèdre ABCD tel que le plan BCD touche $\mathcal{B}$ en B : ici A peut être pris en u_0 et B est le point $u_0 + 2K$, le plan BCD touche $\mathcal{B}$ en B; *la particularité intéressante pour les développables $\mathcal{D}(\alpha, \beta)$ actuelles est que les quatre sommets de* T_0 (*ou de* T_1) *sont tous quatre des points de contact*, tandis que pour les autres systèmes $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ (étudiés au paragraphe **5** par exemple) si un tétraèdre ABCD a sa face BCD tangente en B à $\mathcal{B}$, aucune des autres faces ne touche $\mathcal{B}$.

Les deux équations $F_1(a, b, e, f, \beta, k^2) = 0$ et $F_2(a, b, e, f, \alpha, k^2) = 0$ où a, b, e, f sont donnés et α, β inconnus, fournissent les quatre développables exceptionnelles $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_0)$ relatives à $\mathcal{B}$ et Σ, telles que Σ soit inscrite dans la développable exceptionnelle $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_0)$, [au lieu de n'avoir avec $\mathcal{D}(\alpha, \beta)$ que deux tétraèdres circonscrits communs, donnés par l'équation (7) où le second membre n'est pas indéterminé]; *il en résulte que* F_1 *et* F_2 *sont du second degré en* β *et* α *respectivement.*

Les mêmes équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, où α, β cette fois sont donnés et a, b, e, f inconnus, déterminent toutes les quadriques inscrites dans $\mathcal{D}(\alpha, \beta)$; *donc ces équations sont du premier degré en a, b, e, f.* Quelle que soit la valeur de α, on a, pour un choix convenable de ε,

$$F_2(\varepsilon k', 1, 0, 0, \alpha, k^2) \equiv 0,$$

et de même, quelle que soit la valeur de β,

$$F_1(-\varepsilon k', 1, 0, 0, \beta, k^2) \equiv 0.$$

(¹) L'équation (2) définit un tétraèdre T; en remplaçant ensuite $\lambda_1 : \lambda_2$ par $-\lambda_1 : \lambda_2$, on a un tétraèdre nouveau T′ en position de Möbius avec T; si donc λ_1 devient nul, les deux tétraèdres T et T′ se confondent en un seul T_0, qui doit donc être regardé comme en position de Möbius avec lui-même; de même pour T_1.

Nous ne pousserons pas plus avant l'étude de ces expressions $F_1(a, b, e, f, \beta, k^2)$ et $F_2(a, b, e, f, \alpha, k^2)$ qui figurent dans l'équation fournissant les ∞^2 couples de Möbius inscrits dans $\mathcal{B}$ et circonscrits à Σ :

$$(7') \qquad \left[\frac{\operatorname{dn}\left(u-\frac{K}{2}\right)-\beta}{\operatorname{cn}\left(u-\frac{K}{2}\right)-\alpha \operatorname{sn}\left(u-\frac{K}{2}\right)}\right]^2=\frac{F_1(a, b, e, f, \beta, k^2)}{F_2(a, b, e, f, \alpha, k^2)}.$$

Considérons maintenant deux quadriques Σ, Σ_1 toutes deux Möbius-ment inscrites dans la courbe $\mathcal{B}$ ($\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$) pour le couple d'arêtes ($x=y=0$, $z=t=0$). On a

$$(13) \qquad \begin{cases} \Sigma \equiv au^2+bv^2+[(k^2-1)a-b]w^2-(a+b)r^2+2euv+2fwr=0, \\ \Sigma_1 \equiv a_1u^2+b_1v^2+[(k^2-1)a_1-b_1]w^2-(a_1+b_1)r^2+2e_1uv+2f_1wr=0. \end{cases}$$

Chaque plan tangent simultanément à Σ, Σ_1 donne, pour la raison déjà maintes fois rappelée, quatre couples de Möbius circonscrits à Σ, Σ_1, inscrits dans $\mathcal{B}$; il est clair qu'en écrivant les deux relations

$$(14) \qquad \left[\frac{\operatorname{dn}\left(u-\frac{K}{2}\right)-\beta}{\operatorname{cn}\left(u-\frac{K}{2}\right)-\alpha \operatorname{sn}\left(u-\frac{K}{2}\right)}\right]^2 =\frac{F_1(a, b, e, f, \beta, k^2)}{F_2(a, b, e, f, \alpha, k^2)}=\frac{F_1(a_1, b_1, e_1, f_1, \beta, k^2)}{F_2(a_1, b_1, e_1, f_1, \alpha, k^2)},$$

