JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN LERAY

Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 24 (1945), p. 95-167.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1945_9_24__95_0>

Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations

(PREMIÈRE PARTIE D'UN COURS DE TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE PROFESSÉ EN CAPTIVITÉ);

PAR JEAN LERAY.

Préface.

L'exposé rédigé par M. J. Leray « Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations », est la première partie d'un Cours de Topologie algébrique, appelé à faire quelque bruit dans le monde mathématique. Le sujet est neuf et de grande actualité. Mais en dehors d'un livre de MM. Alexandroff et Hopf, il n'existe encore aucun traité didactique sur ces sortes de questions. Les prolongements de ces nouvelles théories, qui englobent la théorie des équations, vont beaucoup plus loin que cette dernière : elles comprennent toutes les transformations s'appliquant aux espaces topologiques, moyennant une définition nouvelle des anneaux d'homologie.

M. J. Leray fait ici œuvre de grand précurseur; presque tout, dans son exposé, est dû à son propre fonds; les procédés classiques étant en général inopérants, il fait usage de méthodes personnelles, nouvelles et fécondes; il parvient à éliminer, comme trop restrictives, la notion de groupes d'homologie continue et celle des groupes de Betti, — groupes dont il retrouve d'ailleurs incidemment les propriétés, comme cas très particuliers de ses propositions.

La brièveté et la généralité des propositions qu'il obtient justifient amplement l'intérêt des notions qu'il introduit dans son beau travail, dont la publication constituera pour la Science française un événement d'importance.

Il est presque superflu d'insister sur l'opportunité d'une telle publication : on sait le renom de l'auteur, dont les nouvelles méthodes concernant les équations différentielles ou aux dérivées partielles, et les équations intégro-différentielles, ont eu immédiatement un retentissement mondial. Ajoutons que M. J. Leray, professeur à la Sorbonne, a écrit le présent travail en captivité (il est encore prisonnier, détenu à l'Oflag XVII). Le travail actuel a reçu de M. Hopf, professeur à l'Université de Zurich (savant d'une compétence notoire sur le sujet,) une adhésion enthousiaste.

H. VILLAT.

11 janvier 1944.

Introduction.

Historique. — La topologie est la branche des mathématiques qui étudie la continuité : elle ne consiste pas seulement en l'étude de celles des propriétés des figures qui sont invariantes par les représentations topologiques [1] : les travaux de MM. Brouwer, H. Hopf, Lefschetz lui ont aussi [2] assigné pour but l'étude des représentations (c'est-à-dire des transformations univoques et continues) et des équations. Elle débute par la définition des espaces topologiques; ce sont les espaces abstraits dans lesquels les notions suivantes ont un sens : ensembles de points ouverts et fermés, représentations. Elle se poursuit par l'introduction de nouveaux êtres algébrico-géométriques : complexes, groupes et anneaux. On nomme topologie ensembliste la partie de la topologie qui n'utilise que les opérations suivantes : réunion, intersection et fermeture d'ensembles de points; nous supposerons connu l'exposé qu'en donnent les deux premiers chapitres de l'excellent Traité de MM. Alexandroff et Hopf [3]. On nomme topologie algébrique (ou topologie combinatoire) la partie de la topologie qui utilise des notions algébrico-géométriques; notre objet est la topologie algébrique, plus précisément la théorie de l'homologie et ses applications à la théorie des équations et à celle des transformations.

La théorie de l'homologie a fait depuis quelques années un double progrès, dont l'origine est le procédé de détermination des nombres de Betti des espaces de groupes clos qu'a indiqué M. E. Cartan [4] :

D'une part M. De Rham [5], en développant ce procédé, a identifié les caractères des groupes de Betti à certaines classes de formes de Pfaff; du fait que les formes de Pfaff constituent un anneau résulte que ces caractères constituent eux-même un anneau : l'anneau d'homologie. MM. Alexander,

---

(1) Une représentation topologique est une transformation biunivoque qui est continue dans les deux sens.

(2) *Voir* la conférence de M. H. Hopf, *Quelques problèmes de la théorie des représentations continues* (*L'Enseignement math.*, 35, 1936, p. 334).

(3) Alexandroff et Hopf, *Topologie*, I, Springer, 1935. Nous nous référerons fréquemment à ce Traité, que nous désignerons par l'abréviation A.-H. Il expose toutes les notions dont nous aurons à faire usage.

(4) *Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos* (*C. R. Acad. Sc.*, **187**, 1928, p. 196-198); *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes* (*Annales Soc. polon. math.*, 8, 1929, p. 181-225); *La topologie des espaces représentatifs de groupes de Lie* (*L'Enseignement math.*, 35, 1936, p. 177).

(5) *Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions* (*J. Math., pures et appl.*, **10**, 1931, p. 115); *Sur la théorie des intersections et les intégrales multiples* (*Commentarii Math. Helv.*, 4, p. 151); *Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples* (*L'Enseignement math.*, 35, 1936, p. 213); *Ueber mehrfache Integrale* (*Abhandlungen Math. Seminar Hansischen Universität,* **12**, 1938).

Kolmogoroff, Čech, Alexandroff ([6]) ont réussi à étendre la définition de cet anneau d'homologie aux espaces localement bicompacts, puis aux espaces normaux; si MM. Kolmogoroff et Alexandroff ont étudié simultanément l'anneau d'homologie et le groupe de Betti, M. Alexander, par contre, a remarqué qu'il suffisait d'étudier les propriétés de l'anneau d'homologie, celles du groupe de Betti en résultant par dualité. Ce dernier point de vue sera le nôtre; il a entre autres avantages celui de s'apparenter aux conceptions géométriques de M. E. Cartan : on sait que l'anneau des formes de Pfaff ([7]) y joue un rôle presque exclusif.

D'autre part les résultats que fournit la détermination des nombres de Betti des quatre grandes classes de groupes simples suggéra à M. H. Hopf une étude ([8]) extrêmement originale de l'anneau d'homologie d'espaces possédant des représentations en eux-mêmes d'un certain type; M. Hopf n'a appliqué ses raisonnements qu'aux multiplicités orientables et fermées, espaces dans lesquels le groupe de Betti s'identifie à l'anneau d'homologie.

Rappelons par ailleurs le développement de la théorie des équations et des transformations : Les travaux fondamentaux sont ceux de M. Brouwer (*voir* A.-H.); ils sont basés sur la notion d'approximation simpliciale et concernent les pseudo-multiplicités. L'essentiel des résultats de M. Brouwer a été étendu, par passages à la limite, aux espaces abstraits linéaires ([9]).

Mon dessein initial fut d'imaginer une théorie des équations et des transformations s'appliquant directement aux espaces topologiques. J'ai dû recourir à des procédés nouveaux, renoncer à des procédés classiques, et il m'est impossible d'exposer cette théorie des équations et des transformations, sans, d'une part, donner une nouvelle définition de l'anneau d'homologie et, d'autre part, adapter les raisonnements cités de M. Hopf à des hypothèses plus générales que les siennes.

Sommaire. — J'introduis, à côté de la notion classique de recouvrement, qui appartient à la topologie ensembliste, une notion beaucoup plus maniable,

---

([6]) Alexander, *Ann. of Math.*, **37**, 1936, p. 698; *Proc. Nat. Acad. U. S. A.*, **22**, 1936; Kolmogoroff, *C. R. Acad. Sc.*, **202**, 1936, p. 1144, 1325, 1558, 1641; Čech, *Ann. of Math.*, **37**, 1936, p. 681; Alexandroff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **49**, 1941, p. 41.

([7]) Notons que la théorie des formes de Pfaff permet à M. E. Cartan de résoudre des problèmes d'équivalence, c'est-à-dire de trouver des conditions *nécessaires et suffisantes* pour qu'existent certaines représentations topologiques, tandis que la topologie, dans son état actuel, ne réussit qu'à établir des conditions *nécessaires* pour que deux figures soient homéomorphes.

([8]) *Ueber die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen* (*Annals of Math.*, **42**. 1941, p. 22-52).

([9]) Birkhoff-Kellog, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **23**, 1922; Schauder, *Studia math.*, **1**, 1929, p. 123; *Math. Ann.*, **106**, 1932, p. 661; Leray-Schauder, *Ann. École norm. sup.*, **51**, 1934, p. 45; Leray, *C. R. Acad. Sc.*, **200**, 1935, p. 1082; Tychonoff, *Math. Ann.*, 1935.

celle de couverture, qui appartient à la topologie algébrique; cette notion et celle d'intersection de complexes, que je crois originales, fournissent une définition ([10]) de l'anneau d'homologie extrêmement directe et appropriée à l'étude des représentations (Chap. I). Par contre, je n'effectuerai aucune subdivision de complexes, je ne ferai aucune hypothèse d'orientabilité et je n'emploierai aucune approximation simpliciale : je ne supposerai jamais l'espace localement linéaire ([11]). Quand j'ai besoin de particulariser l'espace, j'énonce des hypothèses concernant seulement les propriétés de ses représentations en lui-même; et c'est alors qu'entrent en jeu les raisonnements de M. Hopf (Chap. I, § VI) ou des raisonnements apparentés (Chap. I, § V). J'avais initialement utilisé « le groupe d'homologie continue » de l'espace, comme en témoignent les quatre Notes que j'ai publiées aux *Comptes rendus de l'Académie* en 1942, avant que mes idées n'aient pris leur forme actuelle. J'ai réussi depuis à éliminer cette notion; partageant l'opinion de M. Alexander, déjà citée, je crois superflu, donc nuisible, d'introduire les groupes de Betti d'un espace topologique : le $p^{\text{ième}}$ groupe de Betti n'a d'autre propriété que d'être le groupe des caractères du groupe que constituent les classes d'homologie de dimension p.

Toutefois les groupes de Betti de l'espace jouent un rôle essentiel et les théorèmes de dualité de M. Pontrjagin (A.-H., *Anhang*, I, § V) un rôle important dans l'étude, qui constitue le Chapitre II, des espaces de Hausdorff bicompacts possédant un recouvrement « convexoïde »; je prouve que ces espaces ont les mêmes propriétés d'homologie que les polyèdres. J'ignore si le procédé de détermination de leur anneau d'homologie que je décris est apparenté à quelque procédé connu.

Le Chapitre III, consacré aux points fixes des représentations, amorce ma théorie des équations. Sa brièveté et la généralité des propositions qu'il énonce justifient l'intérêt des notions précédemment introduites, qui y trouvent chacune une application.

Cette première partie de mon Cours de topologie algébrique se borne donc aux problèmes dans lesquels on ne fait jouer de rôle spécial à aucun sous-espace de l'espace étudié, c'est-à-dire aux problèmes liés à la forme de l'espace. Au contraire, la suite s'intitulera : *Sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique; sur les équations et les transformations*. Son

---

([10]) Cette définition diffère considérablement des définitions citées ci-dessus ([9]) et ne leur est pas confrontée.

([11]) La tendance actuelle est d'éviter de formuler a priori les conditions qu'un espace est localement linéaire ou homéomorphe à un sous-ensemble d'un espace linéaire et de chercher au contraire à établir a posteriori que de telles conditions résultent d'hypothèses très générales (*Cf.* : la théorie des représentations linéaires des groupes abstraits; A.-H., *Einbettungssatz von Urysohn, von Menger-Nöbling*).

intérêt essentiel sera la théorie des équations qu'elle exposera. Elle débutera par une extension aux espaces normaux du théorème de dualité d'Alexander; de telles extensions ont déjà été données, dans le cas des espaces localement bicompacts, par MM. Alexandroff, Pontrjagin, Kolmogoroff et Alexander : elles constituent d'ailleurs la seule application que ces Auteurs aient donnée de leur définition de l'anneau d'homologie.

Je n'aurais pas réussi à effectuer ces recherches, dans les conditions où nous nous trouvions, sans l'aide très généreuse de M. Henri Villat, de M. Gaston Julia et de M. Heinz Hopf; je suis heureux de pouvoir leur exprimer ici ma gratitude.

Notations.

J'adopte les notations de *topologie ensembliste* de A.-H. (Chap. I et II). Par exemple : Étant donnés des ensembles de points E_1, E_2, ... E_α ..., leur réunion est désignée par $E_1 + E_2 + \ldots = \sum_\alpha E_\alpha$, leur intersection par $E_1 . E_2 \ldots = \prod_\alpha E_\alpha$, leur produit (A.-H., I, § 1, 10) par $E_1 \times E_2 \times \ldots$; $\Phi(x)$ étant une transformation ponctuelle (univoque ou multivoque), le « transformé par Φ de l'ensemble E de points x » est l'ensemble $\Phi(E) = \sum_{x \in E} \Phi(x)$. Rappelons qu'on nomme représentations les transformations univoques et continues.

J'ai dû, par contre, m'écarter considérablement des notations usuelles de la *topologie algébrique*. Je me suis par exemple permis de donner des « simplexes » une définition duale de celle que A.-H. donne des « Homologie-Simplexe ». L'index qui suit indique à quel numéro se trouve définie chacune des notions de topologie algébrique que nous utiliserons.

CHAPITRE I.

L'ANNEAU D'HOMOLOGIE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE.

I. — Complexes abstraits.

La topologie algébrique utilise un formalisme algébrique, que ce paragraphe I expose indépendamment de la notion d'espace topologique.

1. Définition d'un complexe abstrait. — Un complexe abstrait est constitué par :

1° un nombre fini de variables indépendantes, $X^{p,\alpha}$, nommées *éléments* — le premier, p, des deux indices, p et α, qui les dénombrent est nommé *dimension* de $X^{p,\alpha}$ — ;

2° une *loi de dérivation* qui associe à chaque $X^{p,\alpha}$ une dérivée

$$\dot{X}^{p,\alpha} = \sum_{\beta} C\begin{bmatrix}\alpha\\ p\\ \beta\end{bmatrix} X^{p+1,\beta}$$

qui est une forme linéaire des $X^{p+1,\beta}$ à coefficients $C\begin{bmatrix}\alpha\\ p\\ \beta\end{bmatrix}$ entiers, positifs, négatifs ou nuls.

Nous assujettissons cette loi de dérivation à la condition suivante : *Toute dérivée seconde est nulle*, ceci signifiant que

$$(\dot{X}^{p,\alpha})^{\cdot} = \sum_{\beta} C\begin{bmatrix}\alpha\\ p\\ \beta\end{bmatrix} \dot{X}^{p+1,\beta} = \sum_{\beta,\gamma} C\begin{bmatrix}\alpha\\ p\\ \beta\end{bmatrix} C\begin{bmatrix}\beta\\ p+1\\ \gamma\end{bmatrix} X^{p+2,\gamma} = 0,$$

c'est-à-dire se traduisant par les conditions

$$\sum_{\beta} C\begin{bmatrix}\alpha\\ p\\ \beta\end{bmatrix} C\begin{bmatrix}\beta\\ p+1\\ \gamma\end{bmatrix} = 0.$$

Deux complexes C et C′, d'éléments $X^{p,\alpha}$ et $X'^{q,\beta}$, seront dits *isomorphes* lorsqu'on pourra établir entre leurs éléments de même dimension une correspondance biunivoque ($X^{p,\alpha} \leftrightarrow X'^{p,\alpha}$) et trouver un système de coefficients $\varepsilon(p, \alpha)$ valant tantôt $+1$ et tantôt -1, en sorte que la substitution $X^{p,\alpha} = \varepsilon(p, \alpha) X'^{p,\alpha}$ transforme la loi de dérivation de C en celle de C′.

2. Produit de deux complexes abstraits. — Soient deux complexes abstraits C et C′ *indépendants*, c'est-à-dire dont les éléments $X^{p,\alpha}$ et $X'^{q,\beta}$ sont indépendants. Nous nommerons produit $C \times C'$ de ces deux complexes le complexe abstrait qui a la structure suivante :

1° les éléments de $C \times C'$ sont les symboles $X^{p,\alpha} \times X'^{q,\beta}$, la dimension d'un tel élément étant $p + q$;

2° la dérivation est définie par la formule

$$(X^{p,\alpha} \times X'^{q,\beta})^{\cdot} = \dot{X}^{p,\alpha} \times X'^{q,\beta} + (-1)^p X^{p,\alpha} \times \dot{X}'^{q,\beta}, \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$= \sum_{\gamma} C\begin{bmatrix}\alpha\\ p\\ \gamma\end{bmatrix} X^{p+1,\gamma} \times X'^{q,\beta} + (-1)^p \sum_{\delta} C'\begin{bmatrix}\beta\\ q\\ \delta\end{bmatrix} X^{p,\alpha} \times X'^{q+1,\delta}.$$

La dérivée seconde de $X^{p,\alpha} \times X'^{q,\beta}$ est $(-1)^{p+1} \dot{X}^{p,\alpha} \times \dot{X}'^{q,\beta} + (-1)^p \dot{X}^{p,\alpha} \times \dot{X}'^{q,\beta}$, expression effectivement nulle.

Nous conviendrons d'identifier les complexes $C \times C'$ et $C' \times C$ en posant

$$X^{p,\alpha} \times X'^{q,\beta} = (-1)^{pq} X'^{q,\beta} \times X^{p,\alpha}; \tag{2}$$

on vérifie aisément que cette relation définit un isomorphisme, c'est-à-dire transforme la loi de dérivation de $C \times C'$ en celle de $C' \times C$.

3. Homologie. — Rappelons sommairement des définitions classiques (A.-H., Chap. IV et V) : soient un complexe abstrait C et un groupe abélien A choisi parmi les suivants :

a. l'anneau des entiers;

b. l'anneau des entiers calculés mod$m$ (cet anneau est un corps si m est premier);

c. le corps des nombres rationnels.

Considérons les *formes* linéaires dont les *coefficients* appartiennent à A et dont les arguments ([1]) sont les éléments à p dimensions de C : soient $\sum_\alpha A_\alpha X^{p,\alpha}$, où $A_\alpha \in A$: on les nomme formes à p dimensions. La dérivée d'une telle forme sera $\left(\sum_\alpha A_\alpha X^{p,\alpha}\right)^\bullet = \sum_\alpha A_\alpha \dot{X}^{p,\alpha}$. On nomme *cycles* les formes dont la dérivée est nulle. On dit que deux formes à p dimensions sont *homologues* entre elles lorsque leur différence est la dérivée d'une forme. L'homologie étant une relation transitive, répartit les cycles en classes de cycles homologues; ces classes sont nommées *classes d'homologie*. Les formes, les cycles, les cycles homologues à zéro et les classes d'homologie à p dimensions constituent respectivement les éléments de quatre groupes abéliens; le groupe des classes d'homologie à p dimensions sera nommé $p^{\text{ième}}$ *groupe de Betti* de C, relativement à A; il sera désigné par B^p. On peut résumer comme suit sa définition : il est le quotient du groupe des cycles par le groupe des cycles homologues à zéro. La relation $Z^{p,1} \sim Z^{p,2}$ exprimera tantôt l'homologie de deux formes $Z^{p,1}$ et $Z^{p,2}$, tantôt l'identité de deux classes d'homologie $Z^{p,1}$ et $Z^{p,2}$, tantôt l'appartenance d'un cycle $Z^{p,1}$ à une classe $Z^{p,2}$.

A.-H. (Chap. V, § 4) établit les rapports qui existent entre les divers groupes de Betti d'un même complexe, correspondant aux divers choix possibles de A; il montre que pour déterminer l'ensemble de ces groupes, il suffit de connaître l'un des deux systèmes suivants de groupes :

α. le groupe de Betti à coefficients entiers;

β. les groupes de Betti dont les coefficients sont les entiers calculés mod$m$, m valant successivement : 2, 3, 4, 5, ...

