JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MARCEL MENDES

La rotation de l'ellipsoïde hétérogène étudiée au moyen des fonctions de Lamé

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 24 (1945), p. 51-72.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1945_9_24__51_0>

La rotation de l'ellipsoïde hétérogène étudiée au moyen des fonctions de Lamé;

Par Marcel MENDES.

I. — Théorème de M. Hamy.

1. Considérons un fluide dont les éléments s'attirent suivant la loi de Newton, formé de couches homogènes en nombre fini n de densités allant en croissant de la surface vers l'intérieur, séparées par des ellipsoïdes ayant même centre O et mêmes directions d'axes Ox, Oy, Oz, tournant autour de l'axe des x.

Nous désignerons par $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les surfaces de ces ellipsoïdes, S_1 étant l'ellipsoïde extérieur, par T_k le volume de l'ellipsoïde compris à l'intérieur de S_k, et soient

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ les densités respectives des couches,
$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ les différences, toutes positives par hypothèse,

$$\rho_1 - 0, \quad \rho_2 - \rho_1, \quad \ldots, \quad \rho_n - \rho_{n-1}.$$

Nous considérerons l'ellipsoïde S_p comme appartenant à la famille de quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a_p^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b_p^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c_p^2} - 1 = 0,$$

la valeur de λ fournissant l'ellipsoïde S_p étant ρ_p.

Par chaque point (x, y, z) de l'espace, il passe trois surfaces de cette famille; nous désignerons selon l'habitude, par ρ la racine en λ de cette équation qui fournit une ellipsoïde, par u la variable associée dans la théorie des fonctions de Lamé :

$$\rho^2 = \wp u + \frac{1}{3}(a_p^2 + b_p^2 + c_p^2);$$

u et ρ varient en sens inverses dans leurs intervalles de variation.

2. Nous nous proposons de chercher les conditions d'équilibre de la surface S_n. Écrivons pour cela que la résultante des attractions des diverses couches sur l'unité de masse placée en un point quelconque $P(x, y, z)$ de S_p et de la force centrifuge en ce point est normale à la surface S_p. On sait, d'après M. Hamy, que l'on peut remplacer l'attraction des couches de densités δ par celle d'ellipsoïdes de densités η.

Si r et q vérifient $r < p < q$, P sera intérieur à S_p et extérieur à S_q. Les composantes suivant Ox de l'attraction en P d'un ellipsoïde S_r et d'un ellipsoïde S_q sont respectivement [1]

$$X_r = -\eta_r T_r \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r x,$$

$$X_q = -\eta_q T_q \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_{q,P} x,$$

où les fonctions R_1 et S_1 sont les fonctions de Lamé (notations de Poincaré). $\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r$ désigne la valeur sur l'ellipsoïde S_r de $\frac{S_1}{R_1}$ calculée au moyen des valeurs a_r, b_r, c_r; $\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_{q,P}$ désigne la valeur en P de $\frac{S_1}{R_1}$ calculée au moyen des valeurs a_q, b_q, c_q.

Les composantes de l'attraction totale en P sont donc

$$X = -x\sum_{r=1}^{p} \eta_r T_r \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r - x \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q T_q \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_{q,P},$$

$$Y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$Z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ω étant la valeur de la rotation en P, les conditions d'équilibre sont

$$\frac{X}{x}(R_1)_p^2 = \frac{Y + \omega^2 y}{y}(R_2)_p^2 = \frac{Z + \omega^2 z}{z}(R_3)_p^2,$$

d'où

$$\omega^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p^2 \frac{X}{x} - \frac{Y}{y} = \left(\frac{R_1}{R_3}\right)_p^2 \frac{X}{x} - \frac{Z}{z}.$$

L'égalité des deux valeurs de ω donne

$$(1) \qquad (b_p^2 - c_p^2)\left(\frac{R_1}{R_2 R_3}\right)_p^2 \left[\sum_{r=1}^{p} \eta_r T_r \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r + \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q T_q \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_{q,P}\right]$$

$$= \sum_{r=1}^{p} \eta_r T_r \left[\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_r - \left(\frac{S_3}{R_3}\right)_r\right] + \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q T_q \left[\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_{q,P} - \left(\frac{S_3}{R_3}\right)_{q,P}\right].$$

Nous supposerons dans la suite cette condition et toutes les conditions analogues vérifiées.

---

[1] On suppose le coefficient d'attraction égal à l'unité.

Si, en particulier, tous les ellipsoïdes de séparation sont homofocaux, on peut supposer tous les a_p, b_p, c_p égaux respectivement à a, b, c, et cette équation où l'on fait $p = 1$, se réduit, en vertu des égalités telles que

$$\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_{q,P} = \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_p,$$

à

$$\left(\frac{R_3^2 - R_2^2}{R_2 R_3} R_1 S_1\right)_1 = (R_3 S_2 - R_2 S_3)_1,$$

ce qui montre que *l'ellipsoïde extérieur est un ellipsoide de Mac-Laurin ou de Jacobi.*

3. La valeur de ω diffère en général d'un point à l'autre d'un même ellipsoïde. Pour que tous les points d'un même ellipsoïde S_p soient animés de la même rotation, il faut que la valeur de ω^2, c'est-à-dire

$$-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p^2 \left[\sum_{r=1}^{p} \eta_r T_r \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r + \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q T_q \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_{q,P}\right]$$
$$+\left[\sum_{r=1}^{p} \eta_r T_r \left(\frac{S_2}{R_2}\right)_r + \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q T_q \left(\frac{S_2}{R_2}\right)_{q,P}\right],$$

ne dépende pas des coordonnées de P lorsque P se déplace sur S_p, donc qu'il en soit de même de

$$\sum_{q=p+1}^{n} \eta_q T_q \left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p^2 \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_{q,P} - \left(\frac{S_2}{R_2}\right)_{q,P}\right],$$

ou de

$$(2) \qquad \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q T_q \left[(R_1)_p^2 \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_{q,P} - (R_2)_p^2 \left(\frac{S_2}{R_2}\right)_{q,P}\right].$$

Faisons $p = n - 1$; la quantité précédente se réduit alors à un terme. Si l'on ne fait pas d'hypothèse particulière sur S_{n-1} et S_n, la racine ρ de l'équation

$$(3) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2 - a_n^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b_n^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c_n^2} - 1 = 0,$$

dépendrait des coordonnées x, y, z de P et il faudrait que la dérivée de (2) par rapport à ρ^2 soit nulle, ce qui donnerait

$$\frac{(R_1)_n^2}{(R_1)_{n,P}^2} - \frac{(R_2)_n^2}{(R_2)_{n,P}^2} = 0$$

ou

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_n^2 = \frac{\rho^2 - a_n^2}{\rho^2 - b_n^2}.$$

La valeur de ρ, lorsque P se déplace sur S_{n-1}, serait alors constante : S_n et S_{n-1} sont donc homofocaux.

On peut alors supposer

$$a_n = a_{n-1}, \qquad b_n = b_{n-1}, \qquad c_n = c_{n-1},$$

et, en faisant $p = n - 2$, on est amené à écrire que la dérivée du seul terme

$$(R_1)^2_{n-2}\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_{n,\mathrm{P}} - (R_2)^2_{n-2}\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_{n,\mathrm{P}}$$

par rapport à la racine ρ de l'équation (3) est encore nulle. On en déduit que S_{n-2} est homofocal à S_{n-1} et S_n.

Le raisonnement se poursuit de proche en proche et l'on arrive à cette conclusion :

Pour que tous les points d'un même ellipsoïde soient animés d'une même rotation, il faut que tous les ellipsoïdes de séparation soient homofocaux.

La réciproque est vraie, comme on le voit immédiatement.

