JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

EDMOND LAHAYE

Sur la résolution des équations $\frac{dz}{dx} = \mathrm{R}(x, z)$ (R rationnel en z) par des itérations intégrales et différentielles convergentes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 22 (1943), p. 1-23.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1943_9_22__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur la résolution des équations $\frac{dz}{dx} = \mathrm{R}(x, z)$ (R *rationnel en* z) *par des itérations intégrales et différentielles convergentes;*

Par Edmond LAHAYE.

Introduction.

La méthode des approximations successives de M. Picard et la méthode de Cauchy-Lipschitz s'applique à des types très généraux d'équations, mais leurs domaines d'existence sont souvent restreints. En général la méthode de M. Picard n'est pas applicable le long d'une ligne L à laquelle on impose comme conditions d'être de longueur finie, mais aussi grande que l'on veut, et de ne pas traverser les singularités fixes et mobiles. Elle cesse également de converger dans le domaine des singularités. Quant à la méthode de Cauchy-Lipschitz, si elle est applicable le long d'une ligne telle que celle que nous venons de définir (¹), elle ne l'est plus dans le domaine des points singuliers.

On peut se demander s'il n'est pas possible d'établir des méthodes s'apparentant à celles de M. Picard et de Cauchy-Lipschitz quant à la manière dont on effectue le calcul de l'intégrale, mais qui seraient convergentes dans le domaine des singularités et le long d'une ligne L.

C'est le résultat des recherches effectuées dans ce sens pour les équa-

(¹) *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, Édition française, 1910, T. II, vol. 3, fasc. 1, p. 11.

tions $z' = R(x, z)$ (R rationnel en z) que nous donnons ici. Si p et q sont respectivement les degrés des puissances les plus élevées de z au numérateur et au dénominateur de R et si $p > q+1$ (p et q entiers), nous posons

$$z = (\alpha + \beta y) : (\gamma + \delta y), \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0,$$

ce qui ramène l'équation à la forme

$$(a) \qquad y' = R'(x, y).$$

Soit $y = u : v$. Les fonctions u et v vérifient le système

$$(b) \qquad \frac{du}{dx} = \mathrm{A}v, \qquad \frac{dv}{dx}\mathrm{F}'(u, v, x) = \mathrm{G}'(u, v, x)$$

ainsi que

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= u_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{A}v\,dx, \\ \mathrm{F}(u, v, x) &= \mathrm{F}(u_0, v_0, x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{G}(u, v, x)\,dx, \end{aligned} \right.$$

où F et G sont des polynomes en u et v. Considérons les relations

$$(d) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_i &= u_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{A}v_{i-1}\,dx \\ \mathrm{F}(u_i, v_i, x) &= \mathrm{F}(u_0, v_0, x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{G}(u_{i-1}, v_{i-1}, x)\,dx \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

où les intégrations sont effectuées le long d'une ligne L. Nous démontrons que, lorsque i tend vers l'infini, u_i et v_i convergent uniformément vers des limites déterminées en tout point de L, et qu'il en est de même en tout point d'une ligne quelconque issue d'une singularité mobile. Pour caractériser ces propriétés, que ne possède pas la méthode de M. Picard dans le cas qui nous occupe, qu'elle soit appliquée à (a) ou au système (b), nous proposons d'appeler les relations (d) des *itérations intégrales convergentes*.

Si nous envisageons maintenant les relations

$$(e) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_i &= u_{i-1} + \mathrm{A}_{i-1}v_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \\ \mathrm{F}(u_i, v_i, x_i) &= \mathrm{F}(u_{i-1}, v_{i-1}, x_{i-1}) + \mathrm{G}(u_{i-1}, v_{i-1}, x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \right.$$

où x_n est un point déterminé x de L et $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}$ les points de division de l'arc $x_0 x$ de L, nous obtenons les mêmes conclusions que pour (d) lorsque i tend vers l'infini, les intervalles partiels tendant vers zéro. Nous proposons d'appeler (e) des *itérations différentielles convergentes*. Si les nombres p et q, définis plus haut, sont tels que $p \leq q+1$, il suffit de considérer une relation

$$\mathrm{F}_1(x, y) = \mathrm{F}_1(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{G}_1(x, y)\,dx,$$

qui se traite comme les secondes relations de (d) et (e) dans lesquelles on rend u constant. Pour démontrer que (d) et (e) sont des itérations convergentes, nous devons postuler l'existence de dérivées premières pour certains coefficients de R, de sorte que les méthodes que nous proposons s'appliquent à des équations moins générales que celles de M. Picard et de Cauchy-Lipschitz. On peut maintenant se demander s'il n'est pas possible, pour une équation différentielle donnée, de définir sa solution à l'aide d'itérations convergentes.

C'est là un problème dont la solution peut être particulièrement délicate dans certains cas; nous avons obtenu, pour des équations d'ordres supérieurs et de types généraux, des résultats que nous espérons pouvoir bientôt publier.

Nous n'avons pas examiné ici les singularités fixes à cause de la trop grande multiplicité des cas possibles, mais les itérations (d) sont particulièrement fécondes pour leur étude.

Dans le Chapitre I nous définissons par prolongement des fonctions u et v qui vérifient (c). Ce résultat nous sert de base pour démontrer, dans le Chapitre II, que les relations (d) sont des itérations intégrales convergentes, et, dans le Chapitre III, que les relations (e) sont des itérations différentielles convergentes. L'essentiel de ce travail a fait l'objet d'une Thèse de Doctorat spécial présentée devant la Faculté des Sciences de l'Université de Bruxelles.

CHAPITRE I.

1. Soit l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \frac{P(x, z)}{Q(x, z)}, \tag{1}$$

où P et Q sont des polynomes en z dont les coefficients sont des fonctions de x que nous préciserons plus loin. Par la substitution

$$z = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0,$$

l'équation (1) devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sum_{k=0}^{p+1} C_k y^k}{p + \sum_{1}^{p-1} D_k y^k}. \tag{2}$$

Nous ne nous occuperons, dans ce travail, que des équations (2). La variable x est complexe. Nous chercherons la valeur, en un point x, d'une intégrale de (2) qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$, lorsque x suit une ligne donnée $x_0 x$ ou L. Les conditions imposées *a priori* à L sont : 1° la longueur S de L est aussi grande que l'on veut, mais finie; 2° L ne traverse pas les singularités des coefficients C et D ni les singularités fixes de (2); 3° s'il existe sur L des singularités mobiles, on peut décrire de chacune de ces singularités comme centre, avec un rayon δ donné, mais aussi petit que l'on veut, une circonférence qui ne renferme aucune singularité fixe. Nous ferons l'hypothèse que, le long de L et dans les domaines δ, les coefficients C et D sont continus et que les D admettent des dérivées premières continues. Nous écrirons donc

$$(3)\qquad \begin{cases} C_k(x') = C_k(x) + c_k, \\ D_k(x') = D_k(x) + (x'-x)\left[D'_k(x) + d_k\right], \qquad D'_k(x') = D'_k(x) + d''_k, \end{cases}$$

où c_k, d_k, d''_k tendent vers zéro lorsque x' tend vers x, les points x' et x appartenant à L ou aux domaines δ.

2. Soit x_0 un point ordinaire. Posons

$$y_0 = u_0 : v_0, \qquad y = u : v.$$

On a

$$(3\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = A v, \\ \dfrac{dv}{dx}\left(p v^{p-1} + \displaystyle\sum_1^{p-1} D_k u^k v^{p-k-1}\right) \\ \quad = \displaystyle\sum_1^{p-1} (AD_k - C_k) u^{k-1} v^{p-k+1} - C_p u^{p-1} v - C_{p+1} u^p. \end{cases}$$

Le point x étant un point quelconque de L, soient les relations

$$(4)\qquad \begin{cases} u = u_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} A v\, dx, \\ F(u, v, x) = F(u_0, v_0, x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} G(u, v, x)\, dx, \end{cases}$$

où, de même que dans tout ce qui suivra, les intégrations sont effectuées le long de l'arc $x_0 x$ de L. Nous avons posé

$$Ap = C_0, \qquad H(u, v, x) = \sum_1^{p-1} (D'_k v^{p-k} u^k + k A D_k v^{p-k+1} u^{k-1}) : (p-k),$$

$$K(u, v, x) = -C_p v u^{p-1} - C_{p+1} u^p + \sum_1^{p-1} (AD_k - C_k) v^{p+1-k} u^{k-1},$$

$$F(u, v, x) = v^p + \sum_1^{p-1} D_k v^{p-k} u^k : (p-k), \quad G(u, v, x) = H(u, v, x) + K(u, v, x).$$

On voit que

$$(5)\qquad H = \frac{\partial F}{\partial x} + A v \frac{\partial F}{\partial u}.$$

Dans (4), nous choisissons pour v la racine qui se réduit à v_0 pour $x = x_0$. On constate aisément que (4) vérifie (3 *bis*), et toute solution de (3 *bis*) peut se mettre sous la forme de (4). Si dans (2) le degré du dénominateur est égal ou supérieur à celui du numérateur augmenté d'une unité, il n'est pas nécessaire d'effectuer la transformation $y = u : v$; il suffit de considérer la relation

$$F_1(x, y) = F_1(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} G_1(x, y)\, dx$$

qui se traiterait comme le système (4) dans lequel on ferait $u = \text{const}$.

