JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

ROBERT FORTET

Les fonctions aléatoires du type de Markoff associées à certaines équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 22 (1943), p. 177-243.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1943_9_22__177_0>

Les fonctions aléatoires du type de Markoff associées à certaines équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique;

PAR ROBERT FORTET

(Paris).

Introduction et sommaire.

Soit t une variable indépendante, par exemple le temps; nous considérons les fonctions aléatoires ([1]) $X(t)$ du type de Markoff, c'est-à-dire telles qu'il existe une probabilité bien déterminée $F(t, x; \tau, \xi)$ ne dépendant que de $t, x, \tau(>t), \xi$, pour que, si $X(t)=x$, on ait, à l'instant postérieur τ : $X(\tau)<\xi$. MM. Kolmogoroff et Feller ont montré ([2]) que, sous certaines conditions de régularité, F, comme fonction de t et x, est une solution de l'équation aux dérivées partielles linéaire parabolique

$$\text{(1)} \qquad L(u)=\frac{\partial u}{\partial t}+a(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(t, x)\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

dont les coefficients a et b sont liés à F par les formules

$$\text{(2)} \qquad 2a(t, x)=\lim_{\Delta t>0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|\xi-x|<\delta}(\xi-x)^2 d_\xi F(t, x; t+\Delta t, \xi), \quad \text{quel que soit } \delta>0,$$

$$\text{(3)} \qquad b(t, x)=\lim_{\Delta t>0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|\xi-x|<\delta}(\xi-x)\, d_\xi F(t, x; t+\Delta t, \xi), \quad \text{quel que soit } \delta>0,$$

$a(t, x)$ est donc essentiellement $\geqq 0$.

([1]) La définition et les propriétés générales des fonctions aléatoires sont exposées, par exemple, dans FORTET, *Sur la notion de fonction aléatoire* (*Revue scientifique*, **3**, 1941, p. 1).

([2]) KOLMOGOROFF, *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Math. Ann.*, **104**, 1931); FELLER, *Zur Theorie der stochastischen Prozesse* (*Math. Ann.*, **113**, 1936).

Dans le présent travail, nous nous *donnons* l'équation (1), c'est-à-dire a et b, et nous supposons qu'ils satisfont aux conditions suivantes :

Hypothèses :

α. $a(t, x) = 1$;

β. $b(t, x)$ et $\frac{\partial}{\partial x} b(t, x)$ existent et sont bornés;

γ. $\frac{\partial b}{\partial x}$ satisfait à une condition de Lipschitz de la forme :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} b(t+\Delta t, x+\Delta x) - \frac{\partial}{\partial x} b(t, x)\right| \leqq A\{|\Delta t|^{\Psi} + |\Delta x|^{\Psi}\} \qquad (0 < \Psi \leqq 1).$$

Du moins nous supposons ces conditions satisfaites dans un intervalle $T_1 \leqq t \leqq T_2$ dans lequel nous nous plaçons une fois pour toutes.

Rappel de résultats. — Sous ces hypothèses, M. Feller a démontré (3) qu'on peut associer à (1) une fonction aléatoire $X(t)$, du type de Markoff, unique et bien déterminée, dont la fonction de répartition $F(t, x; \tau, \xi)$ est liée à a (ici identique à 1) et à b par les formules (2) et (3); $F(t, x; \tau, \xi)$ s'obtient de la façon suivante :

Posons :

$$U_0(t, x; \tau, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau - t)}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4(\tau - t)}}, \tag{4}$$

$$U_{n+1}(t, x; \tau, \xi) = \int_t^\tau dp \int_{-\infty}^{+\infty} b(p, q) \left[\frac{\partial}{\partial q} U_n(p, q; \tau, \xi)\right] U_0(t, x; p, q) dq. \tag{5}$$

On a, pour $n \geqq 1$,

$$\left.\begin{array}{l} |U_n(t, x; \tau, \xi)| \\ \left|\frac{\partial}{\partial x} U_n(t, x; \tau, \xi)\right| \end{array}\right\} < \alpha_n(\tau - t)^{\frac{n-2}{2}}, \tag{6}$$

où α_n (indépendant de t, x, τ, ξ, et > 0) est le terme général d'une série convergente; on peut donc poser

$$U(t, x; \tau, \xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(t, x; \tau, \xi). \tag{7}$$

La fonction U ainsi définie est, en t, x, une *solution fondamentale* de (1); on en déduit F par la formule

$$F(t, x; \tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} U(t, x; \tau, y) dy. \tag{8}$$

---

(3) FELLER, *loc. cit.*

U est donc, en ξ, une *densité de probabilité*, et l'on a naturellement :

$$F(t, x; \tau, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, x; \tau, y)\,dy = 1. \tag{9}$$

U satisfait à l'équation fonctionnelle

$$U(t, x; \tau, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, x; p, q)\,U(p, q; \tau, \xi)\,dq \qquad (t < q < \tau). \tag{10}$$

On a, pour tout $n \geqq 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U_n(t, x; \tau, \xi)|\,d\xi \leqq \alpha_n (\tau - t)^{\frac{n}{2}}. \tag{11}$$

Enfin, comme fonction de τ, ξ, U satisfait à l'équation adjointe $(1)'$ de (1) :

$$L^*(u) = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi}[b(\tau, \xi)u] = 0. \tag{1'}$$

Pour de nombreuses autres propriétés qui nous seront moins utiles, nous renvoyons au Mémoire cité de M. Feller. Nous utiliserons fréquemment, plus ou moins explicitement, des propriétés des fonctions aléatoires, que l'on trouvera, par exemple, dans notre Mémoire cité.

Nous représenterons éventuellement les couples de variables (t, x) ou (τ, ξ) par les points de coordonnées (t, x) ou (τ, ξ) dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires ot, ox ou $o\tau$, $o\xi$.

Remarque sur les hypothèses faites. — L'hypothèse γ est une hypothèse de régularité qu'il faut bien adopter lorsque l'on est résolu à considérer l'équation (1), sauf à la remplacer par une autre plus ou moins stricte, mais fort analogue.

Quant à α, il faut remarquer que le cas général $a \neq 1$ se ramène au cas particulier ici traité $a = 1$, en considérant, au lieu de la fonction aléatoire $X(t)$, la fonction

$$Y(t) = \int_0^{X(t)} \frac{dh}{\sqrt{a(t, h)}},$$

ceci sous des conditions assez peu restrictives pour a.

D'une autre nature est la condition β; elle influe essentiellement sur le comportement de $X(t)$, et si, par exemple, b était infiniment grand avec x, la nature de $X(t)$ pourrait être profondément altérée : c'est ce que font présumer certaines remarques de M. Bernstein à propos des équations différentielles stochastiques [1], d'où il résulte également d'ailleurs que la condition β pourrait être cependant un peu élargie.

---

[1] S. BERNSTEIN, *Les équations différentielles stochastiques* (*Actualités scientifiques*, n° 738, p. 7. Paris, Hermann, édit.).

Sommaire. — Dans un premier Chapitre, nous étudions la continuité de la fonction $X(t)$; ce problème a déjà été étudié par M. P. Levy dans le cas particulier où $b = 0$ (auquel se ramène le cas où b ne dépend que de t); on trouvera ses résultats dans son livre : *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (Paris, 1937, p. 169) et dans son Mémoire *Sur certains processus stochastiques homogènes* (*Comp. Math.*, vol. 7, p. 283); le même problème a été étudié dans le cas général par M. W. Dœblin dans une Note aux *Comptes rendus* (t. 210, p. 705); le point de vue de M. Dœblin est un peu différent du nôtre, en ce sens qu'il prend comme donnée la fonction de répartition $F(t, x; \tau, \xi)$, tandis que pour nous les données sont les cœfficients a et b de (1); par ailleurs les hypothèses faites par M. Dœblin définissent un cas un peu plus général que le nôtre ([5]). Pour ce problème, notre résultat essentiel (théorème II) généralise les résultats de M. Levy et rejoint ceux de M. Dœblin. En ce qui concerne spécialement la continuité *locale*, nous avons pu étendre à nos fonctions aléatoires $X(t)$ un résultat très précis de M. Kolmogoroff (qui n'a pas, croyons-nous, publié sa démonstration) relatif à un problème différent, mais non sans lien avec le nôtre. D'une façon générale, le problème de la continuité *locale* est en relation étroite avec le problème de l'absorption au voisinage de la courbe d'absorption, comme on le verra dans les Chapitres suivants, et c'est dans le Chapitre IV que nous en donnons une solution complète. Nous terminons le Chapitre I par un paragraphe consacré à établir quelques propriétés peu intéressantes en elles-mêmes, mais dont nous avons besoin par la suite.

Le Chapitre II est consacré aux généralités sur les probabilités d'absorption; le problème que nous appelons *de la diffusion avec absorption*, en raison d'une interprétation physique évidente, peut sommairement se formuler ainsi : étant donnée une fonction $x(t')$, qui définit dans le plan (t, x) une courbe C : $x = x(t')$ dite *courbe d'absorption*, et sachant que $X(t) = x[x \leqq x(t)]$, qu'elle est la probabilité $\overline{P_c}(t, x; \tau)$ pour que l'on ait, dans tout l'intervalle (t, τ) $(\tau > t)$:

$$X(t') \leqq x(t').$$

Nous avons été conduit à poser ce problème par une remarque de M. Ville, faite il y a quelques années au cours d'une conférence au Séminaire de Calcul des Probabilités que dirigeait alors M. le professeur É. Borel. M. Ville avait observé la relation qui existe entre le problème de la continuité locale de $X(t)$ (équivalent au problème de la loi du logarithme itéré, etc.) et celui de la valeur de $\lim_{\tau \to t} \overline{P_c}(t, x; \tau)$ pour $x = x(t)$; il émettait d'autre part l'hypothèse, très vraisemblable mais en somme assez délicate à prouver rigoureusement, que $\overline{P_c}(t, x; \tau)$ était, en (τ, x), solution de (1).

([5]) Nous ne croyons pas que M. Dœblin ait publié ses démonstrations.

Historiquement, le premier problème d'absorption qui ait été considéré semble être le *problème du scrutin* (*cf.* POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, p. 21) qui a été résolu par M. Désiré-André grâce à un artifice que M. P. Levy et nous-même avons repris. Dans son Mémoire déjà cité (p. 320), M. P. Levy a traité le cas où $x(t')$ est constant, b étant par ailleurs identiquement nul; M. S. Bernstein, également, a envisagé le problème de l'absorption [*cf.* S. BERNSTEIN, *Sur la diffusion avec absorption* (*Comptes rendus Acad. Sc. U. R. S. S.*, 1, 1934, p. 230)], mais toujours au point de vue, différent du nôtre, des équations différentielles stochastiques.

Nous avons d'abord consacré le paragraphe **1** du Chapitre II à montrer que l'on peut, en toute rigueur, dans l'étude de $X(t)$, adopter un point de vue nouveau, qui se rapproche de celui de M. Bernstein, point de vue nouveau, c'est-à-dire langage nouveau, qui ne change rien au fond, mais dont nous avions besoin. Au paragraphe **2**, nous définissons les probabilités d'absorption et nous indiquons leurs propriétés les plus immédiates (continuité, etc.). Au paragraphe **3**, nous établissons, grâce à l'artifice de Désiré-André auquel nous donnons ainsi sa portée maxima, l'*équation fonctionnelle de Désiré-André-P. Levy* à laquelle satisfait les probabilités d'absorption, et qui nous permettra de les calculer.

Le Chapitre III est destiné à prouver que les probabilités d'absorption sont solution de l'équation (1); nous l'établissons d'abord dans le cas où la courbe d'absorption est à dérivée bornée, et nous étendons ce résultat au cas général où la courbe d'absorption est seulement continue.

Il restait à déterminer les valeurs limites des probabilités d'absorption quand on se place au voisinage de la courbe C; ce problème équivaut, comme nous l'avons dit, à celui de la continuité locale de $X(t)$; nous avons pu fournir de ce problème, au Chapitre IV, une solution qui est, croyons-nous, la plus étendue jusqu'à ce jour.

De l'ensemble de ces résultats, nous avons pu déduire, au Chapitre V, des résultats relatifs à la résolution des équations du type (1); nous obtenons en particulier un *théorème d'existence* qui dépasse largement les résultats classiques de M. Gevrey sur cette question, ou même ceux obtenus par d'autres auteurs; nous noterons cependant que les éléments d'une méthode assez proche de la nôtre ont été indiqués par Petrowski dans un Mémoire que nous citons. Le plus notable dans cette question est, croyons-nous, cette possibilité d'appliquer avec un certain succès les méthodes du Calcul des Probabilités à un problème d'Analyse pure. La raison fondamentale d'un tel fait, dans le cas actuel, est la suivante : on connaît le grand rôle joué dans le Calcul des Probabilités par la fonction de Gauss; or la solution fondamentale de l'équation de la chaleur est une fonction gaussienne, et l'équation de la chaleur est à la base de l'étude des équations paraboliques linéaires.

Les résultats principaux du présent Mémoire ont été résumés dans trois Notes aux *Comptes rendus*, dont voici les références : *Comptes rendus*, 212, 1941, p. 325 et 1118; 213, 1941, p. 553.

CHAPITRE I.

Étude de la continuité de $X(t)$.

1. Étude de la continuité globale de $X(t)$.

Théorème I. — *$X(t)$ est continue en probabilité* (6).

Pour établir ce théorème, il faut prouver que pour tout t fixe, on a

$$\text{Prob}\{|X(t+\Delta t)-X(t)|<\delta\}>1-\eta,$$

quels que soient δ et η à condition de prendre $|\Delta t|<$ qu'un certain nombre $\mu(t)(>0)$. On sait, d'ailleurs, qu'en conséquence, il sera possible de prendre $\mu(t)$ indépendant de t (pour un intervalle fini tout au moins) (7). Or la probabilité en question est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(t_0, x_0; t, y)\left[\int_{y-\delta}^{y+\delta} U(t, y; t+\Delta t, z)\,dz\right]dy,$$

en supposant qu'à l'instant initial t_0, $X(t_0)=x_0$, et que $\Delta t>0$; soit $m>0$ tel que

$$\int_{m}^{+\infty} U(t_0, x_0; t, y)\,dy<\frac{\eta}{4}, \qquad \int_{-\infty}^{-m} U(t_0, x_0; t, y)\,dy<\frac{\eta}{4}.$$

Maintenant, y étant variable entre $-m$ et $+m$, je dis que l'on peut déterminer $\mu(t)>0$, de telle sorte que

$$\int_{y-\delta}^{y+\delta} U(t, y; t+\Delta t, z)\,dz>1-\frac{\eta}{2}.$$

En effet, puisque $U=\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ et que d'après (7) et (11)

$$\int_{y-\delta}^{y+\delta} \sum_{n=1}^{\infty} |U_n(t, y; t+\Delta t, z)|\,dz<\frac{\eta}{4},$$

---

(6) C'est-à-dire stochastiquement continue, selon la terminologie de Slutsky.

(7) Cf. Slutsky, *Sulla teoria degli funzioni aleatorie* (*Giorn. d. Ist. Ital. d. Attuari*, 1937, p. 183.)

pourvu que Δt soit assez petit, il suffit de montrer que pour $\Delta t < \mu(t)$, on a

$$\int_{y-\delta}^{y+\delta} U_0(t, x; t+\Delta t, z)\,dz > 1 - \frac{\eta}{4}.$$

Or, ceci s'établit directement très facilement. D'ailleurs le cas de $\Delta t < 0$ s'étudie de la même façon sans difficulté.

Nous allons d'ailleurs évaluer avec plus de précision la quantité

$$\int_{|y-x|\leqq\delta} U(t, x; t+\Delta t, y)\,dy,$$

avec $\Delta t > 0$ et en prenant $\delta = c\sqrt{4\Delta t \log\frac{1}{\Delta t}}$, où c est une constante > 0 quelconque. Dans ce qui suit, A désigne une quantité bornée, qui n'est pas forcément la même d'une formule à l'autre, ni dans une même formule quand elle y figure plusieurs fois. Nous poserons

$$G_0 = \int_{|y-x|\leqq\delta} U_0(t, x; t+\Delta t, y)\,dy, \qquad G_1 = \int_{|y-x|\leqq\delta} U_1(t, x; t+\Delta t, y)\,dy;$$

$$G_2 = \int_{|y-x|\leqq\delta} U_2(t, x; t+\Delta t, y)\,dy, \qquad G_3 = \int_{|y-x|\leqq\delta} \Sigma_{n>2} U_n(t, x; t+\Delta t, y)\,dy;$$

de sorte que la quantité à étudier est $G_0 + G_1 + G_2 + G_3$. De (7) on déduit immédiatement que

$$G_3 = A\,\Delta t^{\frac{3}{2}}. \tag{12}$$

On a

$$G_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi\,\Delta t}} \int_{|y-x|\leqq\delta} e^{-\frac{(y-x)^2}{4\Delta t}}\,dy,$$

ou, en posant $y = x + \sqrt{2\Delta t}.u$,

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|y|\leqq c\sqrt{2\log\frac{1}{\Delta t}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1 - \frac{A}{\sqrt{\log\frac{1}{\Delta t}}}\,\Delta t^{c^2}. \tag{13}$$

Évaluons maintenant $U_1(t, x; t+\Delta t, y)$ d'après la formule (3). On a

$$\frac{\partial}{\partial q} U_0(p, q; t+\Delta t, y) = \frac{y-q}{4\sqrt{\pi}(t+\Delta t-p)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{(y-q)^2}{4(t+\Delta t-p)}}.$$

Nous poserons

$$p = t + \rho\,\Delta t \qquad \text{et} \qquad q = \rho y + (1-\rho)x + \sqrt{2\Delta t\rho(1-\rho)}\,u;$$

il vient

$$U_1(t, x; t+\Delta t, y) = \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi\,\Delta t}} \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi}} \int_0^1 d\rho \left[\int_{-\infty}^{+\infty} b(p, q)\,\frac{(y-q)}{1-\rho}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\right].$$

Mais

$$y-q=(1-\rho)(y-x)-\sqrt{2\,\Delta t(1-\rho)\rho}\,u;$$

de sorte que

$$(14)\qquad \mathrm{U}_1(t, x; t+\Delta t, y)=\frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi\,\Delta t}}\left[\mathrm{A}(v-x)+\mathrm{A}\sqrt{\Delta t}\right].$$

Nous aurons une évaluation plus précise en posant $y=x+v\sqrt{2\,\Delta t}$, soit

$$q=x+\rho\sqrt{2\,\Delta t}\,v+\sqrt{2\,\Delta t\rho(1-\rho)}\,u$$

(mais dans l'intégration par rapport à q, seul u est variable); en tenant compte de nos hypothèses sur b (*voir* Introduction), on a

$$b(p, q)=b(p, x)+\frac{\partial}{\partial q}b(p, q')\left(\sqrt{\rho}\,v+\sqrt{1-\rho}\,u\right)\sqrt{2\,\Delta t\rho},$$

$$\frac{\partial}{\partial q}b(p, q')=\frac{\partial b(p, x)}{\partial x}+\mathrm{A}\theta^{\Psi}\left|\sqrt{\rho}\,v+\sqrt{1-\rho}\,u\right|^{\Psi}\left(\sqrt{2\,\Delta t\rho}\right)^{\Psi},$$

où

$$q'=x+\theta\left(\sqrt{\rho}\,v+\sqrt{1-\rho}\,u\right)\sqrt{2\,\Delta t\rho}\qquad \text{avec } 0<\theta<1.$$

En tenant compte de ce que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u\,e^{-\frac{u^2}{2}}du=0,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\,e^{-\frac{u^2}{2}}du=\sqrt{2\pi},$$

il vient

$$\begin{aligned}(15)\quad \mathrm{U}_1(t, x; t+\Delta t, y)=\frac{\sqrt{\Delta t}}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi\,\Delta t}}\Bigg\{ & v\int_0^1 b(p, x)\,d\rho+2\sqrt{\pi\,\Delta t}\,(v^2-1)\\ & \times\int_0^1\frac{\partial b(p, x)}{\partial x}\rho\,d\rho+(2\,\Delta t)^{\frac{1+\Psi}{2}}\int_0^1\rho^{\frac{2+\Psi}{2}}d\rho\\ & \times\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{A}\theta^{\Psi}(v^2-u^2)\left|\sqrt{\rho}\,v+\sqrt{1-\rho}\,u\right|^{\Psi}e^{-\frac{u^2}{2}}du\Bigg\}.\end{aligned}$$

Comme

$$\int_{|y-x|\leq\delta}(v^2-1)\frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{4\Delta t}}}{\sqrt{\Delta t}}dy=\mathrm{A}\sqrt{\log\frac{1}{\Delta t}}\,\Delta t^{c^2},$$

on obtient

$$\mathrm{G}_1=\mathrm{A}\sqrt{\log\frac{1}{\Delta t}}\,\Delta t^{1+c^2}+\Delta t^{1+\frac{\Psi}{2}}\,\mathrm{G}'_1,$$

avec

$$\mathrm{G}'_1=\mathrm{A}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}dv\left[\int_0^1\rho^{\frac{2+\Psi}{2}}d\rho\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{A}\,\theta^{\Psi}(v^2-u^2)\left|\sqrt{\rho}\,v+\sqrt{1-\rho}\,u\right|^{\Psi}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right].$$

Il est clair que $|\mathrm{G}'_1|$ est bornée, et finalement

$$(16)\qquad \mathrm{G}_1=\mathrm{A}\sqrt{\log\frac{1}{\Delta t}}\,\Delta t^{1+c^2}+\mathrm{A}\,\Delta t^{1+\frac{\Psi}{2}}.$$

Pour évaluer U_2 et G_2, nous partirons encore de la formule (3), mais pour éviter d'avoir à évaluer $\frac{\partial U_1}{\partial q}$, nous remarquerons que, d'après la forme de U_0 et celle de U_1 exprimée par (13), on peut intégrer par parties dans

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b\,\frac{\partial}{\partial q}\,U_1(p, q; t+\Delta t, y)\,U_0(b, x; p, q)\,dq,$$

ce qui donne

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} U_1(p, q; t+\Delta t, y)\left[\frac{\partial}{\partial q} b(p, q) + b(p, q) \times -\frac{q-x}{2(p-t)}\right]\frac{e^{-\frac{(q-x)^2}{4(p-t)}}}{2\sqrt{\pi(p-t)}}\,dq.$$

Nous poserons comme précédemment

$$p = t + \rho\,\Delta t, \qquad q = \rho y + (1-\rho)x + \sqrt{2\Delta t \rho(1-\rho}\,u.$$

En tenant compte de (13), on voit aisément que l'on a

$$\text{(17)} \qquad U_2(t, x; t+\Delta t, y) = \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi\Delta t}}\left[A(y-x)^2 + A\sqrt{\Delta t}\,(y-x) + A\,\Delta t\right].$$

Mais cette évaluation est insuffisante pour le calcul de G_2. On voit facilement que le terme $\int U_1\,\frac{\partial}{\partial q} b(p, q)\,U_0\,dq$ donne dans G_2 des termes de la forme $A\,\Delta t^{\frac{3}{2}}$. Il reste donc à évaluer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_1\,b(p, q)\,\frac{q-x}{p-t}\,U_0\,dq = \mathrm{I}.$$

Or, en se reportant à (14), on voit que U_1 se met sous la forme

$$U_1(p, q; t+\Delta t, y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-\frac{(y-q)^2}{4(t+\Delta t-p)}}}{2\sqrt{\pi(t+\Delta t-p)}}$$
$$\times\left[A_1(y-q) + A(y-q)^2 + A\,|y-q|^{2+\Psi} + A\,\Delta t\right],$$

avec

$$A_1 = \int_0^1 b(p_1, q)\,d\rho_1, \qquad p_1 = p + \rho_1(t+\Delta t-p).$$

On vérifie facilement que les termes provenant de $A(y-q)^2$, $A\,|y-q|^{2+\Psi}$, $A\,\Delta t$ donnent dans G_2 des termes en $A\,.\,\Delta t^{\frac{3}{2}}$. Tout se réduit maintenant à évaluer

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} A_1\,b(p, q)\,\frac{(y-q)(q-x)}{(p-t)}\,\frac{e^{-\frac{(y-q)^2}{4(t+\Delta t-p)}}\,e^{-\frac{(q-x)^2}{4(p-t)}}}{\sqrt{(p-t)(t+\Delta t-p)}}\,dq.$$

$A_1 . b(p, q)$, comme fonction de q, est dérivable et admet une dérivée bornée, donc se met sous la forme

$$K(p, x) + A(q-x),$$

où $K(p, x)$ est une fonction bornée; or le terme $A(q-x)$, porté dans J, puis dans G_2, donne pour G_2 un terme de la forme $A\,\Delta t^{\frac{3}{2}}$; d'autre part $K(p, x)$ peut dans J être sorti du signe d'intégration; il reste alors une intégrale qui s'évalue facilement par les changements de variables indiqués; ce qui donne, en posant $y = x + \sqrt{2\,\Delta t}.v$, et K désignant une constante

$$K\frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{\Delta t}}(v^2-1)\rho(1-\rho),$$

où l'on conclut que

$$G_2 = A\sqrt{\log\frac{1}{\Delta t}}\,\Delta t^{1+c^2} + A\,\Delta t^{\frac{3}{2}}. \tag{18}$$

(11), (12), (15) et (17) donnent alors

$$G = 1 - \frac{A}{\sqrt{\log\frac{1}{\Delta t}}}\,\Delta t^{c^2} + A\,\Delta t^{1+\alpha}, \tag{19}$$

α désignant un nombre > 0, $< \frac{1}{2}$, c^2 et $\frac{\Psi}{2}$.