4. Plaçons-nous dans le cas où tous les ellipsoïdes sont homofocaux.

On peut alors supposer respectivement égales à a, b, c les quantités a_k, b_k, c_k. L'inégalité $\omega^2 > 0$ se traduit par

$$\sum_{r=1}^{p} \eta_r T_r \left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2_p \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r - \left(\frac{S_2}{R_2}\right)_r\right] + \left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2_p \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_p - \left(\frac{S_2}{R_2}\right)_p\right] \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q T_q < 0 \quad (^1).$$

Supposant $a > b$, on a

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2_p \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_p - \left(\frac{S_2}{R_2}\right)_p = \left(\frac{R_1 S_1 - R_2 S_2}{R_2^2}\right)_p < 0,$$

car la fonction $U = \dfrac{R_1 S_1 - R_2 S_2}{R_2^2}$ croît constamment avec ρ, comme on le vérifie facilement, et est nulle pour $\rho = \infty$; et, en vertu de

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)_r,$$

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2_p \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r - \left(\frac{S_2}{R_2}\right)_r < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2_r \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r - \left(\frac{S_2}{R_2}\right)_r < 0.$$

Les ellipsoïdes de séparation des diverses couches ont donc leur petit axe dirigé suivant l'axe de rotation.

---

(1) La quantité $\sum_{q=p+1}^{n} \eta_q T_q$ a une signification simple : elle représente la masse contenue à l'intérieur de S_{p+1}, diminuée de la masse que contiendrait S_{p+1} supposé homogène de densité δ_p.

5. Supposant toujours tous les ellipsoïdes homofocaux, cherchons si ω peut être la même pour tous les ellipsoïdes. Désignons par ω_k la rotation de S_k.

L'égalité de ω_p et ω_{p+1} donnerait

$$\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p^2-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_{p+1}^2\right]\sum_{r=1}^{p}\eta_r T_r\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r$$
$$+\left[\left(\frac{R_1S_1-R_2S_2}{R_2^2}\right)_p-\left(\frac{R_1S_1-R_2S_2}{R_2^2}\right)_{p+1}\right]\sum_{q=p+1}^{n}\eta_q T_q=0.$$

Or, chaque terme du premier membre est positif, comme il résulte du fait que la fonction désignée par U croît avec ρ.

La condition précédente ne peut donc être réalisée et l'on retrouve le théorème de M. Hamy (¹) :

Une masse fluide en équilibre relatif, dans laquelle la densité croît constamment de la surface au centre, ne peut pas admettre des ellipsoïdes comme surfaces de séparation de ses diverses couches homogènes.

6. La comparaison de ω_p et ω_{p+1} montre que l'on a

$$\omega_p<\omega_{p+1}.$$

La vitesse angulaire va en croissant de la surface au centre.

Comme cas limite, la vitesse serait la même, nulle sur toutes les couches pour $a=b=c$: les ellipsoïdes se réduiraient à des sphères (²).

7. Dans le cas où tous les ellipsoïdes sont homothétiques, l'inégalité $\omega^2>0$ donne

$$\sum_{r=1}^{p}\eta_r T_r\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p^2\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r-\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_r\right]+\sum_{q=p+1}^{n}\eta_q T_q\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p^2\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_{q,P}-\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_{q,P}\right]<0.$$

Supposant $a>b$, le premier crochet est négatif, comme on l'a vu. En vertu de

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p^2=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_q^2<\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_{q,P}^2,$$

le second crochet est inférieur à

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_{q,P}^2\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_{q,P}-\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_{q,P},$$

donc négatif également.

(¹) HAMY, *Étude sur la figure des corps célestes* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX).

(²) *Cf.* VÉRONNET, *Thèse*, p. 19.

Les ellipsoïdes de séparation des diverses couches ont donc encore leur petit axe dirigé suivant l'axe de rotation.

II. — Étude du moment de rotation.

A. — CAS DES ELLIPSOÏDES HOMOFOCAUX.

8. Nous supposerons que l'on a affaire à un fluide formé de liquides de densités différentes, la masse de chaque liquide étant donnée, et que les ellipsoïdes de séparation des diverses couches sont homofocaux et de révolution autour de l'axe de rotation pris pour axe des x; toutes les égalités (1) seront alors vérifiées.

L'équation générale de ces ellipsoïdes est

$$\frac{x^2}{\rho^2-a^2}+\frac{y^2+z^2}{\rho^2-b^2}-1=0 \qquad (a>b),$$

que nous écrirons également sous la forme

$$\frac{x^2}{\sigma^2}+\frac{y^2+z^2}{\sigma^2+\tau^2}-1=0,$$

en posant

$$\rho^2-a^2=\sigma^2, \qquad a^2-b^2=\tau^2.$$

Le moment de rotation du fluide est

$$\mu=\pi\iint\delta\omega r^2\,dr^2\,dx \qquad \begin{pmatrix} r^2=y^2+z^2 \\ \delta,\text{ densité}\end{pmatrix}.$$

Si l'on fait x constant dans l'expression

$$r^2=\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2}(\sigma^2-x^2),$$

on obtient

$$dr^2=\left[\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2}-\frac{\tau^2}{\sigma^4}(\sigma^2-x^2)\right]d\sigma^2,$$

d'où, en tenant compte que ω dépend de σ, mais non de x,

$$\mu=2\pi\sum_{p=2}^{n+1}\delta_{p-1}\int_{\sigma_p}^{\sigma_{p-1}}\omega\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2}2\sigma\,d\sigma\int_0^{\sigma}(\sigma^2-x^2)\left[\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2}-\frac{\tau^2}{\sigma^4}(\sigma^2-x^2)\right]dx.$$

L'intégrale relative à x se calcule facilement; elle est égale à

$$\frac{2\sigma}{15}(5\sigma^2+\tau^2),$$

d'où

$$\frac{15\mu}{8\pi}=\sum_{p=2}^{n+1}\delta_{p-1}\int_{\sigma_p}^{\sigma_{p-1}}\omega(\sigma^2+\tau^2)(5\sigma^2+\tau^2)\,d\sigma \qquad (\sigma_p=\sqrt{\rho_p^2-a^2},\ \sigma_{n+1}=0).$$

Proposons-nous d'étudier comment varie μ lorsque τ varie de o à $+\infty$. Nous sommes amené à étudier la variation de

$$k = \frac{15\mu}{8\pi}.$$

Nous poserons

$$k = \sum_{p=2}^{n+1} \delta_{p-1} K_{p-1},$$

avec

$$K_{p-1} = \int_{\sigma_p}^{\sigma_{p-1}} \omega(\sigma^2+\tau^2)(5\sigma^2+\tau^2)\,d\sigma,$$

la valeur de ω étant celle de la couche qui correspond à la valeur de σ.

