JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. FAVARD

Sur la mesure dans les espaces compacts, semi-compacts ou séparables

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 21 (1942), p. 277-288.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1942_9_21__277_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur la mesure dans les espaces compacts, semi-compacts ou séparables;

PAR M. J. FAVARD.

---

1. J'appelle *mesure*, dans un *espace séparable*, une *fonction d'ensemble, non identiquement nulle, non négative, complètement additive et définie dans une classe d'ensembles comprenant les ensembles de Borel.*

Je me propose de montrer ici comment on peut construire des mesures dans un espace compact, semi-compact ou, plus généralement, séparable. Le procédé de construction le plus complet n'est applicable qu'aux espaces compacts et semi-compacts de dimension finie. J'indique également comment on peut construire une fonction d'ensemble à variation bornée et je termine par diverses remarques.

2. Soit $\mathcal{C}$ un *espace compact et* $\{U_k^m\}$ *un système d'ensembles ouverts générateur de l'ensemble;* c'est-à-dire que, pour chaque valeur de m, il y a un nombre fini, k_m, d'ensembles non vides, qui recouvrent l'espace

$$\mathcal{C} = \sum_{k=1}^{k_n} U_k^m$$

et, qu'enfin, la partie commune à une infinité d'ensembles $\{U_k^m\}$, correspondant à une infinité de valeurs de m, est vide, ou se réduit à un point. Soit n la dimension de $\mathcal{C}$.

Recouvrons l'espace avec un nombre fini d'ensembles fermés

$$A_i (i = 1, 2, \ldots, m_1),$$

chacun d'eux étant contenu dans un ensemble U_k^1, deux ensembles A_i n'ayant en commun qu'un ensemble de dimension $n-1$ au plus. Chacun des ensembles A_i est un espace compact recouvert par les ensembles ouverts $U_k^2 A_i$; donc chaque ensemble A_i peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles $A_{i,j}$ fermés et n'ayant en commun deux à deux qu'un ensemble de dimension $n-1$ au plus. En général, après avoir recouvert $\mathcal{C}$ avec un nombre fini d'ensembles fermés d'ordre m

$$\{A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\},$$

n'ayant en commun 2 à 2 que des ensembles de dimension $n-1$ au plus, chacun d'eux étant contenu dans un ensemble ouvert d'ordre m : U_k^m, nous recouvrons chacun de ces ensembles avec des ensembles fermés d'ordre $m+1$, en nombre fini

$$\sum_{i_{m+1}=1}^{j_{i_1, i_2, \ldots, i_m}} A_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}} = A_{i_1, i_2, \ldots, i_m},$$

chacun d'eux étant contenu dans un ensemble ouvert U_k^{m+1}; ces ensembles n'ayant en commun deux à deux qu'un ensemble de dimension $n-1$ au plus. Il suit de là que deux ensembles quelconques d'ordre $m+1$ n'ont en commun qu'un ensemble de dimension $n-1$ au plus, car on a

$$A_{i_1, \ldots, i_{m+1}} . A_{j_1, \ldots, j_{m+1}} \subset A_{i_1, \ldots, i_m} . A_{j_1, \ldots, j_m}.$$

3. Pour définir une mesure dans un espace compact, ou plus généralement semi-compact, nous allons procéder par récurrence en supposant que l'on sache déjà construire une mesure dans un espace semi-compact de dimension $n-1$; à l'espace de départ, l'espace vide de dimension -1, nous attribuons la mesure zéro.

Soit d'abord $\mathcal{C}$ un espace compact de dimension n, considérons l'ensemble

$$B_m = \sum A_{i_1, i_2, \ldots, i_m} . A_{j_1, j_2, \ldots, j_m} \qquad [(i_1 - j_1)^2 + (i_2 - j_2)^2 + \ldots + (i_m - j_m)^2 > 0],$$

comme somme d'un nombre fini d'ensembles fermés de dimension $n-1$ au plus, et l'on a de plus

$$B_m \subset B_{m+1}.$$

L'ensemble

$$B = \sum_1^{\infty} B_m = \lim B_m$$

est donc de dimension $n-1$ au plus et semi-compact puisqu'il est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés dans $\mathcal{C}$, donc compacts; nous supposerons que sur lui a été définie une mesure $f(e)$ (que l'on peut d'ailleurs prendre nulle), avec $f(B) < \infty$.