D'autre part le *théorème de Künneth* (A.-H., Chap. VII, § 3) permet de déduire des groupes de Betti de C et C′ ceux de $C \times C'$.

4. Simplexes. — Nous dirons qu'un complexe C possède un *cycle unité* lorsqu'il ne contient pas d'élément de dimension négative, qu'il contient au

([1]) Les calculs se font en considérant que ces arguments sont des variables indépendantes.

moins un élément de dimension nulle et que la somme $C^0 = \sum_\alpha X^{0,\alpha}$ de ses éléments de dimension nulle est un cycle, que nous nommerons cycle unité.

Nous dirons qu'un complexe est *connexe* (le lemme 4, n° **15**, justifiera cette terminologie), lorsqu'il possède, outre les propriétés précédentes, la suivante : tous ses cycles à zéro dimension sont du type $A_\alpha C^0$ (où $A_\alpha \in A$).

Nous dirons qu'un complexe C est un *simplexe* lorsqu'il est connexe et qu'en outre ses cycles de dimensions positives sont tous homologues à zéro.

Les passages de A.-H. cités à la fin du n° **3** ont les conséquences que voici :

Lemme 1. — *Pour qu'un complexe connexe soit un simplexe, il suffit que ses cycles de dimensions positives soient homologues à zéro quand les coefficients constituent l'un des deux systèmes de groupes a ou b du n°* **3**.

Lemme 2. — *Le produit d'un complexe arbitraire par un simplexe a mêmes groupes de Betti que ce complexe arbitraire;* en particulier le produit de deux simplexes est un simplexe.

Démontrons ce lemme 2, qui jouera un rôle important (n° **9**); le procédé de démonstration que nous allons employer est fondamental : il pourrait servir à établir le théorème de Künneth; il sera utilisé à nouveau, aux n^{os} **17**, **27** et **32**. Soient C le simplexe, C′ le complexe arbitraire. Soient $X'^{q,\beta}$ les éléments de C′; $L^{r,\gamma}$ et $L'^{s,\delta}$ désigneront respectivement des formes de C et C′; C^0 sera le cycle unité de C. Nommons $C^0 \times C'$ l'ensemble des formes $C^0 \times L'^{s,\delta}$. Proposons-nous d'étudier une forme de $C \times C'$,

$$M^p = \sum_{\beta,\, 0 \leqq q} L^{q,\beta} \times X'^{p-q,\beta}, \qquad \text{telle que } \dot{M}^p \in C^0 \times C'$$

(les divers $X'^{p-q,\beta}$ étant distincts).

Nommons poids Q de M^p la plus grande des valeurs prises par q; les termes de poids maximum de $\dot{M}^p$ sont $\sum_\beta \dot{L}^{Q,\beta} \times X'^{p-Q,\beta}$; ils sont nuls; par suite

$$\dot{L}^{Q,\beta} = 0.$$

Supposons $Q > 0$; puisque C est un simplexe, il existe des formes $L^{Q-1,\beta}$ telles que $L^{Q,\beta} = \dot{L}^{Q-1,\beta}$; d'où, les ... désignant des termes de poids inférieurs à Q,

$$M^p = \sum_\beta \dot{L}^{Q-1,\beta} \times X'^{p-Q,\beta} + \ldots = \Big(\sum_\beta L^{Q-1,\beta} \times X'^{p-Q,\beta}\Big)^{\bullet} + \ldots \sim \ldots;$$

ainsi M^p est homologue à une forme de poids inférieur à Q; donc à une forme de poids $Q = 0$ (ce raisonnement par récurrence vaut puisque deux formes homologues ont même dérivée).

Supposons donc que M^p soit une telle forme de poids $Q = 0$:

$$M^p = \sum_\beta L^{0,\beta} \times X'^{p,\beta}.$$

La relation $\dot{L}^{0,\beta} = 0$, jointe à l'hypothèse que C est un simplexe, exige l'existence d'un coefficient A_β tel que

$$L^{0,\beta} = A_\beta C^0, \qquad \text{donc } M^p = C^0 \times \sum_\beta A_\beta X'^{p,\beta} \in C^0 \times C'.$$

Ainsi toute forme de $C \times C'$ dont la dérivée appartient à $C^0 \times C'$ est elle-même homologue à une forme appartenant à $C^0 \times C'$. Il en résulte d'abord que tout cycle de $C \times C'$ est homologue à un cycle $C^0 \times Z'^p$, Z'^p devant évidemment être un cycle de C'. Il en résulte ensuite que si $C^0 \times Z'^p \sim 0$, c'est que $C^0 \times Z'^p = C^0 \times \dot{L}'^{p-1}$, c'est-à-dire que $Z'^p \sim 0$; la réciproque est évidente. La correspondance $Z'^p \leftrightarrow C^0 \times Z'^p$ est donc un isomorphisme des groupes de Betti de C' sur ceux de $C \times C'$. Nous conviendrons d'identifier les classes d'homologie Z'^p et $C^0 \times Z'^p$, afin de pouvoir conclure en ces termes : C' et $C \times C'$ ont mêmes groupes de Betti.

5. Simplexe engendré par les produits extérieurs d'un nombre fini d'éléments. — (Le présent numéro n'a pas pour seul but de donner un exemple de complexe abstrait : il nous servira au n° **10** à définir une notion fondamentale.) Envisageons un nombre fini ω de symboles $X^{0,1}, X^{0,2}, \ldots, X^{0,\omega}$; les formes linéaires à coefficients A_α entiers : $L^{0,\alpha} = A_{\alpha_1} X^{0,1} + A_{\alpha_2} X^{0,2} + \ldots + A_{\alpha_\omega} X^{0,\omega}$; enfin une opération, nommée produit extérieur, qui a les caractères suivants (¹) : le produit extérieur $L^{0,\alpha} \wedge L^{0,\beta} \wedge \ldots \wedge L^{0,\lambda}$ est une fonction linéaire et homogène de chacun de ses facteurs; il est associatif; il change de signe quand on permute deux facteurs (il est donc nul quand un même facteur y figure deux fois).

Nous nommerons « simplexe engendré par le produit extérieur des $X^{0,1}$, $X^{0,2}, \ldots, X^{0,\omega}$ » le complexe C qui a la structure suivante : ses éléments à zéro dimension sont $X^{0,1}, X^{0,2}, \ldots, X^{0,\omega}$; ses éléments à p dimensions sont les produits extérieurs

$$X^{p,\alpha} = X^{0,\alpha_0} \wedge X^{0,\alpha_1} \wedge \ldots \wedge X^{0,\alpha_p} \quad (\text{pour tous les choix possibles } \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p);$$

la loi de dérivation est

$$\dot{L}^{p,\alpha} = \dot{C}^0 \wedge L^{p,\alpha}, \qquad \text{où } C^0 = X^{0,1} + X^{0,2} + \ldots + X^{0,\omega}.$$

(¹) La notion de produit extérieur est due à Grassmann; elle joue un rôle fondamental dans la théorie des formes de Pfaff; *voir* par exemple E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, Hermann, 1922).

C est bien un complexe, puisque la loi de dérivation est telle que toute dérivée seconde est nulle. Prouvons que ce complexe est un simplexe. C^0 est bien un cycle. Soit Z^p un quelconque des cycles de C; la relation $\dot{Z}^p = 0$ signifie que $C^0 \wedge Z^p = 0$; on en déduit, en exprimant Z^p en fonction des quantités indépendantes C^0, $X^{0,2}$, $X^{0,3}$, ..., $X^{0,\omega}$, que C^0 peut être mis en facteur dans Z^p :

si $p > 0$, nous avons donc $\quad Z^p = C^0 \wedge L^{p-1}$,

c'est-à-dire $\quad Z^p = \dot{L}^{p-1}, \quad$ donc $Z^p \sim 0$;

si $p = 0$, nous avons $\quad Z^0 = A_\alpha C^0, \quad$ où $A_\alpha \in A$.

6. Sous-complexes. — Soit L^p une forme d'un complexe C; soient $X^{p,\alpha}$ ceux des éléments de C qui figurent dans L^p (avec un coefficient non nul); soient $X^{p+1,\beta}$ ceux des éléments de C qui figurent dans l'un au moins des $\dot{X}^{p,\alpha}$; soient $X^{p+2,\gamma}$ ceux des éléments de C qui figurent dans l'un au moins des $\dot{X}^{p+1,\beta}$, etc. Nous dirons que chacun de ces éléments $X^{p,\alpha}$, $X^{p+1,\beta}$, $X^{p+2,\gamma}$ *adhère* à L^p; nous désignerons leur ensemble par $\overline{L^p}$; nous écrirons $X^{p,\alpha} \in \overline{L^p}$, $X^{p+1,\beta} \in \overline{L^p}$, etc.

Un ensemble F d'éléments d'un complexe C sera dit fermé quand tout élément de C qui adhère à un élément de F appartient lui-même à F. Un ensemble G d'éléments de C sera dit ouvert quand tout élément de C auquel adhère un élément de G appartient lui-même à G. Les éléments de C étrangers à un ensemble ouvert G d'éléments de C constituent un ensemble fermé, dit complémentaire de G et vice versa. (En d'autres termes : C sera un espace topologique, la fermeture de $X^{p,\alpha}$ étant $\overline{X^{p,\alpha}}$; *voir* A.-H., Chap. III, § 1, 8.)

Nous nommerons *sous-complexe fermé* de C tout complexe F ayant la structure suivante : les éléments de F constituent un ensemble fermé d'éléments de C; la loi de dérivation qui règne dans F est celle qui règne dans C. (Toute égalité, toute homologie qui vaut dans F entre des formes et leurs dérivées vaut *a fortiori* dans C.)

Nous nommerons *sous-complexe ouvert* de C tout complexe G ayant la structure suivante : les éléments de G constituent un ensemble ouvert d'éléments de C; soit F le complémentaire de G; la loi de dérivation qui règne dans G se déduit de celle qui règne dans C en y supprimant tous les éléments de F (toute dérivée seconde reste effectivement nulle, puisque F est fermé). Nous dirons que G se déduit de C en *annulant* les éléments de F. La proposition que voici est évidente :

Lemme 3. — *De toute égalité, de toute homologie qui vaut dans* C *entre des formes et leurs dérivées on déduit une relation valant dans* G *en annulant les éléments de* F.

Exemple : Les éléments de C auxquels adhère un élément donné $X^{p,\alpha}$ constituent un sous-complexe ouvert de C, que nous désignerons par $\underline{X^{p,\alpha}}$.

Remarque. — Un sous-complexe ouvert d'un simplexe n'est pas, en général, un simplexe, même s'il est connexe (sinon la remarque terminant le n° **8** serait fausse).

Homogénéité des formules. — La somme des dimensions et du nombre de points signes de dérivation est la même pour tous les « monomes » d'une même formule; la barre supérieure, signe d'adhérence, équivaut à un nombre indéterminé, positif ou nul, de points signes de dérivation; au contraire $\underline{X}^{p,\alpha}$ représente des termes de dimensions au plus égales à p.

II. — Les complexes concrets, leur intersection, les couvertures.

7. Complexes concrets. — *Définition.* — Un complexe concret est constitué par :

1° un complexe abstrait, dit complexe abstrait de C;

2° un espace $|C|$, nommé support de C;

3° une loi qui associe à chaque élément $X^{p,\alpha}$ du complexe abstrait de C un ensemble *non vide* de points de $|C|$, nommé support de $X^{p,\alpha}$ et représenté par $|X^{p,\alpha}|$.

Cette loi doit vérifier les deux conditions suivantes :

si $X^{q,\beta} \in \overline{X}^{p,\alpha}$, alors $\qquad |X^{q,\beta}| \in |X^{p,\alpha}|; \qquad |C| = \sum_{p,\alpha} |X^{p,\alpha}|.$

Nota. — Nous abrégerons l'expression « les supports des éléments de C » en la suivante : « les supports de C ».

Pratiquement le complexe concret C sera défini par la donnée d'un complexe abstrait C' et d'une loi associant à chaque élément $X^{p,\alpha}$ de C' un support $|X^{p,\alpha}|$, qui sera un ensemble de points d'un espace E; cette loi vérifiera la condition :

si $X^{q,\beta} \in \overline{X}^{p,\alpha}$, alors $\qquad |X^{q,\beta}| \in |X^{p,\alpha}|;$

mais $|X^{p,\alpha}|$ pourra être l'ensemble vide. Le complexe abstrait de C sera le sous-complexe ouvert de C' qu'on obtient en annulant dans C' les éléments dont le support est vide. Nous dirons que C est le sous-complexe concret de C' que définit la loi associant $|X^{p,\alpha}|$ à $X^{p,\alpha}$. De toute égalité, de toute homologie valant dans C', on déduit une relation valant dans C en annulant les éléments à supports vides (en vertu du lemme 3).

Support d'une forme. — Soit $L^p = \sum_\alpha A_\alpha X^{p,\alpha}$ (où $A_\alpha \neq 0$) une forme de C; nous nommerons support de cette forme l'ensemble $|L^p| = \sum_\alpha |X^{p,\alpha}|$. Nous avons évidemment : $|A_\beta L^p| = |L^p|$ si A_β n'est pas diviseur de zéro :

$$\left|\sum_\alpha A_\alpha L^{p,\alpha}\right| \subset \sum_\alpha |L^{p,\alpha}|, \qquad |\dot{L}^p| \subset |L^p|.$$

8. Opérations sur les complexes concrets. — *Produit* $C \times C'$ *de deux complexes concrets* C *et* C'. — (Soient $X^{p,\alpha}$ les éléments de C et $X'^{q,\beta}$ ceux de C'.) Le complexe concret de $C \times C'$ sera le produit des complexes abstraits de C et C'. La loi définissant les supports sera

$$|X^{p,\alpha} \times X'^{q,\beta}| = |X^{p,\alpha}| \times |X'^{q,\beta}|.$$

Intersection $C.E'$ *d'un complexe concret* C *par un ensemble de points* E'. — Soient $X^{p,\alpha}$ les éléments de C; ceux de $C.E'$ seront les symboles $X^{p,\alpha}.E'$; et $C.E'$ sera le sous-complexe concret du complexe abstrait de C que définit la loi

$$|X^{p,\alpha}.E'| = |X^{p,\alpha}|.E'$$

(donc $X^{p,\alpha}.E' = 0$ quand $X^{p,\alpha}$ et E' sont disjoints).

Transformé $\Phi(C)$ *d'un complexe* C *par une transformation* Φ. — Φ est une transformation ponctuelle, univoque ou multivoque. Soient $X^{p,\alpha}$ les éléments de C; ceux de $\Phi(C)$ seront les symboles $\Phi(X^{p,\alpha})$; et $\Phi(C)$ sera le sous-complexe concret du complexe abstrait de C que définit la loi

$$|\Phi(X^{p,\alpha})| = \Phi(|X^{p,\alpha}|).$$

(Donc $\Phi(X^{p,\alpha}) = 0$ quand $|X^{p,\alpha}|$ et le champ de définition E' de Φ sont disjoints : les deux complexes $\Phi(C)$ et $C.E'$ ont le même complexe abstrait).

Intersection $C.C'$ *de deux complexes concrets* C et C'. — (Soient $X^{p,\alpha}$ les éléments de C et $X'^{q,\beta}$ ceux de C'). $C.C'$ sera un sous-complexe concret du produit des complexes abstraits de C et C'; à l'élément $X^{p,\alpha} \times X'^{q,\beta} = (-1)^{pq} X'^{q,\beta} \times X^{p,\alpha}$ de ce produit correspondra dans $C.C'$ un élément que nous nommerons $X^{p,\alpha}.X'^{q,\beta} = (-1)^{pq} X'^{q,\beta}.X^{p,\alpha}$ et dont le support sera

$$|X^{p,\alpha}.X'^{q,\beta}| = |X^{p,\alpha}|.|X'^{q,\beta}|.$$

Notons l'identité de $C.C'$ avec $C'.C$; explicitons la loi de dérivation dans $C.C'$: d'après (1) (n° **2**) et le lemme 3 nous avons

$$(X^{p,\alpha}.X'^{q,\beta})^{\cdot} = \dot{X}^{p,\alpha}.X'^{q,\beta} + (-1)^p X^{p,\alpha}.\dot{X}'^{q,\beta}. \tag{3}$$

La représentation $\overset{\circ}{\pi}(x)$. — Soit $\pi(x)$ la représentation associant au point x le point $x \times x$; son inverse $\overset{-1}{\pi}(x \times x')$ est égal à x si $x' = x$ et sinon n'est pas définie. Cette transformation établit le lien suivant entre les notions que nous venons de définir : $C.C'$ est identique à $\overset{-1}{\pi}(C \times C')$; en particulier

$$(4) \qquad X^{p,\alpha}.X'^{q,\beta} = \overset{-1}{\pi}(X^{p,\alpha} \times X'^{q,\beta}).$$

Remarque. — L'intersection d'un simplexe par un ensemble, l'intersection de deux simplexes, même si elle est connexe, n'est pas en général un simplexe, comme le prouve le n° **11**, figure 2.

9. Les couvertures. — *Définition.* — Nous nommons *couverture d'un espace topologique* E tout complexe concret K ayant les propriétés suivantes :

1° le support $|X^{p,\alpha}|$ de chaque élément de K est un ensemble *fermé* de points de E;

2° l'intersection de K par un point de E est un *simplexe,* quel que soit ce point;

3° la somme des éléments à o dimension de K, $K^0 = \sum_\beta X^{0,\beta}$, est un cycle, nommé *cycle unité* de K.

Intérêt de cette définition. — Jusqu'à présent la théorie de l'homologie a étudié la forme d'un espace topologique en analysant les propriétés de ses recouvrements par un nombre fini d'ensembles fermés; nous allons effectuer cette étude en analysant les propriétés des couvertures de l'espace; nous y gagnons de substituer à une notion de topologie ensembliste une notion bien plus maniable de topologie algébrique.

Propriétés des couvertures. — Les propriétés suivantes sont immédiates : $E = |K^0| = K$ (car tout simplexe contient par définition au moins un élément de dimension nulle).

Le produit de deux couvertures est une couverture (la démonstration utilise le lemme 2).

L'intersection d'une couverture par un ensemble de points est une couverture.

La transformée d'une couverture par la transformation inverse d'une représentation est une couverture (on nomme représentations, les transformations univoques et continues).

L'intersection de deux couvertures est une couverture.

10. Couverture engendrée par un recouvrement fermé fini. — (Le présent numéro n'a pas pour seul but de donner un exemple de couverture : les couvertures qu'engendrent les recouvrements jouent un rôle fondamental aux n° **16** (lemme 7), **19**, **22**, **37** et **43**).

Soient un espace topologique E et un nombre fini d'ensembles fermés F_α de points de E; supposons $\sum\limits_\alpha F_\alpha = E$: on dit que les F_α constituent un recouvrement fermé et fini de E (A.-H. Uberdeckung). Envisageons le complexe abstrait qu'engendrent les produits extérieurs des symboles F_α (n° **6**) et le sous-complexe concret K de ce simplexe que défini la loi

$$|F_{\beta_0} \wedge F_{\beta_1} \wedge \ldots \wedge F_{\beta_p}| = F_{\beta_0}.F_{\beta_1}\ldots F_{\beta_p}$$

(K n'est pas en général un simplexe : la couverture nommée $K.K'$ au n° **11**, figure 2, peut être engendrée par ce procédé et n'est pas un simplexe).

K est une couverture de E : l'intersection de K par un point de E est le simplexe même qu'engendrent les produits extérieurs de ceux des F_α qui contiennent ce point. Nous donnerons à K le nom de « couverture engendrée par le recouvrement F_α ».