9. Si M_{p-1} est la masse du liquide compris entre S_p et S_{p-1}, on a

$$\frac{4}{3}\pi\delta_{p-1}[(R_1R_2^2)_{p-1} - (R_1R_2^2)_p] = M_{p-1},$$

que nous écrirons, en posant

$$\frac{3}{4\pi}\frac{M_{p-1}}{\delta_{p-1}} = \mu_{p-1}:$$

$$\sigma_{p-1}(\sigma_{p-1}^2+\tau^2) - \sigma_p(\sigma_p^2+\tau^2) = \mu_{p-1}.$$

La dernière de ces relations donne plus simplement

$$\sigma_n(\sigma_n^2+\tau^2) = \mu_n,$$

d'où, en remontant de proche en proche,

$$\sigma_{n-1}(\sigma_{n-1}^2+\tau^2) = \mu_n + \mu_{n-1},$$

$$\sigma_{n-2}(\sigma_{n-2}^2+\tau^2) = \mu_n + \mu_{n-1} + \mu_{n-2}, \quad \ldots.$$

Posons

$$\mu_n + \mu_{n-1} + \ldots + \mu_p = \mu'_p;$$

on aura, d'une façon générale,

$$\sigma_p(\sigma_p^2+\tau^2) = \mu'_p.$$

Cette équation, où μ'_p est donné et τ est supposé connu, admet une seule racine positive en σ_p. σ_p est donc une fonction de τ, dont la dérivée est égale à

$$\frac{d\sigma_p}{d\tau} = -\frac{2\sigma_p\tau}{3\sigma_p^2+\tau^2}.$$

10. Tenant compte de ce que σ_p et σ_{p-1} sont ainsi des fonctions de τ et que ω dépend également de σ et τ, on a, ω_p désignant la valeur de ω sur la surface S_p,

$$\frac{dK_{p-1}}{d\tau} = \int_{\sigma_p}^{\sigma_{p-1}} \left[4\tau(3\sigma^2+\tau^2)\omega + (\sigma^2+\tau^2)(5\sigma^2+\tau^2)\frac{\partial\omega}{\partial\tau}\right]d\sigma$$
$$-2\tau\left[\omega_{p-1}\frac{\sigma_{p-1}(\sigma_{p-1}^2+\tau^2)(5\sigma_{p-1}^2+\tau^2)}{3\sigma_{p-1}^2+\tau^2} - \omega_p\frac{\sigma_p(\sigma_p^2+\tau^2)(5\sigma_p^2+\tau^2)}{3\sigma_p^2+\tau^2}\right],$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{dK_{p-1}}{d\tau} = \int_{\sigma_p}^{\sigma_{p-1}} \Big\{ 4\tau(3\sigma^2+\tau^2)\omega + (\sigma^2+\tau^2)(5\sigma^2+\tau^2)\frac{\partial\omega}{\partial\tau} - 2\tau\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\omega\frac{\sigma(\sigma^2+\tau^2)(5\sigma^2+\tau^2)}{3\sigma^2+\tau^2}\right]\Big\} d\sigma = \int_{\sigma_p}^{\sigma_{p-1}} U_{p-1}\, d\sigma.$$

On vérifie l'identité

$$U_{p-1} = 2\tau\omega\frac{(\sigma^2+\tau^2)(9\sigma^4+2\sigma^2\tau^2+\tau^4)}{(3\sigma^2+\tau^2)^2} + (\sigma^2+\tau^2)(5\sigma^2+\tau^2)\left(\frac{\partial\omega}{\partial\tau} - \frac{2\sigma\tau}{3\sigma^2+\tau^2}\frac{\partial\omega}{\partial\sigma}\right),$$

d'où

$$\frac{\omega}{\pi}\frac{U_{p-1}}{\sigma^2+\tau^2} = 4\tau\frac{9\sigma^4+2\sigma^2\tau^2+\tau^4}{(3\sigma^2+\tau^2)^2}\frac{\omega^2}{2\pi} + (5\sigma^2+\tau^2)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\omega^2}{2\pi}\right) - \frac{2\sigma\tau}{3\sigma^2+\tau^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\omega^2}{2\pi}\right)\right].$$

11. Calculons ω. On a, sur l'ellipsoïde S_p,

$$\omega^2 = \omega_p^2 = \sum_{r=1}^{p}\eta_r T_r\left[\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_r - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p^2\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r\right] + \left[\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_p - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p^2\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_p\right]\sum_{q=p+1}^{n}\eta_q T_q,$$

d'où, sur une couche comprise entre S_{p-1} et S_p,

$$(4)\qquad \omega^2 = \sum_{r=1}^{p-1}\eta_r T_r\left[\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_r - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r\right] + \left[\frac{S_2}{R_2} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\frac{S_1}{R_1}\right]\sum_{q=p}^{n}\eta_q T_q,$$

les fonctions de Lamé sans indice étant calculées sur la couche considérée.

Le calcul des fonctions de Lamé peut ici être poussé jusqu'au bout; on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\rho^2-a^2} = \sigma,\\ R_2 &= \sqrt{\rho^2-b^2} = \sqrt{\sigma^2+\tau^2},\\ \frac{S_1}{R_1} &= 3\int_0^u\frac{du}{R_1^2} = -3\int_\infty^\sigma\frac{d\sigma}{\sigma^2(\sigma^2+\tau^2)} = \frac{3}{\tau^2}\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tau}\operatorname{arc\,tang}\frac{\tau}{\sigma}\right),\\ \frac{S_2}{R_2} &= 3\int_0^u\frac{du}{R_2^2} = -3\int_\infty^\sigma\frac{d\sigma}{(\sigma^2+\tau^2)^2} = \frac{3}{2\tau^2}\left(\frac{1}{\tau}\operatorname{arc\,tang}\frac{\tau}{\sigma} - \frac{\sigma}{\sigma^2+\tau^2}\right).\end{aligned}\right.$$

En remplaçant T_q et T_r par leurs expressions au moyen des fonctions de Lamé, on trouve, toutes réductions faites,

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = \sum_{r=1}^{p-1}\eta_r\left[\frac{\mu_r'}{\tau^3}\frac{3\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}\operatorname{arc\,tang}\frac{\tau}{\sigma_r} - \frac{\sigma_r^2}{\tau^2} - \frac{2\sigma^2}{\sigma^2+\tau^2}\frac{\sigma_r^2+\tau^2}{\tau^2}\right] + \left[\frac{1}{\tau^3}\frac{3\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}\operatorname{arc\,tang}\frac{\tau}{\sigma} - \frac{3}{\tau^2}\frac{\sigma}{\sigma^2+\tau^2}\right]\sum_{q=p}^{n}\eta_q\mu_q'.$$

Le calcul des dérivées de $\frac{\omega^2}{2\pi}$ peut s'effectuer sur cette valeur, ou, plus simplement, sur l'expression (4) de ω^2, au moyen des formules

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{S_1}{R_1}\right) = -\frac{3}{\sigma(\sigma^2+\tau^2)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{S_1}{R_1}\right) = \frac{9}{\tau^4}\,\text{arc tang}\,\frac{\tau}{\sigma} - \frac{3}{\tau^3}\,\frac{3\sigma^2+2\tau^2}{\sigma(\sigma^2+\tau^2)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{S_2}{R_2}\right) = -\frac{3}{(\sigma^2+\tau^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{S_2}{R_2}\right) = -\frac{9}{2\tau^4}\,\text{arc tang}\,\frac{\tau}{\sigma} + \frac{3\sigma}{2\tau^3(\sigma^2+\tau^2)^2}(3\sigma^2+5\tau^2).$$

Tenant compte de la dépendance des σ_q et σ_r vis-à-vis de τ, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\omega^2}{2\pi}\right) = \frac{4\sigma}{(\sigma^2+\tau^2)^2}\sum_{r=1}^{p-1}\eta_r(\sigma_r^2+\tau^2)\left(\frac{\sigma_r}{\tau}\,\text{arc tang}\,\frac{\tau}{\sigma_r}-1\right) + \frac{4}{(\sigma^2+\tau^2)^2}\left(\frac{\sigma}{\tau}\,\text{arc tang}\,\frac{\tau}{\sigma}-1\right)\sum_{q=p}^{n}\eta_q\mu'_q,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\omega^2}{2\pi}\right) = \sum_{r=1}^{p-1}\eta_r &\left\{\begin{aligned}&\frac{\sigma_r^2}{\tau^3}\,\frac{5\sigma^2+3\tau^2}{\sigma^2+\tau^2} + 6\sigma_r^2\,\frac{3\sigma^2+\tau^2}{\tau(\sigma^2+\tau^2)(3\sigma_r^2+\tau^2)} + 4\sigma^2\,\frac{\sigma^2\sigma_r^2+2\tau^2\sigma_r^2+\tau^4}{\tau^3(\sigma^2+\tau^2)^2}\\ &-\frac{\sigma_r}{\tau^2(\sigma^2+\tau^2)}\left[\frac{9\sigma^4\sigma_r^2+3\sigma_r^2\tau^4+16\sigma^2\sigma_r^2\tau^2+3\sigma^4\tau^2+8\sigma^2\tau^4+\tau^6}{\tau^2(\sigma^2+\tau^2)}+2(3\sigma^2+\tau^2)\right]\text{arc tang}\,\frac{\tau}{\sigma_r}\end{aligned}\right\}\\ &+\left[\frac{\sigma(9\sigma^2+13\tau^2)}{\tau^3(\sigma^2+\tau^2)^2} - \frac{9\sigma^4+16\sigma^2\tau^2+3\tau^4}{\tau^4(\sigma^2+\tau^2)^2}\,\text{arc tang}\,\frac{\tau}{\sigma}\right]\sum_{q=p}^{n}\eta_q\mu'_q.\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\frac{\omega}{\pi}\,\frac{U_{p-1}}{\sigma^2+\tau^2} = \sum_{r=1}^{p-1}A_r\eta_r + A\sum_{q=p}^{n}\eta_q\mu'_q. \tag{6}$$