Cela posé, 1° considérons chacun des ensembles

$$O_i = A_i - A_i \sum_{j \neq i} A_j,$$

c'est un ensemble ouvert (éventuellement vide) dans l'ensemble compact A_i, donc l'ensemble $O_i B$ est ouvert dans B, il a donc une mesure $f(O_i B) = \nu_i$.

A l'ensemble O_i faisons correspondre le nombre $\mu_i = 0$ si l'ensemble est vide, autrement un nombre quelconque $\mu_i \geqq \nu_i$.

2° Considérons de même les ensembles

$$O_{i_1, i_2} = A_{i_1, i_2} - A_{i_1, i_2} \sum_{(i_1 - j_1)^2 + (i_2 - j_2)^2 > 0} A_{j_1, j_2}$$

et soit ν_{i_1, i_2} la mesure de l'ensemble $O_{i_1, i_2} B$.

A l'ensemble O_{i_1, i_2} faisons correspondre le nombre $\mu_{i_1, i_2} = 0$ si cet ensemble est vide ; autrement faisons-lui correspondre un nombre μ_{i_1, i_2} tel que

$$\sum_{i_2} \mu_{i_1, i_2} + f\Bigg(O_i, \sum_{(i_1 - j_1)^2 + (i_2 - j_2)^2 > 0} A_{i_1, i_2} A_{j_1, j_2}\Bigg) = \mu_{i_1}$$

et

$$\mu_{i_1, i_2} \geqq \nu_{i_1, i_2} (\geqq 0).$$

Cela est possible car on a

$$O_i B = \sum_{i_2} O_{i_1, i_2} B + O_{i_1} \sum_{(i_1 - j_1)^2 + (i_2 - j_2)^2 > 0} A_{i_1, i_2} A_{j_1, j_2},$$

ce qui donne

$$\sum_{i_2} \nu_{i_1, i_2} + f\Bigg(O_i, \sum_{(i_1 - j_1)^2 + (i_2 - j_2)^2 > 0} A_{i_1, i_2} A_{j_1, j_2}\Bigg) = \nu_{i_1} \leqq \mu_{i_1}.$$

La méthode de construction de proche en proche est ainsi mise en évidence, cependant, pour obtenir une fonction d'ensemble bornée, nous supposerons qu'il existe une constante M telle que, quel que soit m,

$$\sum \mu_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \leqq M.$$

4. Il nous reste maintenant à montrer comment, à partir de la construction précédente, on peut définir une mesure.

Soit O un ensemble fermé, désignons par S_m la somme des ensembles fermés du $m^{\text{ième}}$ ordre qui sont contenus dans O ; on a évidemment

$$S_m \subset S_{m+1},$$

$$O = \sum_{1}^{\infty} S_m = \lim S_m.$$

Posons

$$g(S_m) = \sum_{A_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \subset S_m} \mu_{i_1, i_2, \ldots, i_m} + f(S_m B_m),$$

on a évidemment

$$g(S_m) \leqq g(S_{m+1}) \leqq M + f(B)$$

et, par suite, nous pouvons poser

$$g(O) = \lim g(S_m).$$

En particulier le nombre $g(\mathcal{C})$ existe.

Soit encore F un ensemble fermé, l'ensemble $\mathcal{C} - F$ est ouvert et nous poserons alors

$$g(F) = g(\mathcal{C}) - g(\mathcal{C} - F).$$

On voit facilement que la fonction g présente l'additivité complète pour les ensembles ouverts.