Remarques. — Soit $X^{p,\beta} = F_{\beta_0} \wedge F_{\beta_1} \wedge \ldots F_{\beta_p}$ un élément non nul de K (on a $F_{\beta_0}.F_{\beta_1}\ldots.F_{\beta_p} \neq 0$); cet élément à p dimensions adhère exactement à $(p+1)$ éléments à $(p-1)$ dimensions (dont aucun n'est nul), à savoir

$$F_{\beta_1} \wedge F_{\beta_2} \wedge \ldots \wedge F_{\beta_p}; \quad F_{\beta_0} \wedge F_{\beta_2} \wedge F_{\beta_3} \wedge \ldots \wedge F_{\beta_p}; \quad F_{\beta_0} \wedge F_{\beta_1} \wedge F_{\beta_3} \wedge \ldots \wedge F_{\beta_p}, \quad \text{etc.}$$

Chacun des coefficients $C\begin{bmatrix}\alpha\\ p\\ \beta\end{bmatrix}$ qui figurent dans la loi de dérivation de K vaut ± 1.

Le sous-complexe (¹) $\underline{X^{p,\beta}}$ de K est un *simplexe*, qui est la *couverture* engendrée par le recouvrement de $|\underline{X^{p,\beta}}|$ que constituent $F_{\beta_0}, F_{\beta_1}, \ldots F_{\beta_p}$.

Digression sur les produits et sur les intersections de recouvrements. — Soient E un espace topologique et ρ un recouvrement fermé et fini de cet espace, se composant des ensembles F_α. Soient de même E', ρ', F'_β. Les ensembles $F_\alpha \times F'_\beta$ constituent un recouvrement fini fermé de $E \times E'$; nous nommerons ce recouvrement produit $\rho \times \rho'$ des recouvrements ρ et ρ'. Les $F_\alpha.F'_\beta$ constituent un recouvrement fermé fini de $E.E'$; nous le nommerons intersection $\rho.\rho'$ de ρ et ρ'. Nous désignerons par $K(\rho)$ la couverture engendrée par le recouvrement ρ. Les faits suivants soulignent les différences qui existent entre les propriétés des couvertures et des recouvrements : $K(\rho \times \rho')$ et $K(\rho) \times K(\rho')$ sont des complexes différents; c'est le premier qui a la structure la plus compliquée. De même $K(\rho.\rho')$ a, en général, une structure plus compliquée que $K(\rho).K(\rho')$.

Démonstration. — Nommons dimension d'un complexe la dimension maximum de ses éléments. Rappelons que l'ordre du recouvrement ρ est le plus

---

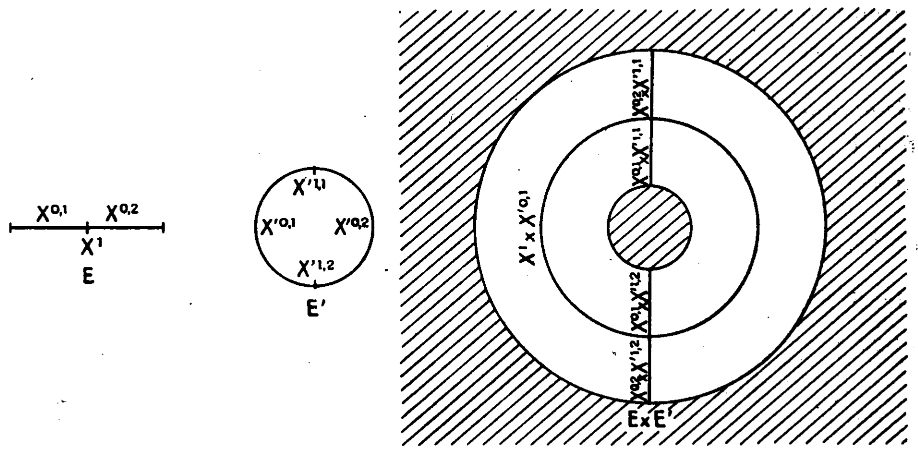
(¹) Défini au n° **6**, exemple.

grand nombre λ tel qu'on puisse trouver λ ensembles F_α dont l'intersection ne soit pas vide. Soient p et p' les dimensions de $K(\rho)$ et $K(\rho')$; les ordres de ρ et ρ' sont donc $p+1$ et $p'+1$; par suite l'ordre de $\rho\times\rho'$ est $(p+1)(p'+1)$ et la dimension de $K(\rho\times\rho')$ est donc $pp'+p+p'$; or celle de $K(\rho)\times K(\rho')$ est seulement $p+p'$.

Les couvertures qu'engendrent les produits et les intersections de recouvrements ne nous seront d'aucune utilité.

11. Exemples de couvertures. — *Figure* 1. — E est le segment $0\leqq x\leqq 2$ de l'axe réel; le recouvrement de E que constituent les deux segments $0\leqq x\leqq 1$ et

Fig. 1.



$1\leqq x\leqq 2$ définit une couverture de E, composée de 3 éléments $X^{0,1}$, $X^{0,2}$ et X^1 qui vérifient les relations suivantes : $\dot{X}^{0,1}=X^1=-\dot{X}^{0,2}$, $\dot{X}^1=0$, $|X^{0,1}|$ est le segment $0\leqq x\leqq 1$, $|X^{0,2}|$ est le segment $1\leqq x\leqq 2$, $|X^1|$ est le point $x=1$. Cette couverture est un simplexe.

La circonférence E' a pour couverture le complexe constitué par quatre éléments $X'^{0,1}$, $X'^{0,2}$, $X'^{1,1}$ et $X'^{1,2}$ qui vérifient les relations suivantes :

$$\dot{X}'^{0,1}=X'^{1,1}-X'^{1,2}=-\dot{X}'^{0,2},\qquad \dot{X}'^{1,1}=\dot{X}'^{1,2}=0,$$

$|X'^{1,1}|$ et $|X'^{1,2}|$ sont deux points distincts; $|X'^{0,1}|$ et $|X'^{0,2}|$ sont les deux arcs distincts qui ont pour extrémités ces deux points. Cette couverture ne peut pas être engendrée par un recouvrement. Cette couverture n'est pas un simplexe : $X'^{1,1}\sim X'^{1,2}\not\sim 0$.

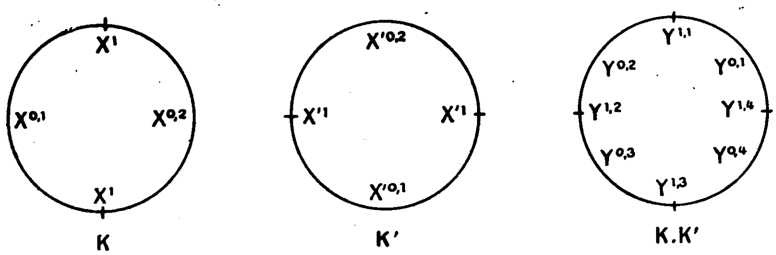
Le produit de ces deux couvertures de E et de E' est une couverture de $E\times E'$, qui se compose de 12 éléments et qui a, d'après le lemme 2, mêmes groupes de Betti que la couverture E' : la classe d'homologie de E' qui contient les cycles $X'^{1,1}$ et $X'^{1,2}$ est identifiée à la classe d'homologie de $E\times E'$ qui contient les cycles $(X^{0,1}+X^{0,2})\times X'^{1,1}$ et $(X^{0,1}+X^{0,2})\times X'^{1,2}$; indiquons un autre cycle de cette classe, par exemple le cycle

$$X^{0,1}\times X'^{1,1}+X^{1}\times X'^{0,1}+X^{0,2}\times X'^{1,2};$$

notons que les supports de ces trois cycles sont des courbes allant de l'un à l'autre des cercles délimitant la couronne $E\times E'$.

Figure 2. — E est une circonférence; le recouvrement de E que constituent deux demi-circonférences distinctes ayant mêmes extrémités engendre une

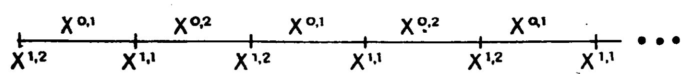
Fig. 2.



couverture K de E qui est un simplexe. Soit K′ la couverture qui se déduit de K par une rotation d'un angle droit. L'intersection K.K′ de ces deux couvertures est une couverture, composée de 8 éléments, dont les dérivées sont $\dot{Y}^{0,1}=Y^{1,1}-Y^{1,4}$, $\dot{Y}^{0,2}=Y^{1,2}-Y^{1,1}$, $\dot{Y}^{0,3}=Y^{1,3}-Y^{1,2}$, $\dot{Y}^{0,4}=Y^{1,4}-Y^{1,3}$, $\dot{Y}^{1,\alpha}=0$; les quatre cycles $Y^{1,\alpha}$ appartiennent à une même classe d'homologie, qui n'est pas nulle. Donc l'intersection K.K′ des deux simplexes K et K′ n'est pas un simplexe, tout en étant connexe (ceci justifie les remarques des nos **6** et **8**).

Figure 3. — Soit E la demi-droite $x\geqq 0$. Soit K la couverture de E qui a la structure suivante : ses éléments sont $X^{0,1}$, $X^{0,2}$, $X^{1,1}$ et $X^{1,2}$; leur loi de dérivation est $\dot{X}^{0,1}=X^{1,1}-X^{1,2}=-\dot{X}^{0,2}$, $\dot{X}^{1,1}=\dot{X}^{1,2}=0$; $|X^{1,1}|$ est l'ensemble

Fig. 3.



des points d'abscisses impaires, $x=2l+1$; $|X^{1,2}|$ est l'ensemble des points d'abscisses paires $x=2l$; $|X^{0,1}|$ est la réunion des intervalles $2l\leqq x\leqq 2l+1$ et $|X^{0,2}|$ est la réunion des intervalles $2l-1\leqq x\leqq 2l$. Cette couverture n'est pas un simplexe : elle a même complexe abstrait que la couverture de E′, figure 1.

Si nous adjoignons à E un point à l'infini et si nous adjoignons ce point à chacun des supports $|X^{p,\alpha}|$ afin qu'il soit fermé, la couverture K devient un complexe concret C qui n'est pas une couverture, car son intersection par le point à l'infini n'est pas un simplexe.

III. — Formes, cycles et anneau d'homologie d'un espace topologique.

12. Définitions. — Soient un espace topologique E et un groupe [1] A de coefficients.

Nommons *forme* de E toute forme L^p d'une *couverture* K de E, les coefficients utilisés étant ceux de A. Soit K' une couverture de E indépendante de K; soit K'^0 son cycle unité; convenons que L^p et $L^p.K'^0$ constituent la même forme de E. Convenons de n'envisager sur E que des couvertures deux à deux indépendantes et des intersections de couvertures deux à deux indépendantes. Ces conventions permettent d'additionner deux formes à p dimensions de E : si L'^p et L''^p sont deux formes de E, appartenant respectivement aux couvertures $K.K'$ et $K.K''$, leur somme sera la forme $L'^p.K''^0 + L''^p.K'^0$ de la couverture $K.K'.K''$; cette addition est commutative et associative. Plus généralement on peut effectuer les combinaisons linéaires, à coefficients pris dans A, de formes de E ayant même dimension. D'autre part l'intersection de deux formes de E, L^p et L'^q, appartenant à deux couvertures indépendantes, est définie; c'est une forme de E à $p+q$ dimensions, $L^p.L'^q = (-1)^{pq} L'^q.L^p$. Enfin, puisque $\dot{K}'^0 = 0$, L^p et $L^p.K'^0$ ont pour dérivées la même forme de E, $\dot{L}^p = \dot{L}^p.K'^0$; on peut donc définir la dérivée d'une forme de E comme étant une forme de E; on a pour de telles formes [*cf.* n° **8**, (3)] :

$$\left(\sum_\alpha A_\alpha L^{p,\alpha}\right)^{\cdot} = \sum_\alpha A_\alpha \dot{L}^{p,\alpha} \qquad \text{et} \qquad (L^p.L^q)^{\cdot} = \dot{L}^p.L^q + (-1)^p L^p.\dot{L}^q.$$

Nous nommerons *cycles* de E les formes de E dont la dérivée est nulle.

Nous dirons que deux formes de E sont *homologues* entre elles lorsque leur différence est la dérivée d'une forme de E. En d'autres termes, si K est la couverture à laquelle appartient un cycle Z^p, la relation

$$Z^p \sim 0 \quad \text{dans E}$$

signifiera qu'il existe une couverture K' de E telle que

$$Z^p.K'^0 \sim 0 \quad \text{dans } K.K'.$$

L'homologie dans E, étant une relation transitive, répartit les cycles de E en classes de cycles homologues; ces classes sont nommées *classes d'homologie*. Étant donnés deux cycles à p dimensions de E, Z^p et Z'^p, si l'un d'eux décrit une classe d'homologie de E, $Z^p + Z'^p$ reste dans la même classe d'homologie de E : ceci permet de définir la somme de deux classes d'homologie de E. Soient Z^p et Z'^q deux cycles de E, appartenant à deux couvertures indé-

---

(1) Ce groupe appartient à l'un des types a, b, c du n° **3** et constitue donc un anneau.

pendantes; leur intersection $Z^p.Z'^q$ reste dans la même classe d'homologie de E quand Z^p ou Z'^q varie, en restant dans une même classe d'homologie de E : ceci permet de définir l'intersection de deux classes d'homologie de E, quand on peut trouver deux cycles de ces deux classes appartenant à deux couvertures indépendantes, ce qui est toujours possible d'après le théorème 1 (n° **18**), quand E est normal. Nous résumerons ces propriétés de l'addition et de l'intersection des classes d'homologie d'un espace normal en disant que ces classes constituent un *anneau hétérogène* — l'adjectif hétérogène devant rappeler qu'on ne peut additionner que des éléments de même dimension — ; nous nommerons cet anneau hétérogène *anneau d'homologie de* E.

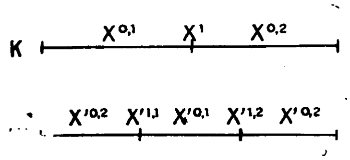
Nota. — Nous analyserons ces définitions de façon plus détaillée au cours d'un article intitulé : Les modules d'homologie d'une représentation.

13. Exemples. — C'est seulement le Chapitre II qui nous mettra en mesure de déterminer par un processus fini les anneaux d'homologie des espaces les plus élémentaires : les polyèdres. Pour l'instant donnons deux exemples des rapports qui peuvent exister entre les cycles de deux couvertures, K et K′, et ceux de leur intersection K.K′.

Tout d'abord la *figure* 2 (n° **11**) nous montre deux couvertures K et K′ d'une circonférence qui sont des simplexes, alors que K.K′ possède des cycles à une dimension qui ne sont pas homologues à zéro.

La *figure* 4 nous montre le cas opposé : K et K′ sont deux couvertures d'un même segment E de l'axe réel : $0 \leqq x \leqq 4$. La structure de K est définie par les relations $\dot{X}^{0,1} = X^1 = -\dot{X}^{0,2}$; $|X^1|$ est le point $x=2$; $|X^{0,1}|$ est le segment

Fig. 4.



$0 \leqq x \leqq 2$; $|X^{0,2}|$ est le segment $2 \leqq x \leqq 4$. La structure de K′ est définie par les relations $\dot{X}'^{0,1} = X'^{1,1} - X'^{1,2} = -\dot{X}'^{0,2}$; $|X'^{1,1}|$ est le point $x=1$; $|X'^{1,2}|$ est le point $x=3$; $|X'^{0,1}|$ est le segment $1 \leqq x \leqq 3$, tandis que $|X'^{0,2}|$ est la réunion des deux segments $0 \leqq x \leqq 1$ et $3 \leqq x \leqq 4$. Les cycles $X'^{1,1}$ et $X'^{1,2}$ appartiennent à une même classe d'homologie non nulle de K′, tandis que dans K.K′ les cycles correspondants $(X^{0,1}+X^{0,2}).X'^{1,1} = X^{0,1}.X'^{1,1}$ et $X^{0,2}.X'^{1,2}$ sont homologues à zéro.

14. Opérations sur les formes et les classes d'homologie d'un espace topologique. — Comme nous l'avons déjà constaté au n° 9, le produit de deux couvertures, l'intersection de deux couvertures, l'intersection d'une couverture par un ensemble de points, la transformée d'une couverture par l'inverse d'une représentation continue est une couverture, dont le cycle unité est le produit, l'intersection, le transformé des cycles unités des couvertures données. On en déduit sans peine la définition des opérations que voici :

Soient deux espaces topologiques E et E', dans lesquels nous utilisons un même anneau de coefficients A; soient L^p et L'^q deux formes de E et E';

leur *produit* $L^p \times L'^q = (-1)^{pq} L'^q \times L^p$ est une forme de l'espace $E \times E'$;
leur *intersection* $L^p . L'^q = (-1)^{pq} L'^q . L^p$ est une forme de l'espace $E . E'$;
l'*intersection* $L^p . E'$ est une forme de l'espace $E . E'$.

Soit φ une représentation, dont le champ de définition est identique à E' et dont le champ des valeurs appartient à E; soit $\overset{-1}{\varphi}$ la transformation inverse de φ; ($\overset{-1}{\varphi}$ est en général multivoque); la *transformée* $\overset{-1}{\varphi}(L^p)$ est une forme de l'espace E'.

Ces diverses opérations sont des homomorphismes; en d'autres termes nous avons les formules

$$\Big(\sum_\alpha A_\alpha L^{p,\alpha}\Big) \times \Big(\sum_\beta A_\beta L'^{q,\beta}\Big) = \sum_{\alpha,\beta} A_\alpha A_\beta L^{p,\alpha} \times L'^{q,\beta},$$

$$\Big(\sum_\alpha A_\alpha L^{p,\alpha}\Big) . \Big(\sum_\beta A_\beta L'^{q,\beta}\Big) = \sum_{\alpha,\beta} A_\alpha A_\beta L^{p,\alpha} . L'^{q,\beta},$$

$$\Big(\sum_\alpha A_\alpha L^{p,\alpha}\Big) . E' = \sum_\alpha A_\alpha (L^{p,\alpha} . E'),$$

$$\overset{-1}{\varphi}\Big(\sum_\alpha A_\alpha L^{p,\alpha}\Big) = \sum_\alpha A_\alpha \overset{-1}{\varphi}(L^{p,\alpha}),$$

$$(L^p . L^q) \times (L'^r . L'^s) = (-1)^{qr} (L^p \times L'^r) . (L^q \times L'^s),$$

$$(L^p . E') . (L^q . E') = (L^p . L^q) . E',$$

$$\overset{-1}{\varphi}(L^p . L^q) = \overset{-1}{\varphi}(L^p) . \overset{-1}{\varphi}(L^q).$$

En outre :

$$(L^p \times L'^q)^{\bullet} = \dot{L}^p \times L'^q + (-1)^p L^p \times L'^q,$$

$$(L^p . L^q)^{\bullet} = \dot{L}^p . L^q + (-1)^p L^p . \dot{L}^q,$$

$$(L^p . E)^{\bullet} = \dot{L}^p . E,$$

$$\big(\overset{-1}{\varphi}(L^p)\big)^{\bullet} = \overset{-1}{\varphi}(\dot{L}^p).$$

La représentation π utilisée au n° **8** dans (4) établit le lien suivant entre les notions d'intersection, de produit et de transormée

$$L^p . L^q = \overset{-1}{\pi}(L^p \times L^q).$$

Ce qui précède permet de définir les opérations suivantes sur les classes d'homologie Z^p et Z'^q de E et E' :

leur *produit* $Z^p \times Z'^q \sim (-1)^{pq} Z'^q \times Z^p$ est une classe d'homologie de $E \times E'$;
leur *intersection* $Z^p . Z'^q \sim (-1)^{pq} Z'^q . Z^p$ est une classe d'homologie de $E.E'$;
l'intersection $Z^p . E'$ est une classe d'homologie de $E.E'$;

la *transformée* $\overset{-1}{\varphi}(Z^p)$, φ étant une représentation de E' dans E, est une classe d'homologie de E'.