Supposons alors $c > 1$, et soit $\beta > 0$, $< \alpha$ et $\leqq c^2 - 1$. Partageons l'intervalle (t, τ) quelconque en 2^n parties égales, par les nombres

$$t_0 = t, \quad \ldots, \quad t_i = t + \frac{i(\tau - t)}{2^n}, \quad \ldots, \quad t_{2^n} = \tau,$$

et considérons l'inégalité

$$|X(t'') - X(t')| \leqq c\sqrt{4(t''-t')\log\frac{1}{t''-t'}}, \tag{20}$$

pour des valeurs t', $t''(t'' > t')$ quelconques de l'intervalle fermé (t, τ). K désignant une constante, la probabilité P_n pour que (18) n'ait pas lieu pour l'une ou l'autre des valeurs de i lorsque l'on prend $t' = t_i$, $t'' = t_{i+1}$ est

$$P_n < \frac{K}{\sqrt{n}\,2^{\beta n}},$$

d'après (18). La probabilité P que (19) ne soit pas vérifiée lorsque l'on prend $t' = t_i$, $t'' = t_{i+1}$ pour l'une ou l'autre des valeurs de i et pour l'une ou l'autre des valeurs de $n > r$ est donc

$$P < K\sum_{n>r}\frac{1}{\sqrt{n}\,2^{\beta n}}, \tag{21}$$

où le second membre est infiniment petit avec $\frac{1}{r}$.

Soit $X_n(t')$ la fonction égale à $X(t_i)$ pour $t = t_i$ et linéaire pour $t_i \leqq t' \leqq t_{i+1}$; quand l'inégalité (19) est satisfaite quel que soit i pour $t' = t_i$, $t'' = t_{i+1}$, on a

$$(20') \qquad |X_n(t'') - X_n(t')| \leqq c\sqrt{4(t''-t')\log\frac{1}{t''-t'}},$$

quels que soient t' et t'' pourvu que $t'' - t' < t_{i+1} - t_i = \frac{1}{2^n}\cdot$ En tenant compte du théorème I, et d'après des remarques que nous avons développées dans notre Mémoire cité, il résulte alors de (20) que presque sûrement les $X_n(t)$ sont des fonctions également continues, qui convergent vers $X(t)$ qui admet nécessairement le même module de continuité que les $X(t)$. Ainsi :

Théorème II. — *La fonction aléatoire* $X(t)$ *est presque sûrement continue, et plus précisément quel que soit le nombre c fixe* > 1, *on a presque sûrement*

$$|X(t'') - X(t')| < c\sqrt{4|t''-t'|\log\frac{1}{|t''-t'|}},$$

pourvu que $|t'' - t'|$ *soit inférieur à un certain nombre* δ *indépendant de* t' *et* t'' (*mais aléatoire*).

Par contre, si $c < 1$, on voit facilement qu'il existe presque sûrement des intervalles (t', t'') aussi petits qu'on le veut pour lesquels (19) est *non réalisée* ([8]).

Extension. — Le résultat du calcul précédent peut s'exprimer ainsi : soit $\rho(h)$ une fonction positive définie pour $h > 0$ et telle que $|h\log\rho(h)|$ soit borné on a

$$(22) \quad \text{Prob}\{|X(t+h) - X(t)| > \sqrt{-4h\log\rho(h)} \text{ si } X(t) = x\} = A_1\frac{\rho(h)}{\sqrt{-\log\rho(h)}} + A_2 h^{1+\alpha},$$

où α est > 0, A_2 borné indépendamment de x, t et h, A_1 borné inférieurement et supérieurement par deux nombres positifs indépendants de x, t et h. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait presque sûrement

$$|X(t') - X(t'')| \leqq \sqrt{-4|t'-t''|\log\rho(|t'-t''|)},$$

quels que soient t' et t'' pour $|t' - t''|$ assez petit est que

$$(23) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\rho(h)}{h\sqrt{-\log\rho(h)}} = 0;$$

ce résultat s'établit facilement en tenant compte des remarques générales que nous avons faites ailleurs ([9]).

([8]) *Cf.* P. Levy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris, 1937, p. 168.

([9]) Fortet, *Sur la notion de fonction aléatoire* (*Rev. Scient.*, février 1941).

2. Étude de la continuité locale de $X(t)$. — t étant donné, quelconque mais fixe, on peut se proposer d'étudier la rapidité avec laquelle $X(t')$ tend vers $X(t)$, lorsque t' tend vers t. D'après le théorème II, cette rapidité est au moins celle indiquée par l'inégalité

$$|X(t')-X(t)|\leqq c\sqrt{4|t'-t|\log\frac{1}{|t'-t|}} \qquad (c>1).$$

Mais le théorème II établit ce fait quel que soit t; en supposant t fixe, on peut espérer obtenir une limitation plus stricte pour $|X(t')-X(t)|$. Ce problème peut être traité par les méthodes classiques de MM. Khintchine, Kolmogoroff, P. Levy ([10]) pour les questions de ce genre. Mais ce problème de la continuité locale entre dans le cadre général des problèmes d'absorption, qui sont dans ce travail notre objectif principal, et c'est seulement dans les chapitres suivants que nous en donnerons une solution assez complète.

Nous allons cependant établir un résultat que M. Kolmogoroff a démontré dans un autre cas; nous ne connaissons pas sa démonstration, qui n'a pas été publiée, à notre connaissance; il est probable qu'elle ne diffère pas beaucoup de la suivante.

Soit $\rho(h)$ une fonction >0, définie pour $h>0$, et tendant monotonement vers 0 avec h, et telle que

$$(24) \qquad \int_0^{\mu}\frac{\rho(h)\sqrt{-\log\rho(h)}}{h}\,dh<+\infty \qquad (\mu>0 \text{ quelconque}).$$

Il est presque sûr que l'on a, pour $t'-t>0$ et suffisamment petit,

$$|X(t')-X(t)|\leqq\sqrt{-4(t'-t)\log\rho(t'-t)},$$

dans l'hypothèse où $X(t)$ a une valeur déterminée x quelconque.

Posons $\bar\rho(h)=3\rho(h)$; $\bar\rho(h)$ satisfait à (24); étant donné $\tau>t$ quelconque, posons

$$(25) \qquad t_0=\tau, \qquad \ldots, \qquad \frac{1}{t_{n+1}-t}-\frac{1}{t_n-t}=\frac{1}{t_{n+1}-t}\,\frac{1}{-\log\bar\rho(t_{n+1}-t)}, \qquad \ldots.$$

Dans le cas où $\rho(h)$ présente des discontinuités, la détermination de t_{n+1} à partir de t_n peut présenter une difficulté, qu'on lève facilement en modifiant légèrement le choix des t_n; on remarque que t_n tend vers t en décroissant.

En posant $h=\frac{1}{k}$ et $\Psi(K)=\bar\rho\left(\frac{1}{h}\right)$, (24) s'écrit :

$$\int_{\frac{1}{\mu}}^{+\infty}\frac{\Psi(K)\sqrt{-\log\Psi(K)}}{K}\,dK<+\infty,$$

([10]) *Cf.* P. Levy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris, 1937, et Khintchine, *Asymptotische Gesetze*... (*Ergebn. der Math.*, 1934).

où la quantité à intégrer $\frac{\Psi(K)\sqrt{-\log\Psi(K)}}{K}$ tend monotonement vers 0 lorsque K tend vers $+\infty$; il est facile d'en déduire que (24) entraîne que

$$\sum_n \frac{\bar{\rho}(t_n - t)}{\sqrt{-\log\bar{\rho}(t_n - t)}} < +\infty. \tag{26}$$

Soit L un nombre quelconque, mais fixé, et t' un nombre quelconque de l'intervalle (t_{n+1}, t_n); on a évidemment, β désignant un nombre > 0 quelconque,

$$\begin{aligned}&\text{Prob}\{X(t_n) - x < L - \beta\sqrt{t_n - t_{n+1}}, \text{ sachant que } X(t') - x = L\}\\ &\leqq \text{Prob}\{X(t_n) - x < L - \beta\sqrt{t_n - t'}, \quad \text{sachant que } X(t') - x = L\},\end{aligned}$$

où la seconde probabilité peut être bornée par un nombre positif φ, qu'il est inutile de préciser, mais dont on notera qu'il est indépendant de L, t_n et t', et qu'il est certainement < 1 si β est assez grand. Le principe des probabilités composées montre alors que

$$\begin{aligned}&\text{Prob}\{X(t_n) - x < L - \beta\sqrt{t_n - t_{n+1}}, \text{ sachant que } X(t') - x \text{ atteint la valeur L}\\ &\qquad\qquad \text{au moins une fois dans l'intervalle } (t_{n+1}, t_n)\} \leqq \varphi.\end{aligned}$$

Or soit M_n le maximum de $X(t') - x$ dans l'intervalle (t_{n+1}, t_n); il y a une probabilité égale à 1 pour que $X(t')$ soit continue, donc pour que la valeur M_n soit atteinte au moins une fois par $X(t') - x$ dans l'intervalle (t_{n+1}, t_n); on a donc d'après ce qui précède, et en prenant $L = M_n$, donc en considérant M_n comme connu

$$\text{Prob}\{X(t_n) - x < M_n - \beta\sqrt{t_n - t_{n+1}}\} \leqq \varphi.$$

Soit maintenant M un nombre quelconque et désignons par E l'événement

$$X(t_n) - x > M - \beta\sqrt{t_n - t_{n+1}}.$$

On a évidemment

$$\text{Prob}\{E\} \geqq \text{Prob}\{M_n > M\} \times \text{Prob}\{E, \text{ sachant que } M_n > M\}$$

et aussi

$$\begin{aligned}&\text{Prob}\{E, \text{ sachant que } M_n > M\}\\ &\geqq \quad \text{Prob}\{X(t_n) - x > M_n - \beta\sqrt{t_n - t_{n+1}}, \text{ sachant que } M_n > M\}\\ &\geqq 1 - \text{Prob}\{X(t_n) - x < M_n - \beta\sqrt{t_n - t_{n+1}}, \text{ sachant que } M_n > M\}.\end{aligned}$$

De ce que la limitation φ est indépendante de M_n résulte facilement, par application du principe des probabilités composées, que

$$\text{Prob}\{X(t_n) - x < M_n - \beta\sqrt{t_n - t_{n+1}}, \text{ sachant que } M_n > M\} \leqq \varphi$$

et par suite

$$\text{Prob}\{M_n > M\} \leqq \frac{1}{1 - \varphi}\,\text{Prob}\{X(t_n) - x > M - \beta\sqrt{t_n - t_{n+1}}\}.$$

Toutefois ce raisonnement suppose que les diverses probabilités qui interviennent existent et satisfont au principe des probabilités composées, ce qui n'est pas évident, mais sera établi au Chapitre II; nous l'admettrons provisoirement, et nous allons calculer $\mathrm{Prob}\{X(t_n) - x > M - \beta\sqrt{t_n - t_{n+1}}\}$ à partir de (22). Pour cela, soit $0 < \alpha' < \alpha$. S'il existe une suite (h_p) tendant vers 0 en décroissant et telle que

$$\frac{\rho(h_p)}{\sqrt{-\log\rho(h_p)}} < h_p^{1+\alpha'},$$

(23) est satisfaite par $\bar{\rho}(h)$ et le théorème est établi; il reste à examiner le cas où, quel que soit h (assez petit), on a

$$\frac{\rho(h)}{\sqrt{-\log\rho(h)}} \geqq h^{1+\alpha'}.$$

Dans ces conditions le second membre de (22) peut s'écrire

$$\mathrm{A}\frac{\rho(h)}{\sqrt{-\log\rho(h)}},$$

où A est positif, borné inférieurement et supérieurement par deux nombres > 0; on a alors, en prenant $M = \sqrt{-4(t_n - t)\log\bar{\rho}(t_n - t)}$ et d'après (25),

$$\mathrm{Prob}\{X(t_n) - x > M - \beta\sqrt{t_n - t_{n+1}}\} \leqq \Lambda\frac{\bar{\rho}(t_n - t)\, e^{\beta + \frac{\beta^2}{4\log\bar{\rho}(t_n - t)}}}{\sqrt{-\log\rho(t_n - t)}\left[1 - \frac{\beta}{-2\log\bar{\rho}(t_n - t)}\right]} = p_n.$$

D'après (26), $\sum\limits_n p_n$ est $< +\infty$; on a donc presque sûrement, pour tous les n supérieurs à un certain nombre (aléatoire) n_0 :

$$M_n \leqq \sqrt{-4(t_n - t)\log\bar{\rho}(t_n - t)}.$$

Mais je dis que si $t_{n+1} \overline{\overline{<}} t' \leqq t_n$, on a

$$\sqrt{-4(t_n - t)\log\bar{\rho}(t_n - t)} \leqq \sqrt{-4(t' - t)\log\rho(t' - t)},$$

ou, ce qui revient au même

$$(t_n - t)\log\bar{\rho}(t_n - t) \geqq (t' - t)\log(t' - t),$$

ou

$$(27)\quad (t' - t)[-\log\bar{\rho}(t_n - t)] + (t_n - t')[-\log\bar{\rho}(t_n - t)] \leqq (t' - t)[-\log\rho(t' - t)],$$

(27) sera vérifiée si

$$(t' - t)[-\log\bar{\rho}(t_n - t)] + (t_n - t')[-\log\bar{\rho}(t_n - t)] \leqq (t' - t)[-\log\rho(t_n - t)]$$

ou

$$(t' - t)\log\frac{\bar{\rho}(t_n - t)}{\rho(t_n - t)} \geqq (t_n - t')[-\log\bar{\rho}(t_n - t)],$$

qui sera vérifiée si, puisque $\bar{\rho}(h) = 3\rho(h)$,

$$(t_{n+1} - t)\log 3 = (t_n - t_{n+1})[-\log\bar{\rho}(t_n - t)$$

qui s'écrit d'après (25)

$$\log 3 \geqq \frac{-\log\bar{\rho}(t_n - t)}{-\log\bar{\rho}(t_{n+1} - t) - 1},$$

qui est vrai, car le second membre est, asymptotiquement, $\leqq 1$.

Ceci établit le résultat annoncé; le problème se pose alors de savoir si la condition (24) est nécessaire pour ce résultat; nous le résoudrons dans un chapitre ultérieur (Chap. IV).

3. Quelques propriétés de la densité de probabilité $U(t, x; \tau, \xi)$. — 1° D'après (7), (4), (13) et (16), on voit que $U(t, x; \tau, \xi)$ peut se mettre sous la forme

$$U(t, x; \tau, \xi) = \frac{e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4(\tau - t)}}}{2\sqrt{\pi(\tau - t)}}\left[1 + A(\xi - x) + A\sqrt{\Delta t} + A(\xi - x)^2 + A\sqrt{\Delta t}(\xi - x) + A\,\Delta t\right] + A\sqrt{\Delta t}.$$

Laissons alors t, x fixes, faisons varier τ et ξ; si $|\xi - x|$ reste $\leqq \sqrt{\tau - t}$, $e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4(\tau - t)}}$ reste $\geqq e^{-\frac{1}{4}}$; par suite il existe un nombre $\alpha > 0$ et absolu, tel que, pour $\tau - t \leqq \alpha$, on ait

$$U(t, x; \tau, \xi) \geqq \frac{c}{\sqrt{\tau - t}} > 0,$$

où c est un certain nombre absolu.

La condition $|\xi - x| \leqq \sqrt{\tau - t}$ équivalant à dire que le point (τ, ξ) reste intérieur à une certaine parabole, on voit qu'à chaque point (t, x) correspond un certain secteur parabolique dans lequel (contour compris) $U(t, x; \tau, \xi)$ reste > 0. Donc sur toute parallèle à l'axe des x d'abscisse τ telle que $\tau - t \leqq \alpha$ $(\tau > t)$, $U(t, x; \tau, \xi)$ reste > 0 tant que $|\xi - x|$ ne dépasse pas $\sqrt{\tau - t}$.

Supposons maintenant que pour un t' compris entre t et τ, $U(t, x; t', y)$ reste > 0 pour $|y - x| \leqq m$ $(m > 0)$; soit $\varepsilon > 0$ et $< m$; supposons $\tau - t' \leqq \alpha$; comme $U(t', y; \tau, \xi)$ reste > 0 tant que $|\xi - y| \leqq \sqrt{\tau - t}$; et que

$$U(t, x; \tau, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, x; t', y)\, U(t', y; \tau, \xi)\, dy,$$

on voit facilement que $U(t, x; \tau, \xi)$ reste > 0 tant que

$$|\xi - x| \leqq (m - \varepsilon) + \sqrt{\tau - t'}.$$

Soit maintenant une parallèle à l'axe des x d'abscisse $\tau (> t)$ quelconque. Partageons l'intervalle (t, τ) en n parties égales par des nombres $t_0 = t, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = \tau$; posons $\frac{\tau - t}{n} = \Delta t$, et prenons n assez grand pour que Δt soit à la fois < 1 et $\leqq \alpha$. Remarquons que

$$U(t, x; \tau, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_{n-1} \quad U(t, x; t_1, y_1) \times U(t_1, y_1; t_2, y_2) \ldots U(t_{n-1}, y_{n-1}; \tau, \xi).$$

Alors en utilisant la remarque précédente utilisée $(n-1)$ fois, en prenant $\varepsilon = \Delta t$, on voit facilement que $U(t, x; \tau, \xi)$ reste > 0 tant que

$$|\xi - x| \leqq \sqrt{\Delta t} + (n-1)[\sqrt{\Delta t} - \Delta t].$$

Mais la quantité qui est au second membre étant infiniment grande avec n, on obtient le résultat suivant :

Théorème III. — *La densité de probabilité* $U(t, x; \tau, \xi)$ *est* > 0 *et non* $= 0$ *quels que soient* t, x, τ, ξ, *avec* $\tau > t$.

2° On a vu [formules (4), (14), (17)] que pour $n < 3$, $U_n(t, x; \tau, \xi)$ est de la forme

$$(17_1) \qquad U_n(t, x; \tau, \xi) = \frac{e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4(\tau - t)}}}{2\sqrt{\pi(\tau - t)}} u_n(t, x; \tau, \xi),$$

où $|u_n|$ est borné supérieurement par une expression de la forme

$$\sum_{r=0}^{n} A |\xi - x|^r.$$

Il est facile de voir que ceci est vrai quel que soit n; et l'on peut faire des remarques analogues pour $\frac{\partial}{\partial \xi} U_n(t, x; \tau, \xi)$. Il en résulte que

$$U(t, x; \tau, \pm\infty) = \frac{\partial}{\partial \xi} U(t, x; \tau, \pm\infty) = 0$$

et que les diverses opérations que nous ferons par la suite [intégrations par partie, dérivations sous le signe $\int$] sont valables, même dans le cas de domaines d'intégration infinis.

3° $U(t, x; \tau, \xi)$, comme fonction de τ et ξ, satisfait à l'équation (6), qui est du même type que l'équation (1); à ce titre $U(t, x; \tau, \xi)$ peut être représenté par le développement

$$(7') \qquad U(t, x; \tau, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^*(t, x; \tau, \xi),$$

où l'on a

$$(4') \qquad U_0^*(t, x; \tau, \xi) = U_0(t, x; \tau, \xi),$$

$$(5') \quad U_{n+1}^*(t, x; \tau, \xi) = -\int_t^\tau dp \int_{-\infty}^{+\infty} \left[b(p, q) \frac{\partial}{\partial q} U_n^*(t, x; p, q) + \frac{\partial b(p, q)}{\partial q} U_n^*(t, x; p, q) \right] \times U_0(p, q; \tau, \xi) qd.$$

On établit, en suivant les méthodes de M. Feller, que

$$(6')\qquad \left.\begin{array}{c} |U_n^*(t, x; \tau, \xi)| \\ \left|\dfrac{\partial}{\partial\xi} U_n^*(t, x; \tau, \xi)\right| \end{array}\right\} < \alpha_n(\tau - t)^{\frac{n-2}{2}},$$

et que

$$(11')\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |U_n^*(t, x; \tau, \xi)|\, dx < \alpha_n(\tau - t)^{\frac{n}{2}},$$

et en calculant comme au paragraphe **2**

$$(14')\qquad U_1^*(t, x; \tau, \xi) = \frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(\tau-t)}}}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}}\left[A(\xi - x) + A\sqrt{\tau - t}\right].$$

$$(17')\qquad U_2^*(t, x; \tau, \xi) = \frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(\tau-t)}}}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}}\left[A(\xi - x)^2 + A\sqrt{\tau - t}(\xi - x) + A(\tau - t)\right],$$

et de même

$$(28)\qquad \frac{\partial}{\partial\xi} U_1^*(t, x; \tau, \xi) = \frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(\tau-t)}}}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}}\left[\frac{A(\xi - x)^2}{\tau - t} + \frac{A(\tau - x)}{\sqrt{\tau - t}} + A(\xi - x) + A + A\sqrt{\tau - t}\right],$$

$$(29)\qquad \frac{\partial}{\partial\xi} U_2^*(t, x; \tau, \xi) = \frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(\tau-t)}}}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}}\left[\frac{A(\xi - x)^3}{\tau - t} + \frac{A(\xi - x)^2}{\sqrt{\tau - t}}\right.$$
$$\left. + A(\xi - x)^2 + A(\xi - x) + A\sqrt{\tau - t}(\xi - x) + A\sqrt{\tau - t}\right].$$

4° La convergence des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} U(t, x; \tau, y)\, dy$ est uniforme par rapport à $(t, x; \tau)$ tant que t, x, τ restent bornés ; ceci résulte de ce que la série $\sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} |U_n|\, dy$ est uniformément convergente, et de ce que les U_i sont de la forme (17_1).

5° Rappelons un résultat de M. Feller (*loc. cit.*, p. 139) : pour $n \geqq 0$, on a

$$(30)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x} U_n(t, x; \tau, \xi)\right| d\xi \leqq \alpha_n(\tau - t)^{\frac{n-1}{2}},$$

où α_n a la signification habituelle. On peut établir de même que

$$(31)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} U_n(t, x; \tau, \xi)\right| d\xi \leqq \alpha_n(\tau - t)^{\frac{n-2}{2}}.$$

En effet, (5) donne

$$\frac{\partial}{\partial x} U_{n+1}(t, x; \tau, \xi) = \int_t^\tau dp \int_{-\infty}^{+\infty} b(p, q) \frac{\partial}{\partial q} U_n(p, q; \tau, \xi) \frac{\partial}{\partial x} U_0(t, x; p, q)\, dq.$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial x} U_0(t, x; p, q) = -\frac{\partial}{\partial q} U_0(t, x; p, q),$$

on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} U_{n+1}(t, x; \tau, \xi) = \int_t^\tau dp \int_{-\infty}^{+\infty} \left[b(p, q) \frac{\partial^2}{\partial q^2} U_n(p, q; \tau, \xi) + \frac{\partial}{\partial q} b(p, q) \frac{\partial}{\partial q} U_n(p, q; \tau, \xi) \right] \times U_0(t, x; p, q)\, dq;$$

une nouvelle différentiation donne $\frac{\partial^2}{\partial x^2} U_{n+1}(t, x; \tau, \xi)$; le procédé de récurrence de M. Feller permet alors d'établir (31). Les opérations à faire sont valables sauf pour les premières valeurs de n, pour lesquelles on procède à une vérification directe.

6° Théorème IV. — $U(t, x; \tau, \xi)$ *ainsi que* $F(t, x; \tau, \xi)$ *sont des fonctions continues du coefficient* b, *uniformément en* ξ.

Nous voulons dire par là que si l'on prend deux valeurs de b, soient b et $b + \varepsilon(t, x)$, satisfaisant toutes deux aux hypothèses que nous avons posées dans l'Introduction, et auxquelles correspondent deux valeurs U et $\overline{U}$ de U, on a

$$\lim_{\to 0} |\overline{U} - U| = 0, \qquad \text{où } \varepsilon = bs\,|\varepsilon(t, x)|.$$

D'abord, si l'on pose

$$\overline{U_n}(t, x; \tau, \xi) - U_n(t, x; \tau, \xi) = u_n(t, x; \tau, \xi),$$

on a

$$(32)\qquad \left\{ \begin{aligned} |u_n| &\leq \varepsilon \alpha M^n \frac{(\tau - t)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \\ \left|\frac{\partial}{\partial x} u_n\right| &\leq \varepsilon \alpha M^n \frac{(\tau - t)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \end{aligned} \right.$$

où M et α sont certaines constantes.