3. Nous nous proposons de déterminer deux fonctions u et v qui vérifient (4) et se réduisent respectivement à u_0 et v_0 pour $x = x_0$. A cet effet nous considérons les relations

$$(6)\quad \begin{cases} u_i = u_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} A\, v_{i-1}\, dx \\ F(u_i, v_i, x) = F(u_0, v_0, x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} G(u_{i-1}, v_{i-1}, x)\, dx \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Tout d'abord montrons que, *quelles que soient les racines choisies au delà des points où une ou plusieurs des quantités* $\dfrac{\partial F(u_i, v_i, x)}{\partial v_i}$ *s'annuleraient, les modules de* u_i *et* v_i*, pour toute valeur de* i*, sont bornés le long d'une ligne* L′*, de longueur finie* δ'*, constituée par* L *augmentée de petits arcs décrits dans les domaines* δ.

Soit M la borne supérieure de $|u_0|$, $|v_0|$, 1 et des modules des coefficients de F et G le long de L et dans les domaines δ. Nous disons que

$$(6')\qquad |u_i| < M e^{P\delta'}, \qquad |v_i| < 2p M^2 e^{P\delta'},$$

où

$$P = \sum_{0}^{p} (2pM^2)^{p-k} M^k.$$

Supposons les (6′) vérifiées pour $i - 1$. Il vient

$$|u_i| < M + M.2pM^2 \int_0^{\delta'} e^{P\delta'} d\delta' = M + M.2pM^2(e^{P\delta'} - 1) : P < M e^{P\delta'},$$

$$|F(u_0, v_0, x_0)| < (p+1) M^{p+1},$$

$$\left| \int_0^{x} G(u_{i-1}, v_{i-1}, x)\, dx \right| < MP \int_0^{\delta'} e^{pPS'} d\delta' < M(e^{pP\delta'} - 1),$$

$$|F(u_i, v_i, x)| < (p+1) M^{p+1} + M(e^{pP\delta'} - 1) < (p+1) M^{p+1} e^{pP\delta'}.$$

On déduit aisément de cette dernière inégalité

$$|v_i| < |u_i| \sum_{1}^{p-1} M^{\frac{1}{k}} + (p+1)^{\frac{1}{p}} M^{1+\frac{1}{p}} e^{P\delta'} < M^2 e^{P\delta'} \left[(p-1) + (p+1)^{\frac{1}{p}} \right] < 2pM^2 e^{P\delta'}.$$

Les inégalités (6′) sont vérifiées pour $i=0$: elles sont donc générales.

Dans l'hypothèse où $\frac{\partial F(u_0, v_0, x_0)}{\partial v_0} \neq 0$, montrons que, quel que soit i, u_i et v_i sont bien déterminées le long d'un arc $x_0 x$ de longueur non nulle.

Posons

$$F(u_0, v_0, x_0) = F_0, \qquad u_i = u_0 + \lambda_i, \qquad v_i = v_0 + \mu_i.$$

Pour $i=1$, il vient

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_1 = \int_{x_0}^{x} \Lambda(v_0 + \mu_0)\,dx, \\ &\mu_1 \frac{\partial F_0}{\partial v_0} = P(x - x_0, \lambda_1, \mu_1) + \int_{x_0}^{x} G(u_0 + \lambda_0, v_0 + \mu_0, x)\,dx, \end{aligned} \right.$$

où P est un polynome dont le terme général est $(x-x_0)^\alpha \lambda_1^\beta \mu_1^\gamma$ avec $\alpha = 0$ ou 1, $\gamma = 1$ si $\alpha + \beta \geqq 1$, $\gamma \geqq 2$ si $\alpha = \beta = 0$.

Calculons μ_1 par les approximations successives

$$(8) \qquad \mu_{1.k} \frac{\partial F_0}{\partial v_0} = P(x - x_0, \lambda_1, \mu_{1.k-1}) + \int_{x_0}^{x} G(u_0 + \lambda_0, v_0 + \mu_0, x)\,dx$$

avec $P=0$ pour $k=1$. Soit s la longueur de l'arc $x_0 x$. Posons

$$\lambda = |\Lambda| \left(|v_0| + l : \left| \frac{\partial F_0}{\partial v_0} \right| \right) s, \qquad \mu = l : \left| \frac{\partial F_0}{\partial v_0} \right|,$$

l étant une quantité définie par

$$(9) \qquad P(s, \lambda, \mu) + |G| s \leqq l,$$

où $P(s, \lambda, \mu)$ résulte de P en remplaçant $x - x_0$ par s, les coefficients par le maximum de leurs modules le long de L ou dans δ; λ_1 par λ; μ_1 par μ; $|G|$ se déduit de même de G, λ_0 et μ_0 étant également remplacés par λ et μ. On voit que

$$|\mu_{1.k}| \leqq l : \left| \frac{\partial F_0}{\partial v_0} \right|.$$

On déduit de (8)

$$\frac{\partial F_0}{\partial v_0} [\mu_{1,k} - \mu_{1.k-1}] = [\mu_{1,k-1} - \mu_{1.k-2}] P'_{1,k-1},$$

où $P'_{1,k-1}$ est un polynome en $x - x_0$, $\mu_{1,k-1}$, $\mu_{1,k-2}$, λ_1 qui se déduit aisément de P. Soit q un nombre donné inférieur à 1. Imposons à s la condition de vérifier

$$(10) \qquad P'_{1,k-1}(s, \lambda, \mu) < q \left| \frac{\partial F_0}{\partial v_0} \right|,$$

où $P'_{1,k-1}(s, \lambda, \mu)$ s'établit comme $P(s, \lambda, \mu)$, $\mu_{1,k-1}$, $\mu_{1,k-2}$ étant remplacés par μ.

On voit, en vertu de (10), que

$$|\mu_{1,k}-\mu_{1,k-1}|<q\,|\mu_{1,k-1}-\mu_{1,k-2}|.$$

Par conséquent, lorsque k tend vers l'infini, $\mu_{1,k}$ converge uniformément vers une limite μ_1 qui vérifie (7) : il résulte de (9) et (10) que ce résultat est valable pour des valeurs de s et l respectivement supérieures à des nombres non nuls. On remarque qu'en remplaçant μ_1 et λ_1 par μ_i et λ_i; λ_0 et μ_0 par λ_{i-1} et μ_{i-1} dans (7), les inégalités (9) et (10) subsistent : par conséquent μ_i pourra être calculé dans les mêmes conditions que μ_1. Il en résulte que les fonctions u_i, v_i définies par (6), sont bien déterminées le long d'un arc x_0x de longueur non nulle.

C. Q. F. D.

Théorème. — *Il existe un arc x_0x de* L, *de longueur non nulle, en tout point duquel u_i et v_i convergent uniformément vers des limites déterminées lorsque i tend vers l'infini.*

En effet, on a

$$F(u_i, v_i, x)-F(u_{i-1}, v_{i-1}, x)=(u_i-u_{i-1})P_{Fi}+(v_i-v_{i-1})Q_{Fi},$$

où P_{Fi} et Q_{Fi} sont des polynomes en u_{i-1}, u_i v_{i-1}, v_i. On obtient des expressions analogues pour G. Comme $Q_{Fi}=\dfrac{\partial F_0}{\partial v_0}$ pour $x=x_0$, on aura, en vertu de ce qui précède, si l'arc x_0x est assez petit,

$$|Q_{Fi}|>\left|\frac{\partial F_0}{\partial v_0}\right|(1-m_Q)\qquad(m_Q<1).$$

Posons $\left|\dfrac{\partial F_0}{\partial v_0}\right|(1-m_Q)=m$. Comme $|u_1|, \ldots, |v_i|$ sont bornés, on voit que

$$|u_i-u_{i-1}|<\frac{M}{m}\int_0^s[\,|v_{i-1}-v_{i-2}|\,]\,ds,$$
$$|v_i-v_{i-1}|<\frac{M}{m}\int_0^s[\,|u_{i-1}-u_{i-2}|+|v_{i-1}-v_{i-2}|\,]\,ds,$$

où M est un nombre positif déterminé. On a

$$(11)\qquad |u_i-u_{i-1}|,\qquad |v_i-v_{i-1}|<\left(\frac{2M}{m}\right)^i s^i : i!.$$

En effet, un calcul simple montre que l'inégalité (11) est vérifiée si elle l'est pour $i-1$. Or elle l'est pour $i=1$. Elle est donc générale et les séries

$$u_0+(u_1-u_0)+\ldots+(u_l-u_{l-1})+\ldots,$$
$$v_0+(v_1-v_0)+\ldots+(v_l-v_{l-1})+\ldots$$

sont uniformément convergentes. Par conséquent, lorsque i tend vers l'infini, u_i et v_i convergent uniformément vers des limites u et v qui vérifient le système (4) en tout point d'un arc x_0x de longueur σ_0 non nulle.