on définit successivement les ∞^1 couples de Möbius annoncés. *L'égalité deux derniers rapports* (14) *définit* ∞^1 *systèmes* (α, β) *et la développable* $\mathcal{D}(\alpha, \beta)$, *correspondant à l'un de ces systèmes* (α, β), *a, avec la développable* $\mathcal{D}_1$ *circonscrite à* Σ *et* Σ_1, *quatre couples de Möbius communs :* mais on remarquera que *l'équation* (14) *ne définit que l'un de ces couples* [celui où chaque tétraèdre est conjugué par rapport à la quadrique σ qui transforme, par polarité, $\mathcal{B}$ en $\mathcal{D}(\alpha, \beta)$]; chacun des trois couples non fournis par (14) est fourni par l'une des trois autres solutions de l'équation en α, β :

$$(15) \qquad \frac{F_1(a, b, e, f, \beta, k^2)}{F_2(a, b, e, f, \alpha, k^2)}=\frac{F_1(a_1, b_1, e_1, f_1, \beta, k^2)}{F_2(a_1, b_1, e_1, f_1, \alpha, k^2)}.$$

Cette équation (15), où α, β sont regardés comme les inconnues définit une courbe de genre 1, et de degré 4; ceci est bien d'accord avec ce fait que l'on doit déterminer successivement les plans tangents de la développable $\mathcal{D}_1$ circonscrite à Σ, Σ_1 et que cette développable est de genre 1; cette courbe (α, β) contient les points α_0, β_0 définissant les développables $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_0)$ circonscrites à Σ et définies à l'instant : dans les équations (14) où α et β sont remplacés par α_0, β_0, le second rapport est indéterminé et l'on égale les rapports extrêmes.

Les cas exceptionnels qui peuvent se produire sont aisés à signaler :

On a d'abord le cas où $F_1(a, b, e, f, \beta, k^2)$ et $F_1(a_1, b_1, e_1, f_1, \beta, k^2)$ ont une racine commune en β, soit β_0, sans que les dénominateurs aient une racine commune en α; la courbe (15) se décompose alors en la droite $\beta=\beta_0$ et une cubique plane unicursale; mais si l'on prend $\beta=\beta_0$ et α quelconque, les équations (14) se réduisent à

$$\operatorname{dn}\left(u-\frac{k}{2}\right)-\beta_0=0$$

et l'on obtient un seul couple de Möbius [du type (9), les deux tétraèdres du couple étant confondus en un seul]; la cubique plane (α, β) donne ∞^1 couples circonscrits à Σ et Σ_1.

Si $F_1(a, b, e, f, \beta, k^2)$ et $F_1(a_1, b_1, e_1, f_1, \beta, k^2)$ ont deux racines communes en β, la courbe (15) se décompose en deux droites $\beta=\beta_0$ et $\beta=\beta_1$ qui, comme à l'instant, donne seulement un couple chacune, puis en deux droites $\alpha=\alpha'$, $\alpha=\alpha''$ et nous supposons que α', α'' n'annulent ni $F_2(a, b, e, f, \alpha, k^2)$ ni $F_2(a_1, b_1, e_1, f_1, \alpha, k^2)$; dans ces conditions un système (α', β) où β est quelconque fournit un couple de Möbius; de même (α'', β) donne un autre couple.

On peut répéter la même chose en supposant que les polynomes F_2 aient une ou deux racines communes, sans que les deux F_1 aient de racine commune.

Il reste donc le cas où les deux F_1 ont une racine commune β_0, et les deux F_2 une racine commune α_0 : cela signifie que les deux quadriques Σ, Σ_1 sont inscrites dans $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_0)$ et nous avons à retrouver tous les couples de Möbius circonscrits à $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_0)$: ils sont fournis par l'équation (2) où $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$ et où $\lambda_1:\lambda_2$ varie; *du moins un des quatre couples de Möbius déterminé par chaque plan tangent de $\mathcal{D}$ se trouve ainsi obtenu;* mais si nous supprimons les facteurs $\beta-\beta_0$ et $\alpha-\alpha_0$, dans les deux rapports (15), il reste une équation du premier degré en α et du premier degré en β, définissantune hyperbole si α, β sont des coordonnées courantes et *chaque point de cette hyperbole fournit successivement chacun des couples de Möbius non obtenus précédemment;* ce sont les couples qui ne restent pas conjugués par rapport à une quadrique fixe.