En effet, supposons (32) vérifiées jusqu'à n, et montrons qu'elles sont vraies pour $n + 1$. Partons de la formule (5); elle nous donne

$$\overline{U_{n+1}} = U_{n+1} + T_1 + T_2,$$

avec

$$T_1 = \int_t^\tau dp \int_{-\infty}^{+\infty} b(p, q) \frac{\partial}{\partial q} u_n(p, q; \tau, \xi)\, U_0(t, x; p, q)\, dq,$$

$$T_2 = \int_t^\tau dp \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(p, q) \frac{\partial}{\partial q} \overline{U_n}(p, q; \tau, \xi)\, U_0(t, x; p, q)\, dq.$$

On a immédiatement, avec (32),

$$|T_1| \leqq \varepsilon\alpha h \frac{M^n(\tau - t)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{n}{2}},$$

et comme on a nécessairement [d'après (6); *cf.* FELLER, *loc. cit.*, p. 131]

$$\left.\begin{array}{c} |\overline{U_n}(t, x; \tau, \xi)| \\ \left|\dfrac{\partial}{\partial x}\overline{U_n}(t, x; \tau, \xi)\right| \end{array}\right\} \leqq \frac{\alpha M^n(\tau - t)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

où M peut être supposé le même que dans (32), ainsi que α; on a aussi

$$|T_2| \leqq \varepsilon\alpha \frac{M^n(\tau - t)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{n}{2}}.$$

On aura donc

$$|u_{n+1}(t, x; \tau, \xi)| \leqq \varepsilon \frac{\alpha(\tau - t)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left[h(\tau - t)^{\frac{1}{2}} + (\tau - t)^{\frac{1}{2}}\right]M^n \leqq \varepsilon\alpha \frac{M^{n+1}(\tau - t)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

si l'on a pris $M \geqq (h+1)\sqrt{\tau - t}$.

De même, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{U_{n+1}}(t, x; \tau, \xi) = \frac{\partial}{\partial x}U_n(t, x; \tau, \xi) + T'_1 + T'_2$$

avec

$$T'_1 = \int_t^\tau dp \int_{-\infty}^{+\infty} b(p, q)\frac{\partial}{\partial q}u_n(p, q; \tau, \xi)\frac{\partial}{\partial x}U_0(t, x; p, q)\,dq,$$

$$T'_2 = \int_t^\tau dp \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(p, q)\frac{\partial}{\partial q}\overline{U_n}(p, q; \tau, \xi)\frac{\partial}{\partial x}U_0(t, x; p, q)\,dq,$$

et l'on obtient aisément des limitations analogues aux précédentes. Il suffit alors, pour établir (32), de vérifier (32) dans le cas de $n \equiv 1$, ce qui se fait sans difficultés en reprenant les changements de variables de la première Partie (p. 184).

On pourrait même établir un résultat plus précis que (32); nous n'en avons pas besoin ici : de (32) résulte le lemme annoncé, en ce qui concerne $U(t, x; \tau, \xi)$; pour obtenir le même résultat pour $F(t, x; \tau, \xi)$, on établit les limitations

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(t, x; \tau, \xi)|\,d\xi \leqq \varepsilon\,\alpha\,M^n \frac{(\tau - t)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x}u_n(t, x; \tau, \xi)\right| d\xi \leqq \varepsilon\,\alpha\,M^n \frac{(\tau - t)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)};$$

ce qui se fait aussi sans difficultés.

CHAPITRE II.

Généralités sur les probabilités d'absorption.

1. Nouveau point de vue; rapprochement avec un point de vue de M. S. Bernstein. — Soient t et τ deux instants consécutifs fixes ($\tau > t$); soit (t_n) une suite dénombrable d'instants de l'intervalle (t, τ), partout dense dans cet intervalle; et pour fixer les idées, supposons que les t_n soient les nombres dyadiques

$$\frac{p}{2^q}(\tau - t) \qquad [q = 1, 2, \ldots; p = 0, 1, 2, \ldots, 2^q].$$

Aux (t_n) faisons correspondre une suite d'axes de coordonnées $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n, \ldots$. Une suite de nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, considérés comme des coordonnées par rapport à ces axes, définit un point M dans un espace que nous appellerons E. Supposons que $X(t) = x$, x étant un nombre fixe donné. Si l'on pose

$$a_n = X(t_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

le point M devient aléatoire. Sa loi de répartition dans E est déterminée entièrement et suffisamment par la connaissance de la fonction de quatre variables $U(t_1, x_1; t_2, x_2)$; ce point a été établi par M. Kolmogoroff (Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Ergebnisse der Math.*, Berlin, 1933, p. 24); voici ce que cela signifie :

Il existe un certain corps d'ensembles borélien K, constitué par des sous-ensembles e de E, parmi lesquels E lui-même; nous disons plus loin comment K est défini;

Pour tout élément e de K, la probabilité $\Pr.(M \subset e) = m(e)$ existe;

La fonction d'ensemble $m(e)$ ainsi définie satisfait aux axiomes classiques qui définissent les probabilités (*voir* ces axiomes, par exemple, dans Kolmogoroff, *loc. cit.*, p. 13); en particulier, $m(e)$ est *complètement additive;* en raison de ses propriétés, $m(e)$ peut être considérée comme définissant une *mesure* dans E; d'où la notation $m(e)$.

Pour définir K et $m(e)$, on définit les *ensembles cylindriques* dans E : un nombre fini quelconque de coordonnées $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p}$ de M définissent, dans l'espace euclidien E_p à p dimensions, un point $\overline{M}$; lorsque $\overline{M}$ est assujetti à être situé dans un ensemble mesurable-B $\bar{e}$ de E_p, le point M correspondant décrit, dans E, un ensemble dit cylindrique e. Ces ensembles cylindriques jouent le rôle des intervalles dans la théorie de la mesure de Borel; leur ensemble est un corps $\mathcal{F}$, dont K est *l'extension borélienne*. On a évidemment

$$\Pr.(M \subset e) = \Pr.(\overline{M} \subset \bar{e}),$$

si e est cylindrique; et Pr. $(\overline{\mathrm{M}} \subset \bar{e})$ évidemment existe et s'évalue sans difficulté à l'aide de $\mathrm{U}(t_1, x_1; t_2, x_2)$; si, par exemple, $\bar{e}$ est défini simplement par le fait que $a_n = \mathrm{X}(t_n) \leqq \xi$, on trouve immédiatement que

$$\mathrm{Pr.}(\mathrm{M} \subset e) = \mathrm{Pr.}(\overline{\mathrm{M}} \subset \bar{e}) = \mathrm{F}(t, x; t_n, \xi).$$

Considérons maintenant l'espace E′ des courbes *continues* Γ : $x = x(t')$, définies dans l'intervalle $(t \leqq t' \leqq \tau)$ et satisfaisant en outre aux conditions

(a) $x(t')$ est uniforme;

(b) $x(t) = x$

(de sorte que toutes ces courbes sont issues de la même origine.)

Il résulte du théorème II que, sauf peut-être si M appartient à un certain ensemble ε de *mesure nulle* $[m(\varepsilon) = 0]$, la donnée de M détermine une courbe Γ unique; réciproquement d'ailleurs, une courbe Γ détermine toujours un point M unique; cette correspondance entre M et Γ est définie par

$$a_n = x(t_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On en déduit immédiatement que l'on peut définir dans E′ une mesure : soit e' un sous-ensemble de E′, e l'ensemble des points M correspondant aux courbes Γ de e', e' est dit mesurable si e est mesurable, et l'on posera

$$\mathrm{mes.}(e') = m(e).$$

Pour simplifier, nous écrirons : $\mathrm{mes.}(e') = m(e')$. Cette définition est acceptable, parce que, si e est un ensemble mesurable de E, l'ensemble mesurable $e - e.\varepsilon$ définit dans E′ un ensemble e' également mesurable, et l'on a

$$m(e') = m(e - e\varepsilon) = m(e),$$

puisque $m(\varepsilon) = 0$.

Il faut en outre remarquer que la mesure ainsi définie dans E′ est une *loi de probabilité*, c'est-à-dire satisfait aux axiomes classiques sur les lois de probabilité, en particulier $m(e')$ est *complètement additive*, ou encore satisfait à *l'axiome de continuité* (*cf.* Kolmogoroff, *loc. cit.*, p. 13). Ce sont des propriétés que nous aurons souvent à utiliser, explicitement ou non.

Ainsi l'étude de $\mathrm{X}(t')$, dans l'intervalle (t, τ) et sous l'hypothèse $\mathrm{X}(t) = x$, peut être envisagée sous un nouvel aspect : on peut imaginer que l'on joue à un jeu consistant à choisir au hasard une courbe Γ parmi toutes les courbes de l'espace E′, selon une loi de probabilité déterminée; la probabilité que Γ possède un caractère déterminé sera définie si l'ensemble e' des courbes Γ possédant le caractère en question est mesurable, et alors la probabilité en question sera précisément $m(e')$.

La mesure ainsi définie dans l'espace E′ dépend évidemment de la valeur choisie pour le coefficient b; nous mettrons ce fait en évidence dans les notations, en disant que e' est mesurable-(b) et en appelant $m(e')$, que nous noterons $m(b;\, e')$, la mesure-(b).

t' étant un instant quelconque de $(t,\, \tau)$, considérons la formule

$$(33)\qquad y(t') = x(t') - \int_t^{t'} b[t'',\, x(t'')]\, dt''.$$

Elle définit dans l'espace E′ une transformation T; pour étudier T, posons

$$(34)\qquad \mathrm{Z}(t') = x(t') - y(t') = \int_t^{t'} b[t'',\, x(t'')]\, dt''$$

qui peut s'écrire

$$(35)\qquad \mathrm{Z}(t') = \int_t b[t'',\, y(t'') + \mathrm{Z}(t'')]\, dt''.$$

Lorsque $y(t')$ est connu (et continu), cette équation intégrale qui, vu les hypothèses faites sur b, peut être étudiée soit par la méthode d'approximations successives de M. Picard, soit par la méthode de Cauchy-Lipschitz (*cf.* Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 374 et 39), détermine, et d'une façon unique, $\mathrm{Z}(t')$ et par suite $x(t')$: de sorte que T admet une réciproque T^{-1}, T et T^{-1} transforment donc E′ en lui-même. On remarquera que $\mathrm{Z}(t')$ est nécessairement dérivable et à dérivée bornée.

Ceci étant, nous allons énoncer et démontrer le théorème suivant :

Théorème V. — *Si e' est un sous-ensemble de* E′ *mesurable*-(b), $\mathrm{T}(e')$ *est mesurable*-o, *et l'on a*

$$m(b;\, e') = m[\mathrm{o};\, \mathrm{T}(e')];$$

et réciproquement.

On peut observer dès maintenant, et l'on vérifiera plus précisément par la suite, que cet énoncé nous rapproche du point de vue de M. S. Bernstein dans sa théorie des équations différentielles stochastiques [*voir* la référence à la note (4)]; nous lui empruntons d'ailleurs sa méthode, on notera toutefois que nos hypothèses sur b sont moins strictes que les siennes.

Soit l'équation $\overline{\mathrm{L}}(u) = \mathrm{o}$ obtenue en faisant $b = \mathrm{o}$, c'est-à-dire

$$(36)\qquad \overline{\mathrm{L}}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{o}$$

et soit $\mathrm{Y}(t')$ la fonction aléatoire associée à cette équation, considérée dans l'intervalle $(t,\, \tau)$, et avec l'hypothèse $\mathrm{Y}(t) = x$. La formule

$$(37)\qquad \mathrm{Y}(t') = \mathrm{X}(t') - \int_t^{t'} b[t'',\, \mathrm{X}(t'')]\, dt''$$

ou, symboliquement,

$$(37') \qquad X(t') = T^{-1}[Y(t')],$$

définit dans l'intervalle (t, τ) une fonction aléatoire. On a

Théorème VI. — *La fonction aléatoire* $X(t')$ *définie par* $(37)'$ *est du type de Markoff et associée à l'équation* $L(u) = 0$.

Il est clair que ce théorème VI, d'après ce qui précède, entraîne le théorème V : car si, conformément au théorème VI, il revient au même de choisir au hasard une courbe Γ selon la loi définie par $U(t_1, x_1; t_2, x_2)$ ou de choisir d'abord une courbe Γ' selon la loi définie par

$$\overline{U}(t_1, x_2; t_2, x_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{(x_2 - x_1)^2}{4(t_2 - t_1)}} = U_0(t_1, x_1; t_2, x_2)$$

qui est la densité de probabilité relative à $Y(t')$, puis d'en déduire Γ par la formule

$$\Gamma = T^{-1}(\Gamma');$$

il est clair que pour savoir si e' est mesurable-b et évaluer sa mesure-b, il suffira de voir si $T(e')$ est mesurable-o et de prendre sa mesure-o. C'est donc en définitive le théorème VI que nous allons démontrer.

1^re^ partie : $X(t')$ *est du type de Markoff.* — Il faut montrer que la loi de probabilité de $X(t_2)$ (avec $t_2 > t_1$) ne dépend que de t_1, t_2 et $X(t_1)$: or

$$(38) \qquad X(t_2) - X(t_1) = Y(t_2) - Y(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} b[t', X(t')]\, dt'.$$

La loi de répartition de la variable aléatoire $Y(t_2) - Y(t_1)$ ne dépend que de t_1 et t_2; et dans l'intégrale n'interviennent que les valeurs de $X(t')$ pour des instants $t' \geqq t_1$, mais non antérieurs à t_1; la propriété en résulte. On peut dire aussi :

Appelons T' la transformation T relative au cas où $t = t_1$, $\tau = t_2$, $x = X(t_1)$ (nombre déterminé); posons

$$Y'(t') = X(t_1) + Y(t') - Y(t_1);$$

$Y'(t')$ est associée à $\overline{L}(u) = 0$, et prend la valeur $X(t_1)$ pour $t' = t_1$. On a donc

$$X(t_2) = T'^{-1}[Y'(t_2)].$$

Si nous prouvons (ce sera l'objet de la 2^e^ partie) que la *variable aléatoire*

$$X(\tau) = T^{-1}[Y(\tau)]$$

a pour loi de répartition $F(t, x; \tau, \xi)$, il en résultera *ipso facto* que la loi de $X(t_2)$, $X(t_1)$ étant connu, est $F[t_1, X(t_1); t_2, \xi)$, quels que soient t_1, $X(t_1)$ et t_2; soit une loi qui ne dépend effectivement que de t_1, t_2 et $X(t_1)$.

2^e^ partie : *la fonction de répartition de la variable aléatoire* $X(\tau)$ *est* $F(t, x; \tau, \xi)$. — Ce point acquis, le théorème VI sera bien effectivement démontré; or :

Opérons une subdivision de l'intervalle (t, τ); par exemple, partageons-le en 2^n parties égales par les points

$$t_{n,i} = t + \frac{i}{2^n}(\tau - t) \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2^n);$$

nous poserons

$$\Delta t = \Delta t_n = \frac{\tau - t}{2^n}.$$

$Y(t)$ étant la fonction aléatoire précédemment définie, nous considérons les variables aléatoires $X_n(t_{n,i})$ définies de la façon suivante :

X est choisie aléatoirement suivant une loi de répartition $F(x)$ pourvue, en x, d'autant de dérivées continues et bornées qu'il sera nécessaire [nous les désignerons par $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ...]; $X_n(t_{n,1})$ se déduit de X par la formule

$$X_n(t_{n,1}) = x_0(t) + Y(t_{n,1}) - Y(t) + \int_t^{t_{n,1}} b[t', x_0(t)]\, dt',$$

où $x_0(t)$ désigne la valeur effectivement prise par X. De même, on obtient $X_n(t_{n,i+1})$ à partir de $X_n(t_{n,i})$ par la formule

$$X_n(t_{n,i+1}) = x_n(t_{n,i}) + Y(t_{n,i+1}) - Y(t_{n,i}) + \int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} b[t', x_n(t_{n,i})]\, dt,$$

où $x_n(t_{n,i})$ désigne la valeur effectivement prise par $X_n(t_{n,i})$; et ainsi de suite jusqu'à $X_n(\tau)$. Posons

$$P_n(t_{n,i}; y) = \Pr.\{X_n(t_{n,i}) \leqq y\}.$$

On a évidemment

$$P_n(t_{n,i}; y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\left[y_1 - x_0(t) - \int_t^{t_{n,1}} b[t', x_0(t)]\, dt'\right]^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi \Delta t}}\, dy_1 \ldots$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\left[y_j - x_n(t_{n,j-1}) - \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} b[t', x_n(t_{n,j-1})]\, dt'\right]^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi \Delta t}}\, dy_j \ldots$$

$$\times \int_{-\infty}^{y} \frac{e^{-\frac{\left[y_i - x_n(t_{n,i-1}) - \int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} b[t', x_n(t_{n,i-1})]\, dt'\right]^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi \Delta t}}\, dy_{2^n}.$$

Nous désignerons par $p_n(t_{n,i};\, y)$ la dérivée en y de $P_n(t_{n,i};\, y)$; dérivée dont l'expression est évidente d'après la formule précédente. On a donc la relation de récurrence

$$(39)\qquad P_n(t_{n,i+1};\, y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t_{n,i};\, z)\int_{-\infty}^{y} \frac{e^{-\frac{\left[u-z-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} b[t',z]\,dt'\right]^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi\Delta t}}\,du.$$

La formule (39) peut d'ailleurs recevoir une autre forme; posons

$$\Theta(v)=\int_{-\infty}^{v}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,du;\qquad \int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} b[t',\, z]\,dt'=\rho(z),$$

(39) donne

$$\begin{aligned}
P_n[t_{n,i+1};\, y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_n[t_{n,i};\, z]\,\Theta\left[\frac{y-z-\rho(z)}{\sqrt{2\Delta t}}\right]dz\\
&= \left| P_n[t_{n,i};\, z]\,\Theta\left(\frac{y-z-\rho(z)}{\sqrt{2\Delta t}}\right)\right|_{-\infty}^{+\infty}\\
&\quad+\int_{-\infty}^{+\infty} P_n[t_{n,i};\, z]\,\frac{e^{-\frac{[y-z-\rho(z)]^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi\Delta t}}\,[1+\rho'(z)]\,dz,
\end{aligned}$$

où, en posant $v=z+\rho(z)$

$$(39')\qquad P_n[t_{n,i+1};\, y]=\int_{-\infty}^{+\infty} P_n[t_{n,i};\, z]\,\frac{e^{-\frac{[y-v]^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi\Delta t}}\,dv.$$

Admettons momentanément que $p_n[t_{n,i},\, z]$, $p'_n[t_{n,i},\, z]$, $p''_n[t_{n,i},\, z]$ soient bornés en module par des nombres M, M′, M″. On tire de (S)′, en posant

$$\begin{aligned}
P_n[t_{n,i};\, z] = P_n[t_{n,i};\, y] + (z-y)\,p_n[t_{n,i};\, z] + \frac{(z-y)^2}{2}\,p'_n[t_{n,i};\, z]\\
+\frac{(z-y)^3}{6}\,p''_n[t_{n,i};\, y+\theta(z-y)],
\end{aligned}$$

$$(40)\qquad P_n[t_{n,i+1},\, y]-P_n[t_{n,i};\, y]+\rho(y)P'_n[t_{n,i};\, y]-P''_n[t_{n,i};\, y]\,\Delta t = A\,\Delta t^{\frac{3}{2}}.$$

Or, on a aussi la relation

$$(41)\qquad P'_n[t_{n,i+1};\, y]=p_n[t_{n,i+1};\, y]=\int_{-\infty}^{+\infty} p_n[t_{n,i};\, z]\,\frac{e^{-\frac{[y-z-\rho(z)]^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi\Delta t}}\,dz.$$

Si l'on pose

$$M_i=\underset{z}{b.\,s.}\,|p_n[t_{n,i};\, z]|,\qquad M'_i=\underset{z}{b.\,s.}\,|p'_n[t_{n,i};\, z]|,\qquad M''_i=\underset{z}{b.\,s.}\,|p''_n[t_{n,i};\, z]|,$$

(41) donne immédiatement

$$(42)\qquad M_{i+1}\leqq M_i(1+h\,\Delta t)\qquad (h \text{ constante positive}),$$

d'où

$$M_i\leqq M_0\, e^{h t_{n,i}}\qquad (\text{limitation indépendante de } n).$$

D'ailleurs, on tire de (41), par une intégration par parties

$$(43)\qquad p_n''[t_{n,i+1}; y] = \int_{+\infty}^{-\infty} [p_n'(t_{n,i}; z)(z_v')^2 + p_n(t_{n,i}; z) z_v''] \frac{e^{-\frac{(y-v)^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi\Delta}}\, dv.$$

Remarquons que

$$z_v' = \frac{1}{1+\rho'(z)} = 1 - \rho'(z) + \rho'^2(z)\ldots,$$

$$z_v'' = [-\rho''(z) + 2\rho'(z)\rho''(z)\ldots][1 - \rho'(z) + \rho'^2(z)\ldots].$$

Nous admettons ici l'hypothèse supplémentaire que $b(t, z)$ admet une dérivée seconde bornée en z; alors $\rho'(z)$ et $\rho''(z)$ sont de l'ordre de Δt, et (43) donne

$$M_{i+1}' \leqq M_i A\,\Delta t + M_i'(1 + A\,\Delta t),$$

d'où l'on tire pour M_i' la limitation

$$(44)\qquad M_i' \leqq M_0' e^{h t_{n,i}}.$$

h n'est pas forcément le même dans (8) et (10). On tire de même de (43)

$$(45)\qquad p_n'''[t_{n,i+1}; y] = \int_{-\infty}^{+\infty} [p_n(t_{n,i}; z) z_v'^3 + 3p_n'(t_{n,i}; z) z_v' z_v'' + p_n(t_{n,i}; z)\, z_v''']\frac{e^{-\frac{(y-v)^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi\Delta t}}\, dv.$$

On a donc $z_v''' = A.\Delta t$, *si l'on admet que $b(t, z)$ a une dérivée troisième bornée en z, nouvelle hypothèse supplémentaire.*

Ces résultats établis, nous pouvons conclure comme M. S. Bernstein dans sa théorie des équations différentielles stochastiques, que $P_n[\tau, y]$ tend uniformément pour $n \to \infty$ vers une limite indépendante des subdivisions $(t_{n,i})$, soit $P(t, y)$, satisfaisant à l'équation

$$(46)\qquad \frac{\partial}{\partial\tau} P(\tau, y) + b(\tau, y)\frac{\partial}{\partial y} P(\tau, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(\tau, y) = 0.$$

Nous allons montrer que $X(\tau)$ a une loi de répartition déterminée, qui est précisément $P(\tau, y)$; soit $\overline{P}(\tau, y)$ la probabilité pour que

$$X(\tau) \leqq y$$

et dont l'existence n'est pas assurée. Considérons :

$$P_n[\tau, y-\varepsilon] \quad \text{et} \quad P_n[\tau, y+\varepsilon] \qquad (\varepsilon > 0 \text{ quelconque}).$$

Considérons les cas [c'est-à-dire les choix de $Y(t')$] pour lesquels on a $X_n(\tau) \leqq y - \varepsilon$; négligeons ceux de ces cas pour lesquels on n'a pas, quels que soient t' et t'',

$$
(47) \qquad \left\{ \begin{array}{l} |Y(t')| \leqq M; \\ |Y(t'') - Y(t')| \leqq 2\sqrt{4|t'' - t'| \log \dfrac{1}{|t'' - t'|}} \qquad \text{pour } |t'' - t''| < \delta. \end{array} \right.
$$

La probabilité des cas ainsi négligés est inférieure à un nombre $p(M, \delta)$ indépendant de n qui tend vers o si, simultanément mais indépendamment, M tend vers $+\infty$ et δ vers o, d'après le théorème II. Dans les cas non négligés, la quantité $x_n(\tau)$ définie par la relation de récurrence

$$
x_n[t_{n,i+1}] = x_n[t_{n,i}] + [Y(t_{n,i+1}) - Y(t_{n,i})] + \int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} b[t', x_n(t_{n,i})]\, dt'
$$

tend lorsque $n \to +\infty$ vers $x(\tau)$ défini par

$$
x(\tau) = x_0(t) + Y(\tau) - Y(t) + \int_t^\tau b[t', x(t')]\, dt',
$$

uniformément quel que soit le choix de $Y(t')$. Il suffit de se reporter à l'exposé de la méthode de Cauchy-Lipschitz par M. Goursat [*cf.* Goursat, *loc. cit.*] pour le vérifier en tenant compte de (47). On peut donc écrire

$$
P_n[\tau, y - \varepsilon] - p(M, \delta) \leqq \overline{P}(\tau, y),
$$

de même

$$
\overline{P}(\tau, y) \leqq P_n[\tau, y + \varepsilon] + p(M, \delta),
$$

dès que n est assez grand; n tendant vers $+\infty$, on a

$$
(48) \qquad P(\tau, y - \varepsilon) - p(M, \delta) \leqq \overline{P}(\tau, y) \leqq P(\tau, y + \varepsilon) + p(M, \delta).
$$

En faisant tendre M vers $+\infty$, δ et ε vers o, les deux extrêmes de (48) tendent vers la même limite, $P(\tau, y)$, ce qui établit l'existence de $\overline{P}(\tau, y)$ et montre que $\overline{P}(\tau, y) = P(\tau, y)$.