4. Soit x_1 l'extrêmité de l'arc σ_0 : en faisant dans (6) $i=2$, nous définirons, comme au n° **3**, des fonctions u et v le long d'un arc $x_1 x$ de longueur σ_1 non nulle. Nous obtenons ainsi des fonctions u et v qui vérifient (4) le long d'un arc $x_0 x$ de longueur $\sigma_0+\sigma_1$. En opérant de proche en proche, nous pouvons donc définir des fonctions u et v qui vérifient (4) tout le long de L ou tout le long d'un arc $x_0\alpha$ (α exclu) de L, α étant le premier point de L où $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ s'annule. D'ailleurs, au point α, les fonctions u et v sont bien déterminées. Soit, en effet, x un point de l'arc $x_0\alpha$. On a

$$(12)\qquad \begin{cases} u_\alpha = u + \displaystyle\int_x^\alpha \Lambda v\, dx, \\ F(u_\alpha, v_\alpha, \alpha) = F(u, v, x) + \displaystyle\int_\alpha^x G(u, v, x)\, dx. \end{cases}$$

Nous savons que $G(u, v, x)$ et Λv sont bornées en module le long de L; par conséquent, les différences $u_\alpha - u$ et $F(u_\alpha, v_\alpha, \alpha) - F(u, v, x)$ deviennent arbitrairement petites en même temps que $x-\alpha$: il en est donc de même de $u_\alpha - u$ et $v_\alpha - v$. Comme u et v sont bien déterminées, on voit qu'il en est de même pour u_α et v_α.

5. Nous étudierons maintenant les développements de u et v dans le domaine de α. Soit x un point de l'arc $x_0\alpha$. Pour calculer u et v nous considérerons encore les relations

$$(13)\qquad \begin{cases} u_i = u_\alpha + \displaystyle\int_\alpha^x \Lambda v_{i-1}\, dx, \\ F(u_i, v_i, x) = F(u_\alpha, v_\alpha, \alpha) + \displaystyle\int_\alpha^x G(u_{i-1}, v_{i-1}, x) \end{cases}$$

avec $u_0 = u_\alpha$, $v_0 = v_\alpha$. Posons

$$u_i = u_\alpha + \lambda_i, \qquad v_i = v_\alpha + \mu_i, \qquad F(u_\alpha, v_\alpha, \alpha) = F_\alpha;$$

pour plus de généralité, nous supposerons que

$$(14)\qquad \frac{\partial^j F_\alpha}{\partial v_\alpha^j} \begin{cases} = 0 & \text{pour } j = 1, 2, \ldots, r-1, \\ \neq 0 & \text{pour } j = r, \end{cases}$$

sans que (14) détermine la position de α. Nous avons $u_\alpha \neq 0$, car nous devons rejeter l'hypothèse $u_\alpha = 0$. Elle entraînerait, en effet, en vertu de (14), $v_\alpha = 0$. Il résulte du système (4) que u et v deviennent arbitrairement petits en même temps que $x-\alpha$. On a donc

$$|v| < N s^b \qquad (b > 0),$$

où N est un nombre positif. Si M est le maximum du module des coefficients de F, G le long de L, on voit que $|u| < MNs^{b+1}$.

Supposons $s < 1$ et substituons à u et v respectivement MNs^{b+1} et Ns^b dans

$$F(u, v, x) = \int_\alpha^x G(u, v, x)\,dx.$$

On trouve

$$|v| < 3pM^2 s^{b+\frac{1}{p}}, \qquad \text{ce qui entraîne} \quad |u| < 3pM^3 s^{b+1+\frac{1}{p}}.$$

En répétant les mêmes opérations, on vérifie facilement que

$$|v| < (3p)^n M^{2n} s^{b+\frac{n}{p}}, \qquad |u| < (3p)^n M^{2n+1} s^{b+1+\frac{n}{p}}.$$

Par conséquent, si l'on choisit s de façon que $3pM^2 s^{\frac{1}{p}} < q < 1$, on ne peut avoir, lorsque n tend vers l'infini, que $v = 0$, $u = 0$ en tout point de l'arc αx de longueur s. Ceci conduit, de proche en proche, à la conclusion absurbe $u_0 = v_0 = 0$. On n'aura donc jamais en un point critique mobile $u_\alpha = 0$.

Pour $i = 1$, on a

$$(15) \qquad \begin{aligned} &F(u_1, v_1, x) - F(u_\alpha, v_\alpha, \alpha) \\ &\quad = (x-\alpha)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_\alpha + \lambda_1\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_\alpha + \frac{\mu_1^r}{r!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v^r}\right)_\alpha + P(x-\alpha, \lambda_1, \mu_1), \end{aligned}$$

P étant un polynome dont le terme général est $(x-\alpha)^{\alpha'}\lambda_1^\beta \mu_1^\gamma$ avec $\alpha' = 0$ ou 1; si $\alpha' = \beta = 0$, $\gamma \geqq r+1$, sinon $\alpha' + \beta + \gamma \geqq 2$. Si $\alpha' = 1$, le facteur $x - \alpha$ est multiplié, en vertu de (3), par une fonction de x qui tend vers zéro avec $x - \alpha$. On déduit de (5) et de

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_1 = \int_\alpha^x \Lambda(v_\alpha + \mu_0)\,dx, \\ &\int_\alpha^x H(u_\alpha + \alpha_0, v_\alpha + \mu_0, x)\,dx - \int_\alpha^x \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_\alpha + \Lambda(v_\alpha + \mu_0)\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_\alpha\right] dx \\ &\quad = \int_\alpha^x Q(\lambda_0, \mu_0)\,dx, \end{aligned} \right.$$

Q étant un polynome dont le terme général est $f_j^{\alpha'}\lambda_0^\beta \mu_0^\gamma$ avec $\alpha = 0$ ou 1, et $\alpha' + \beta + \gamma \geqq 1$, le facteur f_j tendant vers zéro avec $x - \alpha$.

Dans ces conditions, on déduit de (15)

$$(17) \qquad \frac{\mu_1^r}{r!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v^r}\right)_\alpha = -P(x-\alpha, \lambda_1, \mu_1) + \int_\alpha^x K(u_\alpha, v_\alpha, x)\,dx + \int_\alpha^x R(x, \lambda_0, \mu_0)\,dx,$$

où R est un polynome constitué comme Q. Le terme $K(u_\alpha, v_\alpha, x)$ tend vers $K(u_\alpha, v_\alpha, \alpha)$ lorsque $x - \alpha$ tend vers zéro. C'est seulement aux points critiques fixes que, simultanément avec (14), $K(u_\alpha, v_\alpha, \alpha) = 0$. Posons

$$\left(\frac{\partial^r F}{\partial v^2}\right)_\alpha : r! = P_\alpha.$$

Calculons encore μ_1 par les approximations successives

$$(18) \qquad P_\alpha \mu_{1,k}^r = -P(x-\alpha, \lambda_1, \mu_{1,k-1}) + \int_\alpha^x K(u_\alpha, v_\alpha, x)\,dx + \int_\alpha^x R(x, \lambda_0, \mu_0)\,dx.$$

Soient s la longueur de $x\alpha$, $|A|$ et $|K|$ les maximés de A et $K(u_\alpha, v_\alpha, \lambda)$ le long de L et dans les domaines δ. Posons

$$\lambda = |A|(|v_\alpha| + \mu)s, \qquad \mu = 2|K|^{\frac{1}{r}} s^{\frac{1}{r}} : |P_\alpha|^{\frac{1}{r}}.$$

Imposons à s la condition de vérifier

$$(19) \qquad \frac{P(s, \lambda, \mu) + \int_0^s R(x, \lambda, \mu)\,ds}{\left|\int_\alpha^x K(u_\alpha, v_\alpha, x)\,dx\right|} < m < 1,$$

les polynomes P et R de (19) se déduisant de P et R de (18) comme suit : les coefficients sont remplacés par le maximum de leur module le long de L et dans δ, les termes analogues à f_j par leur module et λ_1, λ_0 par λ; $\mu_{1,k-1}$, μ_0 par μ. En choisissant la même détermination, on a ainsi, quel que soit k,

$$(20) \qquad \mu_{1,k} = \left(\frac{\int_\alpha^x K(u_\alpha, v_\alpha, x)\,dx}{P_\alpha}\right)^{\frac{1}{r}} [1 + \zeta_{1,k}] \qquad (|\zeta_{1,k}| < m).$$

On déduit de (18)

$$\mu_{1,k} - \mu_{1,k-1} = \frac{P'_{1,k-1}(\mu_{1,k-1} - \mu_{1,k-2})}{P_\alpha \sum_{a+b=r-1} \mu_{1,k}^a \mu_{1,k-1}^b},$$

où $P'_{1,k-1}$ est un polynome en $\mu_{1,k-1}$, $\mu_{1,k-2}$ qui se déduit aisément de P.
Si s vérifie encore l'inégalité

$$(21) \qquad \frac{P'(s, \lambda, \mu)}{|P_\alpha|\, r \left|\int_\alpha^x K(u_\alpha, v_\alpha, x)\,dx\right|^{\frac{r-1}{r}} (1-m)^{\frac{r-1}{r}} : |P_\alpha|^{\frac{r-1}{r}}} < q < 1,$$

P' se déduisant de $P'_{1,k-1}$ comme P dans (19) de P dans (18), on a

$$|\mu_{1,k} - \mu_{1,k-1}| < q\,|\mu_{1,k-1} - \mu_{1,k-2}|,$$

par conséquent lorsque k tend vers l'infini, $\mu_{1,k}$ converge uniformément vers une limite μ_1 qui est solution de (17). On vérifie aisément que les premiers membres de (19) et (21) tendent vers zéro avec s. Le résultat que nous venons d'obtenir est donc valable pour une valeur s supérieure à un nombre non nul. En remplaçant, dans (18) et (16), λ_1, μ_1, λ_0, μ_0 respectivement par λ_i, μ_i,

λ_{i-1}, μ_{i-1}, nous obtenons les mêmes inégalités que (19) et (21), et par conséquent les mêmes conclusions que pour μ_1.