Ces diverses opérations sont des homomorphismes d'anneaux : on a

$$\left(\sum_\alpha A_\alpha Z^{p,\alpha}\right) \times \left(\sum_\beta A_\beta Z'^{q,\beta}\right) \sim \sum_{\alpha,\beta} A_\alpha A_\beta Z^{p,\alpha} \times Z'^{q,\beta},$$

$$\left(\sum_\alpha A_\alpha Z^{p,\alpha}\right) . \left(\sum_\beta A_\beta Z'^{q,\beta}\right) \sim \sum_{\alpha,\beta} A_\alpha A_\beta Z^{p,\alpha} . Z'^{q,\beta},$$

$$\left(\sum_\alpha A_\alpha Z^{p,\alpha}\right) . E' \sim \sum_\alpha A_\alpha (Z^{p,\alpha} . E'),$$

$$\overset{-1}{\varphi}\left(\sum_\alpha A_\alpha Z^{p,\alpha}\right) \sim \sum_\alpha A_\alpha \overset{-1}{\varphi}(Z^{p,\alpha}),$$

$$(Z^p . Z^q) \times (Z'^r . Z'^s) \sim (-1)^{qr} (Z^p \times Z'^r) . (Z^q \times Z'^s),$$

$$(Z^p . E') . (Z^q . E') \sim (Z^p . Z^q) . E',$$

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p . Z^q) \sim \overset{-1}{\varphi}(Z^p) . \overset{-1}{\varphi}(Z^q),$$

$$Z^p . Z^q \sim (-1)^{pq} Z^q . Z^p,$$

$$2 Z^p . Z^p \sim 0, \quad \text{quand } p \text{ est impair},$$

$$Z^p . Z^q \sim \overset{-1}{\pi}(Z^p \times Z^q).$$

Complétons ces formules par deux remarques :

Remarque 1. — Soit $\Phi(x')$ une représentation de E' dans E; soit $\varphi(x')$ la représentation qui est définie sur l'ensemble e' de points de E' et qui y prend les valeurs $\varphi(x') = \Phi(x')$; soient L^p une forme et Z^p une classe d'homologie de E; on a

$$\overset{-1}{\varphi}(L^p) = \overset{-1}{\Phi}(L^p) . e' \qquad \text{et} \qquad \overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim \overset{-1}{\Phi}(Z^p) . e'.$$

Remarque 2. — Soit $\varphi(x')$ une représentation de E' dans E; soit e un ensemble de points de E contenant toutes les valeurs prises par $\varphi(x')$; on a

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim \overset{-1}{\varphi}(Z^p . e).$$

15. Compléments. — *Classe d'homologie unité.* — Les cycles unités des couvertures de E constituent une classe d'homologie de E; nous la nommerons classe unité de E et nous la désignerons par le symbole E^0 ; nous avons

$$A_\alpha E^0 \neq 0 \quad \text{si } A_\alpha \neq 0; \qquad Z^p.E^0 \sim Z^p; \qquad Z^p.E'^0 \sim Z^p.E';$$
$$E^0 \times E'^0 \sim (E \times E')^0; \qquad E^0.E'^0 \sim E^0.E' \sim (E.E')^0; \qquad \overset{-1}{\varphi}(E^0) \sim E'^0.$$

Espace simple. — Nous dirons qu'un espace topologique est simple lorsque son anneau d'homologie se réduit à l'ensemble des classes $A_\alpha E^0$. (Un ensemble de points d'un espace topologique sera dit simple quand le sous-espace que constitue cet ensemble est simple.)

Tout espace se composant d'un seul point est simple. — C'est une conséquence immédiate de la condition que l'intersection d'une couverture par un point de son support est toujours un simplexe; c'est même à cette fin que nous avons posé cette condition. Si donc Z^p est un cycle quelconque et si x est un point quelconque,

$$(5) \qquad Z^p.x \sim 0 \quad \text{pour } p > 0; \qquad Z^0.x \sim A_\alpha x^0 \quad (\text{où } A_\alpha \in A).$$

Représentation constante. — Soit $\varphi(x')$ une représentation constante de E' dans E : $\varphi(x') = x$, x étant un point invariable de E; on a, d'après la remarque 2 du n° **14**,

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim \overset{-1}{\varphi}(Z^p.x);$$

d'où, en tenant compte de la formule (5),

$$(6) \qquad \overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim 0 \quad \text{pour } p > 0; \qquad \overset{-1}{\varphi}(Z^0) \sim A_\alpha E'^0 \quad (\text{où } A_\alpha \in A).$$

Espaces connexes (¹). — Soit Z^0 un cycle à zéro dimension d'une couverture K d'un espace E. Soit x un point particulier de E; il existe, d'après (5), un coefficient A_α tel que $(Z^0 - A_\alpha K^0).x = 0$. L'ensemble des points x qui ne vérifient pas cette relation est $f_\alpha = |Z^0 - A_\alpha K^0|$; cet ensemble est fermé. L'ensemble des points x qui la vérifient est $F_\alpha = \prod_{A_\beta \neq A_\alpha} f_\beta$. Ainsi E est la réunion de deux ensembles fermés et disjoints f_α et F_α; F_α n'est pas vide, donc si E est connexe, f_α est vide, c'est-à-dire $Z^0 = A_\alpha K^0$. En d'autres termes :

LEMME 4. — *Toute couverture d'un espace connexe est elle-même connexe.*

Espaces non connexes. — Supposons que $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_\omega$, les ensembles E_α étant fermés et deux à deux disjoints : E n'est pas connexe. Soit K la couverture de E que constituent ω éléments à zéro dimension, ayant tous une dérivée nulle, et dont les supports respectifs sont $E_1, E_2, \ldots, E_\omega$. Soit K' une couverture arbitraire de E. On constate aisément que K.K' est la

(¹) Pour la définition de la connexité, *voir* A.-H., Chap. I, § **2**, 14 : *Zusammenhang*.

réunion de ω couvertures des ω ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_\omega$ et que par suite *l'anneau d'homologie de* E *est la somme directe des anneaux d'homologie de* $E_1, E_2, \ldots, E_\omega$. Nous ne pousserons pas plus loin l'étude des espaces non connexes.

Mais considérons plus particulièrement un espace E muni d'une topologie telle que tout ensemble de points de E soit fermé (les composantes connexes de E sont ses points); l'étude de l'anneau d'homologie d'un tel espace est banale (soit K′ une couverture arbitraire de E; soient $E_1, E_2, \ldots, E_\omega$ des ensembles deux à deux disjoints tels que les supports de K′ soient des réunions de E_α; soit, comme ci-dessus, K la couverture qu'engendre le recouvrement $E_1, E_2, \ldots, E_\omega$; K.K′ est la réunion de ω simplexes). Or munir E d'une telle topologie revient à abandonner les conditions suivantes dans la définition des couvertures : E *est un espace topologique; chacun des éléments d'une couverture a un support fermé.* Ainsi *l'abandon de ces conditions ferait perdre tout intérêt aux notions de couverture et d'anneau d'homologie.*

IV. — Propriétés des espaces normaux.

Pour poursuivre notre étude des couvertures, supposons normaux les espaces topologiques envisagés.

16. Élargissements. — *Définition.* — Soit un nombre fini d'ensembles E_α de points d'un espace E; nommons S le système d'ensembles qu'ils constituent; soit de même S^*, constitué par les E^*_α. Nous dirons que S^* est un *élargissement* de S lorsqu'il est possible de faire se correspondre biunivoquement E_α et E^*_α de telle sorte que

1° $E_\alpha \subset E^*_\alpha$;
2° $E^*_\alpha \subset E^*_\beta$ chaque fois que $E_\alpha \subset E_\beta$.

(Exemple : E^*_α est la fermeture $\overline{E_\alpha}$ de E_α.)

Lemme 5 (sur les espaces normaux). — (Ce lemme généralise A.-H., Chap. I, § 6, 8, théor. VI.) *Soit* S *un système constitué par un nombre fini d'ensembles fermés* F_α *de points d'un espace normal* E; *on peut construire un élargissement* S^* *de* S, *constitué par des ensembles ouverts* G_α *qui possèdent les propriétés suivantes :*

a. $\overline{G_\alpha}$ *est « arbitrairement voisin » de* F_α;
b. à tout ensemble « suffisamment petit » e de points de E *on peut associer un point* $x(e)$ *de* E *tel que* $\overline{G_\alpha}.e = 0$ *si et seulement si* $F_\alpha.x(e) = 0$.

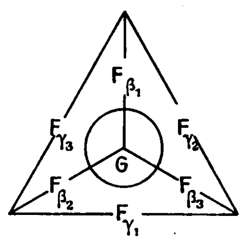
Nota. — Dire que $\overline{G_\alpha}$ est « arbitrairement voisin » de F_α, c'est dire que $\overline{G_\alpha}$ peut être pris dans un voisinage de F_α donné à l'avance. Dire que e est « suffisamment petit », c'est dire que e doit appartenir à l'un des éléments d'un certain recouvrement fini ouvert de E, qui dépend des données et des constructions opérées.

Démonstration. — Il est toujours possible de décomposer le système S des F_α en deux sous-systèmes constitués l'un par des F_β, l'autre par des F_γ, tels que

$$\prod_\beta F_\beta \neq o, \qquad F_\gamma . \prod_\beta F_\beta = o.$$

Soit G un voisinage de $\prod_\beta F_\beta$ tel que $\overline{G}.F_\gamma = o$ quel que soit γ. Soit $F = E - G$. Le système des $F.F_\alpha$ a une structure plus simple que le système des F_α, puisque $\prod_\beta F.F_\beta = o$; nous pouvons donc, en raisonnant par récurrence (¹), supposer le lemme vrai pour le système des $F.F_\alpha$: soient G'_α les éléments de

Fig. 5.



l'un de ses élargissements vérifiant la condition b; nous supposerons $\overline{G'_\gamma}$ assez voisin de $F_\gamma = F.F_\gamma$ pour que $\overline{G}.\overline{G'_\gamma} = o$. Choisissons $G_\beta = G + G'_\beta$ et $G_\gamma = G'_\gamma$. Le fait que le système des G'_α est un élargissement du système de $F.F_\alpha$ entraîne que le système des G_α est un élargissement du système des F_α.

Cet élargissement possède la propriété a, car en choisissant $\overline{G}$ arbitrairement voisin de $\prod_\beta F_\beta$, puis les $\overline{G'_\alpha}$ arbitrairement voisins des $F.F_\alpha$, on obtient des $\overline{G_\alpha}$ arbitrairement voisins des F_α.

Cet élargissement possède la propriété b : supposons d'abord $e.\overline{G} \neq o$; nous pouvons supposer que la condition imposée à e d'être suffisamment petit entraîne que $e.\overline{G_\gamma} = o$ (car $\overline{G}.\overline{G_\gamma} = o$); puisque $e.\overline{G_\beta} \neq o$ et que $e.\overline{G_\gamma} = o$, nous pouvons choisir pour $x(e)$ un point quelconque de $\prod_\beta F_\beta$. Supposons au contraire $e.\overline{G} = o$; alors la relation $e.\overline{G_\alpha} = o$ équivaut à la relation $e.\overline{G'_\alpha} = o$, c'est-à-dire ($x'$ étant un point de E qui existe puisque le système des G'_α satis-

(¹) Récurrence relative au nombre des combinaisons de F_α dont l'intersection n'est pas fait à b) à la relation $x'.F.F_\alpha = 0$; nous pouvons donc prendre $x(e) = x'$ si $x' \in F$. Sinon $e.\overline{G_\alpha} = 0$ quel que soit α; *a fortiori* $e.F_\alpha = 0$; nous pouvons donc prendre pour $x(e)$ un point arbitraire de e.

Définitions. — Une couverture K^* d'un espace topologique E sera dite *normale* lorsque son intersection par tout ensemble suffisamment petit de points de E est un simplexe. En d'autres termes :

Une couverture K^* d'un espace topologique E sera dite *normale* lorsque E admet un recouvrement fini ouvert ρ tel que l'intersection de K^* par un ensemble e de points de E est un simplexe dès que e appartient à l'un des ensembles ouverts constituant ρ.

Un complexe concret C^* sera dit être un *élargissement d'un complexe concret* C (et C sera dit être un *rétrécissement* de C^*) lorsque

1° C et C^* ont le même complexe abstrait;

2° les éléments correspondants $X^{p,\alpha}$ et $X^{*p,\alpha}$ de C et C^* vérifient la relation

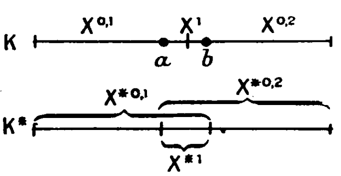
$$|X^{p,\alpha}| \subset |X^{*p,\alpha}|.$$

Soit K une couverture d'un espace topologique; l'application (¹) du lemme 5 au système des supports de K fournit la proposition suivante :

Lemme 6. — *Toute couverture* K *d'un espace normal peut être élargie en une couverture normale* K^*; K^* *peut être choisie arbitrairement voisine de* K.

Exemple. — Figure 6, K n'est pas normale, puisque l'intersection de K par l'ensemble des deux points arbitrairement voisins a et b n'est pas un simplexe.

Fig. 6.



Au contraire, l'élargissement K^* de K est une couverture normale : son intersection par tout ensemble de diamètre inférieur à celui de $|X^{*1}|$ est un simplexe.

Soit ρ le recouvrement ouvert de E qui est associé à une couverture normale K^*. Nous pouvons rétrécir ρ en un recouvrement fermé ρ' de E (cela en vertu de A.-H., Chap. I, § 6, 8, th. VII; ou, ce qui revient au même, en

(¹) Cette application ne serait plus possible si nous envisagions des couvertures pouvant avoir une infinité d'éléments.

vertu de notre lemme 5 appliqué aux ensembles fermés complémentaires des éléments de ρ). Soit K' la couverture de ρ qu'engendre ρ'. L'intersection de K^* par tout ensemble de points de l'un des supports de K' est un simplexe. Nous pouvons donc compléter le lemme 6 par la proposition suivante :

LEMME 7. — *Étant donnée une couverture normale* K^* *de l'espace normal* E, *on peut construire une couverture* K' *de* E *telle que l'intersection de* K^* *par tout ensemble de points appartenant à l'un* (¹) *des supports de* K' *soit un simplexe — la couverture* K' *est engendrée par un recouvrement de* E.

17. ÉTUDE DE $K^*.C'$ QUAND L'INTERSECTION DE LA COUVERTURE (²) K^* PAR CHACUN DES SUPPORTS (¹) DU COMPLEXE CONCRET C' EST UN SIMPLEXE. — (Cette étude généralise mot à mot celle que nous avons faite au n° **4** du produit d'un simplexe par un complexe; elle sera elle-même calquée à deux reprises, au cours du Chapitre II, au n° **27** et au n° **33**.) Soient $X'^{q,\beta}$ les éléments de C'; $L^{r,\gamma}$ et $L'^{s,\delta}$ désigneront respectivement des formes de K^* et de C'; K^{*0} sera le cycle unité de K^*. Nommons $K^{*0}.C'$ l'ensemble des formes $K^{*0}.L'^{s,\delta}$. Proposons-nous d'étudier une forme de $K^*.C'$

$$M^p = \sum_{\beta,\, 0\leqq q} L^{q,\beta}.X'^{p-q,\beta}, \qquad \text{telle que } \dot{M}^p \in K^{*0}.C' \quad (\text{les divers } X'^{p-q,\beta} \text{ étant distincts}).$$

Nommons poids Q de M^p la plus grande des valeurs prises par q; les termes de poids maximum de $\dot{M}^p$ sont $\sum_\beta \dot{L}^{Q,\beta}.X'^{p-Q,\beta}$; chacun d'eux est nul; par suite

$$\dot{L}^{Q,\beta}.|X'^{p-Q,\beta}| = 0.$$

Supposons $Q > 0$; puisque l'intersection de K^* par $|X'^{p-Q,\beta}|$ est un simplexe, il existe une forme $L^{Q-1,\beta}$ telle que

$$L^{Q,\beta}.|X'^{p-Q,\beta}| = \dot{L}^{Q-1,\beta}.|X'^{p-Q,\beta}|, \qquad \text{c'est-à-dire que } L^{Q,\beta}.X'^{p-Q,\beta} = \dot{L}^{Q-1,\beta}.X'^{p-Q,\beta};$$

d'où, les ... désignant des termes de poids inférieur à Q,

$$M^p = \sum_\beta \dot{L}^{Q-1,\beta}.X'^{p-Q,\beta} + \ldots = \Big(\sum_\beta L^{Q-1,\beta}.X'^{p-Q,\beta}\Big)^{\bullet} + \ldots \sim \ldots;$$

ainsi M^p est homologue à une forme de poids inférieur à Q; donc à une forme de poids $Q = 0$ (ce raisonnement par récurrence vaut parce que deux formes homologues ont même dérivée).

Supposons donc que M^p soit une telle forme de poids $Q = 0$:

$$M^p = \sum_\beta L^{0,\beta}.X'^{p,\beta}.$$

(¹) L'expression « les supports de K' » signifie « les supports des éléments de K' ».

(²) Cette étude utilisera seulement le fait que K^* possède un cycle unité.