Nous allons maintenant étudier $P(t + \Delta t, y)$ pour Δt petit; comme

$$
X(t + \Delta t) = X + [Y(t + \Delta t) - Y(t)] + \int_t^{t+\Delta t} b[t', X(t')]\, dt',
$$

on a en posant

$$
Z = X + [Y(t + \Delta t) - Y(t)] \qquad \text{et} \qquad h = b\, s\, |b|,
$$
$$
\text{Prob.}[Z \leqq y - h\,\Delta t] \leqq P[t + \Delta t, y] \leqq \text{Prob.}[z \leqq y + h\,\Delta t].
$$

Or

$$
\text{Prob.}[z \leqq u] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u - v) \frac{e^{-\frac{v^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi \Delta t}}\, dv.
$$

Donc

$$
\text{Prob.}[z \leqq y \pm h\,\Delta t] = \int_{-\infty}^{+\infty} F[y - v \pm h\,\Delta t] \frac{e^{-\frac{v^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi \Delta t}}\, dv.
$$

Posons

$$F(y - v \pm h\,\Delta t) = F(y) - (v \pm h\,\Delta t) f[y - \Theta(v \pm h\,\Delta t)]$$

et rappelons que par hypothèse $|f|$ est borné; on en tire immédiatement que

$$\text{Prob.}[z \leqq y \pm h\,\Delta t] = F(y) + A\sqrt{\Delta t}.$$

Par suite $P[t+\Delta t, y]$ tend vers $F(y)$ lorsque Δt tend vers o : telle est la *condition aux limites* à laquelle satisfait $P(\tau, y)$ en tant que solution de (12). Or nous connaissons une solution de (12) satisfaisant à la même condition aux limites, et qui est, comme $P(\tau, y)$, une solution *régulière* ([11]) de (12) dans le domaine $\tau > t$; c'est

$$(49)\qquad \begin{aligned} \overline{P}(\tau, y) &= \int_{-\infty}^{y} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,U(t, x; \tau, z)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \int_{-\infty}^{y} U[t, x; \tau, z]\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,F(t, x; \tau, y)\,dx \\ &= |F(x)\,F(t, x; \tau, y)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\frac{\partial}{\partial x}F(t, x; \tau, y)\,dx. \end{aligned}$$

$$(49')\qquad \overline{P}(\tau, y) = -\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\frac{\partial}{\partial x}F(t, x; \tau, y)\,dx.$$

L'identité de $P(\tau, y)$ avec $\overline{P}(\tau, y)$ est immédiate [*cf.* FELLER, *loc. cit.*, p. 134]. Nous avons donc pour $P(\tau, y)$ les expressions (49) ou (49').

Supposons maintenant que X, au lieu d'être aléatoire, ait une valeur certaine déterminée a; $X(\tau)$, que nous noterons alors $X_a(\tau)$, aura néanmoins une loi de répartition déterminée $\overline{F}[t, a; \tau, y]$; nous allons en démontrer l'existence et en chercher la valeur.

Prenons deux valeurs initiales distinctes a_1 et a_2, imaginons un *même choix* de $Y(t')$, et soit $\Delta x(t')$ la différence des valeurs de $X_1(t')$ et $X_2(t')$, correspondant respectivement à a_1 et a_2 au même instant t'.

Une formule *approchée* nous donnerait, pour des instants successifs (t_i) partageant l'intervalle (t, τ),

$$\begin{aligned} \Delta x(t_{i+1}) &= \Delta x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{ b[t', X_2(t_i)] - b[t', X_1(t_i)] \}\,dt' \\ &= \Delta x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial}{\partial x} b\{t', X_1(t_i) + \theta[X_2(t_i) - X_1(t_i)]\}\,\Delta x(t_i)\,dt'. \end{aligned}$$

Si donc K désigne $b.s.\left|\frac{\partial}{\partial x}b(t, x)\right|$ et $M_i\,b.s.|\Delta x(t_i)|$, on en déduit *rigoureusement* :

$$(50)\qquad M_{i+1} \leqq M_i(1 + K\,\Delta t), \qquad M_i \leqq |a_2 - a_1|\,e^{Kt_i}.$$

([11]) Au sens de Gevrey et Feller [*cf.* GEVREY, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique* (*Journ. de Math.*, t. IX, 1913, p. 305 et 19)].

D'ailleurs la limitation (50) est indépendante du choix de $Y(t)$ et de la division (t_i).

Prenons alors $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4\sigma}}$; en prenant σ assez petit, et en négligeant des cas de probabilité $< \alpha$, où α est aussi petit qu'on le veut, X est aléatoire mais compris entre $a - \varepsilon$ et $a + \varepsilon$, où ε est aussi petit qu'on le veut. Les choix de $Y(t')$ qui rendent $X(\tau) \leqq y - \varepsilon e^{k\tau}$ rendent nécessairement $X_a(\tau) \leqq y$: donc

$$\text{Prob.}[X(\tau) \leqq y - \varepsilon e^{k\tau}] - \alpha \leqq \text{Prob}[X_a(\tau) \leqq y], \tag{51}$$

de même

$$\text{Prob.}[X(\tau) \leqq y + \varepsilon e^{k\tau}] + \alpha \geqq \text{Prob}[X_a(\tau) \leqq y], \tag{52}$$

Les premiers membres de (51) et (52), si l'on fait tendre σ, ε, α vers o, tendent vers la même limite : $F[t, a; \tau, y]$, ce qui établit l'existence de $\overline{F}(t, a; \tau, y)$ et en donne la valeur; ce dernier résultat établit le théorème annoncé; mais il convient de remarquer qu'il n'a été obtenu que moyennant des hypothèses supplémentaires sur la nature de $b(t, x)$; nous allons nous efforcer de les lever, et pour cela nous utiliserons le théorème IV (Chap. I, § 3, 6°).

Supposons alors que $b(t, x)$ ne possède pas de dérivées seconde et troisième bornées en x, mais soit $\{b^{(n)}(t, x)\}$ une suite de fonctions possédant de telles dérivées et tendant vers b uniformément quels que soient t et x; soient $X_a^n(\tau)$ les variables aléatoires qui leur correspondent comme il a été dit précédemment; pour un même choix de $Y(t')$, et en posant

$$\varepsilon_n = b\,s\,|\,b(t, x) - b^{(n)}(t, x)\,|,$$

on a

$$|\,X_a(\tau) - X_a^{(n)}(\tau)\,| \leqq \varepsilon_n(\tau - t).$$

En reprenant un raisonnement déjà employé, on établira facilement que, quel que soit $a > 0$, on a, pour n assez grand,

$$F^{(n)}[t, a; \tau, y - \alpha] \leqq \text{Prob.}[X_a(\tau) \leqq y] \leqq F^{(n)}[t, a; \tau, y + \alpha],$$

$F^{(n)}(t, a; \tau, y)$ désignant la loi de répartition de $X_a^n(\tau)$; en faisant tendre n vers $+\infty$, puis α vers o, on trouve donc que $X_a(\tau)$ a une loi de répartition déterminée qui est $F[t, a; \tau, y]$.

2. Définitions et propriétés générales des probabilités d'absorption. — Soit une courbe C dans le plan (t, x) d'ordonnée $x = x(t)$; nous supposons que dans l'intervalle (T_1, T_2), $x(t)$ existe, est borné et de plus *continu*. Supposons $X(t) = x$; nous avons montré ailleurs ([12]) que les trois probabilités

([12]) Fortet, *Sur la notion de fonction aléatoire* (*Rev. Scient.*, 1941, 3, p. 1 et sq.).

conditionnelles [c'est-à-dire évaluées dans l'hypothèse $X(t) = x$]

$$\overline{P}_C(t, x; \tau) = \text{Prob.}\{X(t') \leqq x(t') \quad \text{dans tout l'intervalle } t \leqq t' \leqq \tau\},$$
$$P_C(t, x; \tau) = \text{Prob.}\{X(t') < x(t') \quad \text{dans tout l'intervalle } t < t' \leqq \tau\},$$
$$\Phi_C(t, x; \tau) = \text{Prob.}\{X(t') = x(t') \quad \text{au moins une fois dans } t < t' \leqq \tau\}$$

existent lorsque $t < \tau$ et $x < x(t)$ [13]. Lorsque τ tend vers t, ce sont des quantités non croissantes ou non décroissantes, elles ont donc des limites que nous considérons, conventionnellement, comme $\overline{P}_C(t, x; t)$, $P_C(t, x; t)$, $\Phi_C(t, x; t)$.

Il résulte alors du théorème II que $[x < x(t)]$

$$\Phi_C[t, x; t] = 0; \qquad P_C(t, x; t) = \overline{P}_C(t, x; t) = 1,$$

$P_C[t, x; \tau]$ est aussi la probabilité d'avoir $X(t') < x(t')$ dans tout l'intervalle fermé $t \leqq t' \leqq \tau$; et $\Phi_C[t, x; \tau]$ est la probabilité d'avoir $X(t') = x(t')$ au moins une fois dans l'intervalle fermé $t \leqq t' \leqq \tau$; ou encore c'est la probabilité que la plus petite racine ($\geqq t$) de l'équation $X(t') = x(t')$ soit $\geqq t$ et $\leqq \tau$. On a d'ailleurs

$$\Phi_C[t, x; \tau] = 1 - P_C(t, x; \tau).$$

D'autre part, $\overline{P}_C(t, x; \tau)$ garde un sens et se définit sans difficulté spéciale dans le cas limite où $x = x(t)$.

Par contre il semble impossible de définir directement $P_C(t, x; \tau)$ et $\Phi_C(t, x; \tau)$ pour $x = x(t)$; on peut opérer comme pour $x < x(t)$, c'est-à-dire considérer des courbes C_n définies par des fonctions $x_n(t')$ telles que

$$x_n(t) = x(t); \qquad x_n(t') \leqq x_{n+1}(t') < x(t); \qquad \lim_{n \to \infty} x_n(t') = x(t'),$$

et poser

$$P_C[t, x(t); \tau] = \lim_{n \to \infty} \overline{P}_{C_n}[t, x(t); \tau].$$

Mais la limite qui définirait ainsi $P_C[t, x(t); \tau]$ pourrait dépendre de la suite des (C_n) choisie.

On s'en convainc en remarquant que, si l'on pose

$$x_n(t') = x(t') - \varepsilon_n(t' - t)(t' - t), \qquad \varepsilon_n(h) > 0, \qquad \text{pour} \quad h > 0,$$

on pourra toujours trouver une fonction $\varepsilon(t' - t) > 0$ et tendant vers zéro avec $t' - t$ plus vite que n'importe lequel des $\varepsilon_n(t' - t)$ (d'après un résultat classique de la théorie de la croissance), de sorte que la courbe

$$y(t') = x(t') - \varepsilon(t' - t)(t' - t)$$

aura toujours au moins un point au-dessus de n'importe laquelle des courbes C_n.

---

(13) Cette existence est immédiate quand on se place aux points de vue du paragraphe 1 de ce Chapitre.

Toutefois, remarquons que si $\overline{\mathrm{C}}$ est une courbe continue arbitraire définie par $\bar{x}(t')$ avec

$$\bar{x}(t) = x(t), \qquad \bar{x}(t') < x(t'),$$

et si l'on a

$$\underset{\overline{\mathrm{C}}}{bs}\, \overline{\mathrm{P}}_{\overline{\mathrm{C}}}[t, x(t); \tau] = \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau],$$

on sera conduit à admettre que $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau)$ a une valeur déterminée qui se confond avec celle de $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau]$ (14). D'une façon générale, d'ailleurs, il est à présumer que, pour $x < x(t)$, on a

$$\mathrm{P}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau) = \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau),$$

quoique ce résultat ne soit pas évident; nous l'établirons rigoureusement un peu plus loin.

Lorsque $x = x(t)$, on peut définir en outre la probabilité

$$\overline{\Pi}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau] = \text{Prob.}\,\{\mathrm{X}(t') \geqq x(t') \quad \text{dans tout l'intervalle } t \leqq t' \leqq \tau\}.$$

Nous poserons alors les définitions suivantes :

Si $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); t] = 1$,	C sera dite *supérieure* en $[t, x(t)]$;
Si $\overline{\Pi}_{\mathrm{C}}[t, x(t); t] = 1$,	C sera dite *inférieure* en $[t, x(t)]$;
Si $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau] = \overline{\Pi}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau] = 0$,	C sera dite *séparatrice* en $[t, x(t)]$.

Les résultats déjà exposés dans ce Mémoire et ceux qui vont suivre établissent la possibilité de ces trois cas; la question se pose de savoir si d'autres cas sont possibles; la réponse est négative (*voir* chap. IV).

En adoptant les points de vue du paragraphe 1 du présent chapitre (espace E′), en raison de l'axiome de continuité, nous voyons que, si (C_n) désigne une suite de courbes continues définies par $x = x_n(t')$, et telles que

$$x_n(t') \geqq x(t'); \qquad \lim x_n(t') = x(t').$$

on a, non seulement

$$\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}_n}(t, x; \tau) \geqq \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau),$$

mais aussi

$$\lim_{n \to \infty} \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}_n}(t, x; \tau) = \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau).$$

Nous utiliserons diverses remarques de cet ordre.

Le calcul de $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}$ *et de* P_{C} *est le problème fondamental de l'étude d'une diffusion avec absorption le long de* C. Nous les déterminerons en fait à partir de Φ_{C}. Quand nous nous intéressons à $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}$, P_{C}, Φ_{C} comme fonctions de τ seulement, nous les noterons simplement $\overline{\mathrm{P}}(\tau)$, $\mathrm{P}(\tau)$, $\Phi(\tau)$.

---

(14) *Cf.* Chap. III, p. 221 et Chap. IV, p. 237.

Il résulte de nos indications générales du paragraphe **1** que si nous partageons l'intervalle $(t, \tau)(\tau > t)$ en 2^n parties égales par les nombres $t_{n,i} = t + \frac{\tau - t}{2^n} i$, et si nous posons

$$\overline{\mathrm{P}}_n(\tau) = \int_{-\infty}^{x(t_{n,1})} \int_{-\infty}^{x(t_{n,2})} \cdots \int_{-\infty}^{x(t_{n,2^n})} \mathrm{U}(t, x; t_{n,1}, y_1) \mathrm{U}(t_{n,1}, y_1; t_{n,2}, y_2) \\ \times \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \times \mathrm{U}(t_{n,2^n-1}, y_{2^n-1}; \tau, y)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{2^n-1}\, dy,$$

les $\overline{\mathrm{P}}_n(\tau)$ décroissent avec $\frac{1}{n}$ et tendent vers $\overline{\mathrm{P}}(\tau)$; si l'on pose

$$\overline{p}_n(t, x; \tau) = \int_{-\infty}^{x(t_{n,1})} \cdots \int_{-\infty}^{x(t_{n,2^n-1})} \mathrm{U}(t, x; t_{n,1}, y_1) \\ \times \cdots\cdots\cdots \\ \times \mathrm{U}(t_{n,2^n-1}, y_{2^n-1}; \tau, y)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{2^n-1},$$

les $\overline{p}_n$ sont non croissants lorsque n tend vers $+\infty$, donc tendent vers une limite $\overline{p}(t, x; \tau, y)$; mais il n'est pas évident que cette limite $\overline{p}(t, x; \tau, y)$ est indépendante du mode des subdivisions pratiquées sur (t, τ); c'est-à-dire qu'en employant d'autres nombres que les dyadiques $t_{n,i}$, on obtiendrait peut-être une autre limite $\overline{p}'(t, x; \tau, y)$; en réalité cette indépendance peut être démontrée, mais nous n'en avons guère besoin et laisserons ce point de côté; d'autant que nous retrouverons, au Chapitre V, la quantité $\overline{p}(t, x; \tau, y)$ indépendamment de tout mode de subdivision de (t, τ). En tout cas, on a

$$(53) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 0 \leqq \overline{p}(t, x; \tau, y) \leqq \overline{p}_n(t, x; \tau, y) \leqq \mathrm{U}(t, x; \tau, y), \\ & \overline{\mathrm{P}}_n(t, x; \tau) = \int_{-\infty}^{x(\tau)} \overline{p}_n(t, x; \tau, y)\, dy. \end{aligned} \right.$$

Donc, par un passage à la limite légitime

$$\overline{\mathrm{P}}(t, x; \tau) = \int_{-\infty}^{x(\tau)} \overline{p}(t, x; \tau, y)\, dy.$$

Plus généralement, si nous posons, dans l'hypothèse $\mathrm{X}(t) = x \leqq x(t)$,

$$\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau, y) = \text{Prob.}\{\mathrm{X}(t') \leqq x(t') \quad \text{dans tout l'intervalle} \quad t \leqq t' < \tau;\ \mathrm{X}(\tau) \leqq y \leqq x(\tau)\},$$

définissant ainsi une *nouvelle probabilité d'absorption* qui nous sera souvent utile, cette probabilité *existe*, et l'on a

$$\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau, y) = \int_{-\infty}^{y} \overline{p}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau, y)\, dz.$$

Signalons en passant que, d'une façon analogue, nous aurons aussi à considérer

$$\mathrm{P}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau, y) = \text{Prob.}\{\mathrm{X}(t') < x(t') \quad \text{pour} \quad t \leqq t' < \tau;\ \mathrm{X}(\tau) \leqq y \leqq x(\tau)\},$$

probabilité calculée comme toujours dans l'hypothèse

$$X(t) = x\,[< x(t)].$$

Cette probabilité d'absorption *existe*.

Observons maintenant que, d'après le théorème II, si l'on a $|x(t') - x| > \alpha$ quel que soit t' dans l'intervalle (t, τ), on a

$$1 - \overline{P}_C(t, x; \tau) \leqq \varepsilon, \tag{54}$$

pourvu que $\tau - t > \eta(\varepsilon, \alpha)$, où η est indépendant de t, x, τ et de la courbe C. Soit $\Delta\tau > 0$; on peut écrire

$$\overline{P}_C(t, x; \tau + \Delta\tau) = \int_{-\infty}^{x(\tau)} \overline{p}(t, x; \tau, y)\,\overline{P}(\tau, y; \tau + \Delta\tau)\,dy. \tag{55}$$

Ceci résulte du théorème des probabilités composées, ou s'obtient directement par passage à la limite sur les $\overline{P}_n$ et les $\overline{p}_n$. On a de même

$$\overline{P}_C(t, x; \tau - \Delta\tau) = \int_{-\infty}^{x(\tau - \Delta\tau)} \overline{p}(t, x; \tau - \Delta\tau, y)\,\overline{P}(\tau - \Delta\tau, y; \tau)\,dy. \tag{55'}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\overline{P}_C(t, x; \tau - \Delta\tau) - \overline{P}_C(t, x; \tau) \\ &\quad = \int_{-\infty}^{x(\tau - \Delta\tau)} \overline{p}(t, x; \tau - \Delta\tau, y)\,[1 - \overline{P}(\tau - \Delta\tau, y; \tau)]\,dy. \end{aligned} \tag{56}$$

Soit m un nombre inférieur à la borne inférieure de $x(t')$ dans l'intervalle (T_1, T_2) et tel que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{m} U(t, x; \tau - \Delta\tau, y)\,dy < \varepsilon, \tag{57}$$

quel que soit $\tau - \Delta\tau$; un tel nombre existe d'après une remarque du paragraphe 3 du chap. I. D'autre part on peut trouver un nombre η_1 indépendant de τ tel que pour $\Delta\tau < \eta_1$, l'oscillation de $x(t')$ dans l'intervalle $(\tau - \Delta\tau, \tau)$ soit $< \omega$; en prenant ω assez petit, on pourra trouver un nombre $n > m$ et $< x(\tau) - \omega$, tel que

$$\int_{n}^{x(\tau - \Delta\tau)} U(t, x; \tau - \Delta\tau, y)\,dy < \varepsilon, \tag{58}$$

quel que soit $\Delta\tau < \eta_1$. Alors, quand y varie dans l'intervalle (m, n), la différence $x(t') - y$ reste supérieure à $x(\tau) - \omega - n = \alpha > 0$, quel que soit t' dans l'intervalle $(\tau - \Delta\tau, \tau)$, on peut donc, d'après (54), trouver un nombre $\eta(\varepsilon, \alpha) > 0$ tel que $\Delta\tau < \eta(\varepsilon, \alpha)$ entraîne

$$1 - \overline{P}(\tau - \Delta\tau, y; \tau) < \varepsilon. \tag{59}$$

(57), (58) et (59) avec (56) entraînent que

$$\overline{\mathrm{P}}(t, x; \tau - \Delta\tau) - \overline{\mathrm{P}}(t, x; \tau) < 3\varepsilon.$$

Supposons maintenant que l'on remplace la courbe C : $x = x(t')$ par la courbe $\mathrm{C}_{\pm\rho}$: $x = x(t') \pm \rho$ $(\rho > 0)$; η_1 ne sera pas altéré; α sera remplacé par $\alpha \pm \rho$; si l'on astreint ρ à être $< \frac{\alpha}{2}$, la différence $x(t') - y$, lorsque y varie de m à n et t' de $\tau - \Delta\tau$ à τ, restera supérieure à $\frac{\alpha}{2}$; en utilisant $\eta\left(\varepsilon, \frac{\alpha}{2}\right)$ au lieu de $\eta(\varepsilon, \alpha)$, on voit que

$$\Delta\tau < \eta\left(\varepsilon, \frac{\alpha}{2}\right)$$

entraînera (59) pour les courbes $\mathrm{C}_{\pm\rho}$ quel que soit ρ. On peut évidemment choisir ω puis n de telle sorte que (58) soit vrai pour toutes les courbes $\mathrm{C}_{\pm\rho}$; il en résulte que, considérée comme fonction de τ, $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}_{\pm\rho}}(t, x; \tau)$ est continue à gauche uniformément par rapport à ρ (du moins pour ρ assez petit); on établit le même résultat, de la même façon et plus aisément, pour la continuité à droite. Comme on a pour $x < x(t)$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau) = \lim_{\rho \to 0} \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}_{-\rho}}(t, x; \tau),$$

$\mathrm{P}_{\mathrm{C}}(\tau)$ est également une fonction continue de τ, et par suite aussi $\Phi_{\mathrm{C}}(\tau)$. Ce résultat subsiste si $x = x(t)$, en ce qui concerne $\overline{\mathrm{P}}[t, x(t); \tau]$; par suite :

Théorème VII. — *Les probabilités* $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau)$, $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau)$, $\Phi_{\mathrm{C}}(t, x; \tau)$, *sous l'hypothèse que la courbe* C *est continue, sont des fonctions continues de* τ.

D'autre part, soit δ un nombre > 0 assez petit, et $x < x(t)$; soit x' quelconque mais tel que $|x - x'| \leqq \delta$. En vertu de (53), on peut trouver deux nombres m et n et un nombre $\Delta\tau > 0$ tels que

$$m < n; \qquad n \leqq x(t') \quad \text{pour } t \leqq t' \leqq t + \Delta\tau.$$

$$\int_{-\infty}^{m} \overline{p}_{\mathrm{C}}(t, x'; t', y)\, dy < \varepsilon \quad \text{quels que soient } x' \text{ et } t' \qquad (t \leqq t' \leqq t + \Delta\tau),$$

$$\int_{n}^{x(t')} \overline{p}_{\mathrm{C}}(t, x'; t', y)\, dy < \varepsilon \quad \text{quels que soient } x' \text{ et } t' \qquad (t \leqq t' \leqq t + \Delta\tau),$$

$$\int_{m}^{n} [\mathrm{U}(t, x'; t', y) - \overline{p}_{\mathrm{C}}(t, x'; t', y)]\, dy < \varepsilon \quad \text{quels que soient } x' \text{ et } t',$$

ceci en vertu du théorème II.

On a alors

$$\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau) - \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}(t, x'; \tau) = \int_{-\infty}^{x(t')} [\overline{p}_{\mathrm{C}}(t, x; t', y) - \overline{p}_{\mathrm{C}}(t, x'; t', y)]\, \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}(t', y; \tau)\, dy,$$

où le second membre est $< 4\varepsilon$ d'après les conditions qui précèdent, dès que x' est suffisamment voisin de x, car, pour $t'-t$ fixe,

$$\lim_{x' \succ x} U(t, x'; t', y) = U(t, x; t', y) \qquad \text{(uniformément en } y\text{)}.$$

Autrement dit, pour $x < x(t)$, $\overline{P}_C(t, x; \tau)$ est fonction continue de x; or, comme pour le théorème précédent, si l'on introduit des courbes $C_{\pm\rho}$ déduites de C par une translation parallèle à l'axe des x et d'amplitude suffisamment petite, la continuité de $\overline{P}_{C\pm\rho}(t, x; \tau)$ en x est uniforme par rapport à ρ; il en résulte que $P_C(t, x; \tau)$ et $\Phi_C(t, x; \tau)$ sont eux-mêmes continus en x, pour $x < x(t)$; et ce résultat s'établit pour $\overline{P}_C(t, x; \tau, y)$ de la même façon.