En tout point d'un arc s de longueur σ non nulle, nous aurons donc

$$(22)\qquad \mu_i = \left[\frac{\int_\alpha^x K(u_\alpha, v_\alpha, x)\,dx}{P_\alpha}\right]^{\frac{1}{r}} [1+\zeta_i] \qquad (|\zeta_i| < m).$$

La détermination choisie est la même quel que soit i.

Théorème. — *Lorsque i tend vers l'infini, λ_i et μ_i convergent uniformément vers des limites déterminées en tout point d'un arc αx de longueur nulle.*

On déduit aisément des relations (16) et (17), dans lesquelles on remplace les indices 0 et 1 par i, $i-1$, puis par $i-1$, $i-2$,

$$(23)\qquad \lambda_i - \lambda_{i-1} = \int_\alpha^x A(\mu_{i-1} - \mu_{i-2})\,dx,$$

$$(24)\qquad \begin{aligned} P_\alpha(\mu_i - \mu_{i-1}) &\sum_{a+b=r-1} \mu_i^a \mu_{i-1}^b \\ &= -P(x-\alpha, \lambda_i, \mu_i) + P(x-\alpha, \lambda_{i-1}, \mu_{i-1}) \\ &\quad + \int_\alpha^x [(\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2})P'_{i-1} + (\mu_{i-1} - \mu_{i-2})Q'_{i-1}]\,dx, \end{aligned}$$

où P'_{i-1}, Q'_{i-1} sont des polynomes λ_{i-1}, λ_{i-2}, μ_{i-1}, μ_{i-2}.

En vertu de (22) et des propriétés des termes de P, on a, si s est assez petit,

$$(25)\qquad \begin{aligned} P_\alpha(\mu_i - \mu_{i-1})\, r &\left[\frac{\int_\alpha^x K(u_\alpha, v_\alpha, x)\,dx}{P_\alpha}\right]^{\frac{r-1}{r}} (1+\rho_i) \\ &= \int_\alpha^x [(\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2})P'_{i-1} + (\mu_{i-1} - \mu_{i-2})Q'_{i-1}]\,dx \end{aligned}$$

ou

$$(26)\qquad |\rho_i| < m' < 1.$$

Le long de l'arc σ tous les termes qui figurent dans le second membre de (25) sont bornés en module et la condition $|x-\alpha| < s\Omega$, où Ω n'est pas nul, est satisfaite. On déduit ainsi de (23) et (25)

$$|\lambda_i - \lambda_{i-1}|, \qquad |\mu_i - \mu_{i-1}| < \frac{M}{s^{\frac{r-1}{r}}} \int_0^s [|\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2}| + |\mu_{i-1} - \mu_{i-2}|]\,ds,$$

où M est un nombre positif déterminé. Je dis que

$$(27)\qquad |\lambda_i - \lambda_{i-1}|, \qquad |\mu_i - \mu_{i-1}| < (2M)^i s^{\frac{i-1}{r}} : \left(1+\frac{1}{r}\right)\cdots\left(1+\frac{i-2}{r}\right).$$

Un calcul immédiat établit que l'inégalité (27) est vérifiée pour i si elle l'est pour $i-1$. Or elle l'est pour $i=2$, car il suffit que $M \geqq |\lambda_i| + |\mu_1|$. Elle est donc générale. Par conséquent, les séries

$$u_\alpha + (u_1 - u_\alpha) + \ldots + (u_i - u_{i-1}) + \ldots,$$
$$v_\alpha + (v_1 - v_\alpha) + \ldots + (v_i - v_{i-1}) + \ldots$$

sont uniformément convergentes, et lorsque i tend vers l'infini, u_i et v_i convergent uniformément en tout point d'un arc αx de longueur σ_1 non nulle vers des limites u et v définies par

$$(28)\qquad \left\{ u = u_\alpha + \int_\alpha^x A v\, dx, \qquad v = v_\alpha + \left[\frac{\int_\alpha^x K(u_\alpha, v_\alpha, x)\, dx}{P_\alpha} \right]^{\frac{1}{r}} (1+\zeta) \qquad (|\zeta| < m), \right.$$

qui vérifient le système

$$(29)\qquad u = u_\alpha + \int_\alpha^x A v\, dx,$$

$$(30)\qquad F(u, v, x) = F_\alpha + \int_\alpha^x G(u, v, x)\, dx.$$

6. Montrons que tout système de fonctions U, V qui vérifie (25), (29) en remplissant au point α les conditions (14), est représenté par (28), où l'on choisit une des r déterminations. Tout d'abord on vérifie aisément que $|U|$ et $|V|$ sont bornés comme $|u|$ et $|v|$. On tire alors de (29), (30)

$$U = u_\alpha + M_U c, \qquad V = v_\alpha + M_V d,$$

où $|M_U|$ et $|M_V|$ sont bornés et où c et d tendent vers zéro en même temps que $x-\alpha$. Si l'arc αx est assez petit, on déduit de (30), en refaisant les calculs que nous avons établis plus haut,

$$V = v_\alpha + \left[\frac{\int_\alpha^x K(u_\alpha, v_\alpha, x)\, dx}{P_\alpha} \right]^{\frac{1}{r}} [1+\zeta'] \qquad (|\zeta'| < m < 1).$$

Choisissons, pour V, la même détermination que dans (28) et formons les différences $u_i - U$, $v_i - V$. Si s est assez petit, on trouve, en répétant la démonstration du n° **5**,

$$|u_i - U|, \qquad |v_i - V| < (2M)^i s^{(i-1):r} : \left(1 + \frac{1}{r}\right) \cdots \left(1 + \frac{i-1}{r}\right),$$

d'où

$$\lim |u_i - U| = |u - U| = 0, \qquad \lim |v_i - V| = |v - V| = 0,$$

ce qui entraîne $u = U$, $v = V$. On démontrerait d'ailleurs, d'une manière analogue, qu'il n'existe pas d'autres fonctions que u et v qui vérifient (4) et se réduisent respectivement à u_0 et v_0 pour $x = x_0$.

En choisissant convenablement les déterminations, les formules (28) représentent donc, en tout point de l'arc αx, les fonctions u et v définies nos **3** et **4**. Mais, en vertu de leur forme, ces mêmes formules définissent u et v en tout point d'un arc issu de α, de longeur σ_1 et défini comme suit : arc $\alpha\gamma$ de L (γ étant situé entre x_0 et α), arc de courbe $\gamma\gamma_1$ tout entière dans le domaine δ (γ_1 étant au delà de α), puis arc $\gamma_1 x$ de L. Si σ_γ, $\sigma_{\gamma\gamma_1}$, $\sigma_{\gamma_1} x$ sont les longueurs de ces différents arcs, leur somme doit être inférieure ou égale à σ_1. Comme les termes qui figurent dans (28) sont continus et que les points critiques fixes sont exclus de L, les formules (28) sont valables, en tout point critique α, le long d'un arc $\alpha\gamma\gamma_1 x$ de longueur non nulle. En prenant, pour la longueur du chemin $\gamma\gamma_1$, une borne supérieure suffisamment petite, la nouvelle ligne L′ aura, dans les hypothèses les plus défavorables, une longueur δ' telle que $\delta' < l\delta$, où l est un nombre positif. Si, dans les formules (19) et (21), nous substituons dans les numérateurs à $|u_\alpha|$ et $|v_\alpha|$ les quantités $Me^{pl\delta}$, $2pM^2e^{pl\delta}$ [*voir* (6′)], les formules (28) seront encore valables le long d'un arc de longueur non nulle. Par conséquent, en prenant les points γ et γ_1 suffisamment voisins de α et l'arc $\gamma\gamma_1$ suffisamment petit, nous ne rencontrerons, sur la ligne L, qu'un nombre fini de points critiques mobiles. Le long de L′, nous pourrons définir les fonctions u et v par les relations du n° **3**, puisque le long de cette ligne $\frac{\partial F}{\partial v}$ ne s'annule plus et reste, par conséquent, supérieur à un nombre nul. Ce dernier résultat servira de base à nos démonstrations des Chapitres II et III.

CHAPITRE II.

7. Nous avons défini, au Chapitre précédent, en opérant par prolongement le long de L′, des fonctions u et v qui vérifient les relations (4). Nous démontrerons maintenant que les relations (6) définissent les mêmes fonctions lorsque *x est un point quelconque de* L′, les intégrations étant effectuées le long de L′. Pour éviter toute confusion, nous représenterons par U et V les fonctions définies par (4) lorsque x est un point quelconque de L′, de sorte que nous étudierons les relations

$$(31)\qquad \begin{cases} U_k = u_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} AV_{k-1}\,dx \\ F(U_k, V_k, x) = F(u_0, v_0, x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} G(u_{k-1}, V_{k-1}, x)\,dx \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Partageons L′ en arcs partiels par les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$, x_n étant l'extrémité de L′. Nous représenterons par s_i la longueur de l'arc $x_{i-1}x_i$ et par s' la plus grande de ces longueurs. Lorsque n tend vers l'infini, s' tend vers zéro. Nous désignerons par z_i un point quelconque de l'arc $x_{i-1}x_i$ et par $u(z_i)$, $v(z_i)$, $U(z_i)$, $V(z_i)$ les valeurs de u, ..., V au point z_i. On a

$$U_{k-1}(z_i) = U_{k-1}(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{z_i} AV_{k-2}\,dx,$$

$$\begin{aligned} F[U_{k-1}(z_i), V_{k-1}(z_i), z_i] \\ = F[U_{k-1}(x_{i-1}), V_{k-1}(x_{i-1}), x_{i-1}] + \int_{x_{i-1}}^{z_i} G(U_{k-2}, V_{k-2}, x)\,dx. \end{aligned}$$

Soit m_F le minimum de $\left|\frac{\partial F}{\partial v}\right|$ le long de L'. On sait que $m_F > 0$.