12. Calcul de A. — On trouve

$$\begin{aligned}A &= 9\sigma\,\frac{45\sigma^6+47\sigma^4\tau^2+19\sigma^2\tau^4+\tau^6}{\tau^3(\sigma^2+\tau^2)(3\sigma^2+\tau^2)^2} - \frac{135\sigma^6+141\sigma^4\tau^2+37\sigma^2\tau^4-\tau^6}{\tau^4(\sigma^2+\tau^2)(3\sigma^2+\tau^2)}\,\text{arc tang}\,\frac{\tau}{\sigma}\\ &= \alpha - \beta\,\text{arc tang}\,\frac{\tau}{\sigma},\end{aligned}$$

α et β ayant des significations évidentes.

Posons

$$X = \frac{\alpha}{\beta} - \text{arc tang}\,\frac{\tau}{\sigma} = 9\sigma\tau\,\frac{45\sigma^6+47\sigma^4\tau^2+19\sigma^2\tau^4+\tau^6}{(3\sigma^2+\tau^2)(135\sigma^6+141\sigma^4\tau^2+37\sigma^2\tau^4-\tau^6)} - \text{arc tang}\,\frac{\tau}{\sigma},$$

et considérons X comme une fonction de σ.

On a

$$\frac{dX}{d\sigma} = -9\tau\,\frac{\left\{\begin{aligned}&18\,225\sigma^{14}+31\,995\sigma^{12}\tau^2+30\,681\sigma^{10}\tau^4\\ &\quad+15\,147\sigma^8\tau^6+3\,099\sigma^6\tau^8+345\sigma^4\tau^{10}+91\sigma^2\tau^{12}+\tau^{14}\end{aligned}\right\}}{(3\sigma^2+\tau^2)^2(135\sigma^6+141\sigma^4\tau^2+37\sigma^2\tau^4-\tau^6)^2} + \frac{\tau}{\sigma^2+\tau^2},$$

et l'on en déduit que $\frac{dX}{d\sigma}$ a le signe contraire à celui du polynome,

$$6\,075\sigma^{12} + 12\,960\sigma^{10}\tau^2 + 7\,947\sigma^8\tau^4 + 1\,872\sigma^6\tau^6 + 409\sigma^4\tau^8 + 111\sigma^2\tau^{10} + \tau^{12},$$

donc est négatif.

Le polynome $135\sigma^6 + 141\sigma^4\tau^2 + 37\sigma^2\tau^4 - \tau^6$ ayant une racine positive σ_1 et une seule, on a le tableau de variations suivant :

σ	0			σ_1			$+\infty$
$\frac{dX}{d\sigma}$		$-$				$-$	
X	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0

Or A a même signe que X pour $\sigma > \sigma_1$ et signe contraire pour $\sigma < \sigma_1$. Donc A *est toujours positif.*

13. Calcul de A_r. — On trouve

$$A_r = 6\sigma_r^2 \frac{(3\sigma^2 + \tau^2)(5\sigma^2 + \tau^2)}{\tau(\sigma^2 + \tau^2)(3\sigma_r^2 + \tau^2)} - \frac{405\sigma^8 + 450\sigma^6\tau^2 + 172\sigma^4\tau^4 + 30\sigma^2\tau^6 - \tau^8}{\tau(\sigma^2 + \tau^2)(3\sigma^2 + \tau^2)^2}$$
$$+ \frac{\mu'_r}{\sigma_r} \frac{135\sigma^6 + 141\sigma^4\tau^2 + 37\sigma^2\tau^4 - \tau^6}{\tau^3(\sigma^2 + \tau^2)(3\sigma^2 + \tau^2)}$$
$$- \mu'_r \frac{135\sigma^6 + 141\sigma^4\tau^2 + 37\sigma^2\tau^4 - \tau^6}{\tau^4(\sigma^2 + \tau^2)(3\sigma^2 + \tau^2)} \operatorname{arc\,tang} \frac{\tau}{\sigma_r}.$$

Posons

$$\tau(\sigma^2 + \tau^2) A_r = \alpha_r - \beta\mu'_r \operatorname{arc\,tang} \frac{\tau}{\sigma_r},$$

puis

$$Y_r = \frac{\alpha_r}{\beta\mu'_r} - \operatorname{arc\,tang} \frac{\tau}{\sigma_r},$$

et considérons Y_r comme fonction de σ. On a

$$\frac{dY_r}{d\sigma} = \frac{1}{\beta^2\mu'_r}\left(\beta\frac{d\alpha_r}{d\sigma} - \alpha_r\frac{d\beta}{d\sigma}\right)$$

et

$$\frac{\tau(3\sigma^2 + \tau^2)}{8\sigma}\left(\beta\frac{d\alpha_r}{d\sigma} - \alpha_r\frac{d\beta}{d\sigma}\right)$$
$$= -\frac{10\,935\sigma^{12} + 16\,200\sigma^{10}\tau^2 + 5\,571\sigma^8\tau^4 - 720\sigma^6\tau^6 - 347\sigma^4\tau^8 + 40\sigma^2\tau^{10} + \tau^{12}}{(3\sigma^2 + \tau^2)^2}$$
$$+ \frac{36\sigma_r^2}{3\sigma_r^2 + \tau^2}(15\sigma^6 - 9\sigma^2\tau^4 - 2\tau^6).$$

Réduisons au même dénominateur les deux fractions du second membre; le numérateur de la fraction obtenue est égal à

$$-3\sigma_r^2(\,6\,075\sigma^{12} + 11\,340\sigma^{10}\tau^2 + 6\,867\sigma^8\tau^4 + 2\,664\sigma^6\tau^6 + 1\,273\sigma^4\tau^8 + 364\sigma^2\tau^{10} + 25\tau^{12})$$
$$-\ \tau^2(10\,935\sigma^{12} + 16\,200\sigma^{10}\tau^2 + 5\,571\sigma^8\tau^4 - 720\sigma^6\tau^6 - 347\sigma^4\tau^8 + 40\sigma^2\tau^{10} + \tau^{12}).$$

En vertu de $\sigma_r > \sigma$, on a

$$\begin{aligned} & -3\sigma_r^2(1273\sigma^4\tau^8 + 364\sigma^2\tau^{10}) + \tau^2(720\sigma^6\tau^6 + 347\sigma^4\tau^8) \\ & < -3\sigma^2(1273\sigma^4\tau^8 + 364\sigma^2\tau^{10}) + \tau^2(720\sigma^6\tau^6 + 347\sigma^4\tau^8) < 0. \end{aligned}$$

On est donc assuré que $\beta\frac{d\alpha_r}{d\sigma} - \alpha_r\frac{d\beta}{d\sigma}$ est une quantité négative. Y_r est donc une fonction toujours décroissante de σ.