Considérons un recouvrement de l'espace au moyen d'un nombre fini d'ensembles ouverts

$$O_1 + O_2 + \ldots + O_k = \mathcal{C},$$

il est facile de voir que l'on a toujours

$$g(O_1) + g(O_2) + \ldots + g(O_k) \geqq g(\mathcal{C}). \tag{1}$$

En effet, il existe un nombre m tel que tout ensemble fermé $A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ soit intérieur à l'un au moins des ensembles O_i; soit alors $S_{m,i}$ la somme des ensembles $A_{i_1, \ldots, i_m}$ qui sont contenus dans O_i, on a

$$S_{m,1} + S_{m,2} + \ldots + S_{m,k} = \mathcal{C},$$

donc

$$\sum_{i=1}^{k} g(O_i) \geqq \sum_{i=1}^{k} g(S_{m,i}) \geqq \sum g(A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}).$$

Or, par définition,

$$\lim_{m \to \infty} \sum g(A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}) = g(\mathcal{C}),$$

l'inégalité (1) est donc démontrée.

Plus généralement, si un système de recouvrement de $\mathcal{C}$ est constitué par une infinité dénombrable d'ensembles ouverts

$$\sum_{i=1}^{\infty} O_i = \mathcal{C},$$

on a aussi

$$\sum_{i=1}^{\infty} g(O_i) \geqq g(\mathcal{C}),$$

car, puisque $\mathcal{C}$ est compact, on peut extraire de ce système un système fini de recouvrement.

5. Nous allons prolonger à présent la fonction g en une mesure. Soit E un ensemble quelconque; en désignant par O un ensemble ouvert contenant E et par F un ensemble fermé contenu dans E, nous poserons

$$m_e(E) = \underline{\text{borne}}\, g(O) \qquad (E \subset O), \tag{2}$$

$$m_i(E) = \overline{\text{borne}}\, g(F) \qquad (E \supset F), \tag{3}$$

Les fonctions $m_e(E)$ et $m_i(E)$ seront appelées respectivement la *mesure exté-*

rieure et *la mesure intérieure de* E. Pour deux ensembles O et F de l'espèce précédente, l'espace est recouvert par les ensembles ouverts O et C — F, donc

$$g(\mathcal{C}) \leqq g(\mathrm{O}) + g(\mathcal{C} - \mathrm{F}).$$

ou

$$g(\mathrm{F}) \leqq g(\mathrm{O}),$$

ce qui prouve que, en général,

$$m_i(\mathrm{E}) \leqq m_e(\mathrm{E}).$$

Un ensemble E sera dit *mesurable*, et sa mesure désignée par $m(\mathrm{E})$, si l'on a

$$m_i(\mathrm{E}) = m_e(\mathrm{E}) = m(\mathrm{E}).$$

Remarquons que les deux fonctions $m_e(\mathrm{E})$ et $m_i(\mathrm{E})$ sont non décroissantes. Si un ensemble est mesurable, son complémentaire l'est aussi, en effet de

$$\mathrm{O} \supset \mathrm{E} \supset \mathrm{F} = \mathcal{C} - \mathrm{O}',$$

où O′ désigne un ensemble ouvert, on déduit

$$\mathrm{F}' = \mathcal{C} - \mathrm{O} \subset \mathrm{C} - \mathrm{E} \subset \mathrm{O}',$$

d'où

$$m_i(\mathrm{C} - \mathrm{E}) \geqq g(\mathrm{F}') = g(\mathcal{C}) - g(\mathrm{O}),$$
$$m_e(\mathrm{C} - \mathrm{E}) \leqq g(\mathrm{O}') = g(\mathcal{C}) - g(\mathrm{F})$$

et ces inégalités donnent en se reportant aux définitions (2) et (3)

$$m_i(\mathcal{C} - \mathrm{E}) \geqq g(\mathcal{C}) - m_e(\mathrm{E}),$$
$$m_e(\mathcal{C} - \mathrm{E}) \leqq g(\mathcal{C}) - m_i(\mathrm{E}),$$

d'où, enfin,

$$m_e(\mathcal{C} - \mathrm{E}) - m_i(\mathcal{C} - \mathrm{E}) \leqq m_e(\mathrm{E}) - m_i(\mathrm{E}).$$