La relation $\dot{L}^{0,\beta}.|X'^{p,\beta}| = 0$, jointe à l'hypothèse que l'intersection de $K^\star$ par $|X'^{p,\beta}|$ est un simplexe, exige l'existence d'un coefficient A_β tel que

$$L^{0,\beta}.|X'^{p,\beta}| = A_\beta K^{\star 0}.|X'^{p,\beta}|;$$

donc

$$M^p = K^{\star 0}.\sum_\beta A_\beta X'^{p,\beta} \in K^{\star 0}.C'.$$

Ainsi toute forme de $K^\star.C'$ dont la dérivée appartient à $K^{\star 0}.C'$ est elle-même homologue à une forme appartenant à $K^{\star 0}.C'$. Il en résulte d'abord que tout cycle de $K^\star.C'$ est homologue à un cycle $K^{\star 0}.Z'^p$, Z'^p devant évidemment être un cycle de C'. Il en résulte ensuite que si $K^{\star 0}.Z'^p \sim 0$, c'est que

$$K^{\star 0}.Z'^p = K^{\star 0}.\dot{L}^{p-1},$$

c'est-à-dire que $Z'^p \sim 0$; la réciproque est évidente. La correspondance

$$Z'^p \leftrightarrow K^{\star 0}.Z'^p$$

est donc un isomorphisme des groupes de Betti de C' sur ceux de $K^\star.C'$. Nous conviendrons d'identifier les classes d'homologie Z'^p et $K^{\star 0}.Z'^p$, afin de pouvoir conclure en ces termes :

Lemme 8. — *Si l'intersection de la couverture* $K^\star$ *par le support de chaque élément du complexe concret* C' *est un simplexe, alors* $K^\star.C'$ *et* C' *ont mêmes groupes de Betti.*

18. Conclusions. — 1° Soient k et K deux couvertures d'un espace E normal, K étant un élargissement de k. Élargissons K en une couverture normale $K^\star$, ce qui est possible d'après le lemme 6; soit K' la couverture de E que le lemme 7 associe à $K^\star$. Les complexes abstraits de k, de K et de $K^\star$ sont isomorphes; soient z^p, Z^p et $Z^{\star p}$ trois cycles correspondants de ces complexes. Le lemme 8, appliqué à $K^\star$ et à $C' = K'$, prouve l'existence d'un cycle Z'^p de K' tel que $Z^{\star p} \sim Z'^p$ dans $K^\star.K'$. Or $K.K'$ et $k.K'$ sont des sous-complexes ouverts de $K^\star.K'$; donc, en vertu du lemme 3,

$$Z^p \sim Z'^p \quad \text{dans } K.K', \qquad z^p \sim Z'^p \quad \text{dans } k.K';$$

d'où

$$z^p \sim Z^p \quad \text{dans } E;$$

en résumé :

Théorème 1. — *Quand on élargit une couverture d'un espace en une couverture de ce même espace, chaque cycle reste dans la même classe d'homologie de l'espace.*

2° Soit $K^\star$ une couverture normale d'un espace normal E. Envisageons maintenant l'intersection $(K^\star)^n$ de n couvertures isomorphes à $K^\star$. Soit K' la couverture de E que le lemme 7 associe à $K^\star$. L'application du lemme 8 à $K^\star$ et à $C' = (K^\star)^{n-1}.K'$ prouve que tout cycle de $(K^\star)^n.K'$ est homologue à un cycle de $(K^\star)^{n-1}.K'$, donc, par récurrence, à un cycle de K'. Soit en particulier $Z^{\star p}$ un cycle de $K^\star$; désignons par $(Z^{\star p})^n$ l'intersection de n cycles isomorphes à $Z^{\star p}$; cette intersection est de dimension np; elle doit être homologue à un cycle de K'; si $p > 0$, dès que n est assez grand pour que np dépasse la dimension maximum des cycles de K', elle est donc homologue à zéro. Nous exprimerons ce fait :

$$(Z^{\star p})^n \sim 0 \quad \text{pour } n \text{ assez grand,}$$

en disant que la classe d'homologie de $Z^{\star p}$ est *nilpotente*. Puisque, d'après le lemme 7 et le théorème 1, tout cycle de E est homologue à un cycle d'une couverture normale, nous pouvons affirmer ceci :

THÉORÈME 2. — *Toute classe d'homologie d'un espace normal est nilpotente, si sa dimension est positive.* (Cette proposition sera utilisée au n° **24** par le raisonnement de M. Hopf que reproduit le paragraphe VI.)

3° Soit Φ une famille de couvertures K' d'un espace normal E qui possèdent les propriétés suivantes :

a. On peut trouver une couverture K' de la famille Φ dont les éléments aient des supports arbitrairement petits (c'est-à-dire qui appartiennent chacun à un élément d'un recouvrement fini ouvert ρ de E, ρ étant donné à l'avance);

b. l'intersection de deux couvertures K' de la famille Φ appartient à la famille Φ.

Soit Z^p un cycle de E; il appartient à une certaine couverture K; élargissons K en une couverture normale $K^\star$; d'après l'hypothèse *a*, il existe une couverture K' de la famille Φ telle que le lemme 8 s'applique à $K^\star$ et à $C' = K'$; donc Z^p est homologue à un cycle de K'. Ainsi tout cycle de E est homologue à un cycle appartenant à l'une des couvertures K' de la famille Φ.

Envisageons maintenant un tel cycle Z'^p appartenant à la couverture K' de la famille Φ, et supposons Z'^p homologue à zéro dans E : il existe une couverture K de E telle que $Z'^p \sim 0$ dans $K.K'$. Élargissons K en une couverture normale $K^\star$, suffisamment voisine de K pour que $K.K'$ et $K^\star.K'$ soient isomorphes : $Z'^p \sim 0$ dans $K^\star.K'$. D'après l'hypothèse *a*, il existe une couverture K'' de la famille Φ telle que le lemme 8 s'applique à $K^\star$ et à $C' = K'.K''$; du fait que $Z'^p \sim 0$ dans $K^\star.K'.K''$ résulte dès lors que $Z'^p \sim 0$ dans $K'.K''$. Ainsi donc : si un cycle Z'^p d'une couverture K' de la famille Φ est homologue à zéro dans E, on peut trouver une couverture K'' de la famille Φ telle que $Z'^p \sim 0$ dans $K'.K''$. Nous avons ainsi établi le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *On ne modifie pas l'anneau d'homologie d'un espace normal* E *quand, au lieu d'utiliser dans les définitions du n°* 12 *la famille de toutes les couvertures de* E, *on fait entrer en jeu une famille particulière de couvertures de* E, *possédant les propriétés a et b.*

Les paragraphes V et VI reposent sur ce théorème. Faisons d'autre part à son sujet les remarques suivantes.

Les couvertures normales de E ne constituent pas une famille Φ (l'intersection de deux couvertures normales n'est pas nécessairement une couverture normale, puisque l'intersection de deux simplexes n'est pas nécessairement un simplexe : *cf.* n° **11**, *fig.* 2). La famille des couvertures engendrées par les recouvrements fermés finis de E n'est pas non plus une famille Φ : elle non plus ne possède pas la propriété *b* (*cf* n° **10**, *Digression*); c'est précisément pourquoi la notion de recouvrement est moins maniable que celle de couverture. Mais, considérons la famille Φ_0, constituée par les couvertures qu'engendrent les recouvrements fermés finis de E et par les intersections mutuelles de ces couvertures : c'est une famille Φ. On obtient d'autres familles Φ, qui contiennent toutes Φ_0, vu les remarques du n° **10**, en considérant les couvertures K de E qui possèdent une ou plusieurs des propriétés ci-dessous :

1. Chaque élément $X^{p,\alpha}$ de K adhère à au moins $(p+1)$ éléments $X^{p-1,\beta}$.
2. Chaque $X^{1,\alpha}$ adhère à deux éléments $X^{0,\beta}$.
3. Les coefficients $C\begin{bmatrix}\alpha\\p\\\beta\end{bmatrix}$ de la loi de dérivation valent 0, $+1$ ou -1.
4. Parmi tous les coefficients $C\begin{bmatrix}\alpha\\p\\\beta\end{bmatrix}$ qui correspondent à deux valeurs fixes de p et de β, il en est au moins un qui vaut $+1$ ou -1.
5. Les coefficients $C\begin{bmatrix}\alpha\\p\\\beta\end{bmatrix}$ qui correspondent à deux valeurs fixes de p et de β et à toutes les valeurs possibles de α sont premiers entre eux dans leur ensemble.
6. Chaque sous-complexe $\overline{X}^{p,\alpha}$ de K doit être un simplexe.
7. Chaque sous-complexe $\underline{\overline{X}}^{p,\alpha}$ de K doit être une couverture de son support.

Par ailleurs des considérations analogues à celles que nous avons développées dans ce paragraphe-ci permettent de prouver que l'anneau d'homologie d'un espace *normal* n'est pas altéré quand, dans la définition des couvertures, on substitue à la condition « chaque élément a pour support un ensemble fermé » la condition : « chaque élément a pour support un ensemble ouvert ».

L'application du théorème 3 à ces diverses familles Φ nous donne, tout compte fait, 86 définitions de l'anneau d'homologie; elles sont équivalentes parce que l'espace est normal, sinon elles définiraient peut-être des anneaux d'homologie distincts.

V. — Homotopie; espaces simples.

Le but de ce paragraphe-ci est de donner une démonstration [1] complète et aussi directe que possible du théorème **6**, dont le rôle est fondamental : c'est lui

---

[1] L'annexe qui termine l'article améliore cette démonstration.

qui permet d'utiliser effectivement les résultats des Chapitres II et III. Les raisonnements de ce paragraphe-ci seront certes généralisés au paragraphe VI; mais ce paragraphe VI fait usage de divers résultats longs à établir, pour la démonstration desquels nous renvoyons à A.-H.

19. Propriétés du segment de droite fermé. — Soit E le segment rectiligne fermé $0 \leqq x \leqq 1$ de l'axe des x.

Soit K' la couverture de E qui a la structure suivante : elle se compose de n éléments $X^{0,\alpha}(\alpha = 1, \ldots, n)$ et de $(n-1)$ éléments $X^{1,\beta}(\beta = 1, \ldots, n-1)$;

$$\dot{X}^{0,1} = X^{1,1}; \qquad \dot{X}^{0,\alpha} = X^{1,\alpha} - X^{1,\alpha-1} \quad \text{pour } 1 < \alpha < n;$$
$$\dot{X}^{0,n} = -X^{1,n-1}; \qquad \dot{X}^{1,\beta} = 0;$$

$|X^{0,\alpha}|$ est l'intervalle $\frac{\alpha-1}{n} \leqq x \leqq \frac{\alpha}{n}$; $|X^{0,\beta}|$ est le point $x = \frac{\beta}{n}$, Cette couverture est un simplexe.

Soit K une couverture arbitraire de E; élargissons K en une couverture normale K*; choisissons n assez grand pour que le lemme 8 s'applique à K* et à C' = K'; d'après ce lemme, K*.K' est un simplexe. Donc :

Lemme 9. — *Toute couverture d'un segment rectiligne fermé* E *peut être changée en un simplexe par élargissement et intersection avec une autre couverture de* E. (*Il en résulte que le segment rectiligne fermé est un espace simple; cela n'est qu'un cas très particulier du théorème* 6.)

Soit maintenant E' un espace de Hausdorff bicompact arbitraire, E étant toujours un segment rectiligne fermé. Du fait que E et E' sont bicompacts résulte aisément ceci (¹) : les produits $K \times K'$ des couvertures K de E et K' de E' constituent une famille Φ de couvertures de $E \times E'$. Appliquons à Φ le théorème 3; notons que le lemme 9 nous permet de nous ramener au cas où K est un simplexe; d'après le lemme 2, $K \times K'$ a mêmes groupes de Betti que K'; nous obtenons la conclusion que voici :

Théorème 4. — *Tout espace de Hausdorff bicompact* E' *a même anneau d'homologie que son produit par un segment rectiligne fermé* E. (Cet énoncé signifie ceci : quand on associe à chaque classe d'homologie Z'^p de E' la classe $E^0 \times Z'^p$ de $E \times E'$, on définit un isomorphisme de l'anneau d'homologie de E' sur l'anneau d'homologie de $E \times E'$.)

Exemple. — Voir n° **11**, figure 1.

20. Homotopie. — Soient un espace topologique E, un espace de Hausdorff bicompact E' et un segment rectiligne fermé E''. Soit $x = \varphi(x', x'')$ une

(¹) Pour le détail de la démonstration, voir le n° **22**.

représentation de $E' \times E''$ dans E. Soit enfin Z^p une classe d'homologie de E. D'après le théorème 4

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim Z'^p \times E''^0 \quad \text{(où } Z'^p \text{ est une classe d'homologie de } E'). \tag{7}$$

Soit $\varphi'(x')$ ce que devient la représentation $\varphi(x', x'')$ quand on donne à x'' une valeur fixe; d'après la remarque 1 du n° **14**

$$\overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \times x''^0 \sim \overset{-1}{\varphi}(Z^p).(E' \times x''),$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (7),

$$\overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \times x''^0 \sim (Z'^p \times E''^0).(E'^0 \times x''^0),$$

d'où, en tenant compte des formules du n° **14**,

$$\overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \times x''^0 \sim Z'^p \times x''^0, \qquad \text{c'est-à-dire } \overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \sim Z'^p;$$

la formule (7) devient donc finalement

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim \overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \times E''^0. \tag{8}$$

Or le premier membre de cette relation (8) est, par définition, indépendant de la valeur fixe attribuée à x'' dans le second; donc ce second membre, et par suite $\overset{-1}{\varphi'}(Z^p)$ sont indépendants du choix de cette valeur. Pour énoncer cette conclusion, rappelons que les représentations $\varphi'(x')$ qui correspondent aux diverses valeurs de x'' sont dites homotopes entre elles dans E. Il vient :

Théorème 5. — *Si deux représentations $x = \psi(x')$ et $x = \theta(x')$ de l'espace de Hausdorff bicompact* E' *dans l'espace topologique* E *sont homotopes entre elles dans* E, *alors on a pour tout cycle* Z^p *de* E

$$\overset{-1}{\psi}(Z^p) \sim \overset{-1}{\theta}(Z^p).$$

On en déduit, en tenant compte de (6) (n° **15**), le corollaire suivant :

Corollaire 5_1. — *Si la représentation $\varphi(x')$ de l'espace de Hausdorff bicompact* E' *dans l'espace topologique* E *est homotope dans* E *à une représentation constante, alors, quel que soit le cycle* Z^p *de* E, *on a*

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim 0 \quad \text{si } p > 0, \qquad \overset{-1}{\varphi}(Z^0) \sim A_\alpha E'^0 \quad (\text{où } A_\alpha \in A).$$

On déduit immédiatement du théorème 5 ceci :

Corollaire 5_2. — *Soit $\varphi(x)$ une représentation en lui-même de l'espace de Hausdorff bicompact* E; *si $\varphi(x)$ est homotope dans* E *à la représentation identique de* E *en lui-même, on a pour tout cycle* Z^p *de* E

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim Z^p.$$

Plus généralement, en utilisant la remarque 1 du n° **14** :

COROLLAIRE 5_3. — *Soit* $\varphi(x)$ *une représentation de l'espace de Hausdorff bicompact* E *dans un espace topologique* E′ *contenant* E; *si* φ *est homotope dans* E′ *à la représentation identique de* E *en lui-même, on a, pour tout cycle* Z'^p *de* E′,

$$\overset{-1}{\varphi}(Z'^p) \sim Z'^p.E.$$

21. ESPACES SIMPLES. — Soit E un espace de Hausdorff bicompact, qui soit homotope en lui-même à l'un de ses points, c'est-à-dire dans lequel la représentation identique soit homotope à une représentation constante; les corollaires 5_1 et 5_2 ont la conséquence suivante :

$$Z^p \sim 0 \quad \text{si } p > 0; \qquad Z^0 \sim A_\alpha E^0 \quad (\text{où } A_\alpha \in A);$$

nous avons nommé au n° **15** « simples » les espaces dans lesquels ces relations avaient lieu. Donc

THÉORÈME 6. — *Tout espace de Hausdorff bicompact et homotope en lui-même à l'un de ses points est simple.*

L'importance de ce théorème est la suivante : au cours des chapitres II et III nous ferons constamment l'hypothèse que certains ensembles de points sont simples, c'est-à-dire qu'ils constituent des espaces simples; or le théorème 6 sera (avec sa généralisation n° **23**) le seul critère qui nous permettra de reconnaître qu'un espace est simple.

CONTRE-EXEMPLE. — L'hypothèse, énoncée par le théorème 6, que l'espace envisagé est bicompact, est essentielle : on peut prouver que le segment rectiligne non fermé $0 \leq x < +\infty$ a des cycles de dimension 1 non homologues à zéro (la démonstration utilise la figure 3 du n° **11**).

EXEMPLES. — L'ensemble des points d'un espace euclidien qui sont à une distance de l'origine au plus égale à 1 (c'est-à-dire la boule) est un espace simple. Il en est de même dans l'espace de Hilbert, sous réserve d'utiliser non la topologie forte, mais la topologie faible (cet ensemble n'est pas bicompact en topologie forte, c'est-à-dire dans la topologie qu'induit la distance; mais il est bicompact au sens de la topologie faible).

VI. — Les espaces de Hausdorff bicompacts, d'après un Mémoire de M. H. Hopf.

M. H. Hopf a découvert récemment ([1]) de très belles propriétés de l'anneau d'homologie de certaines multiplicités orientables fermées; la définition de l'anneau d'homologie qu'il utilise est la définition classique. L'objet

---

([1]) *Voir :* Introduction, *loc. cit.* ([8]). Nous désignerons ce Mémoire par H.

principal de ce paragraphe-ci est de transposer l'essentiel des raisonnements de M. Hopf à l'anneau d'homologie d'un espace de Hausdorff bicompact, la définition de cet anneau étant celle que nous avons donnée ci-dessus. L'aisance de cette transposition est l'une des meilleures preuves que nous puissions fournir de l'intérêt de notre définition. L'anneau d'homologie d'un espace de Hausdorff bicompact ne présente pas toutes les particularités de l'anneau d'homologie d'une multiplicité orientable fermée, qui a une base finie (nº **28**, *rem.* 2) et qui satisfait au théorème de dualité de Poincaré (nº **39**, *rem.* 2); la disparition de ces particularités n'a d'autre effet que de simplifier notre exposé. De nombreuses différences de point de vue, nous empêchant de renvoyer commodément le lecteur au Mémoire cité, nous ont contraint à faire cet exposé, qui est sommaire, très incomplet et qui ne saurait dispenser d'étudier le Mémoire original de M. H. Hopf.

Les conclusions de ce paragraphe-ci seront complétées à la fin du Chapitre II et trouveront une application au Chapitre III, paragraphe II. Avant d'aborder les raisonnements de M. Hopf, nous étendrons au produit d'espaces bicompacts le théorème de Künneth (nº **3**; A.-H., Chap. VII, § 3).

22. Anneau d'homologie du produit de deux espaces de Hausdorff bicompacts (théorème de Künneth). — Soient E' et E'' deux espaces de Hausdorff bicompacts. Les produits $K' \times K''$ des couvertures K' de E' et K'' de E'' constituent une famille Φ de couvertures de l'espace $E' \times E''$, famille à laquelle s'applique [1] le théorème 3. (Prouvons que Φ vérifie bien l'hypothèse que l'énoncé de ce théorème 3 nomme *a* : Puisque E' et E'' sont bicompacts, on peut trouver un recouvrement fermé fini ρ' de E' et un recouvrement fermé fini ρ'' de E'' tels que les éléments de $\rho' \times \rho''$ soient arbitrairement petits; soient K' et K'' les couvertures qu'engendrent ρ' et ρ''; $K' \times K''$ a des supports arbitrairement petits.)

Soit Z^p un cycle de $E' \times E''$; d'après le théorème 3, Z^p est homologue à un cycle d'une couverture du type $K' \times K''$; donc, d'après le théorème de Künneth (nº 3), si nous choisissons des coefficients constituant un corps,

$$Z^p \sim \sum_{q,\alpha} Z'^{q,\alpha} \times Z''^{p-q,\alpha},$$

$Z'^{q,\alpha}$ et $Z''^{p-q,\alpha}$ étant recpectivement des cycles de E' et E''.

Supposons réalisées les circonstances suivantes :

les cycles $Z'^{q,\alpha}$ de E' ne sont liés par aucune homologie;

les cycles $Z''^{p-q,\alpha}$ de E'' ne sont liés par aucune homologie;

on a :

$$\sum_{q,\alpha} Z'^{q,\alpha} \times Z''^{p-q,\alpha} \sim 0 \qquad \text{dans } E' \times E''.$$

---

(1) $E' \times E''$ est normal en tant qu'espace de Hausdorff bicompact (A.-H., Chap. II, § 1, 7, th. XIII).

D'après le théorème 3 il existe une couverture K' de E' et une couverture K'' de E'' telles que les circonstances énoncées ci-dessus se trouvent réalisées dans K', K'' et K' $\times$ K''. Or elles sont alors irréalisables d'après le théorème de Künneth (n° **3**). Les circonstances énoncées étaient donc irréalisables.

En résumé toute classe d'homologie de E' $\times$ E'' est combinaison linéaire de classes $Z'^p \times Z''^q$; et entre ces classes $Z'^p \times Z''^q$ il n'y a d'autres relations que les relations générales énoncées au n° **14**.

Nous exprimerons cette conclusion en les termes suivants :

Théorème 7. — *Soient deux espaces de Hausdorff bicompacts* E' *et* E''. *L'anneau d'homologie de* E' $\times$ E'' *est le produit direct des anneaux d'homologie de* E' *et de* E'', *lorsque les coefficients utilisés constituent un corps* (le corps des rationnels; le corps des entiers mod. m, m étant premier).