Envisageons les valeurs extrêmes.

1° Pour $\sigma = 0$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{6\sigma_r^2\tau^4}{3\sigma_r^2+\tau^2} + \tau^4 - \frac{\mu'_r}{\sigma_r}\tau^2 = \sigma_r^2\tau^2\frac{5\tau^2 - 3\sigma_r^2}{\tau^2 + 3\sigma_r^2}, \\ \beta &= -\tau, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (Y_r)_0 &= -\frac{\tau}{\mu'_r}\sigma_r^2\frac{5\tau^2 - 3\sigma_r^2}{\tau^2 + 3\sigma_r^2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\tau}{\sigma_r} \\ &= -\frac{\tau}{\mu'_r}\frac{\sigma_r(5\mu'_r - 8\sigma_r^3)}{\tau^2 + 3\sigma_r^2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\tau}{\sigma_r}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\frac{d(Y_r)_0}{d\tau}$ a le signe contraire au polynome en σ_r

$$8\sigma_r^6 + 11\mu'_r\sigma_r^3 - \mu'^2_r,$$

qui a une racine positive

$$(\sigma_r) = \alpha\mu'^{\frac{4}{3}}_r \qquad \left(0 < \alpha < \frac{5}{8}\right).$$

(τ) désignant la valeur de τ qui correspond à (σ_r), on obtient, en remarquant que σ_r et τ varient en sens inverses, le tableau suivant :

τ	0		(τ)		$+\infty$
$\frac{d(Y_r)_0}{d\tau}$		$-$		$+$	
$(Y_r)_0$	0	$\searrow$	min.	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$

On a remarqué que pour $\tau = \infty$, μ'_r gardant une valeur finie, σ_r est nul, donc

$$(Y_r)_0 = -\frac{\tau}{\mu'_r}\frac{5\mu'_r\sigma_r}{\tau^2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\tau}{0} = -\frac{\pi}{2}.$$

Donc $(Y_r)_0$ est toujours négatif.

2° Pour $\sigma = \infty$, on a $\sigma_r = \infty$, $\mu'_r = \infty$, τ étant quelconque. On a alors

$$\begin{aligned} \alpha_r &= -\frac{405}{9}\sigma^4 + 6\sigma_r^2\frac{15\sigma^4}{3\sigma_r^2} + \frac{\mu'_r}{\sigma_r}\frac{135}{3}\frac{\sigma^4}{\tau^2} \\ &= -15\sigma^4 + 45\frac{\mu'_r}{\sigma_r}\frac{\sigma^4}{\tau^2}, \\ \beta &= \frac{135\sigma^4}{3\tau^3} = 45\frac{\sigma^4}{\tau^3}, \end{aligned}$$

d'où

$$(Y_r)_\infty = -\frac{1}{3}\frac{\tau^3}{\mu_r'} + \frac{\tau}{\sigma_r} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\tau}{\sigma_r} = 0.$$

On tire de ces résultats partiels le tableau suivant :

σ	0		σ_1		$+\infty$
$\frac{dY_r}{d\sigma}$		$-$		$-$	
Y_r	$(-)$	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0

Y_r est donc négatif pour $\sigma < \sigma_1$, positif pour $\sigma > \sigma_1$.

A_r ayant même signe que Y_r pour $\sigma > \sigma_1$ et signe contraire pour $\sigma < \sigma_1$, on en déduit que A_r *est toujours positif.*

14. Les quantités A et A_r étant essentiellement positives, (6) montre que U_{p-1} est positif, si ω est supposée positive. On a donc

$$\frac{dK_{p-1}}{d\tau} > 0$$

et

$$\frac{dk}{d\tau} > 0.$$

k est une fonction toujours croissante de τ.

Pour $\tau = 0$, on a $\omega = 0$, d'où $K_{p-1} = 0$ et $k = 0$.

Pour $\tau = \infty$, on voit que le produit $\omega(\sigma^2 + \tau^2)(5\sigma^2 + \tau^2)$ est de l'ordre de $\omega\tau^4$; or, pour τ très grand, ω est de l'ordre de $\tau^{-\frac{3}{2}}$, donc $\omega(\sigma^2+\tau^2)(5\sigma^2+\tau^2)$ est de l'ordre de $\tau^{\frac{5}{2}}$; et σ_{p-1} et σ_p étant de l'ordre de τ^{-2}, K_{p-1} devient infiniment grand; il en est de même de k.

Nous arrivons donc à ce résultat définitif qui généralise une propriété connue des ellipsoïdes homogènes de Mac-Laurin et de Jacobi :

Dans le cas des ellipsoïdes homofocaux de révolution, lorsque la quantité $\tau = \sqrt{a^2 - b^2}$ croît de zéro à l'infini, le moment cinétique μ croît constamment de zéro à l'infini.

B. — CAS DES ELLIPSOÏDES HOMOTHÉTIQUES.

15. On peut se poser la même question dans le cas où les ellipsoïdes de séparation sont tous homothétiques et de révolution autour de l'axe de rotation.

Nous les écrirons

$$\frac{x^2}{\rho_p^2 - a_p^2} + \frac{y^2 + z^2}{\rho_p^2 - b_p^2} - 1 = 0,$$

ou, en posant

$$\rho_p^2 - a_p^2 = \sigma_p^2, \qquad \rho_p^2 - b_p^2 = (1+\lambda^2)(\rho_p^2 - a_p^2) \qquad (\lambda = \text{const.}),$$

$$\frac{x^2}{\sigma_p^2} + \frac{y^2+z^2}{(1+\lambda^2)\sigma_p^2} - 1 = 0.$$

L'équation générale des ellipsoïdes homofocaux à S_q étant

$$\frac{x^2}{\rho^2 - a_q^2} + \frac{y^2+z^2}{\rho^2 - b_q^2} - 1 = 0,$$

nous désignerons par $\rho_{q,P}$ la valeur de ρ correspondant à celui de ces ellipsoïdes passant par un point P de S_p.

En tenant compte des égalités telles que

$$a_k^2 - b_k^2 = (\rho_k^2 - b_k^2) - (\rho_k^2 - a_k^2) = (\rho_k^2 - a_k^2)\lambda^2$$

et posant

$$\frac{\sqrt{\rho_q^2 - a_q^2}}{\sqrt{\rho_{q,P}^2 - a_q^2}} = \varepsilon_{q,P} \qquad \text{ou, plus simplement, } \varepsilon_q,$$

d'où

$$\rho_{q,P}^2 - a_q^2 = \frac{\rho_q^2 - a_q^2}{\varepsilon_q^2}$$

et

$$\rho_{q,P}^2 - b_q^2 = \frac{1+\lambda^2\varepsilon_q^2}{\varepsilon_q^2}(\rho_q^2 - a_q^2),$$

les expressions (5) des fonctions de Lamé donnent

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p^2 = \frac{1}{1+\lambda^2},$$

$$\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r = \frac{3}{\lambda^2\sigma_r^3}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\operatorname{arc\,tang}\lambda\right),$$

$$\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_r = \frac{3}{2\lambda^2\sigma_r^3}\left(\frac{1}{\lambda}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{1}{1+\lambda^2}\right),$$

$$\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_{q,P} = \frac{3}{\lambda^2\sigma_q^3}\left(\varepsilon_q - \frac{1}{\lambda}\operatorname{arc\,tang}\lambda\varepsilon_q\right),$$

$$\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_{q,P} = \frac{3}{2\lambda^2\sigma_q^3}\left(\frac{1}{\lambda}\operatorname{arc\,tang}\lambda\varepsilon_q - \frac{\varepsilon_q}{1+\lambda^2\varepsilon_q^2}\right),$$

d'où, au point P de S_p, la valeur de la rotation

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{\omega_P^2}{2\pi} = \left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3}{\lambda^2}\right)\rho_p$$
$$+ \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q \left[\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda\varepsilon_q - \frac{\varepsilon_q}{\lambda^2}\,\frac{3+\lambda^2(1+2\varepsilon_q^2)}{1+\lambda^2\varepsilon_q^2}\right],$$

et, pour un point compris entre S_{p-1} et S_p,

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = \left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3}{\lambda^2}\right)\rho_{p-1} + \sum_{q=p}^{n}\eta_q\left[\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda\varepsilon_q - \frac{\varepsilon_q}{\lambda^2}\,\frac{3+\lambda^2(1+2\varepsilon_q^2)}{1+\lambda^2\varepsilon_q^2}\right].$$