En partant de l'ensemble $\mathcal{C} - \mathrm{E}$, on démontrerait l'inégalité contraire de sorte que, en définitive, on a

$$m_e(\mathcal{C} - \mathrm{E}) - m_i(\mathcal{C} - \mathrm{E}) = m_e(\mathrm{E}) - m_i(\mathrm{E})$$

et, par suite,

$$m_i(\mathrm{E}) = g(\mathcal{C}) - m_e(\mathcal{C} - \mathrm{E}),$$
$$m_e(\mathrm{E}) = g(\mathcal{C}) - m_i(\mathcal{C} - \mathrm{E}).$$

L'égalité $m_i(\mathrm{E}) = m_e(\mathrm{E})$ entraîne donc bien $m_i(\mathcal{C} - \mathrm{E}) = m_e(\mathcal{C} - \mathrm{E})$.

6. Pour montrer que la fonction $m(\mathrm{E})$ effectue le prolongement de g, il faut d'abord prouver que tout ensemble ouvert (ou fermé) est mesurable et a pour mesure $g(\mathrm{O})$ [ou $g(\mathrm{F})$], et puis que le système des ensembles mesurables déborde du système des ensembles ouverts et des ensembles fermés.

Un ensemble ouvert O étant recouvert par un ensemble O′ également ouvert, on a

$$m_e(\mathrm{O}) \leqq g(\mathrm{O}') \qquad \text{pour} \quad \mathrm{O} \subset \mathrm{O}',$$

comme on peut poser $O' = O$, on voit que

$$m_e(O) \leqq g(O). \tag{4}$$

D'autre part, quel que soit m, on a

$$g(S_m) \leqq g(O)$$

et comme S_m est fermé, on en tire

$$m_i(O) \geqq \lim g(S_m) = g(O). \tag{5}$$

Les inégalités (4) et (5) donnent alors immédiatement

$$m_i(O) = m_e(O) = m(O) = g(O).$$

En passant aux complémentaires, on voit de même que tout ensemble fermé F est mesurable et que l'on a

$$m_i(F) = m_e(F) = m(F) = g(F).$$

Dorénavant nous ne parlerons plus de la fonction g, mais de la fonction $m(E)$ qui la prolonge.

7. Soient O_1 et O_2 deux ensembles ouverts recouvrant $\mathcal{C}$, et soit ε un nombre tel que

$$m(\mathcal{C}) \leqq m(O_1) + m(O_2) \leqq m(\mathcal{C}) + \varepsilon,$$

je dis que l'on a alors

$$m(O_1 O_2) \leqq \varepsilon.$$

En effet soient $S_{m,1}$ et $S_{m,2}$ les ensembles fermés $A_{i_1,\dots,i_m}$ d'ordre m contenus respectivement dans O_1 et O_2; à partir d'une certaine valeur de m, tous les éléments du système de recouvrement appartiennent à au moins l'un des ensembles O_1 ou O_2; désignons par Σ_m ceux des ensembles d'ordre m contenus dans $O_1 O_2$; on a

$$m(S_{m,1}) + m(S_{m,2}) = m(\mathcal{C}) + m(\Sigma_m) \leqq m(O_1) + m(O_2) \leqq m(\mathcal{C}) + \varepsilon,$$

d'où

$$m(\Sigma_m) \leqq \varepsilon,$$

et enfin

$$m(O_1 O_2) = \lim m(\Sigma_m) \leqq \varepsilon.$$

Soit alors $\{E_i\}$ $(i = 1, 2, \dots)$ une suite au plus dénombrable d'ensembles mesurables sans point commun deux à deux, nous allons prouver que l'ensemble

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$$

est mesurable et que l'on a

$$m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i). \tag{6}$$

Soit $\{\varepsilon_i\}$ une suite de nombres positifs tels que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \varepsilon.$$