Théorème VIII. — *La courbe* C *étant continue, les probabilités* $\overline{P}_C(t, x; \tau)$, $\overline{P}_C(t, x; \tau, y)$, $P_C(t, x; \tau)$, $\Phi_C(t, x; \tau)$ *sont continues en* x *pour tout* $x < x(t)$.

Ainsi, pour t et x donnés, avec $x < x(t)$, on peut, étant donné ε, déterminer un nombre $\delta(\varepsilon, t)$ tel que $|x - x'| < \delta(\varepsilon, t)$ entraîne

$$|\overline{P}_C(t, x'; \tau) - \overline{P}_C(t, x; \tau)| < \varepsilon.$$

Mais plus précisément, on peut déterminer $\delta(\varepsilon)$ tel que $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$ entraîne

$$|\overline{P}_C(t + \Delta t, x'; \tau) - \overline{P}_C(t + \Delta t, x; \tau)| < \varepsilon,$$

quel que soit Δt pourvu que Δt soit $<$ à un certain nombre $\eta(\varepsilon)$; en effet, dans ce qui précède, n et m pourront être choisis indépendants de Δt; la réalisation de l'inégalité

$$\int_m^n [U(t + \Delta t, x'; t', y) - \overline{p}_C(t + \Delta t, x'; t', y)]\, dy < \varepsilon$$

ne dépend que de l'écart $(t' - t - \Delta t)$; pour une valeur déterminée de cet écart, la convergence de $U(t + \Delta t, x'; t', y)$ vers $U(t + \Delta t, x; t', y)$ est uniforme en y et $t + \Delta t$. Pour t et $x < x(t)$, on peut alors écrire

$$\overline{P}_C(t, x; \tau) = \int_{-\infty}^{x(t+\Delta t)} \overline{p}_C(t, x; t + \Delta t, y)\, \overline{P}_C(t + \Delta t, y; \tau)\, dy \qquad (\Delta t > 0),$$

où, à ε près si Δt est assez petit,

$$\overline{P}_C(t, x; \tau) \# \int_m^n U_0(t, x; t + \Delta t, y)\, \overline{P}_C(t + \Delta t, y; \tau)\, dy,$$

et de même

$$\begin{aligned} &\overline{P}_C(t, x; \tau) - \overline{P}_C(t + \Delta t, x; \tau) \\ &\qquad \# \int_m^n U_0(t, x; t + \Delta t, y)\, [\overline{P}_C(t + \Delta t, y; \tau) - \overline{P}_C(t + \Delta t, x; \tau)]\, dy. \end{aligned}$$

Mais on peut déterminer un nombre $\alpha(\varepsilon, \Delta t)$ tendant vers zéro avec Δt et tel que l'intégrale

$$\int_{|y-x|>\alpha} U_0(t, x; t+\Delta t, y)\left[\overline{P}_C(t+\Delta t, y; \tau) - \overline{P}_C(t+\Delta t, x; \tau)\right] dy$$

soit négligeable à ε près, quel que soit Δt; on aura, pour Δt assez petit, $\alpha(\varepsilon, \Delta t) < \delta(\varepsilon)$; et alors la différence

$$\overline{P}_C(t, x; \tau) - \overline{P}_C(t+\Delta t, x; \tau)$$

sera de l'ordre de ε, ce qui établit que $\overline{P}_C(t, x; \tau)$ est continu en t, à droite; mais on établit de même la continuité à gauche, et ces résultats s'étendent à $P_C(t, x; \tau)$ et $\Phi_C(t, x; \tau)$. Donc :

Théorème IX. — *La courbe* C *étant continue, et* $x < x(t)$, *les probabilités* $\overline{P}_C(t, x; \tau)$, $\overline{P}_C(t, x; \tau)$, $\Phi_C(t, x; \tau)$ *sont continues en* t.

D'autre part, on peut déduire du théorème V du paragraphe **1** quelques applications importantes aux probabilités d'absorption; pour cela faisons une remarque préliminaire

Soient $b(t, x)$ et $b^{(1)}(t, x)$ deux valeurs de b, telles que

$$b^{(1)}(t, x) - b(t, x) \geqq \eta > 0,$$

quels que soient t et x, et où η est une certaine constante; soient $\overline{P}_C(t, x; \tau)$ et $\overline{P}^{(1)}(t, x; \tau)$ les deux probabilités d'absorption pour la même courbe C, mais relativement aux deux valeurs b et $b^{(1)}$ de b; je dis que

$$\overline{P}_C^{(1)}(t, x; \tau) \leqq \overline{P}_C(t, x; \tau). \tag{60}$$

Si, en effet, comme au paragraphe **1**, nous considérons l'espace E′ des courbes continues Γ issues du point (t, x) et définies par $x = \overline{x}(t')$, et si e' est le sous-ensemble de E′ défini par la condition $\overline{x}(t') \leqq x(t')$, quel que soit t' dans (t, τ) (bornes comprises), tout revient à démontrer, en vertu du théorème V, que la mesure -$(b^{(1)})$ de e' est inférieure ou égale à sa mesure -(b); envisageons dans E′ la transformation $\mathfrak{T}[\mathfrak{T}(\overline{x}) = \overline{y}]$, définie par

$$\overline{x}(t') - \int_t^{t'} b[t'', x(t'')]\, dt'' = \overline{y}(t') - \int_t^{t'} b^{(1)}[t'', \overline{y}(t'')]\, dt''. \tag{61}$$

$\mathfrak{T}$ est biunivoque et pourvue d'une réciproque $\mathfrak{T}^{-1}$, en tant que combinaison simple de transformations T du paragraphe **1**; d'après (61), $\overline{y}(t') - \overline{x}(t')$ est dérivable, et sa dérivée est

$$b^{(1)}[t', \overline{y}(t')] - b[t', \overline{x}(t')].$$

Supposons que, pour une certaine valeur de t', on ait : $\overline{y}(t') = \overline{x}(t')$, comme cela a lieu précisément pour $t' = t$; la dérivée précédente sera alors $\geqq \eta > 0$, la différence $\bar{y}(t') - \bar{x}(t')$ sera une fonction croissante du temps au voisinage de cette valeur t' et sera donc > 0, aux instants postérieurs à t'; on en conclut que l'on a, quel que soit t',

$$\bar{y}(t') \geqq \bar{x}(t').$$

Par suite $\mathcal{E}$-transformé $\mathcal{E}(e')$ de e' contient e'; or la mesure-$(b)^{(1)}$ de $\mathcal{E}(e')$ est égale, d'après le théorème V à $\overline{P}_c[t, x; \tau)$; (60) en résulte immédiatement.

Soit alors $x < x(t)$, considérons $\overline{P}[t, x+\varepsilon; \tau]$ et $\overline{P}_c[t, x; \tau]$; avec $\varepsilon > 0$, et suffisamment petit pour que $x+\varepsilon \leqq x(t)$; on a vu [th. VIII] que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{P}_c[t, x+\varepsilon; \tau] = \overline{P}_c[t, x; \tau]. \tag{62}$$

Introduisons la courbe $\overline{C}$: $x = x(t) - \varepsilon$, et comparons

$$\overline{P}_c[t, x+\varepsilon; \tau] \quad \text{et} \quad \overline{P}_{\overline{C}}[t, x; \tau],$$

[*qui seraient visiblement égales si l'on avait* $b \equiv 0$]; soit $Y(t) = X(t) - \varepsilon$, fonction aléatoire qui correspond à $b^{(1)}(t, x) = b[t, x+\varepsilon]$ au lieu de $b[t, x]$. On a

$$\overline{P}_c[t, x+\varepsilon; \tau] = \text{Prob.}[Y(t') \leqq x(t') - \varepsilon, \quad \text{pour } t \leqq t' \leqq \tau, \quad \text{avec } Y(t) = x = \overline{P}^{(1)}_{\overline{C}}[t, x; \tau].$$

Or, K désignant $b.s. \left| \frac{\partial}{\partial x} b(t, x) \right|$, on a

$$b(t, x) - \varepsilon K \leqq b^{(1)}[t, x] \leqq b(t, x) + \varepsilon K.$$

Et si l'on pose

$$b_1(t, x) = b(t, x) - 2\varepsilon K, \qquad b_2(t, x) = b(t, x) + 2\varepsilon K,$$

on a

$$|b^{(1)}(t, x) - b_i(t, x)| \geqq \varepsilon K = \eta > 0 \qquad (i = 1, 2),$$

$\overline{P}_{1,\overline{C}}[t, x; \tau]$ et $\overline{P}_{2,\overline{C}}[t, x; \tau]$ étant les probabilités d'absorption correspondant à b_1 et b_2, on a donc

$$\overline{P}_{1,\overline{C}}[t, x; \tau] \geqq \overline{P}^{(1)}_{\overline{C}}[t, x; \tau] = \overline{P}_c[t, x+\varepsilon; \tau] \geqq \overline{P}_{2,\overline{C}}[t, x; \tau].$$

Soient C_1 la courbe : $x = x(t') - \varepsilon + 2\varepsilon K(t'-t)$; C_2 la courbe : $x = x(t') - \varepsilon - 2\varepsilon K(t'-t)$.

On voit facilement, par application du théorème V par exemple, que

$$\overline{P}_{1,\overline{C}}[t, x; \tau] = \overline{P}_{C_1}[t, x; \tau]; \qquad \overline{P}_{2,\overline{C}}[t, x; \tau] = \overline{P}_{C_2}[t, x; \tau].$$

De sorte que, finalement, on peut écrire

$$\overline{P}_c[t, x+\varepsilon; \tau] \leqq \overline{P}_{C_1}[t, x; \tau].$$

Or, tant que $\tau - t < \frac{1}{2K}$, la courbe C_1 est *tout entière au-dessous de* C, sans même pouvoir rencontrer C; on en déduit

$$\overline{P}_C[t, x+\varepsilon; \tau] \leqq \overline{P}_{C_1}[t, x; \tau] \leqq P_C[t, x; \tau] \leqq \overline{P}_C[t, x; \tau].$$

Compte tenu de (62), en faisant tendre 2 vers zéro, on conclut que

$$P_C[t, x; \tau] \equiv \overline{P}_C[t, x; \tau], \tag{63}$$

tout au moins pour $\tau - t < \frac{1}{2K}$. Pour conclure dans le cas général, utilisons les quantités $P_C(t, x; \tau, y)$ et $\overline{P}_C(t, x; \tau, y)$ précédemment définies.

On peut montrer comme précédemment que, pour $\tau - t < \frac{1}{2K}$, on a

$$P_C[t, x; \tau, y] = \overline{P}_C[t, x; \tau, y] = \int_{-\infty}^{y} \overline{p}_C[t, x; \tau, z]\, dz.$$

Alors, en partageant l'intervalle (t, τ) en n parties égales par les points $t_0 = t, t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_n = \tau$, n étant assez grand pour que

$$t_{i+1} - t_i < \frac{1}{2K},$$

on a, d'après le théorème des probabilités composées

$$\begin{aligned} P_C[t, x; \tau] = & \int_{-\infty}^{x(t_1)-0} d_{y_1} P_C[t, x; t_1, y_1] \int_{-\infty}^{x(t_2)-0} d_{y_2} P_C[t_1, y_1; t_2, y_2] \\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times \int_{-\infty}^{x(\tau)-0} d_y P_C[t_{n-1}, y_{n-1}; \tau, y], \end{aligned}$$

où l'on peut remplacer

$$d_{y_{i+1}} P_C[t_i, y_i; t_{i+1}, y_{i+1}] \quad \text{par} \quad \overline{p}_C[t_i; y_i; t_{i+1}, y_{i+1}]\, dy_{i+1},$$

et en tenant compte de ce que les $\overline{p}_C$ sont bornés, il en résulte (63) dans le cas général :

Théorème X. — *Pour toute courbe* C *continue, et* $x < x(t)$, *les probabilités d'absorption* $P_C[t, x; \tau]$ et $\overline{P}_C[t, x; \tau]$ *sont identiques*.

Considérons maintenant $\overline{P}_C[t, x(t); \tau]$ et $\overline{P}_C[t, x(t) - \varepsilon; \tau]$, avec $\varepsilon > 0$.

Des raisonnements très analogues aux précédents montrent que, si $\overline{C}_1$ désigne la courbe : $x = x(t') + \varepsilon - 2\varepsilon K(t' - t)$ et $\overline{C}_2$ la courbe $x = x(t') + \varepsilon + 2\varepsilon K(t' - t)$, on a

$$\overline{P}_C[t, x(t); \tau] \leqq \overline{P}_{C_1}[t, x(t); \tau] \leqq \overline{P}_C[t, x(t) - \varepsilon; \tau] \leqq \overline{P}_{C_2}[t, x(t); \tau],$$

du moins pour $\tau - t < \frac{1}{2K}$; d'où résulte que

$$(64) \qquad \lim_{\varepsilon \succ 0} \overline{P}_c[t, x(t) - \varepsilon; \tau] = \overline{P}_c[t, x(t); \tau] \qquad \text{pour} \quad \tau - t < \frac{1}{2K}.$$

On démontre de même que pour $\tau - t < \frac{1}{2K}$, on a

$$\lim_{\varepsilon \succ 0} \overline{P}_c[t, x(t) - \varepsilon; \tau, y] = \overline{P}_c[t, x(t); \tau, y] \qquad [y \text{ quelconque} \leqq x(\tau)],$$

(64) peut alors être étendu au cas général de $\tau - t$ quelconque; pour cela, on remarque que, t_1 désignant un instant intermédiaire quelconque entre t et τ, on a

$$\overline{P}_c[t, x(t) - \varepsilon, \tau] = \int_{-\infty}^{x(t_1)} \overline{P}_c[t_1, y; \tau]\, d_y \overline{P}_c[t, x(t) - \varepsilon; t_1, y],$$

d'où

$$\begin{aligned} &\overline{P}_c[t, x(\tau); \tau] - \overline{P}_c[t, x(t) - \varepsilon; \tau] \\ &\quad = \int_{-\infty}^{x(t_1)} \overline{P}_c[t_1, y; \tau]\, d_y \{ \overline{P}_c[t, x(t); t_1, y] - \overline{P}_c[t, x(t) - \varepsilon; t_1, y] \}, \end{aligned}$$

choisissons $t_1 - t < \frac{1}{2K}$; comme on a

$$\begin{aligned} d_y \overline{P}_c[t, x(t) - \varepsilon; t_1, y] &= \overline{p}_c[t, x(t) - \varepsilon; t_1, y]\, dy \leqq U[t, x(t) - \varepsilon;\ t_1, y]\, dy, \\ d_y \overline{P}_c[t, x(t);\ \ t_1, y] &= \overline{p}_c[t, x(t);\ t_1, y]\, dy \leqq U[t, x(t);\ t_1, y]\, dy, \end{aligned}$$

on peut déterminer deux nombres m et n $[m < n < x(t_1)]$ indépendants de ε tels que l'on ait; quel que soit $\eta > 0$

$$\left| \int_{-\infty}^{m} \overline{P}_c[t_1, y; \tau]\, d_y \{ \overline{P}_c[t, x(t); t_1, y] - \overline{P}_c[t, x(t) - \varepsilon; t_1, y] \} \right| < \eta,$$

$$\left| \int_{n}^{x(t_1)} \overline{P}_c[t_1, y; \tau]\, d_y \{ \overline{P}_c[t, x(t); t_1, y] - \overline{P}_c[t, x(t) - \varepsilon; t_1, y] \} \right| < \eta.$$

Dans l'intervalle (m, n), $\overline{P}_c[t_1, y; \tau]$ est continue en y; partageons l'intervalle (m, n) en p parties égales par des points

$$y_0 = m, \ y_1, \ \ldots, \ y_p = n,$$

p étant assez grand pour que l'oscillation de $\overline{P}_c[t_1, y; \tau]$ dans les intervalles (y_i, y_{i+1}) soit inférieure à η; on a par suite

$$\begin{aligned} \Bigg| \int_{m}^{n} \overline{P}_c[t_1, y; \tau]\, d_y \overline{P}_c[t, x(t); t_1, y] - \sum_{i=0}^{p-1} \overline{P}_c[t_1, y_i; \tau] \{ &\overline{P}_c[t, x(t); t_1, y_{i+1}] \\ &- \overline{P}_c[t, x(t); t_1, y_i] \} \Bigg| \leqq \eta, \end{aligned}$$

et une inégalité analogue pour

$$\int_m^n \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t_1, y; \tau]\, d_y \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t)-\varepsilon; t_1, y];$$

or, si ε tend vers zéro, la somme

$$\sum \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t_1, y_i; \tau]\{\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t)-\varepsilon; t_1, y_{i+1}] - \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t)-\varepsilon; t_1, y_i]\}$$

tend vers

$$\sum \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t_1, y_i; \tau]\{\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); t_1, y_{i+1}] - \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); t_1, y_i]\}.$$

On déduit de ces diverses égalités et inégalités que

$$\lim_{\varepsilon \succ 0} \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t)-\varepsilon; \tau] = \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau] \qquad \text{quel que soit } \tau > t,$$

soit

Théorème XI (*des limites*). — *Pour toute courbe* C *continue et* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$\lim_{\varepsilon \succ 0} \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t)-\varepsilon; \tau] = \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau].$$

3. L'Équation de Désiré-André-P. Lévy. — Si nous considérons le domaine $\mathcal{D}$ du plan (t, x) qui est défini par : $t \leqq \tau$, $x < x(t)$, c'est-à-dire par la courbe C et par la caractéristique $t = \tau$ de l'équation $\mathrm{L}(u) = 0$, $\mathcal{D}$ peut être considéré comme le domaine d'existence des fonctions $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau)$, $\Phi_{\mathrm{C}}(t, x; \tau)$, etc. ..., considérées comme fonctions de (t, x) : il est à présumer que, sinon sur la frontière de $\mathcal{D}$, du moins dans son intérieur, ces fonctions sont en (t, x), des solutions de l'équation (1); c'est en effet un résultat que nous établirons, mais non pas directement.

Plaçons-nous dans l'hypothèse où l'on a $\mathrm{X}(t) = x$, avec $x < x(t)$; et évaluons de deux façons différentes la probabilité pour que $\mathrm{X}(\tau) > x(\tau)$; on a d'abord

$$\Pr\{\mathrm{X}(\tau) > x(\tau); \text{ sous l'hypothèse } \mathrm{X}(t) = x\} = \int_{x(\tau)}^{+\infty} \mathrm{U}(t, x; \tau, \xi)\, d\xi.$$

Mais, pour qu'une courbe Γ de E' ait son point extrême (d'abscisse τ) d'ordonnée $> x(\tau)$, il faut qu'elle coupe au moins une fois la courbe C en un point d'abscisse $< \tau$ (étant donné qu'il s'agit de courbes continues) : soit t' la plus petite abscisse pour laquelle Γ coupe C; on a d'après le théorème de Fubini [dans l'espace E' rendu mesurable par la mesure-(b)], c'est-à-dire d'après le principe des probabilités composées :

$$\begin{aligned}&\Pr\{\mathrm{X}(\tau) > x(\tau); \text{ sous l'hypothèse } \mathrm{X}(t) = x\}\\ &\quad = \int_t^{\tau-0}\left[\int_{x(\tau)}^{+\infty} \mathrm{U}[t', x(t'); \tau, \xi]\, d\xi\right] d_{t'} \Phi_{\mathrm{C}}(t, x; t'),\end{aligned}$$

et, par suite,

$$(65)\qquad \int_{x(\tau)}^{+\infty} U(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = \int_t^{\tau-0} \left[\int_{x(\tau)}^{+\infty} U[t', x(t'); \tau, \xi]\, d\xi\right] d_{t'} \Phi_C(t, x, t'),$$

où le second membre a un sens, car $\Phi(t')$, qui est continue, est aussi à variation bornée, parce que non décroissante, et de plus la quantité

$$h[t', \tau] = \int_{x(\tau)}^{+\infty} U[t', x(t'); \tau, \xi]\, d\xi$$

est continue en t' dans l'intervalle $(t, \tau - 0)$; vu la continuité de $\Phi(t')$, nous pouvons dans (65) remplacer $\tau - 0$ par τ. L'équation (65) sera appelée *équation de Désiré-André-Paul Lévy ou équation (A-L).*

Nous poserons

$$H(t, x; \tau) = \int_{x(\tau)}^{+\infty} U(t, x; \tau, \xi)\, d\xi.$$

Lorsque τ tend vers t, H tend vers 0 [x étant $< x(t)$].

Observons que, outre l'équation (A-L), $\Phi(\tau)$ satisfait aux équations plus générales

$$(65')\qquad \int_{z_0}^{z_1} U(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = \int_t^{\tau} \left[\int_{z_0}^{z_1} U[t', x(t'); \tau, \xi]\, d\xi\right] d_{t'} \Phi(t'),$$

où z_0 et z_1 ($z_0 < z_1$) sont quelconques, mais $\geqq x(\tau)$; si z_0 est $> x(\tau)$, $U[t', x(t'); \tau, \xi]$ est > 0 et borné, et l'on peut échanger l'ordre des intégrations au second membre de (65′), ce qui donne

$$\int_{z_0}^{z_1} d\xi \left\{ U(t, x; \tau, \xi) - \int_t^{\tau} U[t', x(t'); \tau, \xi]\, d_{t'} \Phi(t') \right\} = 0;$$

ceci étant réalisé quels que soient z_0 et z_1, on en déduit que pour presque toutes les valeurs de $\xi \geqq x(\tau)$, on a

$$(65'')\qquad U(t, x; \tau, \xi) = \int_t^{\tau} U[t', x(t'); \tau, \xi]\, d_{t'} \Phi(t').$$

Le premier membre de (65″) est continu en ξ pour $\xi > x(\tau)$ et de même le second; (65″) est donc valable quel que soit $\xi > x(\tau)$; pour $\xi = x(\tau)$, on ne peut rien dire à priori, mais on remarque que, si τ est fixe et $> t$, le premier membre reste, lorsque ξ tend vers $x(\tau)$, borné par un nombre M fini et indépendant si l'on veut de τ, si τ reste $\geqq t + \eta$, η fixe, > 0 et arbitraire.

Si dans (65′), on suppose $z_0 < x(\tau)$, l'égalité ne peut plus être écrite, mais toujours le théorème des probabilités composées donne l'inégalité

$$\int_{z_0}^{z_1} U(t, x; \tau, \xi) \geqq \int_t^{\tau} \left[\int_{z_0}^{z_1} U[t', x(t'); \tau, \xi]\, d\xi\right] d_{t'} \Phi(t'),$$

d'où l'on déduit que l'on a presque partout pour $\xi \leqq x(\tau)$

$$(65''') \qquad \mathrm{U}[t, x; \tau, \xi] \geqq \int_t^\tau \mathrm{U}[t', x(t'); \tau, \xi]\, d_{t'}\Phi(t').$$

Mais, comme précédemment, $(65''')$ est valable pour tout $\xi < x(\tau)$; on en déduit que le second membre de $(65'')$ ou $(65''')$ reste borné, même lorsque ξ tend vers $x(\tau)$, par un nombre fini indépendant de τ, si τ reste $\geqq t + \eta$, η fixe, > 0 et arbitraire.

CHAPITRE III.

Étude du cas particulier où la courbe d'absorption est dérivable à dérivée bornée ; applications.

Étude d'un cas particulier. — Nous allons nous placer d'abord dans le cas particulier où $x(t)$ admet une dérivée bornée et intégrable $x'(t)$; (65) peut alors être transformée en une équation intégrale de première espèce de type classique.