16. Si x, y, z sont les coordonnées du point considéré, $\rho_{q,\mathrm{P}}$ vérifie

$$\frac{x^2}{\rho_{q,\mathrm{P}}^2 - a_q^2} + \frac{y^2+z^2}{\rho_{q,\mathrm{P}}^2 - b_q^2} - 1 = 0,$$

avec

$$\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{y^2+z^2}{(1+\lambda^2)\sigma^2} - 1 = 0,$$

σ étant le demi-petit axe de l'ellipsoïde homothétique passant en ce point.

Égalant les deux valeurs de y^2+z^2, il vient

$$(7) \qquad \lambda^2 x^2 \varepsilon_q^4 + [(1+\lambda^2)\sigma^2 - \lambda^2(x^2+\sigma_q^2)]\,\varepsilon_q^2 - \sigma_q^2 = 0.$$

On prendra la racine en ε_q comprise entre 0 et 1.

17. Écrivons que la masse du liquide comprise entre S_{p-1} et S_p est donnée; il vient

$$\frac{4}{3}\pi\delta_{p-1}(1+\lambda^2)(\sigma_{p-1}^3 - \sigma_p^3) = \mathrm{M}_{p-1},$$

d'où

$$\sigma_{p-1}^3 - \sigma_p^3 = \frac{\mu_{p-1}}{1+\lambda^2} \qquad \left(\mu_{p-1} = \frac{3}{4\pi}\frac{\mathrm{M}_{p-1}}{\delta_{p-1}}\right).$$

Prenant $p = n+1$, puis remontant de proche en proche, on obtient

$$\sigma_p = \frac{\mu'_p}{(1+\lambda^2)^{\frac{1}{3}}},$$

où

$$\mu'_p = (\mu_n + \mu_{n-1} + \ldots + \mu_p)^{\frac{1}{3}}.$$

18. Le moment cinétique μ est égal à

$$\mu = 4\pi(1+\lambda^2)^2 \sum_{p=2}^{n+1} \delta_{p-1} \int_{\sigma_p}^{\sigma_{p-1}} \sigma\,d\sigma \int_0^{\sigma} \omega(\sigma^2 - x^2)\,dx.$$

Pour $\lambda = 0$, la rotation est partout nulle, le moment de rotation également.

Pour $\lambda = \infty$, ω^2 devient nul comme λ^{-1}, donc ω comme $\lambda^{-\frac{1}{2}}$. On en déduit, σ_p et σ_{p-1} étant infiniment petits d'ordre $\frac{2}{3}$, que μ est infiniment grand d'ordre $\frac{1}{6}$.

Comme μ est une fonction continue de λ, *à chaque valeur de* λ *il correspond donc au moins une valeur de* μ.

19. Mais il semble difficile de pouvoir affirmer que μ soit une fonction toujours croissante de λ.

Posons, en effet,

$$k = \frac{\mu}{4\pi} = \sum_{p=2}^{n+1} \delta_{p-1}\mathrm{K}_{p-1}.$$

ω étant une fonction de σ, x et λ, l'intégrale $\int_0^\sigma \omega(\sigma^2-x^2)dx$ est une fonction de σ et λ, que nous désignerons par $f(\sigma, \lambda)$.

On a

$$K_{p-1} = (1+\lambda^2)^2 \int_{\sigma_p}^{\sigma_{p-1}} \sigma f(\sigma, \lambda)\, d\sigma,$$

d'où, en tenant compte de la dépendance de σ_p et σ_{p-1} vis-à-vis de λ,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\lambda^2}\frac{dK_{p-1}}{d\lambda} &= 4\lambda\int_{\sigma_p}^{\sigma_{p-1}} \sigma f(\sigma,\lambda)\, d\sigma + (1+\lambda^2)\int_{\sigma_p}^{\sigma_{p-1}} \sigma\frac{\partial f}{\partial\lambda}d\sigma - \frac{2\lambda}{3}\left[\sigma_{p-1}^2 f(\sigma_{p-1},\lambda) - \sigma_p^2 f(\sigma_p,\lambda)\right] \\
&= \int_{\sigma_p}^{\sigma_{p-1}}\left[4\lambda\sigma f(\sigma,\lambda) + (1+\lambda^2)\sigma\frac{\partial f}{\partial\lambda} - \frac{2\lambda}{3}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2 f(\sigma,\lambda)\right)\right]d\sigma \\
&= \int_{\sigma}^{\sigma_{p-1}} U_{p-1}\, d\sigma.
\end{aligned}$$

Remplaçant $f(\sigma, \lambda)$ par sa valeur, on trouve facilement

$$\begin{aligned}
U_{p-1} &= \int_0^\sigma \left\{\sigma(\sigma^2-x^2)\left[\frac{8\lambda}{3}\omega + (1+\lambda^2)\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}\right] - \frac{2\lambda}{3}\sigma^2\left[(\sigma^2-x^2)\frac{\partial\omega}{\partial\sigma} + 2\sigma\omega\right]\right\}dx \\
&= \int_0^\sigma V_{p-1}\, d\sigma;
\end{aligned}$$

on se rend compte que l'on peut écrire

$$\frac{\omega}{\sigma}V_{p-1} = \delta_{p-1}A + \sum_{q=p}^{n} A_q\eta_q,$$

mais que A ne garde pas un signe constant dans tout l'intervalle de variation, mais passe du positif au négatif lorsque x varie de o à 6.

III. — Figures dérivées des ellipsoïdes homofocaux.

20. Établissons d'abord quelques formules utiles pour la suite.

Dans l'espace, on définit la position d'un point comme l'intersection des trois quadriques de la famille

$$\frac{x^2}{\lambda^2-a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2-b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2-c^2} - 1 = 0 \qquad (a > b > c)$$

qui passent par ce point, et l'on obtient les formules classiques qui fournissent x, y, z au moyen des trois racines

$$\rho, \quad \mu, \quad \nu \qquad (\rho > a > \mu > b > \nu > c)$$

de cette équation en λ.

Si b tend vers c, on pose

$$b^2 = c^2 + \varepsilon, \qquad \nu^2 = c^2 + \varepsilon\nu'^2,$$

$$\nu' = \sin\varphi, \qquad \sqrt{\rho^2 - a^2} = r_1, \qquad \sqrt{\rho^2 - c^2} = r_2, \qquad \sqrt{\frac{\mu^2 - c^2}{a^2 - c^2}} = \sin\theta,$$

puis l'on fait tendre ε vers zéro et l'on obtient à la limite les formules

$$\begin{aligned} x &= r_1 \cos\theta, \\ y &= r_2 \sin\theta \cos\varphi, \\ z &= r_2 \sin\theta \sin\varphi, \end{aligned}$$

qui définissent les coordonnées d'un point au moyen des trois paramètres ρ, θ, φ. On obtient tous les points de l'espace en faisant varier ρ de a à $+\infty$, θ de 0 à π, φ de 0 à 2π.