Pour chaque valeur de i on peut trouver deux ensembles ouverts O_i et Ω_i tels que

$$O_i \supset E \supset \mathcal{C} - \Omega_i$$

avec

$$m(O_i) \leqq m(E_i) + \frac{\varepsilon_i}{2}$$

$$m(\mathcal{C} - \Omega_i) \geqq m(E_i) - \frac{\varepsilon_i}{2}.$$

Les deux ensembles O_i et Ω_i recouvrent $\mathcal{C}$, et l'on a

$$m(O_i) + m(\Omega_i) \leqq m(\mathcal{C}) + \varepsilon_i.$$

Posons

$$\begin{cases} O'_1 = O_1; & \Omega'_1 = \Omega_1, \\ O'_2 = O_2\Omega'_1; & \Omega'_2 = \Omega_2\Omega'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ O'_i = O_i\Omega'_{i-1}; & \Omega'_i = \Omega_i\Omega'_{i-1}, \end{cases}$$

on a évidemment

$$m(O'_i) + m(\Omega'_i) \leqq m(\Omega'_{i-1}) + \varepsilon_i \qquad (\Omega'_0 = \mathcal{C})$$

car les ensembles O'_i et Ω'_i recouvrent Ω'_{i-1} et leur partie commune a une mesure inférieure à ε_i; de là, par addition,

$$\sum_{i=1}^{k} m(O'_i) \leqq m(\mathcal{C}) + \sum_{1}^{k} \varepsilon_i \leqq m(\mathcal{C}) + \varepsilon,$$

la série $\sum_{i=1}^{\infty} m(O'_i)$ est donc convergente.

D'autre part, on a

$$E_i \subset O'_i$$

d'où

$$E \subset \sum_{i=1}^{\infty} O'_i$$

puis

$$m_e(E) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} m(O'_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} m(O_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) + \varepsilon$$

et enfin, puisque ε est quelconque,

$$m_e(E) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i). \tag{7}$$

D'autre part, on a

$$\mathcal{C} - E \subset \Omega'_i,$$

or,

$$\Omega'_i\left(\sum_{k=1}^{\infty} O'_k\right) \subset \sum_{k=1}^{i} O'_k \Omega'_k + \sum_{k=i+1}^{\infty} O'_k$$

ce qui donne

$$\Omega'_i \subset \left(\mathcal{C} - \sum_{k=1}^{\infty} O'_k\right) + \sum_{k=1}^{i} O'_k \Omega'_k + \sum_{k=i+1}^{\infty} O'_k,$$

d'où

$$m(\Omega'_i) \leqq m(\mathcal{C}) - m\left(\sum_{k=1}^{\infty} O'_k\right) + \sum_{k=1}^{i} \varepsilon_k + \sum_{k=i+1}^{\infty} m(O'_k),$$

or,

$$\sum_{k=1}^{\infty} O'_k \supset \sum_{k=1}^{i} (\mathcal{C} - \Omega_k),$$

donc

$$m\left(\sum_{k=1}^{\infty} O'_k\right) \geqq \sum_{k=1}^{i} m(E_k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i} \varepsilon_k$$

et cela nous donne

$$m(\Omega'_i) \leqq m(\mathcal{C}) - \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) + \frac{3}{2}\varepsilon + 2\sum_{k=i+1}^{\infty} m(O'_k) \leqq m(\mathcal{C}) - \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) + 2\varepsilon,$$

si l'on a choisi i suffisamment grand pour que

$$2\sum_{k=i+1}^{\infty} m(O'_k) < \frac{\varepsilon}{2};$$

or ε étant aussi petit que l'on veut, on en tire

$$m_e(\mathcal{C} - E) \leqq m(\mathcal{C}) - \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i),$$

c'est-à-dire

$$m_i(E) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

La comparaison des inégalités (7) et (8) donne l'égalité (6), c'est-à-dire que *la fonction* $m(E)$ *présente l'additivité complète*.

8. Soient E_1 et E_2 deux ensemble mesurables, je dis que l'ensemble

$$E'_2 = E_2 - E_1 E_2$$

est mesurable.