D'abord on a

$$(66) \qquad \lim_{t' \to \tau - 0} h(t', \tau) = \frac{1}{2}.$$

En effet, d'après (11), on peut écrire

$$h(t', \tau) = \int_{x(\tau)}^{+\infty} \mathrm{U}_0[t', x(t'); \tau, \xi]\, d\xi + \mathrm{A}\sqrt{\tau - t'},$$

et, d'après l'expression (4) de U_0, (66) en résulte immédiatement, compte tenu de la dérivabilité de $x(t')$. D'autre part, $h(t', \tau)$ dépend de t' directement et par l'intermédiaire de $x(t')$; pour mettre ce fait en évidence quand il y aura lieu, nous écrirons cette quantité sous la forme : $h[t', x(t'); \tau]$. Dans (65), une intégration par partie donne

$$(67) \quad \mathrm{H}[t, x; \tau] = \frac{1}{2}\Phi(t, x; \tau) - \int_t^\tau \Phi(t') \left\{ \frac{\partial}{\partial t'} h[t', x(t'); \tau] \frac{\partial}{\partial x(t')} h[t', x(t'); \tau]\, x'(t') \right\} dt';$$

nous allons vérifier que l'intégrale qui est au second membre de (67) a un sens, et pour cela évaluer

$$g(t', \tau) = \frac{\partial}{\partial t'} h[t', x(t'); \tau] + \frac{\partial}{\partial x(t')} h[t', x(t'); \tau].$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'}h[t', x(t'); \tau] = & \int_{x(\tau)}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t'}\mathrm{U}[t', x(t'); \tau, \xi]\,d\xi \\ & - \int_{x(\tau)}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{U}[t', x(t'); \tau, \xi]\,d\xi \\ & - b[t', x(t')] \int_{x(\tau)}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{U}[t', x(t'); \tau, \xi])\,d\xi\end{aligned}$$

d'après (1). On constate facilement d'ailleurs que

$$\frac{\partial}{\partial t'}h[t', x(t'); \tau] = -\frac{x(\tau) - x(t')}{4\sqrt{\pi}(\tau - t')^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x(\tau)-x(t')]^2}{4(\tau-t')}} + \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\tau - t'}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x(t')}h[t', x(t'); \tau] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\tau - t')^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{[x(\tau)-x(t')]^2}{4(\tau-t')}} + \mathrm{A},$$

et par conséquent, grâce à la dérivabilité de $x(t')$,

$$g(t', \tau) = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\tau - t'}},$$

ce qui légitime (67). On peut alors résoudre (67) par la méthode classique : posons

$$g_1(t', \tau) = 2g(t'; \tau), \qquad g_{n+1}(t', \tau) = 2\int_{t'}^{\tau} g(t'', \tau)\, g_n(t', t'')\,dt'',$$

on a

$$|g_n(t', \tau)| \leqq \alpha_n(\tau - t')^{\frac{n-2}{2}},$$

où α_n a la signification habituelle.

Posant alors

$$\mathrm{G}[t', \tau] = \sum_n g_n(t', \tau),$$

l'unique solution bornée de (67) est donnée par la formule

$$\Phi(t, x; \tau) = 2\int_t^{\tau} \mathrm{H}[t, x; \tau']\,\mathrm{G}(t', \tau)\,dt', \tag{68}$$

$\mathrm{H}(t, x; t')$ étant, pour $x < x(t)$, une fonction parfaitement régulière, solution, quel que soit t', de (1), *on déduit immédiatement de* (68) *que* $\Phi_{\mathrm{C}}(t, x; \tau)$ *est solution de* (1) *dans* $\mathcal{D}$. *Il en est évidemment de même de* $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}(t, x; \tau)$.

Remarque. — On démontre, sous les mêmes hypothèses, que $\Phi(t, x; \tau)$ possède, par rapport à τ, une dérivée partielle bornée $\varphi(t, x; \tau)$, elle-même solution de (1) et fournie par l'équation intégrale

$$\varphi(t, x; \tau) = -2\int_t^{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau}h(t', \tau)\,\varphi(t, x; t')\,dt' + 2\frac{\partial}{\partial \tau}\mathrm{H}(t, x; \tau). \tag{67'}$$

D'ailleurs

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{H}[t, x; \tau] = -\frac{\partial}{\partial\xi}\mathrm{U}[t, x; \tau, x(\tau)] \quad + \Big[b[\tau, x(\tau)] - x'(\tau)\Big]\,\mathrm{U}[t, x; \tau, x(\tau)],$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}h(t', \tau) \quad = -\frac{\partial}{\partial\xi}\mathrm{U}[t', x(t'); \tau, x(\tau)] + \Big[b[\tau, x(\tau)] - x'(\tau)\Big]\,\mathrm{U}[t', x(t'); \tau, x(\tau)].$$

Comme on établit facilement, dans l'hypothèse actuelle où $x(t')$ est dérivable à dérivée bornée, la validité de (65″) pour $\xi = x(\tau)$, (67′) prend la forme simple

$$(67'') \quad \varphi(t, x; \tau) = +\,2\int_t^{\tau}\frac{\partial}{\partial\xi}\mathrm{U}[t', x(t'); \tau, x(\tau)]\,\varphi(t, x; t')\,dt' - 2\frac{\partial}{\partial\xi}\mathrm{U}[t, x; \tau, x(\tau)],$$

où la dérivée de $x(t)$ n'intervient plus, ce qui fait présumer que la dérivabilité de $x(t)$ n'est pas essentielle dans ces questions. Nous aurons l'occasion de préciser cela.

Examinons maintenant quel est le comportement de $\Phi_{\mathrm{C}}(t, x, \tau)$ et $\varphi_{\mathrm{C}}(t, x; \tau)$ quand le point (t, x) s'approche de la frontière de $\mathcal{D}$.

a. Le point (t, x) tend vers le point (τ, ξ) avec $\xi < x(\tau)$: alors $\Phi_{\mathrm{C}}(t, x; \tau)$ tend vers o, uniformément par rapport à x et ξ dans tout intervalle $(\xi < x(\tau) - \alpha)$; il en est de même de $\varphi_{\mathrm{C}}(t, x; \tau)$ d'après (67″).

b. t restant fixe, x tend vers $x(t)$: l'équation (A-L), le théorème de la moyenne et (66) nous donnent

$$\mathrm{H}[t, x; t + \Delta t] = \Phi[t, x; t + \Delta t]\left[\frac{1}{2} + \mathrm{A}\sqrt{\Delta t}\right].$$

Or

$$(69) \qquad \mathrm{H}[t, x; t + \Delta t] = \mathrm{A}\sqrt{\Delta t} + \int_{x(t+\Delta t)}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{[\xi - x]^2}{4\Delta t}}}{2\sqrt{\pi\Delta t}}\,d\xi = \mathrm{A}\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2} + \int_{\mathrm{A}\sqrt{\Delta t} + \frac{\delta^2}{\sqrt{2\Delta t}}}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

où l'on a posé $x(t) - x = \delta$.

On peut donc choisir Δt, puis δ assez petits pour que $\Phi_{\mathrm{C}}[t, x; t + \Delta t]$ diffère aussi peu qu'on le veut de 1; comme d'ailleurs $\Phi_{\mathrm{C}}[t, x; \tau]$ est non décroissant lorsque τ croît, et ≤ 1, il en résulte que

$$\lim_{x \to x(t) - 0} \Phi_{\mathrm{C}}[t, x; \tau] = 1 \qquad \text{pour} \quad \tau > t.$$

Pour $\tau = t$, $\Phi_{\mathrm{C}}[t, x; t]$ étant nul quel que soit x, on a

$$\lim_{x \to x(t) - 0} \Phi_{\mathrm{C}}[t, x; t] = 0.$$

Il est clair que le comportement de $\varphi_{\mathrm{C}}(t, x; \tau)$ doit être moins simple; toutefois, $\Phi_{\mathrm{C}}[t, x; \tau]$ étant monotone en τ quel que soit x, on a, d'après un théorème de Fubini,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Phi_C[t, x(t); \tau] = \text{p. p.} \lim_{x \to x(t)-0} \frac{\partial}{\partial\tau}\Phi_C[t, x; \tau].$$

On a donc, pour $\tau > t$:

$$\lim_{x \to x(t)-0} \varphi_C[t, x; \tau] = 0 \quad \text{p. p.},$$

et très vraisemblablement cette égalité est vraie partout.

c. Si (t, x) tend vers $[\tau, x(\tau)]$, le comportement de Φ_C et φ_C est nécessairement compliqué puisque, sur la frontière de $\mathcal{D}$, le point $[\tau, x(\tau)]$ est un point de discontinuité pour Φ_C et φ_C.

Ces résultats nous renseignent convenablement sur Φ_C, donc sur P_C; quant à $\overline{P_C}$, on a, comme on sait (théorème X),

$$\overline{P}_C[t, x; \tau] = P_C[t, x; \tau] \qquad \text{pour} \quad x < x(t).$$

Ce qui nous permet de conclure pour $\overline{P_C}[t, x; \tau]$.

En outre, si C′ désigne la courbe : $x = x(t') - \varepsilon(t' - t)$ $(\varepsilon > 0)$, on a

$$P_C[t, x(t); \tau] = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{P}_{C'}[t, x(t); \tau] \qquad (\tau > t),$$

C′ étant une courbe dérivable comme C, il en résulte :

$$P_C[t, x(t); \tau] = 0.$$

Théorème XII. — *Lorsque la courbe* C *est continue et à dérivée intégrable et bornée, on a, pour* $t < \tau$

$$\lim_{x \to x(t)-0} P_C[t, x; \tau] = \lim_{x \to x(t)-0} \overline{P}_C[t, x; \tau] = \overline{P}_C[t, x(t); \tau] = P_C[t, x(t); \tau] = 0.$$

Pour $\xi < x(\tau)$, *on a*

$$\lim_{(t,x) \to (\tau,\xi)} P_C[t, x; \tau] = \lim_{(t,x) \to (\tau,\xi)} \overline{P}_C[t, x; \tau] = 0, \qquad \lim_{(t,x) \to (\tau,\xi)} \Phi_C[t, x; \tau] = 1.$$

Enfin, $P_C \equiv \overline{P_C}$, Φ_C *sont, en* (t, x), *solutions dans* $\mathcal{D}$ *de l'équation* (1).

Application à la résolution des équations paraboliques du type (1). — Nous disons qu'une solution $u(t, x)$ de (1) est régulière [*cf.* Gevrey, *Équations du type parabolique* (*Journal de Math.*, 1913); Dœtsch, *Les Équations du type parabolique* (*l'Enseign. Math.*, t. 35, 1936)] si :

a. Elle satisfait à (1) à l'intérieur de $\mathcal{D}$;
b. Ses dérivées du premier ordre sont continues dans $\mathcal{D}$;
c. Elle est continue dans $\mathcal{D}$, *frontière comprise*.

Soit à chercher une solution (régulière ou non) de (1) à l'intérieur de $\mathcal{D}$ et prenant, lorsque, pour t fixe, $x \to x(t)[t < \tau]$, une valeur donnée $f(t)$. La fonction

$$u(t, x) = \int_t^\tau f(t')\, d_{t'} \Phi_C[t, x; t']$$

répond à la question; bien entendu nous supposons toujours C à dérivée intégrable et bornée; quant à $f(t)$ nous devrons faire des hypothèses que nous préciserons; pour le moment supposons simplement $f(t)$ intégrable (L); $\varphi_C[t, x; \tau]$ étant, pour $x < x(t)$, continue en τ, et en x et t ainsi que ses dérivées partielles, u est bien solution de (1), continue à l'intérieur de $\mathcal{D}$ ainsi que ses dérivées partielles. Supposons maintenant que t restant fixe $< \tau$, x tende vers $x(t) - 0$. On peut écrire

$$u(t, x) = \int_t^{t+\Delta t} f(t')\, d_{t'} \Phi_C[t, x; t'] + \int_{t+\Delta t}^\tau f(t')\, d_{t'} \Phi_C[t, x; t'].$$

Supposons que $\lim\limits_{t' \to t+0} f(t')$ existe et vaille $g(t)$; à ε près on aura, en prenant Δt assez petit

$$u(t, x) \neq g(t)\, \Phi_C[t, x; t + \Delta t] + \int_{t+\Delta t}^\tau f(t')\, d_{t'} \Phi_C[t, x; t'].$$

Δt étant ainsi fixé, si $x \to x(t) - 0$, le premier terme du second membre tend vers $g(t)$; quant au second terme, si $f(t')$ est borné, il tend sûrement vers 0; mais ceci a lieu sous la seule hypothèse que $f(t)$ est intégrable (L). Pour l'établir, il nous faut étudier de plus près le comportement de $\varphi_C(t, x; \tau)$ lorsque $x \to x(t)$. De (67″), on déduit que $\varphi_C[t, x; \tau]$ est de la forme

$$\varphi_C[t, x; \tau] = A + K \int_t^\tau \frac{x(t') - x}{(t' - t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x(t') - x]^2}{4(t'-t)}} \Psi[t']\, dt', \tag{70}$$

où K est un coefficient numérique et

$$\Psi(t') = \frac{x(\tau) - x(t')}{(\tau - t')^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x(\tau) - x(t')]^2}{4(\tau - t')}}.$$

τ étant fixe et $> \alpha$, où α est un nombre intermédiaire entre t et τ, l'intégrale du second membre de (70) se décompose en deux : une intégrale

$$\int_\alpha^\tau \frac{x(t') - x}{(t' - t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x(t') - x]^2}{4(t'-t)}} \Psi(t')\, dt'$$

qui a une valeur bornée supérieurement uniformément par rapport à τ. L'autre intégrale s'évalue de la façon suivante; remarquons que dans l'intervalle (t, α),

$\Psi(t')$ est continue, dérivable et à dérivée bornée. On peut donc écrire, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\int_t^\alpha \frac{x(t')-x}{(t'-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x(t')-x]^2}{4(t'-t)}} \Psi(t')\,dt' = \Psi(t)\int_t^\alpha \frac{x(t')-x}{(t'-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x(t')-x]^2}{4(t'-t)}}\,dt' + \mathrm{A}.$$

Si l'on pose

$$u = \frac{x(t')-x}{\sqrt{2(t'-t)}}, \qquad du = \frac{x'(t')\,dt'}{\sqrt{2(t'-t)}} - \frac{[x(t')-x]}{2\sqrt{2}(t'-t)^{\frac{3}{2}}}\,dt',$$

on a

$$\int_t^\alpha \frac{x(t')-x}{(t'-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x(t')-x]^2}{4(t'-t)}}\,dt' = \mathrm{A} - 2\sqrt{2}\int_t^\alpha e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

On en conclut que $\varphi_{\mathrm{C}}[t, x; \tau]$ reste borné lorsque x tend vers $x(t)$, uniformément par rapport à τ pour $\tau \geqq t+\varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$. Alors le passage à la limite dans $\int_t^{t+\Delta t} f(t')\,d_{t'}\Phi_{\mathrm{C}}[t, x; t']$ est légitime quel que soit $f(t)$ intégrable (L), on en déduit

$$\lim_{x \to x(t)-0} u(t, x) = g(t),$$

donc si $f(t)$ est continue à *droite*,

$$\lim_{x \to x(t)-0} u(t, x) = f(t). \tag{71}$$

Dans les mêmes conditions, si (t, x) tend vers (τ, ξ) avec $\xi < x(\tau)$, on a

$$\lim_{(t,x) \to (\tau,\xi)} u(t, x) = 0.$$

On peut préciser (71) en remarquant que si, au lieu de faire tendre x vers $x(t)$, t restant fixe, on considère $\Phi_{\mathrm{C}}[\alpha, x; \tau]$ et que l'on fasse tendre simultanément mais indépendamment α vers t et x vers $x(t)-0\ (t < \tau)$, on a encore

$$\lim_{\alpha \to t,\, x \to x(t)-0} \Phi_{\mathrm{C}}[\alpha, x; \tau] = 1 \qquad [\tau > t].$$

On l'établit sans difficulté, en modifiant légèrement le raisonnement *b* de la page 220. On choisit d'abord y, puis Δt assez petits pour que $\mathrm{A}\sqrt{\Delta t + y} < \varepsilon$. On assujettit α à être tel que $|\alpha - t| < \eta$, moyennant quoi

$$\Phi_{\mathrm{C}}[\alpha, x; t+\Delta t] = \frac{\frac{1}{2} + \mathrm{A}\varepsilon}{\frac{1}{2} + \mathrm{A}\varepsilon + \int_m^{m+\frac{x(\alpha)-x}{\sqrt{2}\sqrt{t+\Delta t-\alpha}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du} \qquad \text{avec } |\mathrm{A}| < 1.$$

On peut alors prendre α suffisamment voisin de t et x suffisamment voisin de $x(t)$ pour que $\Phi_{\mathrm{C}}[\alpha, x;\ t+\Delta t]$ diffère aussi peu qu'on le veut de 1. Dans les mêmes conditions $\varphi_C[\alpha, x; \tau]$ tendra vers o, tout en restant uniformément borné pour $\tau < t$; de sorte que

$$\lim_{(\alpha, x)\to[t, x(t)]} u(\alpha, x) = f(t),$$

pourvu que $f(t)$ soit continue en t, sinon, le comportement de $u(t, x)$ peut être plus compliqué; il serait facile de donner des indications à ce sujet.

Ainsi, sur la frontière de $\mathcal{D}$, le point $[\tau, x(\tau)]$ est nécessairement un point de discontinuité de $u(t, x)$, sauf toutefois si

$$\lim_{t'\to\tau-0} f(t') = 0,$$

auquel cas il est clair que $u(t, x)$ tend vers o lorsque (t, x) tend vers $[\tau, x(\tau)]$; dans ce cas, $u(t, x)$ est une *solution régulière de* (1), correspondant aux valeurs limites qui ont été précisées; elle est d'ailleurs la *seule* solution régulière de (1) correspondant à ces valeurs limites. En effet, un théorème de Gevrey (*cf.* Doetsch, *loc. cit.*, p. 53] indique que l'équation (1) n'admet, pour des *limites continues données*, qu'une seule solution régulière, si l'on a $b(t, x) \leqq B < 0$, avec B constant. Mais on peut toujours se ramener à ce cas par un changement de variables de la forme

$$T = t, \qquad X = x + kt \qquad \text{avec } k \text{ constant.}$$

Cette remarque conduit à un intéressant théorème; prenons le cas général où C est continue; soit (t, x) un point *intérieur* de $\mathcal{D}$. Soit $\overline{C}$ une courbe $x = \overline{x}(t')$ *dérivable* et telle que $\overline{x}(t') < x(t')$, quel que soit t', et que $x < \overline{x}(t)$. Enfin soient $(\overline{C}_n)$, respect. (C_n), deux suites de courbes *dérivables* définies par $x = \overline{x}_n(t')$, respect. $x = x_n(t')$ satisfaisant à

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{x}_n(t') = \lim_{n\to+\infty} x_n(t') = x(t') \text{ uniformément en } t'.$$

$$\overline{x}_{n+1}(t') \geqq \overline{x}_n(t'), \qquad \text{resp. : } x_{n+1}(t') \leqq x_n(t'), \qquad \overline{x}(t') < \overline{x}_1(t').$$

Posons

$$\overline{f}_n(t, \tau) = \overline{P}_{\overline{C}_n}[t, \overline{x}(t); \tau]; \qquad f_n(t, \tau) = \overline{P}_{C_n}[t, \overline{x}(t); \tau].$$

On a

$$\left.\begin{aligned} &\overline{f}_{n+1}(t, \tau) \geqq \overline{f}_n(t, \tau), \quad \lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(t, \tau) = P_C[t, \overline{x}(t); \tau] = \overline{f}(t, \tau) \\ &f_{n+1}(t, \tau) \leqq f_n(t, \tau), \quad \lim_{n\to\infty} f_n(t, \tau) = \overline{P}_C[t, \overline{x}(t); \tau] = f(t, \tau) \end{aligned}\right\} \text{avec } f(t, \tau) \geqq \overline{f}(t, \tau).$$

Enfin désignons par $\overline{\mathcal{D}}$ le domaine défini par $t < \tau$, $x < \overline{x}(t)$. D'après ce qui précède, $P_{\overline{C}_n}[t, x; \tau]$ est solution régulière de (1) dans $\overline{\mathcal{D}}$ et peut se mettre sous la forme

$$(72) \qquad P_{\overline{C}_n}[t, x; \tau] = 1 - \int_t^\tau [1 - \overline{f}_n(t, \tau)]\, d_{t'} \Phi_{\overline{C}}[t, x; t'].$$

D'ailleurs $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{C}}_n}[t, x; \tau] = \mathrm{P}_{\mathrm{C}}[t, x; \tau]$; le passage à la limite légitime dans (72) donne alors

$$\mathrm{P}_{\mathrm{C}}[t, x; \tau] = 1 - \int_t^{\tau} \left[1 - \overline{f}(t, \tau)\right] d_{t'} \Phi_{\overline{\mathrm{C}}}[t, x; t']. \tag{73}$$

En raison des théorèmes VII et VIII, $\overline{f}(t, \tau)$ est continue, et $1 - \overline{f}(\tau, \tau) = 0$; (73) représente alors une solution régulière de (1) dans $\overline{\mathcal{O}}$. On obtient le même résultat pour $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x; \tau]$ en considérant les C_n au lieu des $\overline{\mathrm{C}}_n$. Comme $\overline{\mathrm{C}}$ peut être prise aussi voisine de C qu'on le veut, on en déduit :

Théorème XIII. — *Quelle que soit la courbe* C *continue, les probabilités* $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x; \tau]$, $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}[t, x; \tau]$, $\Phi_{\mathrm{C}}[t, x; \tau]$ *sont, comme fonctions de* (t, x), *solutions de* (1) *à l'intérieur de* $\mathcal{O}$.

Extension de la validité de la formule (67″). — Supposons que $x(t)$ satisfasse à la condition

$$|x(t'') - x(t')| \leqq \mathrm{M}\,|t'' - t'|^{\alpha} \qquad \text{avec} \quad 1 \geqq \alpha > \frac{1}{2}.$$

La formule (67″) garde un sens et détermine une solution bornée $\varphi_{\mathrm{C}}(t, x; \tau)$; nous allons montrer que cette fonction est précisément la dérivée partielle par rapport à τ, de $\Phi_{\mathrm{C}}[t, x; \tau]$. Ceci n'est par *évident,* car il n'est pas *évident,* dans ce cas, que $\Phi_{\mathrm{C}}[t, x; \tau]$ possède en τ une dérivée bornée. Mais soient (C_n) des courbes *dérivables* $x(t)$ telles que

$$x_n(t) \leqq x_{n+1}(t) \leqq x(t).$$

Les $\varphi_{\mathrm{C}_n}[t, x; \tau]$ fournis par (67″) sont bornés uniformément en τ et n; on peut donc passer à la limite dans (67″) et aussi dans la formule

$$\Phi_{\mathrm{C}}[t, x; \tau] = \int_t^{\tau} \varphi_{\mathrm{C}}[t, x; t']\, dt'.$$

On vérifie alors sans peine que tout ce qui a été dit relativement au cas dérivable reste valable pour le cas actuel que nous appellerons *cas de Gevrey,* et en particulier l'application à la résolution de l'équation (1).

Cas particulier. — Plaçons-nous dans le cas, envisagé par M. P. Lévy ([15]), où $x(t)$ est une constante α, le coefficient b étant d'ailleurs identiquement nul,

---

([15]) P. Lévy, *Sur certains processus stochastiques homogènes* (*Comp. Math.*, 1940, vol. 7, p. 283).

la formule (67″) se réduit à

$$(67''')\qquad \varphi_C[t, x; \tau] = \frac{\alpha - x}{\tau - t}\,\frac{e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4(\tau - t)}}}{2\sqrt{\pi(\tau - t)}},$$

résultat obtenu par M. P. Lévy.

CHAPITRE IV.

Valeurs des probabilités d'absorption sur la courbe d'absorption.

Nous nous proposons dans ce chapitre essentiellement d'étudier $\overline{P_C}[t, x(t); t]$ toujours dans l'hypothèse d'une courbe C continue, à cela près quelconque.

Nous nous placerons d'abord dans le cas de « Norbert Wiener », c'est-à-dire dans le cas où $b \equiv 0$; notons que ce cas a déjà été, on peut dire, complètement traité par MM. Kolmogoroff [théorème déjà cité dans le Chap. I] et Petrowski ([16]), mais par des méthodes différentes des nôtres; nous montrerons donc, d'ailleurs rapidement, comment nos méthodes permettent de retrouver ces résultats et nous les étendrons au cas général où $b \not\equiv 0$.

Soit donc $b \equiv 0$ et $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ une suite d'instants tendant en décroissant vers t; on a, par définition,

$$\overline{P_C}[t, x(t); t] = \lim_{n \to \infty} \overline{P_C}[t, x(t); \tau_n].$$

On peut partager l'intervalle (t, τ_i) en p_i parties égales, par les points $\tau_k(i) : k = 0, 1, 2, \ldots, p_i$, de telle sorte que :

a. les $\tau_k(i) \leqq \tau_{i+1}$ comptent parmi les $\tau_k(i+1)$;

b. on a

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{x[\tau_1(i)]} U_0[t, x(t); \tau_1(i), y_1]\,dy_1\\ &\times \int_{-\infty}^{x[\tau_2(i)]} U_0[\tau_1(i); y_1; \tau_2(i); y_2]\,dy_2 \ldots\\ &\times \int_{-\infty}^{x[\tau_{p_i}(i)]} U_0[\tau_{p_i-1}(i); y_{p_i-1}; \tau_{p_i}(i); y_{p_i}]\,dy_{p_i} - \overline{P_C}[t, x(t); \tau_i] \leqq \varepsilon_i,\end{aligned}$$

où (ε_i) est une suite de nombres > 0 tels que $\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$.

([16]) Petrowski, *Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung*, p. 383-419 (*Comp. Math.*, 1, 1935).