Faisons l'hypothèse que

$$(32) \qquad \left|\frac{\partial F[U_k(x), V_k(x), x]}{\partial V_k}\right| > m_F : 2,$$

pour tout point x de l'arc $x_0 x_{i-1}$, *lorsque* $i \leqq k$. Si s_i est assez petit, on a, dans ces conditions,

$$(33) \qquad V_{k-1}(z_i) = V_{k-1}(x_{i-1}) + Q_{k-1.i}\,\Delta'_{V,i}.$$

De même, en vertu des propriétés de v,

$$(34) \qquad v(z_i) = v(x_{i-1}) + Q_i\,\Delta'_{v,i}.$$

On a enfin

$$(35) \qquad U_{k-1}(z_i) = U_{k-1}(x_{i-1}) + P_{k-1.i}\Delta_{U,i},$$

$$(36) \qquad u(z_i) = u(x_{i-1}) + P_i\Delta_{u,i}.$$

où $Q_{k-1,i}$, ..., P_i sont bornés en module et $|\Delta'_{V,i}|$, ..., $|\Delta_{u,i}| \leqq s_i$, on a également

$$(37) \qquad U_k(z_i) - u(z_i) = U_k(x_{i-1}) - u(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{z_i} A(V_{k-1} - v)\,dx.$$

Posons

$$F[U_k(z_i), V_k(z_i), z_i] - F[u(z_i), v(z_i), z_i] \equiv F_{k.i},$$

il vient

$$(38) \qquad \begin{aligned} F_{k.i} &\equiv [U_k(z_i) - u(z_i)]M^k_{z_i} + [V_k(z_i) - v(z_i)]N^k_{z_i} \\ &= [U_k(x_{i-1}) - u(x_{i-1})]M^k_{x_{i-1}} + [V_k(x_{i-1}) - v(x_{i-1})]N^k_{x_{i-1}} \\ &\quad + \int_{x_{i-1}}^{z_i} [(U_{k-1} - u)R_{k-1} + (V_{k-1} - v)S_{k-1}]\,dx, \end{aligned}$$

où $M^k_{z_i}$, $N^k_{z_i}$ sont des polynomes en $u(z_i)$, ..., $V_k(z_i)$; $M^k_{x_{i-1}}$, $N^k_{x_{i-1}}$, des polynomes identiques aux précédents lorsqu'on y remplace x_{i-1} par z_i; R_{k-1}, S_{k-1} des polynomes u, v, U_{k-1}, V_{k-1}. Il résulte de (33), (34), (35), (36), où l'on remplace $k-1$ par k,

$$M^k_{z_i} = M^k_{x_{i-1}} + m_{k.i}\Delta_{k.i}, \qquad N^k_{z_i} = N^k_{x_{i-1}} + n_{k.i}\,\Delta'_{k,i}$$

avec $|\Delta_{k,i}|$, $|\Delta'_{k,i}| \leqq s_i$ et $|m_{k,i}|$, $|n_{k,i}|$ bornés lorsque $|P_i|$, $|Q_i|$, $|Q_{k-1,i}|$, $|P_{k-1,i}|$

le sont. En tenant compte de (33), (34), (37), on voit que

$$(39)\quad \begin{aligned} V_k(z_i) - v(z_i) = {} & V_k(x_{i-1}) - v(x_{i-1}) + P_{k,i}\rho_i[U_k(x_{i-1}) - u(x_{i-1})] : N^k_{x_{i-1}} \\ & + Q_{k,i}\rho'_i[V_k(x_{i-1}) - v(x_{i-1})] : N^k_{x_{i-1}} + R_{k,i}\sigma_{k,i} : N^k_{x_{i-1}} \\ & + \frac{1}{N^k_{x_{i-1}}}\int_{x_{i-1}}^{z_i} [(U_{k-1} - u)R_{k-1} + (V_{k-1} - v)S'_{k-1}]\,dx, \end{aligned}$$

où $|P_{k,i}|$, $Q_{k,i}|$, $|R_{k,i}|$ sont bornés dans les conditions que nous allons définir et $|\rho_i|$, $|\rho'_i| \leqq s_i$; $|\sigma_{k,i}| \leqq s' s_i$. On a

$$N^k_{x_{i-1}} = \frac{\partial F(u, v, x_{i-1})}{\partial v}$$

pour

$$v(x_{i-1}) = V_k(x_{i-1}) \qquad \text{et} \qquad u(x_{i-1}) = U_k(x_{i-1}).$$

Dans l'hypothèse que

$$(40)\qquad |N^k_{x_{i-1}}| > m_F : 2,$$

en tout point de l'arc $x_0 x_{i-1}$ *lorsque* $i \leqq k$, et en tenant compte pour le calcul des intégrales des relations (33), (36), on peut substituer à (37) et (38) les inégalités

$$\begin{aligned} |U_k(z_i) - u(z_i)| < {} & |U_k(x_{i-1}) - u(x_{i-1})| + M'|V_{k-1}(x_{i-1}) - v(x_{i-1})|s_i + M's.s_i, \\ |V_k(z_i) - v(z_i)| < {} & |V_k(x_{i-1}) - v(x_{i-1})| \\ & + \frac{2M'}{m_F}s_i[|U_k\ \ (x_{i-1}) - u(x_{i-1})| + |V_k\ \ (x_{i-1}) - v(x_{i-1})|] \\ & + \frac{2M'}{m_F}s_i[|U_{k-1}(x_{i-1}) - u(x_{i-1})| + |V_{k-1}(x_{i-1}) - v(x_{i-1})|] \\ & + \frac{2M'}{m_F}s'.s_i. \end{aligned}$$

M' est obtenu en remplaçant les termes du second membre de (39) par le maximum de leur module le long de L' en particulier $u, \ldots, V_k, \ldots$, par les bornes supérieures définies par (6′) où l'on remplace $P\delta'$ par $Pl\delta$, et $\frac{\partial F}{\partial V}$ lorsqu'il apparaît en dénominateur, par $m_F : 2$. Par conséquent M' est borné lorsque l'inégalité (32) est satisfaite. Posons

$$M = 2M' : m'_F,$$

où $m'_F < 1$ si $m_F > 1$, sinon $m'_F = m_F$. On trouve que

$$(41)\qquad |U_k(z_i) - u(z_i)| < s'[e^{4M(s_1+\ldots+s_{i-1})}(1 + \ Ms_i) - 1] < s'[e^{4M(s_1+\ldots+s_i)} - 1],$$

$$(42)\qquad |V_k(z_i) - v(z_i)| < s'[e^{4M(s_1+\ldots+s_{i-1})}(1 + 4Ms_i) - 1] < s'[e^{4M(s_1+\ldots+s_i)} - 1],$$

on établit aisément que les relations (41) et (42) sont vérifiées si elles le sont pour les indices $k-1$ et $i-1$. Or, on tire de (39), pour $i=1$,

$$\begin{aligned}
&|U_k\ \ (x_1)-u(x_1)|<Ms's_1<s'[e^{4Ms_1}-1],\\
&|V_k\ \ (x_1)-v(x_1)|<Ms's_1<s'[e^{4Ms_1}-1],\\
&|U_{k-1}(x_1)-u(x_1)|<s'[e^{4Ms_1}-1],\\
&|V_{k-1}(x_1)-v(x_1)|<s'[e^{4Ms_1}-1].
\end{aligned}$$

Car, quel que soit k,

$$U_k(x_0)=u(x_0)=u_0, \qquad V_k(x_0)=v(x_0)=v_0.$$

Par conséquent les relations (41) et (42) sont vérifiées *sous la condition* $i\leqq k$.