Si l'on fait $\rho = \text{const.}$, on obtient l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{y^2 + z^2}{\rho^2 - b^2} - 1 = 0$$

de révolution autour de Ox.

Nous aurons besoin des cosinus directeurs α, β, γ de la normale extérieure à l'ellipsoïde en un point (θ, φ).

On a

$$\frac{\alpha}{\dfrac{D(y, z)}{D(\theta, \varphi)}} = \frac{\beta}{\dfrac{D(z, x)}{D(\theta, \varphi)}} = \frac{\gamma}{\dfrac{D(x, y)}{D(\theta, \varphi)}};$$

on en déduit facilement

$$\alpha = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\cos\theta}{\sqrt{\rho^2 - a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta}},$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{\rho^2 - a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta}},$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2 - a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta}}.$$

Une fonction d'un point sur un tel ellipsoïde est une fonction de θ et φ, que l'on peut développer sous des conditions très générales en série de fonctions de Laplace

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi),$$

où

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{p=0}^{n} (A_n^p \cos p\varphi + B_n^p \sin p\varphi)\, X_n^p.$$

E_0 étant l'ellipsoïde qui correspond à la valeur ρ_0 de ρ, une fonction harmonique sur cet ellipsoïde, V_0, se développe sous la forme

$$V_0 = \sum_0^\infty \alpha_k R_k^0 S_k^0 Y_k(\theta, \varphi),$$

et le problème de Dirichlet relatif à cette fonction se traduit par les formules

$$V_i = \sum_0^\infty \alpha_k S_k^0 R_k Y_k,$$

$$V_e = \sum_0^\infty \alpha_k R_k^0 S_k Y_k.$$

On en déduit, par la démonstration classique appliquée à ce cas particulier, que le potentiel d'une couche infiniment mince de volume algébrique nul répartie sur l'ellipsoïde, de densité constante δ et de hauteur ε définie en chaque point par

$$\varepsilon = \sum_1^\infty \beta_k l_0 Y_k$$

est donné par les formules

$$V_i = \delta \sum_1^\infty \alpha_k S_k^0 R_k Y_k,$$

$$V_e = \delta \sum_1^\infty \alpha_k R_k^0 S_k Y_k,$$

avec

$$\alpha_k = \frac{4\pi}{2n+1} \beta_k \qquad (n, \text{ ordre de la fonction } R_k).$$

On a

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{(\rho_0^2 - b^2)(\rho_0^2 - a^2 \sin^2\theta - b^2 \cos^2\theta)}}.$$

21. Nous nous proposons de chercher des figures infiniment voisines de la configuration suivant des ellipsoïdes homofocaux, pour lesquelles existe un régime permanent de rotations, obtenues en ajoutant à chaque ellipsoïde S_k une couche infiniment mince C_k de volume algébrique nul, de même densité et de hauteur variable ε_k (nous écrirons dans la suite ε à la place de ε_p).

Considérons un point P sur l'ellipsoïde S_p; soit P′ le point dérivé de P sur la normale en P à S_p. Les coordonnées de P étant x, y, z, celles de P′ sont

$$x' = x + \alpha\varepsilon, \qquad \ldots.$$

Désignons par $V_k(x, y, z)$ le potentiel de l'ellipsoïde S_k en P. Le potentiel d'un ellipsoïde S_k en P′ sera

$$V_k(x + \alpha\varepsilon, \ldots) = V_k(x, y, z) + \left(\alpha \frac{\partial V_k}{\partial x} + \beta \frac{\partial V_k}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V_k}{\partial z}\right) \varepsilon.$$

Le potentiel d'une couche C_k sera, aux infiniment petits du second ordre près, $V_{C_k}(x, y, z)$.

On doit avoir, pour l'équilibre sur la surface S_p déformée,

$$\sum V_k(x+\alpha\varepsilon, \ldots) + \sum V_{C_k} + \frac{\omega^2}{2}\left[(y+\beta\varepsilon)^2 + (z+\gamma\varepsilon)^2\right] = \text{const.},$$

la rotation en P' étant supposée égale à la rotation en P. On en tire

$$\left[\sum V_k(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(y^2+z^2)\right] + \varepsilon \sum\left(\alpha\frac{\partial V_k}{\partial x} + \beta\frac{\partial V_k}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V_k}{\partial z}\right)$$
$$+ \sum V_{C_k} + \omega^2\varepsilon(\beta y + \gamma z) = \text{const.},$$

ou, le crochet étant lui-même constant,

$$\varepsilon\left[\sum\left(\alpha\frac{\partial V_k}{\partial x} + \beta\frac{\partial V_k}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V_k}{\partial z}\right) + \omega^2(\beta y + \gamma z)\right] + \sum V_{C_k} = \text{const.}$$

Utilisant les formules qui donnent les dérivées du potentiel d'un ellipsoïde sur un point intérieur ou extérieur, il vient

$$-\varepsilon\sum_{r=1}^{p}\eta_r T_r\left[\alpha x\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r + (\beta y + \gamma z)\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_r\right]$$
$$-\varepsilon\left[\alpha x\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_p + (\beta y + \gamma z)\left(\frac{S_2}{R_2}\right)_p\right]\sum_{q=p+1}^{n}\eta_q T_q + \omega^2\varepsilon(\beta y + \gamma z)$$
$$+\sum_{r=1}^{p}\eta_r\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)_r(S_k)_r(R_k)_p Y_k + \sum_{q=p+1}^{n}\eta_q\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)_q(R_k)_q(S_k)_p Y_k = \text{const.}$$

Des formules donnant α, β, γ, on tire

$$\alpha x = \frac{\sqrt{(\rho_p^2 - a^2)(\rho_p^2 - b^2)}\cos^2\theta}{\sqrt{\rho_p^2 - a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta}},$$

$$\beta y + \gamma z = \frac{\sqrt{(\rho_p^2 - a^2)(\rho_p^2 - b^2)}\sin^2\theta}{\sqrt{\rho_p^2 - a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta}},$$

$$\alpha x + (\beta y + \gamma z)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p^2 = \sqrt{\frac{\rho_p^2 - a^2}{\rho_p^2 - b^2}}\sqrt{\rho_p^2 - a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta}.$$

En tenant compte de la valeur de ω^2, le coefficient de ε dans l'équation précédente s'écrit

$$-\left[\alpha x + (\beta y + \gamma z)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)_p^2\right]\left[\sum_r \eta_r T_r\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r + \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_p\sum_q \eta_q T_q\right]$$
$$= -C\sqrt{\rho_p^2 - a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta},$$

C étant une quantité constante sur S_p, et la relation prend la forme

$$-C\varepsilon\sqrt{\rho_p^2 - a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta} + \sum_r \eta_r \sum_k (\alpha_k)_r (S_k)_r (R_k)_p Y_k$$
$$+ \sum_q \eta_q \sum_k (\alpha_k)_q (R_k)_q (S_k)_p Y_k = \text{const.},$$

ou, en vertu des valeurs de ε et C,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\sum_r \eta_r T_r \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r + \left(\frac{S_1}{R_1}\right)_p \sum_q \eta_q T_q \right] (\beta_k)_p \right.$$
$$\left. + \sum_r \eta_r (\alpha_k)_r (S_k)_r (R_k)_p + \sum_q \eta_q (\alpha_k)_q (R_k)_q (S_k)_p \right\} = \text{const.}$$

On en déduit que la constante est nulle et que toutes les quantités entre $\{\ \}$ sont nulles, ce qui donne une infinité de conditions, k variant de 1 à $+\infty$ et p devant prendre les valeurs 1, 2, ..., n.