Les $\tau_k(i)[k=0, \ldots, p_i; i=1, \ldots, n, \ldots]$, rangés par ordre de grandeur décroissante, forment une suite (t_n) tendant vers t, et si l'on pose, pour $n>i$:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}}^{(n,i)}[t, x(t); t_i] = &\int_{-\infty}^{x(t_n)} \mathrm{U}_0[t, x(t); t_n, y_n]\, dy_n \\ &\times \int_{-\infty}^{x(t_{n-1})} \mathrm{U}_0[t_n, y_n; t_{n-1}, y_{n-1}]\, dy_{n-1} \ldots \\ &\times \int_{-\infty}^{x(t_i)} \mathrm{U}_0[t_{i-1}, y_{i-1}; t_i, y_i]\, dy_i\end{aligned}$$

$$\overline{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}}^{(i)}[t, x(t); t_i] = \lim_{n \to \infty} \overline{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}}^{(n,i)}[t, x(t); t_i].$$

On a évidemment

$$\overline{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}}[t, x(t); t] = \lim_{i \to \infty} \overline{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}}^{(i)}[t, x(t); t_i].$$

Or soit X_i une variable aléatoire gaussienne, de valeur moyenne nulle et d'écart quadratique $2(t_i - t_{i-1})$, posons, les X_i étant *indépendants*,

$$\mathrm{S}_0 = x(t) + \sum_{i \geq 1} \mathrm{X}_i, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{i \geq n} \mathrm{X}_i, \qquad \ldots,$$

et appelons E l'événement d'après lequel on a $x(t_n) - x(t) \geqq \mathrm{S}_n$ pour tout n supérieur à un nombre positif N d'ailleurs aléatoire; on a

$$\mathrm{Prob}[\mathrm{E}] = \overline{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}}[t, x(t); t].$$

Il est clair que la connaissance d'un nombre fini de X_i n'altère pas la valeur de Prob [E]; dans ces conditions un théorème de M. P. Lévy ([17]) permet d'affirmer que

Théorème XIV. — $\overline{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}}[t, x(t); t]$ *ne peut valoir que* 0 *ou* 1.

Il en résulte que en $[t, x(t)]$, C ne peut être que supérieure, inférieure, ou séparatrice : aucun autre cas n'est possible. Mais il nous reste à savoir discerner, par des critères à la fois précis et maniables, si l'on est dans le cas $\overline{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}}[t, x(t); t] = 0$, ou dans le cas $\overline{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}}[t, x(t); t] = 1$. Nous commencerons par établir un résultat, valable même si b n'est pas $\equiv 0$.

Considérons $\Phi_{\mathrm{C}}(\alpha, x; \tau)$ où α et x tendent, indépendamment, vers t et $x(t)$; dans tout intervalle ($\tau > t+h$, $h>0$ quelconque), les $\Phi_{\mathrm{C}}(\alpha, x; \tau)$ sont continus en τ, uniformément par rapport à α et x (*cf.* Chap. II, théorème VII) et forment, en tant que fonctions non décroissantes, une famille compacte; c'est-à-dire qu'on peut en extraire des suites tendant uniformément vers une limite continue et non décroissante $\overline{\Phi_{\mathrm{C}}}[t, x(t); \tau]$. Le passage à la limite dans

([17]) P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, p. 129.

l'équation de Désiré-André-P. Lévy, dont la légitimité se justifie aisément, conduit à l'équation

$$(74) \qquad H[t, x(t); \tau] = \overline{\Phi_C}[t, x(t); t+0]\, H[t, x(t); \tau] + \int_t^\tau h(t', \tau)\, d_{t'} \overline{\Phi_C}(t').$$

Supposons qu'il existe une suite (t_n) tendant vers t par valeurs supérieures, et telle que

$$(75) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{x(t_n) - x(t)}{\sqrt{t_n - t}} < +\infty.$$

Prenons, dans (74), $\tau = t_n$; d'après la formule (69) (Chap. III), $H[t, x(t); t_n]$ reste borné inférieurement par un nombre > 0, lorsque n varie. On a donc à la limite [pour $n \to +\infty$] dans (74)

$$\overline{\Phi_C}[t, x(t); t+0] = 1,$$

et par conséquent

$$\overline{\Phi_C}[t, x(t); \tau] = 1 \qquad \text{quel que soit} \quad \tau \geqq t.$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{\alpha \to t \\ x \to x(t)}} \overline{P_C}[\alpha, x; \tau] = 0$$

et

$$(76) \qquad \overline{P_C}[t, x(t); \tau] = 0.$$

Remarquons maintenant que la non-existence d'une suite (t_n) telle que l'on ait (75) signifie que, pour toute suite (t_n), on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x(t_n) - x(t)}{\sqrt{t_n - t}} = +\infty.$$

On aurait donc, *a fortiori*,

$$x^+(t) = +\infty$$

(le dérivé droit inférieur de $x(t)$ en t serait égal à $+\infty$); or, d'après un théorème connu, ceci ne peut avoir lieu que pour des valeurs de t formant un ensemble de mesure nulle. Donc :

Théorème XV. — $\overline{P_C}[t, x(t); \tau]$ *est nul, sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle de valeur de* t.

La formule (67″) du Chapitre III, établie dans l'hypothèse où $x(t)$ est à dérivée intégrable et bornée, permet d'écrire

$$(77) \qquad \Phi_C(t, x; \tau) + \int_t^\tau \left[\int_{t'}^\tau \frac{x(t'') - x(t')}{t'' - t'} \frac{e^{-\frac{[x(t'') - x(t')]^2}{4(t'' - t')}}}{2\sqrt{\pi(t'' - t')}} dt'' \right] d_{t'} \Phi_C(t, x; t')$$
$$= \int_t^\tau \frac{x(t') - x}{t' - t} \frac{e^{-\frac{[x(t') - x]^2}{4(t' - t)}}}{2\sqrt{\pi(t' - t)}} dt'.$$

En posant

$$\mathrm{M}(t';\tau)=\int_{t'}^{\tau}\frac{x(t'')-x(t')}{t''-t'}\,\frac{e^{-\frac{[x(t'')-x(t')]^2}{4(t''-t')}}}{2\sqrt{\pi(t''-t')}}\,dt'',$$

$$\mathrm{M}(t,x;\tau)=\int_{t}^{\tau}\frac{x(t')-x}{t'-t}\,\frac{e^{-\frac{[x(t')-x]^2}{4(t'-t)}}}{2\sqrt{\pi(t'-t)}}\,dt',$$

on peut écrire (77) sous la forme

$$(77')\qquad \Phi_{\mathrm{C}}[t,x;\tau]+\int_t^{\tau}\mathrm{M}(t';\tau)\,d_{t'}\Phi_{\mathrm{C}}(t,x;t')=\mathrm{M}(t,x;t').$$

Nous nous efforcerons d'étendre la validité de (77'); auparavant remarquons que l'évaluation de $\overline{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}}[t,x(t);t]$ a déjà été faite dans le cas où

$$\varlimsup_{\tau\to t}\frac{x(\tau)-x(t)}{\sqrt{\tau-t}}<+\infty$$

[formule (76)]. Nous n'avons donc à examiner que le cas où, si l'on pose

$$x(\tau)=x(t)+\sqrt{-4(\tau-t)\log\rho(\tau-t)},$$

la fonction $\rho(h)$, définie pour $h>0$, tend vers o avec h.

Supposons d'abord que $\rho(h)$ possède une dérivée finie $\rho'(h)$ pour tout $h>0$, du moins pour les valeurs de $h<$ à un certain nombre $\eta>0$, et nous nous plaçons dans ce qui suit toujours dans l'hypothèse $\tau-t<\eta$. Dans ces conditions, on établit sans difficulté, pour tout $x<x(t)$ et tout $\tau>t$, la formule (67'''):

$$(67''')\qquad \frac{\partial}{\partial\tau}\Phi_{\mathrm{C}}(t,x;\tau)+\int_t^{\tau}\frac{x(\tau)-x(t')}{\tau-t'}\,\frac{e^{-\frac{[x(\tau)-x(t')]^2}{4(\tau-t')}}}{2\sqrt{\pi(\tau-t')}}\,d_{t'}\Phi_{\mathrm{C}}[t,x;t'] =\frac{x(\tau)-x}{\tau-t}\,\frac{e^{-\frac{[x(\tau)-x]^2}{4(\tau-t)}}}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}}.$$

Cette formule permet de conclure dans certains cas :

1[er] *Cas.* — Supposons $x(\tau)$ non décroissante; on déduit de l'égalité précédente, par intégration,

$$(78)\qquad \Phi_{\mathrm{C}}[t,x;\tau]+\int_{t-0}^{\tau}dt'\left[\int_t^{t'}\frac{x(t')-x(t'')}{t'-t''}\,\frac{e^{-\frac{[x(t')-x(t'')]^2}{4(t'-t'')}}}{2\sqrt{\pi(t'-t'')}}\,d_{t''}\Phi_{\mathrm{C}}[t,x;t'']\right] =\int_t^{\tau}\frac{x(t)-x}{t'-t}\,\frac{e^{-\frac{[x(t')-x]^2}{4(t'-t)}}}{2\sqrt{\pi(t'-t)}},$$

où les trois termes sont $\geqq 0$.

Supposons en outre que ρ satisfasse à la condition

(79) $$\int_0^{\alpha} \frac{\rho(h)\sqrt{-\log\rho(h)}}{h}\,dh < +\infty \quad \text{pour un } \alpha > 0 \text{ quelconque},$$

ce qui équivaut à

(79′) $$\int_t^{t+\alpha} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t} \frac{e^{-\frac{[x(t')-x(t)]^2}{4(t'-t)}}}{2\sqrt{\pi(t'-t)}}\,dt' < +\infty.$$

$\rho(h)$ tendant vers o avec h, le rapport $\dfrac{x(t') - x(t)}{\sqrt{t'-t}}$ tend vers $+\infty$ lorsque t' tend vers t, on a donc

(80) $$u = \frac{x(t') - x}{\sqrt{2(t'-t)}} > \frac{x(t') - x(t)}{\sqrt{2(t'-t)}} > 1$$

dans tout l'intervalle $[t < t' \leqq \tau]$, pourvu que $\tau - t$ soit assez petit; or la fonction $ue^{-\frac{u^2}{2}}$ est *décroissante* pour $u > 1$; on a donc, avec (80)

(81) $$\int_t^{\tau} \frac{x(t') - x}{t' - t} \frac{e^{-\frac{[x(t')-x]^2}{4(t'-t)}}}{2\sqrt{\pi(t'-t)}}\,dt' \leqq \int_t^{\tau} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t} \frac{e^{-\frac{[x(t')-x(t)]^2}{4(t'-t)}}}{2\sqrt{\pi(t'-t)}}\,dt'.$$

Il résulte de (79′) que l'on peut choisir τ assez petit pour que, quel que soit x, le premier membre de (78) soit inférieur à tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance; on a donc, en particulier,

$$\Phi_C[t, x; \tau] < \varepsilon,$$

ce qui entraîne

(82) $$\overline{P}_C[t, x(t); t] = 1.$$

Deuxième cas. — Supposons que les intégrales

$$\overline{M}(t', \tau) = \int_{t'}^{\tau} \frac{|x(t'') - x(t')|}{t'' - t'} \frac{e^{-\frac{[x(t'')-x(t')]^2}{4(t''-t')}}}{2\sqrt{\pi(t''-t')}}\,dt''$$

convergent uniformément par rapport à t' pour $t < t' \leqq \tau$; cela revient à dire que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $t_1 > t$ tel que l'on ait

$$\int_{t'}^{t_1} \frac{|x(t'') - x(t')|}{t'' - t'} \frac{e^{-\frac{[x(t'')-x(t')]^2}{4(t''-t')}}}{2\sqrt{\pi(t''-t')}}\,dt'' < \varepsilon.$$

Il en résulte que l'intégrale :

(83) $$\int_t^{\tau} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t} \frac{e^{-\frac{[x(t')-x(t)]^2}{4(t'-t)}}}{2\sqrt{\pi(t'-t)}}\,dt'$$

converge, compte tenu de ce que la fonction à intégrer qui y figure est nécessairement > 0. L'intégrale double qui constitue le second terme du premier membre de (78) est alors absolument convergente, on peut y échanger l'ordre des intégrations, et il est alors clair qu'elle est infiniment petite avec $\tau - t$; comme il en est de même du second membre de (78), d'après (80) et (81), (82) est encore valable.

Remarque I. — Dans le cas général où $x(\tau)$ n'est pas une fonction non décroissante, la convergence de l'intégrale (83) soit la condition (79) n'est pas une condition suffisante pour que $\overline{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}}[t, x(t); t] = 1$; ainsi (79) peut être réalisée, bien qu'il existe une suite (t_n) tendant en décroissant vers t et telle que

$$\lim_{t_n \to t} \frac{x(t_n) - x(t)}{\sqrt{t_n - t}} < +\infty$$

et l'on a vu qu'alors

$$\overline{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}}[t, x(t); t] = 0.$$

Remarque II. — Le résultat obtenu dans notre *Premier cas* ne rejoint pas strictement le théorème de Kolmogoroff que nous avons démontré dans le Chapitre I; au lieu de l'hypothèse que $\rho(h)$ est non décroissante, c'est $x(\tau)$ que nous avons supposé non décroissante, et ces deux hypothèses ne sont pas équivalentes : aucune d'elles ne contient l'autre; cependant dans la plupart des cas pratiques simples, elles coïncident; en effet, pour que ρ, supposée dérivable et non décroissante, donne $x(\tau)$ non décroissante, il faut et il suffit que $[x(\tau) - x(t)]^2$ soit non décroissant, soit : $-4(\tau - t)\log\rho(\tau - t)$; pour cela, il suffit et faut que, du moins pour h assez petit, on ait

$$-\log\rho(h) - h\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} \geqq 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} \leqq \frac{-\log\rho(h)}{h}.$$

Ceci est en particulier réalisé si l'on a

$$\rho(h) = \frac{1}{|\log\lambda h|^3}, \tag{84}$$

où λ est une constante positive quelconque. Cette remarque permet de retrouver le théorème de Kolmogoroff, en utilisant un artifice de Petrowsky (Petrowsky, *loc. cit.*, p. 400 et sq.). Supposons $\rho(h)$ non décroissante, dérivable sauf pour $h = 0$ et telle que

$$\int_0^\alpha \frac{\rho(h)\sqrt{-\log\rho(h)}}{h}\,dh < +\infty.$$

Supposons qu'il existe une valeur de λ telle que la fonction $\overline{\rho}(h) = \frac{1}{|\log\lambda h|^3}$ satisfasse à l'inégalité

$$\rho(h) \geqq \rho(h),$$

du moins pour h assez petit : la courbe $\overline{\mathrm{C}}$ correspondant à $\overline{\rho}(h)$ sera inférieure à C, et supérieure au point $[t, x(t)]$: donc C aussi. Nous examinerons donc seulement le cas où, quel que soit λ, on a pour des valeurs infiniment petites de h, $\rho(h) < \bar{\rho}(h)$; dans ce cas, définissons la fonction $\rho_1(h)$ de la façon suivante : étant donné $h < \alpha$, et $h' \geqq h$ et $\leqq \alpha$, soit $\bar{\rho}_{h'}(h) = \frac{1}{|\log \lambda h|^3}$ la courbe (84) qui passe par le point $[g', \rho(h')]$, λ étant défini par l'équation

$$(85) \qquad \rho(h') = \frac{1}{|\log \lambda h'|^3}$$

et la condition $0 < \lambda h' < 1$. On pose

$$\rho_1(h) = \underset{h \leqq h' \leqq \alpha}{b.s.} \; \bar{\rho}_{h'}(h).$$

On vérifie facilement que $\rho_1(h)$ existe et est non décroissante; $\rho_1(h)$ est $\geqq \rho(h)$, et n'est peut-être pas partout dérivable, mais si l'on définit λ par

$$(86) \qquad \rho_1(h) = \frac{1}{|\log \lambda h|^3} \qquad \text{avec } 0 < \lambda h < 1,$$

et qu'on considère la courbe $\bar{\rho}_1(h') = \frac{1}{|\log \lambda h'|^3}$, on a

$$(87) \qquad |\rho_1(h + \Delta h) - \rho_1(h)| \leqq |\bar{\rho}_1(h + \Delta h) - \bar{\rho}_1(h)|.$$

Observons que d'après (86), λh tend vers 0 en décroissant avec h. Soit de plus h une valeur telle : $\rho_1(h) > \rho(h)$; on voit facilement que h est à l'intérieur d'un intervalle (a, b) dans lequel λ défini par (86) reste constant. Si l'on appelle $I_n (n = 1, 2, \ldots)$, les intervalles tels que (a, b) et A leur ensemble complémentaire, pour montrer que

$$\int_0 \frac{\rho_1\sqrt{-\log\rho_1}}{h}\, dh = \int_A \frac{\rho_1\sqrt{-\log\rho_1}}{h}\, dh + \sum_n \int_{I_n} \frac{\rho_1\sqrt{-\log\rho_1}}{h}\, dh < +\infty,$$

il suffit d'établir que

$$(88) \qquad \sum_n \int_{I_n} \frac{\rho_1\sqrt{-\log\rho_1}}{h}\, dh < +\infty,$$

car sur A, $\rho_1 = \rho$; or $\int_{I_n} \frac{\rho_1\sqrt{-\log\rho_1}}{h}\, dh$ s'évalue facilement, puisque sur I_n $\rho_1(h)$ est de la forme (87), et l'on constate que (88) est vrai. Dans ces conditions, comme (67''') est vrai pour la courbe C_1 définie par

$$x_1(\tau) = x(t) + \sqrt{-4(\tau - t)\log\rho_1(\tau - t)},$$

pourvu que dans tout intervalle $(t + \beta, \tau)$, x_1 satisfasse à une condition de Lipschitz du premier ordre [*cf.* Chap. III], ce qui est le cas d'après (87), et que toujours d'après (87), $x_1(\tau)$ est non décroissant, C_1 est supérieure en $[t, x(t)]$, donc aussi C, puisque $\rho_1 \geqq \rho$.

Nous retrouvons ainsi le théorème de Kolmogoroff, à ceci près que $\rho(h)$ est supposé dérivable pour $h > 0$, mais nous verrons plus loin comment on peut s'affranchir de cette hypothèse.

Mais le théorème de Kolmogoroff comporte une réciproque : si $\rho(h)$ est non décroissante et si; pour un $\alpha > 0$ quelconque on a

$$\int_0^\alpha \frac{\rho(h)\sqrt{-\log\rho(h)}}{h}\,dh = +\infty. \tag{89}$$

$P_C[t, x(t); t]$ est nul.

Ce résultat se déduit des résultats de Petrowski [*cf.* PETROWSKI, *loc. cit.*], en effet si la condition précédente est satisfaite, le point $[t, x(t)]$ de C est « régulier » au sens de Petrowski, et ceci ne peut avoir lieu que si $\overline{P_C}[t, x(t); t] = 0$ comme nous le verrons plus loin. Aussi nous nous bornerons à indiquer sommairement comment on peut retrouver ce résultat par notre méthode.

τ étant fixe et η assez petit pour que $t+\eta < \tau$, on a, si ρ est dérivable et d'après ($67'''$),

$$\Phi_C[t+\eta, x(t); \tau] + \int_{t+\eta}^{\tau} M(t', \tau)\, d_{t'}\Phi_C[t+\eta, x(t); t'] = M[t+\eta, x(t); \tau].$$

Moyennant une condition pour ρ qu'il est inutile de préciser et que nous appellerons A, $M(t', \tau)$ est une fonction non croissante de t'; de sorte que l'on peut écrire :

$$\Phi_C[t+\eta, x(t); \tau]\,[1 + M(t+\eta, \tau)] \geqq M[t+\eta, x(t); \tau]$$

ou, $M[t+\eta, x(t); \tau]$ étant > 0,

$$\Phi_C[t+\eta, x(t); \tau]\left[\frac{1}{M[t+\eta, x(t); \tau]} + \frac{M(t+\eta, \tau)}{M[t+\eta, x(t); \tau]}\right] \geqq 1.$$

On fait alors tendre η vers $+0$; d'après (89), $M[t+\eta, x(t); \tau]$ tend vers $+\infty$; moyennant pour ρ une seconde condition restrictive B, on montre que

$$\lim_{\eta \to +0} \frac{M(t+\eta, \tau)}{M[t+\eta, x(t); \tau]} = 1.$$

Il en résulte que

$$\lim_{\eta \to +0} \Phi_C[t+\eta, x(t); \tau] = 1.$$

Or on a

$$\Phi_C[t, x(t); \tau] = \Phi_C[t, x(t); t+\eta] + \int_{-\infty}^{x(t+\eta)} p_C[t, x(t); t+\eta, y]\,\Phi_C[t+\eta, y; \tau]\,dy.$$

Supposons que $\Phi_C[t, x(t); \tau] = 0$; on pourrait prendre τ assez petit pour que, quel que soit η,

$$\Phi_C[t, x(t); t+\eta] \leqq \Phi_C[t, x(t); \tau] \leqq \frac{1}{4}.$$

On devrait avoir quel que soit η

$$\int_{-\infty}^{x(t+\eta)} p_{\rm C}[t, x(t); t+\eta, y]\, \Phi_{\rm C}[t+\eta, y; \tau]\, dy \leqq \frac{1}{4},$$

et *a fortiori*

$$\int_{x(t)}^{x(t+\eta)} p_{\rm C}[t, x(t); t+\eta, y]\, \Phi_{\rm C}[t+\eta, y; \tau]\, dy \leqq \frac{1}{4},$$

or, si $y \geqq x(t)$, on a

$$\Phi_{\rm C}[t+\eta, y; \tau] \geqq \Phi_{\rm C}[t+\eta, x(t); \tau].$$

On devrait donc avoir

$$(90) \qquad \Phi_{\rm C}[t+\eta, x(t); \tau] \int_{x(t)}^{x(t+\eta)} p_{\rm C}[t, x(t); t+\eta, y]\, dy \leqq \frac{1}{4}.$$

Or, l'hypothèse que $\Phi_{\rm C}[t, x(t); t] = 0$, entraîne que

$$\lim_{\eta \to +0} \int_{-\infty}^{x(t+\eta)} p_{\rm C}[t, x(t); t+\eta, y]\, dy = 1.$$

Et comme on a

$$\int_{-\infty}^{x(t)} p_{\rm C}[t, x(t); t+\eta, y]\, dy \leqq \int_{-\infty}^{x(t)} {\rm U}_0[t, x(t); t+\eta, y]\, dy = \frac{1}{2},$$

il est clair que (90) est impossible dès que η est assez petit. Ceci établit le résultat voulu, sous les restrictions A et B; on lève ces dernières par des procédés analogues à ceux utilisés par Petrowski pour des questions semblables.

Tout ce qui précède suppose $\rho(h)$ dérivable pour $h > 0$. Pour lever cette restriction, nous allons établir un théorème général.

Supposons $b(t, x)$ égal à une constante b; soit $\Phi_{\rm C}[t, x; \tau]$ la probabilité d'absorption relative à C et à la valeur b du coefficient $b(t, x)$; désignons par $\Phi_{\rm C}^0[t, x; \tau]$ ce que devient $\Phi_{\rm C}[t, x; \tau]$ lorsque $b = 0$; τ étant fixe, soit $\mathcal{D}$ le domaine défini par $x \leqq x(t)$, $t \leqq \tau$. Posons,

$$\theta(t, x) = \Phi_{\rm C}[t, x; \tau] - \Phi_{\rm C}^0[t, x; \tau].$$

$\Phi_{\rm C}$, comme fonction de (t, x), satisfait dans $\mathcal{D}$ à l'équation

$$(91) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\, \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

et $\Phi_{\rm C}^0$ à

$$(92) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

On en déduit que θ satisfait à

$$(93) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\, \frac{\partial \Phi_{\rm C}}{\partial x} = 0.$$

Soit C^* une courbe définie par $x = x^*(t)$, avec : $x^*(t) < x(t)$, $x^*(t)$ étant à dérivée bornée et intégrable; dans le domaine $\mathcal{D}^*$ défini par $x \leqq x^*(t)$, $t \leqq \tau$, θ est une solution de (91) régulière au sens de Gevrey (*cf.* Chap. III). D'après un théorème connu ([18]), on peut poser

$$(94) \qquad \theta(t, x) = b \int_t^{\tau} dp \int_{-\infty}^{x^*(p)} \frac{\partial}{\partial q} \Phi_C[p, q; \tau] U_0[t, x; p, q] \, dq + \Psi^*(t, x),$$

où $\Psi^*(t, x)$ est une solution régulière dans $\mathcal{D}^*$ de (98); la représentation (94) est valable dans $\mathcal{D}^*$. Posons

$$A^*(t, x) = b \int_t^{\tau} dp \int_{-\infty}^{x^*(p)} \frac{\partial}{\partial q} \Phi_C[p, q; \tau] U_0[t, x; p, q] \, dq.$$

Une intégration par partie légitime permet d'écrire

$$(95) \qquad A^*(t, x) = b \int_t^{\tau} dp \Bigg[\Phi_C[p, x^*(p); \tau] U[t, x; p, x^*(p)] + \int_{-\infty}^{x^*(p)} \Phi_C[p, q; \tau] \frac{q - x}{2(p - t)} \frac{e^{-\frac{(q-x)^2}{4(p-t)}}}{2\sqrt{\pi(p-t)}} \, dq \Bigg],$$

où les intégrales sont absolument convergentes.