8. Démontrons que les relations (41) et (42) sont vraies pour toute valeur de k si s' est suffisamment petit.

En effet, elles le sont au point x_1, car

$$|N^k_{x_0}|=\left|\frac{\partial F(u_0, v_0, x_0)}{\partial v_0}\right|=\left|\frac{\partial F[U_k(x_0), V_k(x_0), x_0]}{\partial V_k}\right|\geqq m_F.$$

Il découle aisément des relations (31) que U_k et V_k varient d'une manière continue avec x. Il en est donc de même de $\dfrac{\partial F(U_k, V_k, x)}{\partial V_k}$ et de N^k_x. Leurs modules, qui partent de valeurs supérieures ou égales à m_F, pourraient donc décroître et prendre en certains points les valeurs $m_F:2$. Soit α' le premier point où, par exemple, est réalisée la condition

$$\left|\frac{\partial F[U_k(\alpha'), V_k(\alpha'), \alpha']}{\partial V_k}\right|=m_F:2, \qquad |N^k_{\alpha'}|\geqq m_F:2.$$

Dans cette hypothèse, nous ferons coïncider l'extrémité d'un intervalle, soit x_i avec α'. On a $i\leqq k$. Soit ε un nombre arbitrairement petit. Supposons s' choisi assez petit pour que

$$(43)\qquad s'[e^{4Ml/\delta}-1]<\varepsilon$$

(*voir* au n° **6** la définition de l). On déduit de (41), (42)

$$U_k(\alpha')=u(\alpha')+\eta_{\alpha'}, \qquad V_k(\alpha')=v(\alpha')+\zeta_{\alpha'} \qquad (|\eta_{\alpha'}|, |\zeta_{\alpha'}|<\varepsilon),$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial F[U_k(\alpha'), V_k(\alpha'), \alpha']}{\partial V_k}=\frac{\partial F(u, v, \alpha')}{\partial v}+P(\eta_{\alpha'}, \zeta_{\alpha'}),$$

où P est un polynome en $\eta_{\alpha'}$, $\zeta_{\alpha'}$, sans terme indépendant. On en conclut

$$\left|\frac{\partial F(u, v, \alpha')}{\partial v}\right|<\left|\frac{\partial F(U_k, V_k, \alpha')}{\partial V_k}\right|+\varepsilon M_{\alpha'}$$

avec $M_{\alpha'}$ borné. Choisissons ε assez petit pour que

$$\varepsilon M_{x'} + \frac{m_F}{2} = m_F \frac{2}{3};$$

on aurait ainsi

$$\left|\frac{\partial F(u, v, x')}{\partial v}\right| < m_F \frac{2}{3},$$

ce qui est absurde, puisque $\left|\dfrac{\partial F}{\partial v}\right| \geqq m_F$.

Nous serions arrivé à la même conclusion en envisageant l'hypothèse

$$\left|\frac{\partial F(U_k, V, x')}{\partial V_k}\right| \geqq m_F : 2, \qquad |N_{x'}^k| = m_F : 2.$$

Si s' remplit la condition (43) les relations (41) et (42) sont donc vérifiées quel que soit k. C. Q. F. D.

9. Théorème. — *Les fonctions* U_k *et* V_k *convergent uniformément vers* u *et* v *en tout point de* L' *lorsque* k *tend vers l'infini.*

Nous pouvons, en effet, toujours faire l'hypothèse d'une division de L' en arcs partiels tendant vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Il en résulte que, quelque petit que soit ε, la condition (43) est réalisée lorsque k est suffisamment grand. Par conséquent, lorsque k tend vers l'infini, on voit, en vertu de (41) et (42), que U_k et V_k convergent uniformément vers u et v en tout point de L'. C. Q. F. D.

10. La démonstration que nous venons d'établir montre que le théorème est vrai malgré la présence possible de singularités pour une ou plusieurs des quantités $V_1, \ldots, V_{k-1}$ sur la ligne L', respectivement au delà des points $x_1, \ldots, x_{k-1}$. Si, par exemple, V_i possède de tels points pour lesquels $\dfrac{\partial F(U_i, V_i)}{\partial V_i} = 0$, on choisira arbitrairement, au delà de ces points, la détermination de V_i : l'effet de ces singularités s'amortit à mesure que k augmente pour disparaître à la limite. On voit encore que le rapport $U_k : V_k$ converge uniformément vers $u : v$ en tout point de L'.

Si nous comparons la méthode que nous venons de développer à celle des approximations successives de M. Picard appliquée aux équations (2) ou aux équations (3 *bis*), nous constatons que les approximations de M. Picard, dans le domaine où elles convergent, s'appliquent à des équations plus générales que les nôtres, puisque nous avons dû postuler l'existence de dérivées premières pour les coefficients de F, mais elles ne convergent plus le long de lignes aussi générales que L'. Par contre, nous avons démontré que les relations (6) étaient valables le long d'une ligne quelconque qui est soumise à la seule restriction de ne pas traverser les singularités fixes ou mobiles, mais qui peut les entourer d'une manière arbitraire; il résulte de plus, de la démonstration exposée au n° **5**, que les relations (6) convergent dans le domaine des singularités mobiles. Pour caractériser ces deux propriétés, nous proposons d'appeler les relations (6) des *itérations intégrales convergentes*.

CHAPITRE III.

11. Nous conserverons aux lettres x_i, s_i, s' la même signification qu'au Chapitre précédent. Nous poserons

$$u(x_i) = u_i, \qquad v(x_i) = v_i,$$

où u et v sont les fonctions définies au Chapitre I. Considérons les relations

$$(44) \qquad \begin{cases} \bar{u}_i = \bar{u}_{i-1} + \mathrm{A}_{i-1}\bar{v}_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \\ \mathrm{F}(\bar{u}_i, \bar{v}_i, x_i) = \mathrm{F}(\bar{u}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}, x_{i-1}) + \mathrm{G}(\bar{u}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}, x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

avec $\bar{u}_0 = u_0$, $\bar{v}_0 = v_0$. Pour définir $\bar{v}_i$, nous supposerons x_i remplacé par x dans (44) : $\bar{v}_i$ est alors la racine se réduisant à $\bar{v}_{i-1}$ pour $x = x_{i-1}$ et suivie par continuité lorsque x parcourt l'arc $x_{i-1}x_i$. La racine $\bar{v}_i$ est donc fixée sans ambiguïté si, sur l'arc $x_{i-1}x_i$, $\dfrac{\partial \mathrm{F}(u_i, \bar{v}_i, x)}{\partial v}$ ne s'annule pas. Nous démontrerons que lorsque s tend vers zéro, n tendant vers l'infini, $\bar{u}$ et $\bar{v}$ convergent uniformément vers u et v en tout point de L′.

Nous établirons d'abord que les modules de $\bar{u}_i$ et $\bar{v}_i$ sont bornés. Si M et P sont les quantités qui figurent dans (6′), on a

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} |\bar{u}_i| < \mathrm{M}e^{\mathrm{P}(s_1+\ldots+s_i)}, \qquad |\bar{v}_i| < 2p\mathrm{M}^2 e^{\mathrm{P}(s_1+\ldots+s_i)}, \\ |\mathrm{F}(\bar{u}_i, \bar{v}_i, x_i)| < (p+1)\mathrm{M}^{p+1} e^{p\mathrm{P}(s_1+\ldots+s_i)}. \end{cases}$$

En effet, supposons les inégalités précédentes vérifiées pour $i - 1$. Il vient

$$|\bar{u}_i| < |\bar{u}_{i-1}| + |\mathrm{A}_{i-1}\bar{v}_{i-1}|s_i < \mathrm{M}e^{\mathrm{P}(s_1+\ldots+s_i)}[1 + 2p\mathrm{M}^2 s_i] < \mathrm{M}e^{\mathrm{P}(s_1+\ldots+s_i)}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(\bar{u}_i, \bar{v}_i, x_i) &< |\mathrm{F}(\bar{u}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}, x_{i-1})| + \mathrm{G}(\bar{u}_{i-1}, v_{i-1}, x_{i-1})|s_i \\ &< (p+1)\mathrm{M}^{p+1} e^{p\mathrm{P}(s_1+\ldots+s_{i-1})} + \mathrm{MP}e^{p\mathrm{P}(s_1+\ldots+s_{i-1})}s_i \\ &< (p+1)\mathrm{M}^{p+1} e^{p\mathrm{P}(s_1+\ldots+s_{i-1})}[1 + \mathrm{P}s_i] < (p+1)\mathrm{M}^{p+1} e^{p\mathrm{P}(s_1+\ldots+s_i)}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} |\bar{v}_i| &< |\bar{u}_i| \sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{M}^{\frac{1}{j}} + (p+1)^{\frac{1}{p}} \mathrm{M}^{1+\frac{1}{p}} e^{\mathrm{P}(s_1+\ldots+s_i)} \\ &< \mathrm{M}^2 e^{\mathrm{P}(s_1+\ldots+s_i)}\left[(p-1) + (p+1)^{\frac{1}{p}}\right] < 2p\mathrm{M}^2 e^{\mathrm{P}(s_1+\ldots+s_i)}. \end{aligned}$$

Or les inégalités (A) sont vérifiées pour $i = 1$. Elles sont donc générales.

δ' étant la longueur de L', on aura

$$|\overline{u}_i| < \mathrm{M} e^{p\delta'}, \qquad |\overline{v}_i| < 2p\mathrm{M}^2 e^{p\delta'}.$$

Soit x un point de l'arc $x_{i-1}x_i$. Nous poserons

$$\mathrm{F}(u_i, v_i, x_i) = \mathrm{F}_i, \qquad \mathrm{F}(\overline{u}_i, \overline{v}_i, x_i) = \overline{\mathrm{F}}_i,$$

et de même pour G. On a

$$u = u_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x} \mathrm{A} v\, dx, \tag{45}$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x} \mathrm{G}\, dx. \tag{46}$$