Si les deux F_1 ont deux racines communes β_0, β_1 et si les deux F_2 ont une racine commune α_0, on voit que les deux développables $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_0)$, $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_1)$ coïncident toutes deux avec la développable (Σ, Σ_1), donc coïncident l'une avec l'autre : nous retrouvons ainsi ces développables spéciales qui admettent deux quadriques σ_0, σ_1 les transformant par polarité en $\mathcal{B}$ et donnant ainsi, pour chaque plan tangent de $\mathcal{D}$, *deux* couples de Möbius obtenus par une équation du type (2), l'un et l'autre; ces développables ont été obtenues au paragraphe **8** et dépendent d'un unique paramètre quand $\mathcal{B}$ est donnée; quand on a supprimé le facteur $\frac{(\beta-\beta_0)(\beta-\beta_1)}{\alpha-\alpha_0}$ dans chaque membre de (15), il reste une équation qui donne pour α une valeur déterminée α_1 qui n'annule ni $F_2(a, b, e, f, \alpha, k^2)$ ni $F_2(a_1, b_1, e_1, f_1, \alpha, k^2)$; tous les systèmes (α_1, β), où β varie, fournissent un couple de Möbius qui épuise tous ceux qui n'avaient pas encore été obtenus en prenant les plans tangents à $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_0)$.

Si les deux F_1 ont deux racines communes β_0, β_1 et les deux F_2 deux racines communes α_0, α_1, on retombe sur le cas où les quatre développables $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_0)$, $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_1)$, $\mathcal{D}(\alpha_1, \beta_0)$, $\mathcal{D}(\alpha_1, \beta_1)$ coïncident avec la développable (Σ, Σ_1) et entre elles : chaque plan tangent de $\mathcal{D}$ donne quatre couples de Möbius et chacun d'eux est obtenu par une équation du type (2) où $\alpha = \alpha_j$ ($j = 0$ ou 1) et $\beta = \beta_i$ ($i = 0$ ou 1) et où $\lambda_1 : \lambda_2$ varie. Ces développables ont été indiquées au paragraphe **8** et retrouvées ici : elles sont circonscrites le long de $\mathcal{B}$ à l'une ou l'autre des quadriques (12); on remarquera, dans ce cas, que les deux fractions (15) ou bien sont *égales* quels que soient α et β ou bien sont dans un rapport constant, différent de l'unité : le premier cas est impossible, sinon les équations (14) fourniraient ∞^2 couples de Möbius circonscrits à la développable (Σ, Σ_1); donc c'est le second cas qui est réalisé, de sorte que l'égalité (15) exige ou bien que les deux rapports soient nuls, ou infinis, ou indéterminés; la valeur : *zéro* ne donne que deux tétraèdres, de même la valeur : *infini*; donc c'est l'indétermination qui a lieu et l'on trouve les développables $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_0)$, $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_1)$, $\mathcal{D}(\alpha_1, \beta_0)$, $\mathcal{D}(\alpha_1, \beta_1)$ indiquées, qui d'ailleurs ne font qu'une seule et même développable, définie par les deux quadriques (12) prises tangentiellement.

On remarquera, pour terminer, que si Σ est l'une des quadriques (12), par exemple celle pour laquelle F_1 est nulle quel que soit β, on prend α égal à une racine α_0 de $F_2(a, b, e, f, \alpha, k^2)$ et cela prouve que l'équation (2) pour $\alpha = \alpha_0$ et β quelconque donne ∞^1 tétraèdres tous circonscrits à Σ et nous retrouvons cette particularité, déjà signalée au paragraphe **8**, que les ∞^2 tétraèdres obtenus pour cette quadrique particulière Σ se répartissent exceptionnellement en ∞^1 séries, les ∞^1 tétraèdres de chaque série restant conjugués par rapport à une quadrique fixe.

Si Σ et Σ_1 sont les deux quadriques (12), Σ annulant F_1 quel que soit β, et Σ_1 annulant F_2 quel que soit α, on est obligé de prendre α égal à l'une des racines (α_0, α_1) du polynome F_2 relatif à Σ et β à l'une des racines (β_0, β_1) du polynome F_1 relatif à Σ_1 et l'on retrouve les quatre développables $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_0)$, $\mathcal{D}(\alpha_0, \beta_1)$, $\mathcal{D}(\alpha_1, \beta_0)$, $\mathcal{D}(\alpha_1, \beta_1)$ signalées déjà plus haut, coïncidant d'ailleurs entre elles.

Tous ces résultats étaient peut-être difficiles à prévoir *a priori*, mais leur ensemble se groupe harmonieusement.