Généralisation du théorème 4. — Tout espace de Hausdorff bicompact a même anneau d'homologie que son produit par un espace bicompact et simple. [Démonstration : le théorème 7, convenablement modifié, vaut quand les coefficients sont les entiers; il a alors pour corollaire cette généralisation du théorème 4, compte tenu du lemme 1 (n° **3**).]

23. Représentation du produit de deux espaces de Hausdorff bicompacts : Formule de M. H. Hopf. (H. n° 27.) — Posons, avec M. Hopf, les définitions suivantes :

Nous nommerons « *idéal* $\mathfrak{J}$ engendré par un système de classes d'homologie $Z^{p,\alpha}$ d'un espace topologique E » l'ensemble des combinaisons linéaires des intersections $Z^{p,\alpha}.Z^{q,\beta}$ de ces classes $Z^{p,\alpha}$ par les diverses classes $Z^{q,\beta}$ de E; pour exprimer que $Z^{r,1} - Z^{r,2} \in \mathfrak{J}$, nous écrirons $Z^{r,1} \sim Z^{r,2} \mod \mathfrak{J}$.

Nous nommerons produit $\mathfrak{J}' \times \mathfrak{J}''$ des idéaux $\mathfrak{J}'$ et $\mathfrak{J}''$ de deux espaces E' et E'' l'idéal qu'engendrent les classes $Z'^{p,\alpha} \times Z''^{q,\beta}$ telles que $Z'^{p,\alpha} \in \mathfrak{J}'$ et $Z''^{q,\beta} \in \mathfrak{J}''$.

$\mathfrak{J}'_p$ désignera en particulier l'idéal engendré par les classes d'homologie Z'_q de E' dont la dimension est comprise entre o et p : $o < q < p$.

Ceci posé, soient E' et E'' deux *espaces de Hausdorff bicompacts et connexes;* soit E un espace topologique; soit $x = \varphi(x', x'')$ une représentation de E' $\times$ E'' dans E. Utilisons des coefficients constituant un *corps*. Pour tout cycle Z^p de E dont la dimension p est *positive* nous avons, d'après le théorème 7 (n° **22**) et le lemme 4 (n° **15**),

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim Z'^p \times E''^0 + E'^0 \times Z''^p \mod \mathfrak{J}'_p \times \mathfrak{J}''_p. \tag{9}$$

Soit $\varphi'(x')$ ce que devient la représentation $\varphi(x', x'')$ quand on donne à x'' une valeur fixe; d'après la remarque 1 du n° **14**

$$\overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \times x''^0 \sim \overset{-1}{\varphi}(Z^p).(E'^0 \times x''^0);$$

or, d'après (5) n° **15**,

$$(Z'^q \times Z''^r).(E'^0 \times x''^0) \sim o, \qquad \text{si } r > o;$$

la formule précédente se réduit donc à

$$\overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \times x''^0 \sim Z'^p \times x^0, \qquad \text{c'est-à-dire à } \overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \sim Z'^p.$$

En définissant de même $\varphi''(x'')$, nous avons $\overset{-1}{\varphi''}(Z^p) \sim Z''^p$.

Portons ces deux dernières expressions dans (9); nous obtenons *la formule de M. Hopf : lorsque* E' *et* E'' *sont des espaces de Hausdorff bicompacts et connexes, que les coefficients constituent un corps et que* $p > o$

$$(10) \qquad \boxed{\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim \overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \times E''^0 + E'^0 \times \overset{-1}{\varphi''}(Z^p) \qquad \text{mod } \mathfrak{I}'_p \times \mathfrak{I}''_p.}$$

*Digression : Généralisation des théorèmes sur l'homotopie des n*os **20** *et* **21**. — Le premier membre de la formule de M. Hopf est indépendant de la valeur particulière attribuée à x'' dans la définition de $\varphi'(x')$; donc $\overset{-1}{\varphi'}(Z^p)$ est indépendant de cette valeur. Il en résulte que les raisonnements des nos **20** et **21** resteraient exacts si l'on généralisait comme suit la définition de l'homotopie : les représentations $\varphi(x', x'')$ de E' dans E qui s'obtiennent en donnant à x'' des valeurs fixes seraient dites homotopes entre elles dans E, lorsque $\varphi(x', x'')$ est une représentation de $E' \times E''$ dans E et lorsque E'' est, non plus un segment rectiligne fermé, mais un espace de Hausdorff bicompact et connexe. (Les démonstrations que nous venons de donner supposent que les coefficients constituent un corps; mais on peut les compléter dans le cas où les coefficients sont les entiers, ce qui suffit à la justification des généralisations énoncées.)

24. Espaces dans lesquels une multiplication est définie : théorème de M. H. Hopf. — Conservons les notations du théorème précédent. On établit sans peine ceci (H., nos 20, 21, 22) :

Corollaire du théorème 7. — La relation

$$Z'^p \times Z''^q \sim o \qquad \text{mod } \mathfrak{I}' \times \mathfrak{I}''$$

exige qu'on ait

$$\text{soit } Z'^p \sim o \quad \text{mod } \mathfrak{I}', \qquad \text{soit } Z''^q \sim o.$$

Posons deux nouvelles définitions (H., nos 13 et 14) :

Nous nommerons *maximal* tout cycle Z^p tel que $Z^p \not\sim o$ mod $\mathfrak{I}_p$, $p > o$. Soit un système constitué par un nombre fini de cycles d'un même espace; il sera dit *irréductible* lorsque chacun de ses cycles est maximal et que, plus généralement, chaque combinaison linéaire des cycles de même dimension de ce système est un cycle maximal.

L'intérêt que présentent les systèmes irréductibles résulte de la proposition suivante, dont la démonstration est aisée :

Lemme 10. — *Étant donnée une famille finie de cycles, on peut toujours construire un système irréductible tel que tout cycle de la famille soit homologue à une combinaison linéaire d'intersections de cycles du système.*

Nous allons maintenant condenser les deux raisonnements essentiels de M. Hopf (H., n^{os} 28 et 29) en le suivant : Soient un système irréductible de cycles, $Z^{q,\alpha}$, de E et une homologie entre ces cycles

$$P[Z^{q,\alpha}] \sim 0, \tag{11}$$

P étant un « polynome » dont les arguments $Z^{q,\alpha}$ obéissent à la loi de commutativité (l'intersection jouant le rôle de multiplication)

$$Z^{q_1,\alpha_1}.\,Z^{q_2,\alpha_2} \sim (-1)^{q_1 q_2} Z^{q_2,\alpha_2}.\,Z^{q_1,\alpha_1}. \tag{12}$$

De (11) résulte.

$$\overset{-1}{\varphi}[P(Z^{q,\alpha})] \sim 0, \qquad \text{c'est-à-dire } P\left[\overset{-1}{\varphi}(Z^{q,\alpha})\right] \sim 0;$$

d'où, en tenant compte de la formule de M. Hopf (10) et en nommant p la dimension maximum des $Z^{q,\alpha}$,

$$P\left[\overset{-1}{\varphi'}(Z^{q,\alpha}) \times E''^0 + E'^0 \times \overset{-1}{\varphi''}(Z^{q,\alpha})\right] \sim 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{J}'_p \times \mathfrak{J}''_p.$$

Soit Z^p l'un de ceux des $Z^{q,\alpha}$ qui ont la dimension maximum p; soit $Z^{r,\beta}$ ceux des $Z^{q,\alpha}$ qui diffèrent de Z^p; soit $\mathfrak{J}'$ l'idéal engendré par les $\overset{-1}{\varphi'}(Z^{r,\beta})$ et par tous les cycles de E' dont la dimension diffère de 0 et p; soit $\mathcal{E}''$ l'anneau d'homologie de E''; nous tirons de la dernière relation écrite

$$P\left[\overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \times E''^0 + E'^0 \times \overset{-1}{\varphi''}(Z^p), \qquad E'^0 \times \overset{-1}{\varphi''}(Z^{r,\beta})\right] \sim 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{J}' \times \mathcal{E}''.$$

Ordonnons P par rapport aux puissances de $\overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \times E''^0$; remarquons que ces puissances appartiennent à $\mathfrak{J}' \times \mathcal{E}''$ dès que leur exposant dépasse 1; il reste

$$\begin{aligned} &P[E'^0 \times \overset{-1}{\varphi''}(Z^p),\ E'^0 \times \overset{-1}{\varphi''}(Z^{r,\beta})] \\ &\quad + [\overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \times E''^0].\,P'[E'^0 \times \overset{-1}{\varphi''}(Z^p),\ E'^0 \times \overset{-1}{\varphi''}(Z^{r,\beta})] \sim 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{J}' \times \mathcal{E}''; \end{aligned}$$

cette relation s'écrit plus simplement

$$E'^0 \times \overset{-1}{\varphi''}(P[Z^{q,\alpha}]) + \overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \times \overset{-1}{\varphi''}(P'[Z^{q,\alpha}]) \sim 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{J}' \times \mathcal{E}'';$$

d'où, en tenant compte de (11),

$$\overset{-1}{\varphi'}(Z^p) \times \overset{-1}{\varphi''}(P'[Z^{q,\alpha}]) \sim 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{J}' \times \mathcal{E}''.$$

Si $\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim$ o mod $\mathfrak{J}'$, le système constitué par les $\overset{-1}{\varphi}'(Z^{q,\alpha})$ est réductible ; or cela est impossible, puisque le système des $Z^{q,\alpha}$ est irréductible, lorsque $\overset{-1}{\varphi}'$ définit un isomorphisme de l'anneau d'homologie de E sur celui de E′, ce que nous supposerons. Donc, d'après le corollaire du théorème 7 énoncé au début de ce numéro,

$$\overset{-1}{\varphi}''(P'[Z^{q,\alpha}]) \sim o.$$

Nous supposerons que $\overset{-1}{\varphi}''$ soit tel que cette relation entraîne

$$P'[Z^{q,\alpha}] \sim o.$$

Nous obtenons l'énoncé que voici :

Lemme 11. — *Complétons les conventions du n° **23** par les hypothèses suivantes : $\overset{-1}{\varphi}'$ définit un isomorphisme de l'anneau d'homologie de* E *sur celui de* E′*; $\overset{-1}{\varphi}''$ définit un isomorphisme de l'anneau d'homologie de* E *dans celui de* E″ *(c'est-à-dire sur un sous-anneau de l'anneau de* E″*). Soient $Z^{q,\alpha}$ des cycles de* E *constituant un système irréductible; s'ils vérifient une relation* $P[Z^{q,\alpha}] \sim o$, *alors ils vérifient aussi la relation* $P'[Z^{q,\alpha}] \sim o$, *où* P′ *est la dérivée* (¹) *de* P *par rapport à l'un quelconque de ses éléments de dimension maximum.*

Digression : En appliquant à des anneaux, extensions de corps, les conventions qui sont classiques dans la théorie des corps, extensions de corps (²), on peut résumer comme suit cet énoncé et le théorème 2 (n° **18**) : L'anneau que constituent les combinaisons linéaires des intersections des cycles d'un système irréductible de cycles de E est une extension du corps des coefficients; *cette extension est algébrique* (th. 2) et *inséparable* (lemme 11).

L'application répétée du lemme 11 à une relation $P[Z^{q,\alpha}] \sim o$, où P est un polynome ordonné et non nul, fournit finalement une relation $l A_\alpha = o$, où l et A_α sont un entier et un coefficient non nuls. Cela est impossible quand le corps de coefficients utilisé est celui des rationnels. Donc, dans ce cas, toute homologie $P[Z^{q,\alpha}] \sim o$ liant les éléments $Z^{q,\alpha}$ d'un système irréductible est conséquence des relations (12). Soit en particulier le système irréductible que constitue un élément maximal unique Z^p; d'après le théorème 2 (n° **18**) sa classe d'homologie est nilpotente : $(Z^p)^n$ désignant l'intersection de n cycles homologues à Z^p, on a $(Z^p)^n \sim o$ pour une valeur convenahle de n; or cette homologie ne résulte de (12) que si p est impair; donc, quand les coefficients sont les nombres rationnels, tout cycle maximal a une dimension impaire.

(¹) Nous nommons dérivée de $P[Z^p, Z^{r,\beta}]$ par rapport à Z^p le coefficient de $Z^{p,1}$ dans $P[Z^p + Z^{p,1}, Z^{r,\beta}]$ ordonné suivant les puissances de $Z^{p,1}$.

(²) Van der Waerden, *Moderne Algebra* I (Springer, 1937), chap. V, § 38; *Separable und inseparable Erveiterungen (Erveiterungen erster und zweiter Art).*

M. Hopf énonce ces résultats en choisissant $E = E' = E''$. Il vient :

THÉORÈME 8. — *Supposons qu'une « multplication continue » soit définie dans l'espace de Hausdorff bicompact et connexe* E *: ceci signifie qu'à chaque couple de points de* E, (x', x''), *l'ordre de ces points entrant en jeu, est associé un troisième point de* E, $x = x'x''$, *qui dépend continûment du couple* (x', x''). *Construisons l'anneau d'homologie de* E *en utilisant comme coefficients les nombres rationnels. Soit a un point particulier de* E; *les transformations inverses des deux représentations ax et xa définissent deux homomorphismes de l'anneau d'homologie de* E *en lui-même, qui sont indépendants du choix de a. Faisons l'hypothèse suivante :*

(h) *: chacun de ces homomorphismes est un isomorphisme de l'anneau de* E *sur lui-même (c'est-à-dire un automorphisme)*;

Alors : tout cycle maximal de E *est de dimension impaire; toute relation entre les éléments d'une famille finie de cycles de* E *est conséquence des relations générales* $Z^{p,\alpha}.Z^{q,\beta} \sim (-1)^{pq} Z^{q,\beta}.Z^{p,\alpha}$, *appliquées aux cycles d'un système irréductible tel que tout cycle de la famille soit homologue à une combinaison linéaire d'intersections de cycles du système.*

Remarque. — L'hypothèse (h) est vérifiée quand, par exemple, la suivante l'est :

(h') *: Il existe deux points a et b de* E *tels que* $ax = xb = x$ *quel que soit* x.

En effet $\overset{-1}{\varphi'}$ et $\overset{-1}{\varphi''}$ définissent alors la transformation identique de l'anneau d'homologie de E sur lui-même.

25. LES DEMI-GROUPES, D'APRÈS MM. HOPF ET H. SAMELSON. — (Ce numéro-ci est en relation avec H., n° 37, et avec le Mémoire de M. Samelson qu'annonce M. Hopf.)

Définitions. — Nous nommerons *demi-groupe* toute multiplication continue, $x = x'x''$, définie sur un espace de Hausdorff bicompact et connexe, qui vérifie l'hypothèse (h') et qui est associative :

$$x'(x''x''') = (x'x'')x'''.$$

E' et E'' étant deux espaces homéomorphes à E, Z'^p et Z''^p étant les cycles de E' et E'' qui s'identifient au cycle Z^p de E quand on identifie E', E'' et E, la formule de M. Hopf s'écrit, en posant

$$\varphi(x', x'') = x'x'',$$

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim Z'^p \times E''^0 + E'^0 \times Z''^p \quad \text{mod } \mathfrak{J}'_p \times \mathfrak{J}''_p \qquad (p > 0). \tag{14}$$

Nous nommerons *hypermaximal* tout cycle Z^p de E tel que

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim Z'^p \times E''^0 + E'^0 \times Z''^p, \qquad Z^p \not\sim 0 \qquad (p > 0), \tag{15}$$

les coefficients utilisés étant les nombres *rationnels*.

(Toute combinaison linéaire de cycles hypermaximaux de même dimension est donc ou bien hypermaximale ou bien homologue à zéro.) Les propositions qui suivent montrent l'intérêt de cette notion.

THÉORÈME 9. — *Tout cycle maximal Z^p est homologue mod $\mathfrak{J}_p$ à un cycle hypermaximal.*

COROLLAIRE 9. — *Étant donnée une famille finie de cycles de* E, *on peut trouver un système irréductible de cycles hypermaximaux, tel que tout cycle de la famille soit homologue à une combinaison linéaire d'intersections de cycles du système.*

Supposons le théorème 9 vrai pour les cycles maximaux Z^q de dimension $q<p$; d'après le lemme 10 (numéro précédent), le corollaire 9 est vrai pour les familles de cycles de dimensions inférieures à p; prouvons que dès lors le théorème 9 s'applique au cycle maximal Z^p.

Explicitons tout d'abord la formule (14) de M. Hopf

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim Z'^p \times E''^0 + E'^0 \times Z''^p + P[Z'^{q,\alpha}, Z''^{q,\alpha}], \tag{16}$$

où $q<p$ et où P est un polynome dans lequel le produit joue le rôle de multiplication; le corollaire 9 nous permet de supposer que les $Z^{q,\alpha}$ constituent un système irréductible de cycles hypermaximaux :

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^{q,\alpha}) \sim Z'^{q,\alpha} \times E''^0 + E'^0 \times Z''^{q,\alpha}.$$

Nous abrégerons l'écriture en posant

$$Y'^r = Z'^r \times E''^0 \quad \text{et} \quad Y''^s = E'^0 \times Z''^s, \quad \text{d'où } Y'^r . Y''^s = Z'^r \times Z''^s;$$

il vient, l'intersection jouant désormais le rôle de multiplication dans P,

$$\left\{\begin{aligned} &\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim Y'^p + Y''^p + P[Y'^{q,\alpha}, Y''^{q,\alpha}],\\ &\overset{-1}{\varphi}(Z^{q,\alpha}) \sim Y'^{q,\alpha} + Y''^{q,\alpha}. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Soit $\psi(x', x'', x''')$ la représentation que définissent les deux formules, équivalentes puisque $\varphi(x', x'')$ est une multiplication associative,

$$\psi(x', x'', x''') = \varphi[\varphi(x', x''), x'''], \tag{18}$$

$$\psi(x', x'', x''') = \varphi[x', \varphi(x'', x''')]. \tag{19}$$

Introduisons un quatrième espace E''' homéomorphe à E; posons

$$X'^r = Z'^r \times E''^0 \times E'''^0, \qquad X''^r = E'^0 \times Z''^r \times E'''^0, \qquad X'''^r = E'^0 \times E''^0 \times X'''^r;$$

les formules (17) et (18) nous donnent

$$\overset{-1}{\psi}(Z^p) \sim X'^p + X''^p + X'''^p + P[X'^{q,\alpha} + X''^{q,\alpha}, X'''^{q,\alpha}] + P[X'^{q,\alpha}, X''^{q,\alpha}], \tag{20}$$

tandis que les formules (17) et (19) nous donnent

$$(21) \qquad \overset{-1}{\psi}(Z^p) \sim X'^p + X''^p + X'''^p + P[X'^{q,\alpha},\ X''^{q,\alpha} + X'''^{q,\alpha}] + P[X''^{q,\alpha},\ X'''^{q,\alpha}].$$

En ordonnant les seconds membres de (20) et (21) nous obtenons, d'après les théorèmes 7 et 8, un même polynome, dont le monome

$$AX'^{q_1,\alpha_1}.X'^{q_2,\alpha_2}\dots.X'^{q_{\lambda-1},\alpha_{\lambda-1}}.X''^{q_\lambda,\alpha_\lambda}.X'''^{q_{\lambda+1},\alpha_{\lambda+1}}\dots.X'''^{q_\omega,\alpha_\omega}$$

a un coefficient A égal au coefficient d'un monome de $P[X'^{q,\alpha},\ X'''^{q,\alpha}]$ qui est d'après (20)

$$AX'^{q_1,\alpha_1}\dots.X'^{q_{\lambda-1},\alpha_{\lambda-1}}.X'^{q_\lambda,\alpha_\lambda}.X'''^{q_{\lambda+1},\alpha_{\lambda+1}}\dots.X'''^{q_\omega,\alpha_\omega},$$

d'après (21)

$$AX'^{q_1,\alpha_1}\dots.X'^{q_{\lambda-1},\alpha_{\lambda-1}}.X'''^{q_\lambda,\alpha_\lambda}.X'''^{q_{\lambda+1},\alpha_{\lambda+1}}\dots.X'''^{q_\omega,\alpha_\omega};$$

ainsi tous les monomes de $P[X'^{q,\alpha},\ X'''^{q,\alpha}]$, qui engendrent un même monome de $P[X'^{q,\alpha},\ X'^{q,\alpha}]$, quand on pose

$$X'^{q,\alpha} = X'''^{q,\alpha},$$

ont un même coefficient A — à l'exception suivante près : $P[X'^{q,\alpha},\ X'''^{q,\alpha}]$ ne contient aucun monome des types $X'^{q_1,\alpha_1}\dots.X'^{q_\omega,\alpha_\omega}$ et $X'''^{q_1,\alpha_1}\dots.X'''^{q_\omega,\alpha_\omega}$ — ; la somme de ces monomes de $P[X'^{q,\alpha},\ X'''^{q,\alpha}]$ est donc

$$A(X'^{q_1,\alpha_1} + X'''^{q_1,\alpha_1})\dots.(X'^{q_\omega,\alpha_\omega} + X'''^{q_\omega,\alpha_\omega}) - AX'^{q_1,\alpha_1}\dots.X'^{q_\omega,\alpha_\omega} - AX'''^{q_1,\alpha_1}\dots.X'''^{q_\omega,\alpha_\omega}.$$

Par suite, P est du type

$$P[X'^{q,\alpha},\ X'''^{q,\alpha}] = Q[X'^{q,\alpha} + X'''^{q,\alpha}] - Q[X'^{q,\alpha}] - Q[X'''^{q,\alpha}]$$

et la formule (16) de M. Hopf s'écrit

$$\begin{aligned}\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim{}& Z'^p \times E''^0 + E'^0 \times Z''^p \\ &+ Q[Z'^{q,\alpha} \times E''^0 + E'^0 \times Z''^{q,\alpha}] - Q[Z'^{q,\alpha} \times E''^0] - Q[E'^0 \times Z''^{q,\alpha}],\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p - Q[Z^{q,\alpha}]) \sim (Z'^p - Q[Z'^{q,\alpha}]) \times E''^0 + E'^0 \times (Z''^p - Q[Z''^{q,\alpha}]);$$

cette formule exprime que $Z^p - Q[Z^{q,\alpha}]$ est hypermaximal.