Si s_i est suffisamment petit, on sait (n° 6) que

$$u = u_{i-1} + \mathrm{P}'_{i-1}\Delta_i, \qquad v = v_{i-1} + \mathrm{Q}'_{i-1}\Delta'_i, \tag{47}$$

où $|\mathrm{P}'_{i-1}|$, $|\mathrm{Q}'_{i-1}|$ sont bornés et $|\Delta_i|$, $|\Delta'_i| \leqq s_i$. Dans les relations (45) et (46) faisons $x = x_i$: en vertu de (47), elles s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} u_i = u_{i-1} + \mathrm{A}_{i-1} v_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \mathrm{P}_i\delta_i, \\ \mathrm{F}_i = \mathrm{F}_{i-1} + \mathrm{G}_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \mathrm{Q}_i\delta'_i, \end{array}\right. \tag{48}$$

où $|\mathrm{P}_i|$, $|\mathrm{Q}_i|$ sont bornés et $|\delta_i|$, $|\delta'_i| \leqq s_i^2$. Dans l'hypothèse que $\overline{u}_i$ et $\overline{v}_i$ sont bien déterminées, la comparaison des (44) et (48) donne

$$\left\{\begin{array}{l} u_i - \overline{u}_i = u_{i-1} - \overline{u}_{i-1} + \mathrm{A}_{i-1}(v_{i-1} - \overline{v}_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \mathrm{P}_i\delta_i, \\ \mathrm{F}_i - \overline{\mathrm{F}}_i = \mathrm{F}_{i-1} + \overline{\mathrm{F}}_{i-1} + (\mathrm{G}_{i-1} - \mathrm{G}_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \mathrm{Q}_i\delta'_i; \end{array}\right. \tag{49}$$

mais

$$\mathrm{F}_i - \overline{\mathrm{F}}_i = (u_i - \overline{u}_i)\mathrm{M}_{\mathrm{F}i} + (v_i - \overline{v}_i)\mathrm{N}_{\mathrm{F}i},$$

où $\mathrm{M}_{\mathrm{F}_i}$, $\mathrm{N}_{\mathrm{F}_i}$ sont des polynomes en u_i, $\overline{u}_i$, v_i, $\overline{v}_i$. On a $\mathrm{N}_{\mathrm{F}_i} = \dfrac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial v_i}$ pour $\overline{u}_i = u_i$, $\overline{v}_i = v_i$. Faisons l'hypothèse que le long de l'arc $x_0 x_{i-1}$, $\left|\dfrac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial \mathrm{U}}\right| > m_{\mathrm{F}} : 2$, où m_{F} est le nombre défini au n° 7. On tire de (44), si s_i est assez petit,

$$\overline{u}_i = \overline{u}_{i-1} + p'_i\overline{\Delta}_i, \qquad \overline{v}_i = \overline{v}_{i-1} + q'_i\overline{\Delta}'_i,$$

où $|p'_i|$, $|q'_i|$ sont bornés et $|\overline{\Delta}_i|$, $|\overline{\Delta}'_i| \leqq s_i$. Ceci entraîne

$$\mathrm{M}_{\mathrm{F}_i} = \mathrm{M}_{\mathrm{F},i-1} + m_{\mathrm{F}_i}\Delta_{\mathrm{F}_i}, \qquad \mathrm{N}_{\mathrm{F}_i} = \mathrm{N}_{\mathrm{F},i-1} + n_{\mathrm{F}_i}\Delta'_{\mathrm{F}_i}$$

avec $|m_{\mathrm{F}_i}|$, $|n_{\mathrm{F}_i}|$ bornés et $|\Delta_{\mathrm{F}_i}|$, $|\Delta'_{\mathrm{F}_i}| \leqq s_i$. On vérifie facilement que

$$\left\{\begin{array}{l} u_i - \overline{u}_i = u_{i-1} - \overline{u}_{i-1} + \mathrm{A}_{i-1}(v_{i-1} - \overline{v}_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \mathrm{P}_i\delta_i, \\ v_i - v_i = v_{i-1} - v_{i-1} + \dfrac{\left\{\begin{array}{l}(v_{i-1} - \overline{v}_i)[\mathrm{L}_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \mathrm{L}'_{i-1}\Delta'] \\ \quad + (u_{i-1} - \overline{u}_{i-1})[\mathrm{M}_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \mathrm{M}'_{i-1}\Delta'']\end{array}\right\}}{\mathrm{N}_{\mathrm{F},i-1}} \\ \qquad + \mathrm{N}'_{i-1}\delta''_{i-1} : \mathrm{N}_{\mathrm{F},i-1}, \end{array}\right. \tag{50}$$

où $|L_{i-1}|, \ldots, |M'_{i-1}|, |N'_{i-1}|$ sont bornés et $|\Delta'|, |\Delta''| \leqq s_i, |\delta''_{i-1}| \leqq s' s_i$. Dans l'hypothèse que, le long de l'arc $x_0 x_{i-1}$, on ait aussi $|N_{F,i-1}| \geqq m_F : 2$, démontrons que

$$(51) \qquad |u_i - \bar{u}_i|, \qquad |v_i - \bar{v}_i| < s'[e^{2M\delta_i} - 1],$$

δ_i étant la longueur de l'arc $x_0 x_{i-1}$ et M un nombre positif défini comme le nombre correspondant du n° **7**. En effet, on tire de (50)

$$|u_i - \bar{u}_i| < |u_{i-1} - \bar{u}_{i-1}| + M |v_{i-1} - \bar{v}_{i-1}| s_i + M s_i s',$$
$$|v_i - \bar{v}_i| < |v_{i-1} - \bar{v}_{i-1}| + M[|u_{i-1} - \bar{u}_{i-1}| + |v_{i-1} - \bar{v}_{i-1}|] s_i + M s_i s'.$$

Supposons les inégalités (51) vérifiées pour $i - 1$. Il vient

$$|u_i - \bar{u}_i| < s'[e^{2M\delta_{i-1}}(1 + M s_i) - 1] < s'[e^{2M(\delta_{i-1} + s_i)} - 1] = s'[e^{2M\delta_i} - 1],$$
$$|v_i - \bar{v}_i| < s'[e^{2M\delta_{i-1}}(1 + 2M s_i) - M s_i - 1] < s'[e^{2M\delta_i} - 1].$$

Or, pour $i = 0$, les inégalités (51) sont vérifiées puisque $\bar{u}_0 = u_0$, $\bar{v}_0 = v_0$. Elles sont donc générales. Soit maintenant ε un nombre arbitrairement petit. En choisissant s' de façon que

$$(52) \qquad s'[e^{2Ml\delta} - 1] < \varepsilon,$$

on établit, comme au Chapitre précédent, que tout le long de L',

$$\left|\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{v}}\right| > m_F : 2, \qquad |F_{Fx}| > m_F : 2.$$

Par conséquent si s' remplit la condition (52), on obtient, à l'extrémité x_n de L',

$$|u_n - \bar{u}_n|, \qquad |v_n - \bar{v}_n| < s'[e^{2Ml\delta} - 1].$$

Lorsque n tend vers l'infini, s' tendant vers zéro, $\bar{u}_n$ et $\bar{v}_n$ convergent donc uniformément vers u et v au point x, extrémité de L'. Tout ce qui précède restant vrai si le point x est un point quelconque de L', nous voyons que $\bar{u}$ et $\bar{v}$ convergent uniformément vers u et v en tout point de L'.

12. La méthode de Cauchy-Lipschitz, appliquée aux équations (2) ou (3 *bis*), conduit, comme on sait, au même résultat que les relations (44). Elle présente une généralité plus grande, en ce sens qu'elle ne nécessite pas l'existence des dérivées des coefficients de F que nous avons postulée. Par contre, elle ne converge pas dans le domaine des singularités, et en particulier des singularités mobiles. Nous allons démontrer que les relations (44) convergent dans le domaine des singularités mobiles.

Soient, comme au n° **5**, α le point critique et $\alpha\gamma\gamma_1 x$ l'arc défini au n° **6** et le long duquel les développements (22) sont convergents. Partageons cet arc en arcs partiels par les points $x_1, \ldots, x_n$; x_n coïncidant avec x. Soient encore s_i la longueur de l'arc $x_{i-1} x_i$ et s' la plus grande de ces quantités. Lorsque n tend vers l'infini, s' tend vers zéro. Considérons encore les relations (44), où cette fois $x_1, \ldots, x_i, \ldots$ désignent les points que nous venons de définir. Nous avons $\bar{u}_0 = u_\alpha$, $\bar{v}_0 = v_\alpha$. Nous poserons également

$$\bar{u}_i = u_\alpha + \bar{\lambda}_i, \qquad \bar{v}_i = v_\alpha + \bar{\mu}_i.$$

On voit immédiatement que $\bar{\mu}_i$ est défini par la relation

$$(53) \qquad \begin{aligned} &\bar{\mu}_i^r \mathrm{P}_\alpha + \mathrm{P}(x_i - \alpha, \bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i) + (x_i - \alpha)\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\right)_\alpha + \bar{\lambda}_i\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \bar{u}}\right)_\alpha \\ &\quad = \sum_{j=1}^{i} \mathrm{G}(\bar{u}_{j-1}, \bar{v}_{j-1}, x_{j-1})(x_j - x_{j-1}), \end{aligned}$$

qui est la relation (17) lorsqu'on y remplace l'indice 1 par i, x par x_i et

$$\int_\alpha^{x_i} \mathrm{G}(u, v, x)\, dx \quad \text{par} \sum_{j=1}^{i} \mathrm{G}(\bar{u}_{j-1}, \bar{v}_{j-1}, x_{j-1})(x_j - x_{j-1}).$$

Ceci permet d'écrire

$$(54) \qquad \bar{\mu}_i = \left[\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{i} \mathrm{K}(u_\alpha, v_\alpha, x_{j-1})(x_j - x_{j-1})}{\mathrm{P}_\alpha}\right]^{\frac{1}{r}} (1 + \bar{\zeta}_i) \qquad (|\zeta_i| < m),$$

si les conditions (19) et (21) sont satisfaites dans lesquelles on remplace s par $\sum_1^i s_j$; $\int_0^s \mathrm{R}(x, \lambda, \mu)\, ds$ par $\sum_1^i \mathrm{R}(x_{j-1}, \lambda, \mu) s_j$; $\int_\alpha^x \mathrm{K}(u_\alpha, v_\alpha, x)\, dx$ par $\sum_1^i \mathrm{K}(u_\alpha, v_\alpha, x_{j-1})(x_j - x_{j-1})$.