Remplaçons α_k par $\frac{4\pi}{2n+1}\beta_k$ et exprimons les volumes T au moyen des fonctions de Lamé; les équations à vérifier deviennent

$$(8) \qquad \left\{ \left[\frac{(R_k S_k)_p}{2n+1} - \frac{(R_1 S_1)_p}{3} \right] \eta_p \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}\left(\frac{R_1}{R_4}\right)_p \sum_{r=1}^{p-1} \eta_r (R_4 S_1)_r - \frac{1}{3}\left(\frac{S_1}{R_4}\right)_p \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q (R_1 R_4)_q \right\} (\beta_k)_p$$
$$+ (R_k)_p \sum_{r=1}^{p-1} \frac{\eta_r}{2n+1} (S_k)_r (\beta_k)_r + (S_k)_p \sum_{q=p+1}^{n} \frac{\eta_q}{2n+1} (R_k)_q (\beta_k)_q = 0.$$

On obtient ainsi, en faisant k constant et en faisant varier p de 1 à n, n équations linéaires et homogènes aux inconnues β_k. Si le déterminant de ces équations est différent de zéro, tous les β correspondants sont nuls.

La condition pour obtenir une figure infiniment voisine de celle d'où l'on est parti est que le déterminant de ces équations soit nul.

22. On peut se demander si cette condition peut être réalisée. Dans le cas de deux ellipsoïdes S_1 et S_2, le déterminant se réduit à

$$\Delta_2 = A\eta_1^2 + B\eta_1\eta_2 + C\eta_2^2,$$

avec

$$A = -\frac{1}{3}(R_4 S_1)_1 \left(\frac{R_1}{R_4}\right)_2 \left[\frac{(R_k S_k)_1}{2n+1} - \frac{(R_1 S_1)_1}{3}\right],$$
$$C = -\frac{1}{3}\left(\frac{S_1}{R_4}\right)_1 (R_1 R_4)_2 \left[\frac{(R_k S_k)_2}{2n+1} - \frac{(R_1 S_1)_2}{3}\right].$$

Pour que ce déterminant ait une racine positive en $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, il suffit que A et C soient de signes contraires, ou qu'il en soit de même des deux quantités entre crochets dans A et C, condition que l'on sait pouvoir être réalisée (R_k doit n'être pas divisible par R_1).

Donc, avec deux ellipsoïdes seulement, on peut avoir des solutions.

Considérons maintenant le cas de n ellipsoïdes et soit Δ_n le déterminant correspondant. Si l'on fait $\eta_n = 0$, la condition $\Delta_n = 0$ se réduit à $\Delta_{n-1} = 0$ relative à $n-1$ ellipsoïdes. Supposons alors que la condition $\Delta_{n-1} = 0$ puisse être vérifiée par des valeurs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ toutes positives. Pour η_n positif et assez petit, on pourra avoir en général $\Delta_n = 0$ pour des valeurs de η_1, $\eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ encore toutes positives.

Par récurrence, on voit donc qu'il est possible d'avoir $\Delta = 0$ avec des η tous positifs, quel que soit l'entier n.

23. Nous allons montrer que le système (8) ne peut avoir plus d'une solution distincte.

Il nous suffit pour cela de montrer qu'un mineur d'ordre $n-1$ est certainement différent de zéro.

Les équations (8) étant mises sous la forme

$$\alpha_i^1\beta_1 + \alpha_i^2\beta_2 + \ldots + \alpha_i^n\beta_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

[on a écrit β_p pour $(\beta_k)_p$], remarquons que l'on peut poser

$$\begin{matrix} \alpha_{n-1}^j = (R_k)_{n-1}a_j, & \alpha_{n-1}^{n-1} = a_{n-1} \\ \alpha_n^j = (R_k)_n a_j, & \alpha_n^n = a_n \end{matrix} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Considérons alors le déterminant d'ordre $n-1$:

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-2}^1 & \alpha_{n-2}^2 & \ldots & \alpha_{n-2}^{n-2} & \alpha_{n-2}^{n-1} \\ \alpha_{n-1}^1 & \alpha_{n-1}^2 & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Multipliant les éléments de l'avant-dernière ligne par $\frac{(R_k)_n}{(R_k)_{n-1}}$ et retranchant des éléments correspondants de la dernière ligne, on voit que δ serait nul, soit pour

$$(R_k)_{n-1}\alpha_n^{n-1} - (R_k)_n\alpha_{n-1}^{n-1} = 0,$$

soit pour

$$\delta' = \begin{vmatrix} \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_2^{n-2} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_{n-2}^1 & \ldots & \alpha_{n-2}^{n-2} \\ a_1 & \ldots & a_{n-2} \end{vmatrix} = 0.$$

Or la première condition, qui équivaut à

$$\frac{1}{3}(R_k)_n\left[(R_1S_1)_{n-1}\eta_{n-1}+\left(\frac{R_1}{R_4}\right)_{n-1}\sum_{r=1}^{n-2}\eta_r(R_4S_1)_r+\left(\frac{S_1}{R_4}\right)_{n-1}(R_1R_4)_n\eta_n\right]=0,$$

ne peut être vérifiée en vertu du signe positif de tous les η.

A cause des égalités

$$\alpha_{n-2}^l=(R_k)_{n-2}a_l \qquad (l=1,\ 2,\ \ldots,\ n-3),$$

la condition $\delta'=0$ se ramène à une condition analogue à $\delta=0$ et se traduit, soit par

$$\alpha_{n-2}^{n-2}-(R_k)_{n-2}a_{n-2}=0$$

ou

$$(R_1S_1)_{n-2}\eta_{n-2}+\left(\frac{R_1}{R_4}\right)_{n-2}\sum_{r=1}^{n-3}\eta_r(R_4S_1)_r+\left(\frac{S_1}{R_4}\right)_{n-2}\sum_{q=n-1}^{n}\eta_q(R_1R_4)_q=0$$

(irréalisable), soit par l'annulation d'un déterminant de même forme que δ'.

On verra de proche en proche que δ ne pourrait être nul que si le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\frac{(S_k)_1\eta_1}{2n+1}\left[(R_1S_1)_2\eta_2+\left(\frac{R_1}{R_4}\right)_2(R_4S_1)_1\eta_1+\left(\frac{S_1}{R_4}\right)_2\sum_{q=3}^{n}\eta_q(R_1R_4)_q\right]$$

était nul, ce qui est impossible.

Donc le déterminant δ d'ordre $n-1$ est différent de zéro, et *le système* (8) *ne peut admettre plus d'une solution distincte.*

24. Faisons dans les équations (8)

$$k=1, \qquad n=1;$$

comme on le voit facilement, leur déterminant est nul et elles admettent la solution

$$(\beta_1)_h=(R_4)_h.$$

D'après le résultat précédent elles n'en admettent pas d'autre et l'on a, d'une façon générale,

$$(\beta_1)_h=\lambda(R_4)_h,$$

λ étant une constante.

Un résultat bien connu montre que l'on passe de l'ellipsoïde primitif à la figure transformée par une translation suivant l'axe des x, de grandeur

$$\varepsilon=\lambda(a^2-b^2).$$

Pour $k=n=1$, on n'obtient donc pas de figure nouvelle. Les figures nouvelles ne commencent que pour $k+n>2$.

25. En résumé, *la méthode de Poincaré appliquée aux ellipsoïdes homofocaux permet d'en déduire des figures infiniment voisines obtenues en ajoutant à chaque ellipsoïde une couche infiniment mince de volume algébrique nul, avec conservation de la rotation lorsqu'on passe d'un point à son dérivé.*

Il y a une infinité de conditions à vérifier, qui se décomposent en systèmes de n équations linéaires et homogènes par rapport aux coefficients qui définissent la hauteur de la couche en chaque point. On obtient une nouvelle figure si le déterminant d'un de ces systèmes est nul. Chacun de ces systèmes ne peut avoir plus d'une solution.