C. Q. F. D.

Théorème 10. — *Tout cycle hypermaximal est maximal.* Soit Z^p un cycle non maximal; d'après le corollaire 9 nous avons $Z^p \sim P[Z^{q,\alpha}]$, où les arguments $Z^{q,\alpha}$ du polynome P constituent un système irréductible de cycles hypermaximaux dont les dimensions q sont toutes inférieures à p. D'où

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim P[Z'^{q,\alpha} \times E''^0 + E'^0 \times Z''^{q,\alpha}];$$

d'où, puisque P n'est pas linéaire, compte tenu des théorèmes 7 et 8,

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \not\sim Z'^p \times E''^0 + E'^0 \times Z''^p,$$

donc Z^p n'est pas hypermaximal. C. Q. F. D.

Puissances. — Posons $\theta_2(x) = x^2$, c'est-à-dire $\theta_2(x) = \varphi(x, x)$. Utilisons la représentation $\pi(x)$ que définit le n° 8; nous avons

$$\theta_2(x) = \varphi[\pi(x)], \quad \text{d'où } \overset{-1}{\theta_2}(Z^p) \sim \overset{-1}{\pi}\left[\overset{-1}{\varphi}(Z^p)\right];$$

d'où, en tenant compte de (15) et de la relation $\overset{-1}{\pi}(Z'^q \times Z''^r) \sim Z^q . Z^r$ (n° **14**),

$$\overset{-1}{\theta_2}(Z^p) \sim 2Z^p, \quad \text{quand } Z^p \text{ est hypermaximal.} \tag{22}$$

Remarque 1. — Nous avons donc $\overset{-1}{\theta_2}(Z^p) \sim 2^n Z^p$, quand Z^p est l'intersection de n cycles hypermaximaux.

Remarque 2. — La formule (22) peut servir de définition aux cycles hypermaximaux. Cette définition reste utilisable quand la multiplication $x'x''$ vérifie l'hypothèse (h') sans être associative : le théorème 9, son corollaire et le théorème 10 restent exacts. Mais, la formule (15) et le théorème 11 ne valant plus, la notion de cycle hypermaximal a néanmoins perdu l'essentiel de son intérêt.

Revenons au cas des demi-groupes; posons $\theta_3(x) = x^3$; la formule (20), où P est nul, nous donne

$$\overset{-1}{\theta_3}(Z^p) \sim 3Z^p, \quad \text{quand } Z^p \text{ est hypermaximal.}$$

Plus généralement :

Théorème 11. — *Soit $\theta_k(x) = x^k$, k étant un entier $\geqq 0$; soit Z^p un cycle hypermaximal; nous avons*

$$\overset{-1}{\theta_k}(Z^p) \sim kZ^p. \tag{23}$$

Soient

$$\theta(x', x'', x''') = \xi'_1(x')\xi''_1(x'')\xi'''_1(x''')\xi'_2(x')\xi''_2(x'')\xi'''_3(x''')\dots\xi'''_\omega(x''') \quad et \quad Z^p \sim P[Z^{q,\alpha}],$$

les $Z^{q,\alpha}$ étant hypermaximaux, nous avons

$$\overset{-1}{\theta}(Z^p) \sim P\left[\sum_\beta \overset{-1}{\xi'_\beta}(Z^{q,\alpha}) \times E''^0 \times E'''^0 + E'^0 \times \sum_\beta \overset{-1}{\xi''_\beta}(Z^{q,\alpha}) \times E'''^0 \right.$$
$$\left. + E'^0 \times E''^0 \times \sum_\beta \xi'''_\beta(Z^{q,\alpha})\right]. \tag{24}$$

Si le demi-groupe est un groupe, la formule (23) *vaut encore lorsque k est un entier négatif.*

PROBLÈMES. — 1° Comparer l'anneau d'homologie d'un espace et d'un de ses espaces de recouvrement.

2° Étudier l'anneau d'homologie d'un espace de Hausdorff bicompact et symétrique (*cf.* E. CARTAN, *Mémorial*, fasc. 42, chap. IV).

CHAPITRE II.

ESPACE DE HAUSDORFF BICOMPACT POSSÉDANT UN RECOUVREMENT FINI CONVEXOÏDE.

Tous les théorèmes de ce Chapitre supposeront *simples* certains ensembles de points. Pour appliquer ces théorèmes, il nous faudra donc utiliser le seul critère qui nous permette d'affirmer qu'un ensemble est simple : le théorème 6 (n° **21**), ou sa généralisation (n° **23**). Les notions qu'introduit ce Chapitre nous permettront de déterminer par un nombre *fini* d'opérations les anneaux d'homologie de certains espaces, en particulier des polyèdres; elles seront d'autre part la base de la théorie des points fixes (Chap. III) et plus généralement de *la théorie des équations et des transformations*.

I. — Complexe concret dont chaque élément a un support simple.

Ce paragraphe est étroitement apparenté aux n°s **16** et **17** (Chap. I, § IV).

26. COUVERTURE D'UN SOUS-ENSEMBLE FERMÉ. — Nous savons que l'intersection d'une couverture par un ensemble de points est une couverture de cet ensemble. Réciproquement soit F un ensemble fermé de points d'un espace topologique E et soit K une couverture de F; proposons-nous de construire une couverture de E qui soit en rapport aussi simple que possible avec K. (Cette construction nous servira ailleurs à étudier la position de F dans E.)

Prolongement de K *à* E. — Soit C le complexe concret dont la structure est la suivante : il se compose de deux éléments U^0 et U^1; $\dot{U}^0 = U^1$ et $\dot{U}^1 = 0$; $|U^0| = F$ et $|U^1|$ est l'ensemble des points frontière de F. Soit K' le complexe qui se compose de tous les éléments de K.C (leurs supports et leur loi de dérivation restant les mêmes) et en outre d'un élément V^0 tel que $\dot{V}^0 = -U^1.K^0$ et que $|V^0|$ soit la fermeture de $E - F$. On vérifie aisément que K' est une couverture de E et que les intersections de K et K' par l'intérieur de F sont les mêmes. Nous nommerons la couverture K' « prolongement à E de la couverture K de F ».

Élargissement de la couverture K *de* F. — Supposons que E soit un espace normal. L'application du lemme 5 (n° **16**) au système des supports des éléments de K fournit immédiatement la généralisation que voici du lemme 6 (nº **16**) : On peut construire un élargissement K^* de la couverture K de F qui soit arbitrairement voisin de K et qui soit une couverture de la fermeture d'un voisinage de F.

Soit K' l'extension à E de cet élargissement K^* de la couverture K de F; $K'.F$ est un élargissement de K et est arbitrairement voisin de K. Donc :

Lemme 12. — *Étant donnés un sous-ensemble fermé* F *de points d'un espace normal* E *et une couverture* K *de* F, *on peut construire une couverture* K' *de* E *telle que* $K'.F$ *soit un élargissement de* K *arbitrairement voisin de* K.

Ce lemme nous servira à prouver le suivant :

Lemme 13. — *Soient un espace normal, un ensemble fermé* F *de points de* E, *une forme* L^p *de* E. *Supposons que* F *soit simple et que* $\dot{L}^p.F = 0$. *Si* $p > 0$, *je dis qu'il existe une forme* L^{p-1} *de* E *telle que* $L^p.F = \dot{L}^{p-1}.F$. *Si* $p = 0$, *je dis qu'il existe une couverture* K *de* E *et un coefficient* A_α *tels que* $L^0.F = A_\alpha K^0.F$.

Démonstration. — Supposons $p > 0$. Soit K la couverture de E à laquelle L^p appartient; $L^p.F$ appartient à la couverture K.F de F; puisque F est simple et que $(L^p.F)^\bullet = 0$, il existe une couverture K' de F et une forme L'^{p-1} de $K'.(K.F)$ telle que $L^p.F = \dot{L}'^{p-1}$. D'après le lemme 12 on peut trouver une couverture K'' de E telle que $K'.(K.F)$ soit isomorphe à $K''.(K.F)$; à L'^{p-1} correspond dans $K''.(K.F)$ une forme que nous nommerons L''^{p-1}; on a $L^p.F = \dot{L}''^{p-1}$; or L''^{p-1} est du type $L^{p-1}.F$, L^{p-1} étant une forme de E. Cela établit la proposition énoncée.

Supposons $p = 0$. Soit K la couverture de E à laquelle L^0 appartient; d'après le lemme 4 (nº **15**) K.F est connexe; donc $L^0.F = A_\alpha K^0.F$, où $A_\alpha \in A$.

27. Complexe concret dont chaque élément a un support simple. — Nous allons commencer par généraliser les définitions du nº **12** (Chap. I, § III).

Définitions. — Soit C' un complexe concret arbitraire de l'espace topologique E. Nommons forme de $E.C'$ toute forme d'un complexe $K.C'$, où K est une couverture quelconque de E : si nous désignons par $X'^{p,\alpha}$ les éléments de C' et par $L^{q,\beta}$ les formes de E, alors les formes de $E.C'$ sont les expressions

$$M^p = \sum_{\beta,\, 0 \leq q} L^{q,\beta}.X'^{p-q,\beta}.$$

Soit K'' une seconde couverture arbitraire de E; soit K''^0 son cycle unité, convenons que M^p et $K''^0.M^p$ constituent la même forme de $E.C'$. Grâce à cette convention les combinaisons linéaires homogènes des formes de $E.C'$ sont des formes de $E.C'$. La dérivée d'une forme de $E.C'$ est une forme de $E.C'$. Nous nommerons cycles de $E.C'$ les formes de $E.C'$ dont la dérivée est nulle; nous dirons que deux formes de $E.C'$ sont homologues entre elles lorsque leur différence est la dérivée d'une forme de $E.C'$. L'homologie répartit les cycles de $E.C'$ en classes d'homologie de $E.C'$. Les classes d'homologie à p dimensions de $E.C'$ constitueront les éléments du « $p^{\text{ième}}$ groupe de Betti de $E.C'$ ».

Lorsque E est un espace normal et que les supports ([1]) de C' sont simples, les définitions précédentes et le lemme 13 permettent d'appliquer à $E.C'$ les raisonnements que le n° **17** applique à $K^*.C'$; on obtient ainsi les conclusions suivantes : tout cycle de $E.C'$ est homologue à un cycle $K^0.Z'^p$ où Z'^p est un cycle de C' et où K^0 est le cycle unité d'une couverture K de E; les relations $K^0.Z'^p \sim 0$ dans $E.C'$ et $Z'^p \sim 0$ dans C' sont équivalentes : la correspondance $Z'^p \leftrightarrow E^0.Z'^p$ est donc un isomorphisme des groupes de Betti de C' sur ceux de $E.C'$. Nous exprimerons ces faits en les termes suivants (*cf.* lemme 8) :

LEMME 14. — *Si les supports* ([1]) *d'un complexe* C' *sont des ensembles simples de points d'un espace normal* E, *alors* $E.C'$ *et* C' *ont mêmes groupes de Betti.*

Ce Chapitre consiste essentiellement à donner de ce lemme deux applications, de natures très différentes, à l'analyse de la structure de l'anneau d'homologie de certains espaces : l'une constitue le n° **28**, l'autre le n° **36**, dont le paragraphe III n'est que le développement.

Nous aurons à faire usage de la proposition suivante, qui se déduit aisément du lemme 3.

LEMME 15. — *Soit* C'' *un sous-complexe ouvert ou un rétrécissement de* C'. *Si une égalité ou une homologie vaut dans* $E.C'$ *entre des formes et leurs dérivées, la relation analogue vaut entre les formes correspondantes de* $E.C''$.

28. COUVERTURE DONT CHAQUE ÉLÉMENT A POUR SUPPORT UN ENSEMBLE SIMPLE. — Lorsque C' est une couverture K' de E, le $p^{\text{ième}}$ groupe de Betti de $E.C'$ est évidemment identique au groupe que constituent les classes d'homologie de E dont la dimension est p; et le lemme 14 s'énonce comme suit :

THÉORÈME 12. — *Soit* E *un espace de Hausdorff bicompact, possédant une couverture* K' *à supports simples* ([2]). *Les classes d'homologie de* E *s'identifient alors aux classes d'homologie de* K'.

Remarque 1. — La démonstration suppose E normal; mais nous ne savons justifier l'hypothèse « les supports de K' sont simples » qu'en appliquant le théorème 6 qui, lui, suppose que E est un espace de Hausdorff bicompact; c'est pourquoi nous avons restreint l'énoncé à ce cas.

([1]) C'est-à-dire une couverture dont chaque élément a pour support un ensemble simple.

([2]) C'est-à-dire une couverture dont chaque élément a pour support un ensemble simple.

Remarque 2. — Lorsque le théorème 12 est applicable, les dimensions des classes d'homologie de E sont bornées, et il existe un système fini de classes dont toute autre est combinaison linéaire : on dit que *l'anneau d'homologie de* E *possède une base finie.*

Remarque 3. — Nous nommerons *recouvrement convexoïde* tout recouvrement dont les éléments ont les deux propriétés que voici :

1° chacun de ces éléments est fermé et simple;
2° l'intersection d'un nombre fini de ces éléments est vide ou simple.

Si un espace de Hausdorff bicompact E possède un recouvrement fini convexoïde, alors le théorème 12 est applicable à la couverture de E qu'engendre ce recouvrement; l'anneau d'homologie de E a donc une base finie.

On peut déduire plus généralement du lemme 14 les deux théorèmes suivants, dont le théorème 12 n'est qu'une conséquence :

Théorème 13. — *Soit* E *un espace de Hausdorff bicompact possédant une couverture* K′ *qui puisse être élargie en un complexe concret* C′ *à supports simples appartenant à* E. *Tout cycle de* E *est homologue à un cycle de* K′.

Démonstration. — D'après le lemme 14 tout cycle de E.C′ est homologue à un cycle de C′. Tout cycle de E.K′ est donc homologue à un cycle de K′ (en vertu du lemme 15). Or les cycles de E.K′ ne sont autres que les cycles de E.

Théorème 14. — *Soit* E *un espace normal possédant une couverture* K′ *qui soit un élargissement d'un complexe concret* C′ *à supports simples. Si un cycle de* K′ *est homologue à zéro dans* E, *il est homologue à zéro dans* K′.

Démonstration. — Soit Z'^p un cycle de K′ homologue à zéro dans E; Z'^p est homologue à zéro dans E.K′; d'après le lemme 15, le cycle correspondant de C′ est homologue à zéro dans E.C′; donc, d'après le lemme 14, ce cycle est homologue à zéro dans C′; par suite, puisque C′ et K′ sont isomorphes, Z'^p est homologue à zéro dans K′.

Exemples. — Les figures 1, 2, 4 (n^os **11** et **15**) illustrent ces trois théorèmes.

29. Applications. — Le théorème 12 a les corollaires suivants :

Corollaire 12_1. — *Si un espace de Hausdorff bicompact possède une couverture qui est un simplexe et dont chaque élément a pour support un ensemble simple, alors cet espace est simple.*

Corollaire 12_2. — *La réunion* $F_1 + F_2 + \ldots + F_\omega$ *d'un nombre fini d'ensembles bicompacts de points d'un espace de Hausdorff est simple lorsque chacun de ces* *ensembles et chacune de leurs intersections mutuelles*

$$F_\alpha,\quad F_\alpha.F_\beta,\quad F_\alpha.F_\beta.F_\gamma,\quad \ldots,\quad F_1.F_2\ldots.F_\omega$$

est simple (Cf. : *théorème de Helly*, A.-H., Chap. VII, § 2, p. 10).

Nota. — L'ensemble vide n'est pas simple; aucune de ces intersections ne doit donc être vide.

Démonstration. — Le corollaire 12_1 s'applique à la couverture de

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_\omega$$

qu'engendre le recouvrement $F_1, F_2, \ldots, F_\omega$; cette couverture est un simplexe, d'après le n° 5, puisque $F_1.F_2.\ldots.F_\omega \neq 0$.

Anneau d'homologie de la sphère. — La sphère à n dimensions, S, d'équation cartésienne $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$, possède, outre la classe d'homologie unité S^0, une classe d'homologie S^n à n dimensions et à coefficients entiers; quels que soient les coefficients utilisés, son anneau d'homologie se compose des classes $A_\alpha S^0$ et $A_\alpha S^n$ ($A_\alpha \in A$), dont aucune n'est nulle. On a donc $S^n.S^n \sim 0$.