Nous avons également

$$(55) \qquad \bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_{i-1} + \Lambda_{i-1}(v_\alpha + \bar{\mu}_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

On déduit de (54)

$$(56) \qquad \mathrm{P}_\alpha \bar{\mu}_i^r = \left[\sum_1^i \mathrm{K}(u_\alpha, v_\alpha, x_{j-1})(x_j - x_{j-1})\right](1 + \bar{n}_i) \qquad (|n_i| < m' < 1).$$

Remplaçons, dans (56), i par $i - 1$ et retranchons de (56) la relation nouvelle, il vient

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_\alpha(\bar{\mu}_i - \mu_{i-1})\left(\sum_{a+b=r-1} \bar{\mu}_i^a \mu_{i-1}^b\right) \\ &\quad = \mathrm{K}(u_\alpha, v_\alpha, x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \sum_1^{i-1} \mathrm{K}(u_\alpha, v_\alpha, x_{j-1})(x_j - x_{j-1})(\bar{n}_i - \bar{n}_{i-1}). \end{aligned}$$

En vertu des propriétés de n_i et de n_{i-1}, qui découlent des relations (53), pour les indices i et $i-1$, on voit que

$$\bar{\mu}_i = \bar{\mu}_{i-1} + \bar{Q}_i \bar{\Delta}_i \quad \text{avec} \quad |\bar{Q}_i| \text{ borné et } |\bar{\Delta}_i| \leqq s_i^{\frac{1}{r}}. \tag{57}$$

En appliquant les mêmes considérations à μ_i et μ_{i-1}, on a

$$\mu_i = \mu_{i-1} + Q_i \Delta_i, \qquad |Q_i| \text{ borné et } |\Delta_i| \leqq s_i^{\frac{1}{r}}, \tag{58}$$

ainsi que

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} + \Lambda_{i-1}(v_\alpha + \mu_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + P_i \varphi_i \delta_i, \tag{59}$$

où $|P_i|$ est borné, $|\delta_i| \leqq s_i$ et $|\varphi_i|$ tend vers zéro avec s_i.

En vertu de (58), la relation qui définit μ_i devient

$$\begin{aligned} \mu_i^r P_\alpha + P(x_i - \alpha, \lambda_i, \mu_i) + (x_i - \alpha)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_\alpha + \lambda_i \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_\alpha \\ = \mu_{i-1}^r P_\alpha + P(x_{i-1} - \alpha, \lambda_{i-1}, \mu_{i-1}) + (x_{i-1} - \alpha)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_\alpha + \lambda_{i-1}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_\alpha \\ + G(u_{i-1}, v_{i-1}, x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + Q'_i \Delta_i + Q''_i \varphi'_i \Delta'_i, \end{aligned} \tag{60}$$

où $|Q'_i|$, $|Q''_i|$ sont bornés et $|\Delta_i| \leqq s_i^{1+\frac{1}{r}}$, $|\Delta'_i| \leqq s_i$ et $|\varphi'_i|$ tend vers zéro avec s_i. Faisons apparaître, dans (53), les termes en $\bar{\mu}_{i-1}$. On déduit alors de (53) et (60)

$$\begin{aligned} (\mu_i^r - \bar{\mu}_i^r)P_\alpha + P(x_i - \alpha, \lambda_i, \mu_i) - P(x_i - \alpha, \bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i) \\ = (\mu_{i-1}^r - \bar{\mu}_{i-1}^r)P_\alpha + P(x_{i-1} - \alpha, \lambda_{i-1}, \mu_{i-1}) - P(x_{i-1} - \alpha, \bar{\lambda}_{i-1}, \bar{\mu}_{i-1}) \\ + Q'_i \Delta_i + Q''_i \varphi'_i \Delta_i + [G(u_{i-1}, v_{i-1}, x_{i-1}) - G(\bar{u}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}, x_{i-1})](x_i - x_{i-1}). \end{aligned} \tag{61}$$

Dans le premier membre de (61) le coefficient de $\mu_i - \bar{\mu}_i$ est

$$\sum_{a+b=r-1} \mu_i^a \bar{\mu}_i^b + \Sigma',$$

où Σ' est un polynome en λ_i, μ_i, $\bar{\lambda}_i$, $\bar{\mu}_i$. Pour $\bar{\mu}_i = \mu_i$, la somme $\Sigma \mu_i^a \bar{\mu}_i^b + \Sigma'$ vaut

$$(r-1)\left[\frac{\int_\alpha^{x_i} K(u_\alpha, v_\alpha, x)\,dx}{P_\alpha}\right]^{\frac{r-1}{r}} (1+\gamma_i) \qquad (|\gamma_i| < q < 1).$$

De sorte que nous pourrons écrire pour toute valeur de $i \leqq n$,

$$(r-1)\left|\frac{\int_\alpha^{x_i} K(u_\alpha, v_\alpha, x)\,dx}{P_\alpha}\right|^{\frac{r-1}{r}} |1+\gamma_i| > M'(s_1 + \ldots + s_i)^{\frac{r-1}{r}}(1-q),$$

où M' est un nombre borné. Nous ferons l'hypothèse que

$$|\Sigma \mu_j^a \bar{\mu}_j^b + \Sigma'| > M'(s_1 + \ldots + s_j)^{\frac{r-1}{r}}(1 - kq) \quad \text{avec} \quad kq < 1, \tag{62}$$

où k est un nombre donné supérieur à 1. L'inégalité (62) est réalisée pour $i=1$ si s_i est suffisamment petit. Soit φ le module de la plus grande des quantités φ_i, φ'_i. On déduit de (55) et (59) et de (61), en vertu de l'hypothèse (62),

$$|\lambda_i-\bar{\lambda}_i|<|\lambda_{i-1}-\bar{\lambda}_{i-1}|+\mathrm{M}\,|\mu_{i-1}-\bar{\mu}_{i-1}|+\mathrm{M}\varphi s_i,$$

$$|\mu_i-\bar{\mu}_i|<|\mu_{i-1}-\bar{\mu}_{i-1}|+\frac{\mathrm{M}s_i}{(s_1+\ldots+s_i)^{\frac{r-1}{r}}}\left[|\lambda_{i-1}-\bar{\lambda}_{i-1}|+|\mu_{i-1}-\bar{\mu}_{i-1}|\right]$$
$$+\frac{\mathrm{M}\left(\varphi+s'^{\frac{1}{r}}\right)s_i}{(s_1+\ldots+s_i)^{\frac{r-1}{r}}},$$

où M est un nombre positif. Posons

$$|\lambda_i-\bar{\lambda}_i|+|\mu_i-\mu_i|=\mathrm{K}_i.$$

En choisissant un autre nombre positif N, on voit que

$$\mathrm{K}_i<\mathrm{K}_{i-1}+\mathrm{K}_{i-1}\frac{\mathrm{N}s_i}{(s_1+\ldots+s_i)^{\frac{r-1}{r}}}+\frac{\mathrm{N}\left(\varphi+s'^{\frac{1}{r}}\right)s_i}{(s_1+\ldots+s_i)^{\frac{r-1}{r}}},$$

ce qui entraîne

$$\mathrm{K}_i<\left(\varphi+s'^{\frac{1}{r}}\right)\left[e^{\mathrm{N}\sum_1^i\frac{s_j}{(s_1+\ldots+s_j)^{\frac{r-1}{r}}}}-1\right]. \tag{63}$$

On vérifie aisément que l'inégalité (63) est réalisée si elle l'est pour $i-1$. Comme elle l'est pour $i=1$, elle est générale. On a

$$\sum_1^i\frac{s_j}{(s_1+\ldots+s_j)^{\frac{r-1}{r}}}\leqq\int_0^{s_1+\ldots+s_i}\frac{d\delta}{\delta^{\frac{r-1}{r}}}=r(s_1+\ldots+s_i)^{\frac{1}{r}},$$

(l'égalité ayant lieu pour i infini), par conséquent

$$|\lambda_i-\bar{\lambda}_i|,\qquad|\mu_i-\bar{\mu}_i|<\left(\varphi+s'^{\frac{1}{r}}\right)\left[e^{\mathrm{N}r\delta^{\frac{1}{r}}}-1\right],$$

où δ est la longueur de l'arc $\alpha\gamma\gamma_1 x$. On démontre maintenant, comme au n° **8**, que si s' est suffisamment petit pour que

$$\left(\varphi+s'^{\frac{1}{r}}\right)\left[e^{\mathrm{N}r\delta^{\frac{1}{r}}}-1\right]<\varepsilon,$$

où ε est un nombre positif arbitrairement petit, l'hypothèse (62) sera réalisée le long de l'arc $\alpha\gamma\gamma_1 x$. De sorte qu'au point $x=x_n$, $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ convergent uniformément vers λ et μ lorsque n tend vers l'infini, les arcs partiels tendant vers zéro. Il en est donc de même en tout point de l'arc $\alpha\gamma\gamma_1 x$ pour les quantités $\bar{u}$ et $\bar{v}$ définies par les relations (44). C. Q. F. D.