Considérons deux couples d'ensembles ouverts

$$E_i \subset O_i; \quad \mathcal{C} - E_i \subset \Omega_i \qquad (i = 1, 2)$$

tels que

$$m(O_i\Omega_i) < \varepsilon_i.$$

Posons

$$O'_2 = O_2\Omega_1; \qquad \Omega'_2 = \Omega_2\Omega_1,$$

on a

$$E'_2 \subset O'_2; \qquad \mathcal{C} - E'_2 \subset O_1 + \Omega'_2$$

et

$$O'_2(O_1 + \Omega'_2) \subset O_1\Omega_1 + O_2\Omega_2,$$

d'où

$$m[O'_2(O_1 + \Omega'_2)] < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

ce qui peut également s'écrire

$$m_e(E'_2) - m_i(E'_2) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

ε_1 et ε_2 étant aussi petits que l'on veut, il s'ensuit que l'ensemble E'_2 est mesurable. Je dis alors que l'ensemble

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$$

est mesurable si chacun des E_i l'est; posons en effet

$$E'_1 = E_1,$$

$$E'_i = E_i - E_i\left(\sum_{k=1}^{i-1} E'_k\right),$$

on a alors

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E'_i,$$

or les ensembles E'_i sont mesurables en vertu de la remarque précédente et sans point commun deux à deux, E est donc mesurable.

Dans la classe des ensembles mesurables on peut donc faire la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles et aussi, en passant aux complémentaires, prendre la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles mesurables pour obtenir à nouveau un ensemble mesurable. Les ensembles ouverts étant mesurables, *la classe des ensembles mesurables comprend donc les ensembles de Borel* (¹).

9. Considérons une décomposition de $\mathcal{C}$ en deux ensembles de Borel sans point commun

$$\mathcal{C} = B_1 + B_2$$

(¹) Il est bon de remarquer que la mesure dans C d'un ensemble $E \subset B$ peut être supérieure à $f(E)$ $[m(E) > f(E)]$. Exemple : C est le carré $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$; B l'ensemble des segments d'abscisse ou d'ordonnée rationnelle; $f(B) = 0$ et $m(E) = 0$ sauf si E contient le centre du carré auquel cas on pose $m(E) = 1$.

et soient $m_1(E)$ et $m_2(E)$ deux mesures définies dans $\mathcal{C}$, une nouvelle mesure est donnée par

$$m(E) = m_1(EB_1) + m_2(EB_2).$$

Les deux ensembles B_1 et B_2 sont en effet mesurables dans chacune des mesures, il en est donc de même des deux ensembles EB_1 et EB_2 dans chacune d'elles, et la fonctionnelle $m(E)$ est aussi complètement additive. Cette remarque va nous permettre de définir une mesure dans les ensembles semi-compacts. Soit en effet $\mathcal{C}$ un espace compact et F un ensemble fermé (et par suite compact) de $\mathcal{C}$; soit O son complémentaire. Supposons qu'une mesure $m_1(E)$ soit définie à l'intérieur de F, un premier moyen de la prolonger dans $\mathcal{C}$ consiste à poser

$$m_1(E) = 0 \qquad \text{pour } E \subset O.$$

Soit $m_2(E)$ une autre mesure définie dans $\mathcal{C}$, nous poserons

$$m(E) = m_1(EF) + m_2(EO)$$

et nous avons ainsi une nouvelle mesure qui coïncide avec $m_1(E)$ pour tout E contenu dans F.

Soit alors $\mathcal{S}$ *un espace semi-compact*; on a

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i$$

où les $\mathcal{C}_i$ sont des ensembles compacts; les espaces

$$\mathcal{S}_m = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{C}_i$$

sont compacts et $\mathcal{S}_n$ est fermé dans $\mathcal{S}_{m+1}$; la construction d'une mesure dans $\mathcal{S}$ peut donc se faire de proche en proche. Notre problème se trouve ainsi complètement résolu pour les espaces semi-compacts.