Observons que si, x étant $< x^*(\tau)$, t tend vers τ, $\theta(t, x)$ tend vers o; d'après ce que nous avons vu dans la troisième Partie, on peut écrire, puisque dans les mêmes conditions, $A^*(t, x)$ tend vers o

$$(96) \qquad \Psi^*(t, x) = \int_t^{\tau} \Psi^*[t', x^*(t')] \, d_{t'} \Phi^0_{C^*}[t, x; t'],$$

et l'on a sur C^*

$$(97) \qquad \theta[t, x^*(t)] = A^*[t, x^*(t)] + \Psi^*[t, x^*(t)].$$

Supposons maintenant que nous fassions tendre C^* vers C : plaçons-nous dans l'hypothèse où $x(t)$ possède une dérivée $x'(t)$, et faisons tendre, *uniformément* dans l'intervalle $t \leqq t' \leqq \tau$, $x^*(t')$ vers $x(t')$ et $x^{*\prime}(t')$ vers $x'(t')$; dans ces conditions les passages à la limite n'offrent aucune difficulté; $A^*(t, x)$ tend vers une limite $A(t, x)$ donnée par :

$$(95') \qquad A(t, x) = b \int_t^{\tau} dp \Bigg[U_0[t, x; p, x(p)] + \int_{-\infty}^{x(p)} \Phi_C[p, q; \tau] \frac{q - x}{2(p - t)} \frac{e^{-\frac{(q-x)^2}{4(p-t)}}}{2\sqrt{\pi(p-t)}} \, dq \Bigg],$$

([18]) *Cf.* GEVREY, *Équations aux dérivées partielles du type parabolique* (*Journ. de Math.*, t. 9, 1913, p. 343).

où nous avons tenu compte de ce que $\Phi_C[p, x(p); \tau] = 1$. On déduit aisément de (95′) que l'on a

$$(98) \qquad |A(t, x)| \leqq |b| M\sqrt{\tau - t},$$

où M est un nombre absolu, indépendant de C, x et t. D'autre part, $A^\star[t, x^\star(t)]$ tend vers $A[t, x(t)]$; observons que sur C, c'est-à-dire pour $x = x(t)$, $\Phi_C[t, x; \tau]$ et $\Phi_C^0[t, x; \tau]$ sont égaux à 1 quel que soit t, de sorte que $\theta[t, x^\star(t)]$ tend vers 0; par suite, d'après (98), $\Psi^\star[t, x^\star(t)]$ a une limite qui est : $-A[t, x(t)]$. D'après (22) $\Psi^\star(t, x)$ a donc une limite qui est

$$-\int_t^\tau A[t', x(t')]\, d_{t'}\Phi_C^0[t, x; t'],$$

de sorte que dans $\mathcal{D}$, $\theta(t, x)$ admet la représentation

$$\theta(t, x) = A(t, x) - \int_t^\tau A[t', x(t')]\, d_{t'}\Phi_C^0[t, x; t'].$$

D'où l'on déduit sans difficulté, d'après (98) qui reste valable si x tend vers $x(t)$, que

$$(99) \qquad |\theta(t, x)| \leqq 2|b| M\sqrt{\tau - t},$$

où, remarquons-le encore, M est indépendant de t, x et de C; mais nous avons supposé que C était à dérivée bornée; supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit $\overline{C}$ une courbe à dérivée bornée, définie par

$$x = \bar{x}(t), \qquad \text{avec} \quad \bar{x}(t') \leqq x(t') \qquad [t \leqq t' \leqq \tau] \quad \text{et} \quad \bar{x}(t) > x.$$

Posons

$$\bar{\theta}(t, x) = \Phi_{\overline{C}}[t, x; \tau] - \Phi_{\overline{C}}^0[t, x; \tau],$$

on a, d'après (99),

$$|\bar{\theta}(t, x)| \leqq 2|b| M\sqrt{\tau - t}.$$

Mais, si l'on fait tendre $\overline{C}$ vers C, $\bar{\theta}(t, x)$ tend vers $\theta(t, x)$ et comme M n'est pas modifié, on a à la limite

$$|\theta(t, x)| \leqq 2|b| M\sqrt{\tau - t},$$

c'est-à-dire que (99) est valable pour toute courbe C continue; en outre, (99) reste valable lorsque x tend vers $x(t)$, puisque M ne dépend pas de x.

Il résulte de (99) que, b étant une constante, si l'on considère les trois courbes :

C définie par $x = x(t')$;
$\overline{C}$ définie par $x = x(t') + b(t' - t)$;
$\underline{C}$ définie par $x = x(t') - b(t' - t)$.

On a

$$(100) \qquad \overline{P}_C^0[t, x(t); t] = \overline{P}_{\overline{C}}^0[t, x(t); t] = \overline{P}_{\underline{C}}^0[t, x(t); t],$$

l'indice o indiquant que les $\overline{\mathrm{P}}$ sont évaluées en supposant $b(t, x) = 0$. Supposons maintenant $b(t, x)$ non nul, mais prenons b égal ou supérieur à $b.s.b(t, x)$: on aura

$$(101) \qquad \overline{\mathrm{P}}_{\underline{c}}^{0}[t, x(t); \tau] \leqq \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau] \leqq \overline{\mathrm{P}}_{\overline{\mathrm{C}}}^{0}[t, x(t); \tau],$$

d'après le théorème VI (chap. II). Il en résulte que

$$\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); t] = \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}^{0}[t, x(t); t],$$

et par conséquent que, *même si* $b(t, x)$ *n'est pas nul,* $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); t]$ *ne peut valoir que* o *ou* 1.

D'autre part, si, reprenant l'évaluation de $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}^{0}[t, x(t); t]$, $\rho(h)$ n'est pas dérivable, on peut toujours remplacer $\rho(h)$ par une fonction $\rho^{\star}(h)$ dérivable, tendant vers o avec h, et telle que si $x^{\star}(\tau)$ est la fonction correspondant à $\rho^{\star}(h)$ on ait

$$|x^{\star}(\tau) - x(\tau)| \leqq b(\tau - t),$$

où b est une constante quelconque; (100) *permet alors d'étendre au cas de* $\rho(h)$ *non dérivable tous les énoncés obtenus dans le cas de* $\rho(h)$ *dérivable.*

De même, (101) *permet d'étendre au cas de* $b(t, x)$ *non nul tous les énoncés obtenus dans le cas de* $b(t, x) = 0$.

De (99) on peut d'ailleurs déduire un autre résultat : c'est que, dans l'hypothèse $b(t, x) = 0$, si l'on considère des courbes $\mathrm{C}^{\star}$ définies par $x = x^{\star}(t')$, avec $x^{\star}(t) = x(t)$; $x^{\star}(t') < x(t')$ pour $t' > t$, on a

$$\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau] = \underset{\mathrm{C}^{\star}}{b.s.}\, \mathrm{P}_{\mathrm{C}^{\star}}[t, x(t); \tau],$$

c'est-à-dire que, *selon le point de vue exposé au paragraphe* **2** *du Chap. II pour la définition de* $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau]$, *on peut considérer que*

$$\mathrm{P}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau] = \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}[t, x(t); \tau].$$

Ce résultat s'étend, d'une façon analogue, quoique plus compliquée, au cas où $b(t, x)$ n'est pas $\equiv 0$.

CHAPITRE V.

Application à la résolution des équations aux dérivées partielles linéaires du type parabolique.

Nous considérons, toujours sous les mêmes hypothèses, l'équation (1)

$$(1) \qquad \mathrm{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t, x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Nous considérons une courbe C définie dans le plan (t, x) par l'équation

$$(102) \qquad x = x(t),$$

où $x(t)$ est une fonction uniforme continue, du moins pour $T_1 \leqq t \leqq T_2$ et nous nous plaçons toujours dans l'intervalle (T_1, T_2); soit alors D le domaine défini par

$$x \leqq x(t), \qquad t \leqq \tau,$$

où τ est donné, du moins dans l'intervalle fermé $[T_1 \leqq t \leqq \tau]$. Soit $f(t)$ une fonction uniforme et continue; la formule

$$u(t, x) = \int_t^\tau f(t')\, d_{t'} \Phi_C(t, x; t') \tag{103}$$

définit une fonction $u(t, x)$ à l'intérieur de D, qui satisfait aux conditions aux limites suivantes :

a. Si t tend vers τ tandis que, indépendamment, x tend vers une valeur $\xi < x(\tau)$, $u(t, x)$ tend vers o.

b. Si, t restant fixe et $< \tau$, x tend vers $x(t)$, $u(t, x)$ tend vers

$$\alpha.\ f(t) \qquad\qquad \text{si} \quad \Phi_C[t, x(t); t] = 1,$$

c'est-à-dire si C est *séparatrice* ou *inférieure* au point $[t, x(t)]$;

$$\beta.\ \int_t^\tau f(t')\, d_{t'} \Phi_C[t, x(t); t'] \qquad \text{si} \quad \Phi_C[t, x(t); t] = 0,$$

c'est-à-dire si C est *supérieure* au point $[t, x(t)]$; il est clair qu'en général cette limite différera numériquement de $f(t)$, et que $[t, x(t)]$ sera généralement un point de discontinuité sur le contour pour $u(t, x)$.

De même le point $[\tau, x(\tau)]$ est généralement point de discontinuité pour $u(t, x)$ sur le contour de D, sauf toutefois si $f(\tau) = 0$.

D'autre part, $u(t, x)$ est, à l'intérieur de D, une fonction continue de (t, x); pour le voir, il suffit de remarquer que l'on peut partager l'intervalle $[T_1, \tau]$ en intervalles partiels (t_0, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_i, t_{i+1}), ..., en nombre fini, mais assez petits pour que l'oscillation de $f(t)$ soit dans chacun de ces intervalles inférieure à ε; on a alors, *à ε près* et *indépendamment de* (t, x)

$$u(t, x) = \sum_{i'} f(t_{i'}) \left[\Phi_C(t, x; t_{i'+1}) - \Phi_C(t, x; t_{i'})\right], \tag{104}$$

les i' étant les indices i pour lesquels $t_i > t$; nous supposons que t ne figure pas parmi les t_i, ce qui est toujours réalisable; les divers termes de la somme (104) étant continus en (t, x), il en est de même de $u(t, x)$.

Nous allons montrer que, *à l'intérieur de* D, $u(t, x)$ est solution de l'équation (1); soit donc (t, x) un point intérieur à D; traçons une courbe $\overline{C}$ définie par $x = \overline{x}(t')$, où $\overline{x}(t')$ est uniforme, continue, à dérivée intégrable et bornée, avec de plus $\bar{x}(t') < x(t')$ et $x < \bar{x}(t)$; on a

$$u[t', \bar{x}(t')] = \int_{t'}^{\tau} f(t'')\, d_{t''}\Phi_C[t', \bar{x}(t'); t''], \tag{105}$$

et les quantités $u[t', \bar{x}(t')]$ forment une fonction continue de t', avec

$$\lim_{t' \to \tau} u[t', \bar{x}(t')] = 0.$$

La fonction $\bar{u}(t, x)$, définie par

$$\bar{u}(t, x) = \int_{t}^{\tau} u[t', \bar{x}(t')]\, d_{t'}\Phi_{\bar{C}}[t, x; t'], \tag{106}$$

est solution de (1) à l'intérieur du domaine D défini par

$$x \leqq \bar{x}(t), \qquad t \leqq \tau,$$

d'après des propriétés établies dans le Chap. III, le résultat annoncé sera donc obtenu si nous montrons que, à l'intérieur de $\bar{D}$, $\bar{u}(t, x)$ est identique à $u(t, x)$. Or, d'après (5) et (6), on peut écrire

$$\bar{u}(t, x) = \int_{t}^{\tau} \left[\int_{t'}^{\tau} f(t'')\, d_{t''}\Phi_C[t', \bar{x}(t'); t''] \right] d_{t'}\Phi_{\bar{C}}(t, x; t'), \tag{107}$$

$f(t'')$ étant continue, il n'est pas difficile de prouver que l'on peut dans (107) intervertir l'ordre des intégrations ([19]), ce qui, compte tenu de la relation

$$\Phi_C[t, x; t''] = \int_{t}^{t''} \Phi_C[t, \bar{x}(t'); t'']\, d_{t'}\Phi_{\bar{C}}(t, x; t'), \tag{108}$$

conduit à identifier $\bar{u}(t, x)$ à $u(t, x)$; on peut aussi raisonner ainsi : supposons d'abord que $\bar{C}$ soit dérivable à dérivée bornée; alors

$$\Phi_C[t', \bar{x}(t'); t''] \quad \text{et} \quad \Phi_{\bar{C}}(t, x; t')$$

ont des dérivées partielles bornées (et positives ou nulles) par rapport à t'' et t' respectivement; l'interversion des intégrations dans (107) n'offre alors aucune difficulté : reprenons maintenant le cas général et introduisons une courbe C^* définie par

$$x = x^*(t') \qquad \text{avec} \quad \bar{x}(t') < x^*(t') < x(t'),$$

où $x^*(t')$ est supposée dérivable à dérivée bornée, et faisons tendre C^* vers C.

([19]) Le théorème classique de Fubini n'est pas applicable ici parce que $\Phi_C[t', \bar{x}(t'); t'']$ dépend de t'.

Si l'on pose

$$u^*(t, x) = \int_t^\tau f(t')\, d_{t'}\Phi_{C^*}[t, x; t'], \qquad \bar{u}^*(t, x) = \int_t^\tau u^*[t', \bar{x}(t')]\, d_{t'}\Phi_C[t, x; t'],$$

on a évidemment

$$\lim_{C^* \succ C} u^*(t, x) = u(t, x); \qquad u^*(t, x) = \bar{u}^*(t, x),$$

donc

$$\lim_{C^* \succ C} \bar{u}^*(t, x) = u(t, x); \qquad \lim_{C^* \succ C} u^*[t, \bar{x}(t')] = u[t', \bar{x}(t')].$$

Comme $u^*[t', \bar{x}(t')]$ est borné, ainsi que $\frac{\partial}{\partial t'}\Phi_C[t, x; t']$, on voit d'après (106) que

$$\lim_{C^* \succ C} \bar{u}^*(t, x) = \bar{u}(t, x).$$

On conclut bien à l'identité de $\bar{u}(t, x)$ et de $u(t, x)$.

Considérons $\overline{p_C}(t, x; \tau, y)$, avec $y \leqq x(\tau)$; pour τ et y fixes, c'est une fonction de (t, x) définie dans le domaine D; pour $x < x(t)$, le théorème des probabilités composées donne

$$(109) \qquad \int_{-\infty}^{y} U(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{y} \overline{p_C}(t, x; \tau, \xi)\, d\xi + \int_t^\tau \left[\int_{-\infty}^{y} U[t', x(t'); \tau, \xi]\, d\xi\right] d_{t'}\Phi_C(t, x; t').$$

Pour $y < x(\tau)$, on en déduit sans difficulté; par dérivation,

$$(110) \qquad \overline{p_C}(t, x; \tau, y) = U(t, x; \tau, y) - \int_t^\tau U[t', x(t'); \tau, y]\, d_{t'}\Phi_C(t, x; t').$$

Il en résulte, dans l'hypothèse $y < x(\tau)$ que $\overline{p_C}(t, x; \tau, y)$ est dans D solution de (1) et satisfait aux conditions aux limites suivantes :

a. Si, t restant fixe $< \tau$, x tend vers $x(t)$, $\overline{p_C}(t, x; \tau, y)$ tend vers o si C est *séparatrice* ou *inférieure* en $[t, x(t)]$, vers

$$U[t, x(t); \tau, y] - \int_t^\tau U[t', x(t'); \tau, y]\, d_{t'}\Phi_C[t, x(t); t'],$$

valeur généralement non nulle, si C est *supérieure* en (t, x).

b. Si t tend vers τ et x vers $\xi \neq y$, $\overline{p_C}(t, x; \tau, y)$ tend vers o, comme $U(t, x; \tau, y)$; au voisinage de (τ, y), $\overline{p_C}(t, x; \tau, y)$ se comporte irrégulièrement.

Remarque. — $\overline{p_C}(t, x; \tau, y)$ a été défini, pour $y \leqq x(\tau)$, au paragraphe **2** du Chapitre II, comme une limite, mais il n'est pas évident que cette limite est indépendante du mode de subdivision de l'intervalle (t, τ) qui a été choisi;

pour $\overline{P_C}(t, x; \tau)$ cette indépendance résulte de résultats généraux sur les fonctions aléatoires stochastiquement continues ([20]), mais il n'en est pas de même pour $\overline{p_C}$; en tout cas, nous remarquons que (110) établit que $\overline{P_C}(t, x; \tau, y)$ possède, dans l'intervalle *ouvert* $[-\infty < y < x(\tau)]$, une dérivée partielle par rapport à y *continue* en y, fournie par la formule (110), formule que nous prendrons dorénavant comme définition de $\overline{p_C}$, valable du moins pour $y < \overline{x}(\tau)$; pour le moment, l'indétermination de $\overline{p_C}$ pour $y = y(\tau)$ est sans importance.

Considérons maintenant une fonction $g(y)$ définie uniforme, continue et bornée dans l'intervalle fermé $[-\infty \leqq y \leqq x(\tau)]$, et soit

$$v(t, x) = \int_{-\infty}^{x(\tau)} g(y)\overline{p_C}(t, x; \tau, y)\,dy. \tag{111}$$

On voit facilement que :

a. $v(t, x)$ est, à l'intérieur de D, solution de (1).

b. $\lim\limits_{\substack{x \to x(t) \\ t < \tau}} v(t, x) = 0$, si C est, en $[t, x(t)]$, *séparatrice* ou *inférieure*; dans les mêmes conditions, $v(t, x)$ a une limite généralement non nulle si C est en $[t, x(t)]$ *supérieure*.

c. $\lim\limits_{\substack{t \to \tau \\ x \to \xi < x(\tau)}} v(t, x) = g(\xi)$.

Le comportement de $v(t, x)$ sera naturellement irrégulier si t tend vers τ tandis que x tend vers $x(\tau)$.

Remarque. — Il n'est pas nécessaire, évidemment, pour ce qui précède, que $g(y)$ reste borné lorsque y tend vers $-\infty$; il suffit que l'intégrale (111) soit absolument convergente, ainsi que ses dérivées partielles du 1er et du 2e ordre en x; on peut étudier ce point, en remarquant que, si l'on pose

$$G(t, x; \tau) = \int_{-\infty}^{x(\tau)} U(t, x; \tau, y) g(y)\,dy,$$

on peut écrire

$$v(t, x) = G(t, x; \tau) - \int_t^{\tau} G[t', x(t'); \tau]\,d_{t'}\Phi_C(t, x; t'); \tag{111'}$$

(111′) permet également d'éliminer les difficultés provenant de ce que $\overline{p_C}(t, x; \tau, y)$ n'a pas été précisément défini pour $y = x(\tau)$.

Considérons alors maintenant la fonction $w(t, x)$ définie par la formule

$$w(t, x) = \int_t^{\tau} f(t')\,d_{t'}\Phi_C(t, x; t') + \int_{-\infty}^{x(\tau)} g(y)\overline{p_C}(t, x; \tau, y)\,dy. \tag{112}$$

([20]) *Cf.* FORTET, *Sur la notion de fonction aléatoire* (*Revue Scientifique*, mars 1941).

C'est, à l'intérieur de D, une solution de $L(u)=0$: nous appellerons *normales* les solutions de ce type; les valeurs limites des solutions normales sur le contour, c'est-à-dire sur C et sur la « caractéristique » $t=\tau$, se déduisent immédiatement des valeurs limites de $u(t, x)$ et de $v(t, x)$, calculées précédemment. Nous pouvons compléter ces résultats par les remarques suivantes :

Remarque 1. — Le comportement de $w(t, x)$ lorsque $x \to x(\tau)$, cependant que, indépendamment, t tend vers τ, est en général irrégulier. Si, cependant, $f(t)$ et $g(y)$ se *raccordent* au point $[\tau, x(\tau)]$, un fait intéressant se produit; soit en effet a la valeur commune de $f(\tau)$ et de $g[x(\tau)]$; si t et x tendent indépendamment vers τ et $x(\tau)$, grâce à la continuité de $f(t)$ pour $t=\tau$, et de $g(y)$ pour $y=x(\tau)$, on commet une erreur négligeable dans (112) en écrivant

$$(113)\qquad w(t,x)=a\Phi_C(t,x;\tau)+a\int_m^{x(\tau)}\overline{p_C}(t,x;\tau,y)\,dy+\int_{-\infty}^{m}g(y)\overline{p_C}(t,x;\tau,y)\,dy,$$

si m est choisi assez voisin de $x(\tau)$; or (113) peut s'écrire

$$(114)\qquad w(t, x)=a+\int_{-\infty}^{m}[g(y)-a]\overline{p_C}(t, x; \tau, y)\,dy,$$

en remarquant que

$$\Phi_C(t, x; \tau)=1-\int_{-\infty}^{x(\tau)}\overline{p_C}(t, x; \tau, y)\,dy.$$

Or, lorsque t, x tend vers τ, $x(\tau)$ d'une façon quelconque, l'intégrale qui figure dans (114) devient négligeable; autrement dit

$$\lim_{\substack{t\to\tau\\ x\to x(\tau)}} w(t, x)=a=f(\tau)=g[x(\tau)].$$

Remarque 2. — Soit t_1 une valeur fixe, $<\tau$ et supposons $t<t_1$; considérons

$$\overline{w}(t, x)=\int_t^{t_1}f(t')\,d_{t'}\Phi_C(t, x; t')+\int_{-\infty}^{x(\tau)}h(z)\overline{p_C}(t, x; t_1, z)\,dz$$

qui est une solution de (1) définie dans le domaine : $t\leqq t_1$, $x\leqq x(t)$; prenons

$$h(z)=w(t_1, z).$$

$h(\tau)$ est continue dans l'intervalle $[-\infty\leqq z\leqq x(t_1)]$, et bornée. On a, d'ailleurs,

$$h(z)=\int_{t_1}^{\tau}f(t')\,d_{t'}\Phi(t_1, z; t')+\int_{-\infty}^{x(\tau)}g(y)\overline{p_C}(t_1, z; \tau, y)\,dy.$$

Comme on a

$$\overline{p_C}(t, x; \tau, y)=\int_{-\infty}^{x(t_1)}\overline{p_C}(t, x; t_1, z)\overline{p_C}(t_1, z; \tau, y)\,dz,$$

$$\Phi_C(t, x; t')-\Phi_C(t, x; t_1)=\int_{-\infty}^{x(t_1)}\overline{p_C}(t, x; t_1, z)\Phi_C(t_1, z; t')\,dz \qquad (t'\geqq t_1),$$

on montre facilement [en intervertissant des intégrations, opération qui se légitime aisément] que $\overline{w}(t, x)$ est identique à $w(t, x)$. Si alors nous nous plaçons dans l'hypothèse où, en $[t_1, x(t_1)]$, C est séparatrice ou inférieure; alors $h(z)$ et $f(t')$ se raccordent en $[t_1, x(t_1)]$, et l'on a

$$\lim_{\substack{t \to t-0 \\ x \to x(t_1)}} w(t, x) = f(t_1),$$

soit *une certaine continuité à gauche*; il n'existe pas, par contre, en général, de continuité à droite analogue.

Théorème d'existence pour les solutions de $L(u) = 0$. — Donnons-nous alors l'équation $L(u) = 0$; donnons-nous le domaine D, limité par la courbe C et la « caractéristique » $t = \tau$; donnons-nous encore les fonctions $f(t')$ et $g(y)$ définies, bornées et continues respectivement pour $t' \leqq \tau$, et $-\infty < y \leqq x(\tau)$ (notons en passant que ces données f et g sont essentiellement *indépendantes* entre elles); et proposons-nous de chercher une solution $w(t, x)$ dans D de $L(u) = 0$, satisfaisant, sur le contour de D, aux conditions aux limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \to x(t) \\ t \text{ fixe} < \tau}} w(t, x) = f(t), \tag{115}$$

$$\lim_{\substack{t \to \tau \\ x \to \xi < x(\tau)}} w(t, x) = g(\xi). \tag{116}$$

Si, en tous ses points $[t, x(t)]$ *(du moins pour* $t < \tau$*), C est séparatrice ou inférieure, mais jamais supérieure, il existe une solution normale* $w(t, x)$ *satisfaisant aux conditions indiquées, et elle est fournie par la formule* (112); il n'existe pas d'autre solution normale [mais il peut exister en outre des solutions non normales satisfaisant à (115) et à (116) (*cf.* DOETSCH, *loc. cit.*)]. Si C est supérieure en certains points $[t, x(t)]$, la solution normale (112) subsiste, mais ne satisfait plus à (115), sauf peut-être pour des choix spéciaux de $f(t)$.

Ces résultats se déduisent immédiatement de ce qui précède.