10. Dans les espaces séparables une construction de la mesure, analogue à la précédente, ne semble pas possible en général, car si, jusqu'à un certain point, la notion de système générateur peut être étendue, il semble par contre difficile de décrire les conditions auxquelles les nombres μ doivent satisfaire. Mais on sait que tout espace séparable, de dimension n, est homéomorphe à un ensemble plongé dans un espace compact de dimension n. Soit alors $\mathcal{S}$ un espace séparable plongé dans un espace compact $\mathcal{C}$ et soit $m(E)$ une mesure dans $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{S}$ est un ensemble de Borel dans $\mathcal{C}$, nous avons une mesure m' dans $\mathcal{S}$ en posant

$$m'(E) = m(E) \qquad (E \subset \mathcal{S}).$$

Si $\mathcal{S}$ n'est pas un ensemble de Borel, désignons par $\mathcal{E}$ un ensemble de Borel quelconque de $\mathcal{C}$ contenu dans $\mathcal{S}$; nous pouvons poser

$$m'(\mathrm{E}) = m(\mathrm{E}\mathcal{E})$$

car tout ensemble de Borel dans $\mathcal{S}$ est l'intersection de $\mathcal{S}$ et d'un ensemble de Borel dans $\mathcal{C}$. La plus grande des mesures précédentes est obtenue en prenant pour $\mathcal{E}$ l'ensemble F_σ tel que

$$m_i(\mathcal{S}) = m(\mathcal{E}).$$

Si $\mathcal{S}$ est mesurable, on voit facilement que l'on peut prendre

$$m'(\mathrm{F}) = m(\mathrm{E}).$$

Enfin, on peut aussi remarquer que tout espace séparable de dimension n est la somme de $n+1$ ensembles $\mathcal{N}_i$ de dimension nulle sans point commun et qui sont des sous-ensembles de Borel de l'espace

$$\mathcal{S} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + \ldots + \mathcal{N}_{n+1}.$$

Si l'on a pu définir une mesure m_i dans chacun des espaces $\mathcal{N}_i$, ce que l'on peut faire par héméomorphie préalable de chacun d'eux sur une partie de l'ensemble triadique de Cantor, on posera

$$m(\mathrm{E}) = \sum_{i=1}^{n+1} m_i(\mathrm{E}.\mathcal{N}_i).$$

Cette manière de conclure nous montre également que l'on peut définir une mesure dans un espace séparable de dimension infinie, somme d'une infinité dénombrable d'ensemble de dimension nulle.

11. *Remarques.* — La construction d'une fonction d'ensemble bornée complètement additive dans un espace compact se fait suivant les mêmes principes. Au lieu d'opérer sur des nombres $(\mu_{i_1, i_2, \ldots, i_n})$ non négatifs, on opère sur des nombres réels quelconques mais tels que

$$\Sigma \,|\, \mu_{i_1, i_2, \ldots, i_n} | \leqq \mathrm{M},$$

où M est un nombre indépendant de m. Toute fonction d'ensemble bornée complètement additive est à variation bornée, c'est-à-dire est la différence de deux mesures : la démonstration se fait suivant les principes classiques.

A partir d'une fonction d'ensemble complément additive et bornée, on peut définir l'intégrale d'une fonction continue, puis d'une fonction mesurable.

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux espaces compacts sur chacun desquels ont été définies une mesure $m_1(\mathrm{E}_1)$ et $m_2(\mathrm{E}_2)$; dans l'espace $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$, il est facile de prolonger la mesure

$$m(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2) = m_1(\mathrm{E}_1).m_2(\mathrm{E}_2) \qquad \text{pour } \mathrm{E}_1 \subset \mathcal{C}_1;\ \mathrm{E}_2 \subset \mathcal{C}_2.$$

Aux considérations précédentes se rattache une partie de mon travail sur les intégrales curvilignes (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 1932) avec cette différence que j'étais parti d'une notion d'ordre, subdivision d'un continu en tranches; les considérations de ce travail auraient donc pu permettre une extension de l'opération de totalisation, alors que les considérations précédentes ne la permettent pas.

R.F.