Démonstration. — S possède la couverture suivante : ses éléments sont :

$$X^{0,1},\quad X^{0,2},\quad X^{1,1},\quad X^{1,2},\quad \ldots,\quad X^{n,1},\quad X^{n,2};$$

on a

$$\dot{X}^{p,1} = -\dot{X}^{p,2} = X^{p+1,1} + X^{p+1,2} \quad \text{si } p < n; \qquad \dot{X}^{n,1} = \dot{X}^{n,2} = 0;$$

$|X^{0,1}|$ est l'ensemble des points de S tels que : $x_0 \geqq 0$;
$|X^{0,2}|$ est l'ensemble des points de S tels que : $x_0 \leqq 0$;
$|X^{1,1}|$ est l'ensemble : $x_0 = 0,\ x_1 \geqq 0$;
$|X^{1,2}|$ est l'ensemble : $x_0 = 0,\ x_1 \leqq 0$;
$|X^{2,1}|$ est l'ensemble : $x_0 = x_1 = 0,\ x_2 \geqq 0$;
$|X^{2,2}|$ est l'ensemble : $x_0 = x_1 = 0,\ x_2 \leqq 0$;
.....................................;
$|X^{n,1}|$ est l'ensemble : $x_0 = x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0,\ x_n = 1$;
$|X^{n,2}|$ est l'ensemble : $x_0 = x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0,\ x_n = -1$.

Chacun de ces supports est simple, d'après le théorème 6 (n° **21**). On a

$$S^0 \sim X^{0,1} + X^{0,2} \qquad \text{et} \qquad S^n \sim X^{n,1}.$$

Notons que cette couverture, d'un emploi si commode, n'est pas engendrée par un recouvrement.

Le théorème du pavage de Lebesgue. — S étant toujours la sphère à n dimensions, toute couverture de S qui peut être élargie en un complexe à supports simples appartenant à S a au moins un élément de dimension n : sinon, d'après le théorème 13, S n'aurait pas de classe d'homologie de dimension n. En particulier tout recouvrement fermé de S qui peut être élargi en un recouvrement convexoïde est d'ordre supérieur à n; (la notion de recouvrement convexoïde a été introduite au n° **28**, remarque 3; rappelons que l'ordre d'un recouvrement est le plus grand entier λ tel qu'on puisse trouver λ éléments du recouvrement dont l'intersection ne soit pas vide). Plus particulièrement encore, l'ordre d'un recouvrement fermé de S est plus grand que n, lorsque chaque élément de ce recouvrement appartient à une demi-sphère ouverte de S. En projetant la figure sur le plan diamétral $x_0 = 0$, il vient : un recouvrement de la boule à n dimensions, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1$, est d'ordre supérieur à n lorsque chaque élément de ce recouvrement ou bien est intérieur à la boule, ou bien appartient à une demi-boule ouverte (une demi-boule ouverte est l'ensemble des points de la boule qui vérifient une inégalité $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n > 0$). Cette dernière proposition est le théorème du pavage de Lebesgue (A.-H., Chap. IX, § 3, 1).

La bande de Möbius a même anneau d'homologie que la circonférence; (on déduit aisément cette proposition du théorème 12).

II. — Dual d'un complexe.

Les six premiers numéros de ce paragraphe concernent les complexes abstraits : ils constituent un complément au Chapitre I, paragraphe I. Les notions qu'ils introduisent trouveront leur application au n° **36**, au paragraphe III et au Chapitre III.

30. Notation inférieure. — A côté de la notation utilisée jusqu'à présent, il nous sera désormais commode d'utiliser la suivante, que nous nommerons notation inférieure : le complexe C, ses éléments $X^{p,\alpha}$, leurs dérivées $\dot{X}^{p,\alpha}$, la forme linéaire L^p, sa dérivée $\dot{L}^p$, les sous-complexes $\overline{L^p}$ et $\underline{X^{p,\alpha}}$ seront respectivement désignés en notation inférieure par c, $x_{n-p,\alpha}$, $\dot{x}_{n-p,\alpha}$, l_{n-p}, $\dot{l}_{n-p}$, $\overline{l_{n-p}}$, $\underline{x_{n-p,\alpha}}$, n étant un entier fixe; $n-p$ est la « dimension inférieure » de $x_{n-p,\alpha}$ et de l_{n-p}. Alors que la dérivation augmente d'une unité la dimension supérieure, elle diminue d'une unité la dimension inférieure.

Nous adopterons la convention suivante quant au produit par un complexe inférieur : $X^{p,\alpha} \times x'_{q,\beta} = (-1)^{pq} x'_{q,\beta} \times X^{p,\alpha}$ est un élément de dimension inférieure $q-p$, dont la dérivée est

$$(X^{p,\alpha} \times x'_{q,\beta})^{\cdot} = \dot{X}^{p,\alpha} \times x'_{q,\beta} + (-1)^p X^{p,\alpha} \times \dot{x}'_{q,\beta}.$$

Homogénéité des formules. — La somme des dimensions supérieures et du nombre de points signes de dérivation diminuée de la somme des dimensions inférieures est nécessairement la même dans les divers « monomes » de chaque formule; la barre supérieure (inférieure) équivaut à un nombre indéterminé positif ou nul (négatif ou nul) de points signes de dérivation.

31. Dual d'un complexe abstrait. — Nous nommerons dual d'un complexe abstrait C le complexe abstrait c qui a la structure suivante : nous utilisons pour c la notation inférieure; les éléments $x_{p,\alpha}$ de c correspondent biunivoquement aux éléments $X^{p,\alpha}$ de C; la loi de dérivation dans c est telle qu'on ait

$$\left(\sum_{p,\alpha} X^{p,\alpha}\times x_{p,\alpha}\right)^{\bullet}=0, \tag{25}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{p,\alpha}\dot{X}^{p,\alpha}\times x_{p,\alpha}+\sum_{p,\alpha}(-1)^p X^{p,\alpha}\times \dot{x}_{p,\alpha}=0; \tag{26}$$

en d'autres termes, si nous posons

$$\dot{X}^{p,\alpha}=\sum_{\beta} C\begin{bmatrix}\alpha\\ p\\ \beta\end{bmatrix} X^{p+1,\beta} \qquad \text{et} \qquad \dot{x}_{p+1,\alpha}=\sum_{\beta} c\begin{pmatrix}\beta\\ p\\ \alpha\end{pmatrix} x_{p,\beta}, \tag{27}$$

la loi de dérivation de c est définie par les relations

$$c\begin{pmatrix}\alpha\\ p\\ \beta\end{pmatrix}=(-1)^p C\begin{bmatrix}\alpha\\ p\\ \beta\end{bmatrix}. \tag{28}$$

On déduit aisément des formules (27) et (28) ceci :

Lemme 16. — *Les relations $X^{p,\alpha}\in \underline{X}^{q,\beta}$ et $x_{p,\alpha}\in \overline{x}_{q,\beta}$ sont équivalentes.* (Rappelons que $\underline{X}^{q,\beta}$ est le sous-complexe ouvert que constituent les éléments de C auxquels $X^{q,\beta}$ adhère; *cf.* n° **6**, *rem.*)

Lemme 17. — *A tout sous-complexe ouvert (fermé) de C correspond dans c un sous-comvlexe fermé (ouvert), qui est dual du précédent.* (Par exemple $\overline{x}_{p,\alpha}$ est dual de $\underline{X}^{p,\alpha}$.)

Dual d'un complexe possédant un cycle unité. — Les propositions qui suivent sont équivalentes entre elles : C possède un cycle unité

$$-\bullet\sum_{\alpha}\dot{X}^{0,\alpha}=0-\bullet\sum_{\alpha} C\begin{bmatrix}\alpha\\ 0\\ \beta\end{bmatrix}=0,$$

quel que soit β — • $\sum_{\alpha} c\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\\ \beta\end{pmatrix}=0$ quel que soit β — •. Les relations $\sum_{\beta} b^{\beta} c\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\\ \beta\end{pmatrix}=a^{\alpha}$ entraînent que $\sum_{\alpha} a^{\alpha}=0$ — •. La relation $\left(\sum_{\beta} b^{\beta}x_{1,\beta}\right)^{\bullet}=\sum_{\alpha} a^{\alpha}x_{0,\alpha}$ entraîne que $\sum_{\alpha} a^{\alpha}=0$ — •. L'homologie $\sum_{\alpha} a^{\alpha}x_{0,\alpha}\sim 0$ entraîne que $\sum_{\alpha} a^{\alpha}=0$ — •. Donc : pour que C possède un cycle unité, il faut et suffit que son dual c possède la propriété suivante : on a $\sum_{\alpha} a^{\alpha}=0$ chaque fois $\sum_{\alpha} a^{\alpha}x_{0,\alpha}\sim 0$.

Dual d'un complexe connexe C. — Lorsque C possède un cycle unité, les propriétés suivantes sont équivalentes entre elles : C est connexe —•. Quels que soient les coefficients utilisés, les relations $\sum_\alpha A_\alpha \dot{X}^{0,\alpha} = 0$, c'est-à-dire $\sum_\alpha A_\alpha c\binom{\alpha}{\substack{0\\ \beta}} = 0$, exigent que les A_α soient tous égaux —. Le système $\sum_\beta b^\beta c\binom{\alpha}{\substack{0\\ \beta}} = a^\alpha$, où les inconnues b^β et les paramètres a^α sont des entiers, a pour seule condition de compatibilité $\sum_\alpha a^\alpha = 0$ (l'équivalence de cette propriété et de la précédente est un théorème classique d'arithmétique : *voir* VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, II, Springer, 1940, Chap. XV, § 108, Aufgabe 5) —. Si $\sum_\alpha a^\alpha = 0$, on a $\sum_\alpha a^\alpha x_{0,\alpha} \sim 0$ —•. Donc : pour que C soit connexe, il faut et il suffit que son dual c possède la propriété que voici : les relations $\sum_\alpha a^\alpha x_{0,\alpha} \sim 0$ et $\sum_\alpha a^\alpha = 0$ sont équivalentes. Dans ces conditions les divers $x_{0,\alpha}$ appartiennent à une même classe d'homologie, que nous désignerons par 1; nous écrirons

$$\boxed{\sum_\alpha a^\alpha x_{0,\alpha} \sim \sum_\alpha a^\alpha; \qquad a^\alpha \sim 0 \text{ équivaut à } a^\alpha = 0.} \tag{29}$$

32. INTERSECTION DUALISTIQUE D'UN COMPLEXE SIMPLICIAL ET DE SON DUAL. — Soit c le dual d'un complexe C. Nommons éléments diagonaux de $C \times c$ les éléments $X^{p,\alpha} \times x_{p,\alpha}$. *L'intersection dualistique* C,c *sera* par définition *le plus petit sous-complexe ouvert de* $C \times c$ *qui contienne tous les éléments diagonaux de* $C \times c$. Nous nommerons $X^{p,\alpha}, x_{q,\beta}$ l'élément de C,c qui correspond à l'élément $X^{p,\alpha} \times x_{q,\beta}$ de $C \times c$.

LEMME 18. — *Les relations* $X^{p,\alpha}, x_{q,\beta} \neq 0$ *et* $X^{p,\alpha} \in \underline{X}^{q,\beta}$ *sont équivalentes.*

Nota. — La définition de $\underline{X}^{q,\beta}$ se trouve au n° 6, exemple.

Démonstration. — La relation $X^{p,\alpha}, x_{q,\beta} \neq 0$ exprime que $X^{p,\alpha} \times x_{q,\beta}$ appartient au sous-complexe C, c de $C \times c$, c'est-à-dire qu'il existe r et γ tels que

$$X^{p,\alpha} \times x_{q,\beta} \in \underline{X^{r,\gamma} \times x_{r,\gamma}},$$

c'est-à-dire que

$$X^{p,\alpha} \in \underline{X}^{r,\gamma} \qquad \text{et} \qquad x_{q,\beta} \in \underline{x_{r,\gamma}},$$

c'est-à-dire, en tenant compte du lemme 16,

$$X^{p,\alpha} \in \underline{X}^{r,\gamma} \qquad \text{et} \qquad X^{r,\gamma} \in \underline{X}^{q,\beta};$$

elle équivaut donc bien à la relation $X^{p,\alpha} \in X^{q,\beta}$.

Le lemme 18 a les conséquences suivantes :

(30) $$X^{p,\alpha},\ x_{q,\beta}=0 \qquad \text{si } p>q$$

(c'est-à-dire : tout élément de C, c a une dimension inférieure positive ou nulle)

(31) $$X^{p,\alpha},\ x_{p,\beta}=0 \qquad \text{si } \alpha\neq\beta,$$

(32) $$X^{p,\alpha},\ x_{p,\alpha} \quad \text{est un cycle.}$$

Définition. — Nous dirons qu'un complexe C, d'éléments $X^{p,\alpha}$, est ***simplicial*** lorsqu'il est connexe et que chacun de ses sous-complexes $\overline{X^{p,\alpha}}$ est un simplexe. (Rappelons à ce propos le lemme 4 : toute couverture d'un espace connexe est connexe.)

Lemme 19. — *Soient un complexe simplicial* C, *son dual c et leur intersection dualistique* C, *c. Je dis que :*

1° *le complexe* C, *c et le complexe c ont les mêmes groupes de Betti;*

2° *en particulier le cycle* $X^{p,\alpha},\ x_{p,\alpha}$ *de* C, *c est homologue à la classe* $(-1)^p$ *de c :*

(33) $$X^{p,\alpha},\ x_{p,\alpha}\sim(-1)^p.$$

Démonstration du 1°. — Les raisonnements que le n° **17** (Chap. I, § 4) applique à $K^*.C'$ et que le n° **27** (Chap. II, § 1) réutilise une première fois s'appliquent à C, c, le complexe C jouant le rôle de K^* et son dual c le rôle de C'; il en résulte que la correspondance qui associe à chaque classe d'homologie z_p de c la classe de C, c qui contient C^0, z_p est un isomorphisme des groupes de Betti de c sur ceux de C, c. Nous convenons d'identifier les classes d'homologie qui se correspondent ainsi.

Démonstration de la formule (33) *quand* $p=0$. — D'après (31) nous avons $X^{0,\alpha},\ x_{0,\alpha}=C^0,\ x_{0,\alpha}$; or nous avons convenu d'identifier la classe d'homologie de $C^0, x_{0,\alpha}$ avec celle de $x_{0,\alpha}$ et de désigner cette dernière par 1.

Démonstration récurrente de la formule (33). — Supposons la formule (33) établie pour une valeur particulière de p. Donnons-nous arbitrairement un élément $x_{p+1,\alpha}$ et une forme $\sum_\beta a_\beta X^{p,\beta}$ à coefficients a_β entiers; nous avons

$$\Big(\sum_\beta a_\beta X^{p,\beta},\ x_{p+1,\alpha}\Big)^{\bullet}=\sum_{\beta,\gamma} a_\beta C\begin{bmatrix}\beta\\ p\\ \gamma\end{bmatrix} X^{p+1,\gamma},\ x_{p+1,\alpha}+\sum_{\beta,\gamma}(-1)^p a_\beta c\begin{pmatrix}\gamma\\ p\\ \alpha\end{pmatrix} X^{p,\beta},\ x_{p,\gamma},$$

d'où puisque $X^{p+1,\gamma},\ x_{p+1,\alpha}=0$ si $\alpha\neq\gamma$, que $X^{p,\beta},\ x_{p,\gamma}=0$ si $\beta\neq\gamma$ et que $X^{p,\beta},\ x_{p,\beta}\sim(-1)^p$,

$$0\sim a[X^{p+1,\alpha},\ x_{p+1,\alpha}+(-1)^p], \qquad \text{où } a=\sum_\beta a_\beta C\begin{bmatrix}\beta\\ p\\ \alpha\end{bmatrix}=(-1)^p\sum_\beta a_\beta c\begin{pmatrix}\beta\\ p\\ \alpha\end{pmatrix} \quad [cf.\ (28)].$$

Pour déduire de cette relation la conclusion cherchée : $X^{p+1,\alpha}, x_{p+1,\alpha} \sim (-1)^{p+1}$, il suffit de prouver qu'on peut choisir les entiers a_β tels que $a = 1$. Ceci revient à prouver que les divers $C\begin{bmatrix}\beta\\p\\\alpha\end{bmatrix}$ correspondant aux valeurs choisies pour p et α et aux diverses valeurs de β sont premiers dans leur ensemble. S'il n'en était pas ainsi, il existerait un entier $m > 1$ tel que $C\begin{bmatrix}\beta\\p\\\alpha\end{bmatrix} = 0 \mod. m$, c'est-à-dire tel que $X^{p+1,\alpha}$ ne figure dans les divers $\dot{X}^{p,\beta}$ qu'avec un coefficient multiple de m; donc $X^{p+1,\alpha}$ serait un cycle de $\underline{X^{p+1,\alpha}}$ non homologue à zéro mod. m; or cela n'est pas possible, puisque $X^{p+1,\alpha}$ est un simplexe.

33. Groupes de Betti d'un complexe simplicial C et de son dual c, lorsque les coefficients constituent un corps (rationnels; entiers mod. m, m étant premier). — Nous nommerons *base d'un complexe* C tout système de formes de C (à coefficients pris dans le corps de coefficients donné) tel que chaque forme de C soit égale à une et à une seule combinaison linéaire de formes du système : les formes

$$L^{p,\alpha} = \sum_\beta A\begin{bmatrix}\alpha\\p\\\beta\end{bmatrix} X^{p,\beta}$$

constituent une base si et seulement si, pour chaque valeur de p, la matrice $A\begin{bmatrix}\alpha\\p\\\beta\end{bmatrix}$ a une inverse.

Nous nommerons *base d'homologie* de C tout système de classes d'homologie de C tel que chaque cycle de C appartienne à une et une seule combinaison linéaire de classes de ce système (¹). Nous nommerons $p^{\text{ième}}$ *nombre de Betti* de C le nombre de classes d'homologie à p dimensions que comporte chacune des bases d'homologie de C (ce nombre est indépendant du choix de cette base).

Nous nommerons base du groupe des cycles homologues à zéro tout système de cycles de C tel que chaque cycle de C homologue à zéro soit égal à une et à une seule combinaison linéaire de cycles de ce système.

Soit une base d'homologie de C; choisissons un cycle $Z^{p,\lambda}$ dans chacune des classes de cette base; soit $U^{p,\mu}$ une base des cycles homologues à zéro; soient $V^{p-1,\mu}$ des formes telles que $\dot{V}^{p-1,\mu} = U^{p,\mu}$. Envisageons une forme quelconque L^p de C. Il existe un système unique de coefficients $A_\gamma \in A$ tels que

$$\dot{L}^p - \sum_\nu A_\nu U^{p+1,\nu} = 0,$$

(¹) L'hypothèse que les coefficients constituent un corps sert à prouver l'existence de tels systèmes. Pour plus de détails sur les notions de bases, bases d'homologie, bases canoniques, *voir* A.-H., Chap. V, § 2, 6.

c'est-à-dire tels que $L^p - \sum_\nu A_\nu V^{p,\nu}$ soit un cycle; ce cycle est homologue à un cycle $\sum_\lambda A_\lambda Z^{p,\lambda}$, les A_λ étant parfaitement déterminés;

$$L^p - \sum_\nu A_\gamma Z^{p,\gamma} - \sum_\lambda A_\lambda Z^{p,\lambda},$$

étant un cycle homologue à zéro, est égal à une expression $\sum_\mu A_\mu U^{p,\mu}$ dont les coefficients A_μ sont parfaitement déterminés. En résumé

$$L^p = \sum_\lambda A_\lambda Z^{p,\lambda} + \sum_\mu A_\mu U^{p,\mu} + \sum_\nu A_\nu V^{p,\nu},$$

les coefficients A_λ, A_μ et A_ν étant déterminés sans ambiguïté. Les formes $Z^{p,\lambda}$, $U^{p,\mu}$ et $V^{p,\nu}$ constituent donc une base de C. Une telle base sera nommée *base canonique*.

On définit de même les bases, bases d'homologie et bases canoniques du dual *c* de C.

Supposons C simplicial. Deux bases de C et *c*

$$L^{p,\alpha} = \sum_\beta A\begin{bmatrix}\alpha\\ p\\ \beta\end{bmatrix} X^{p,\beta} \qquad \text{et} \qquad l_{p,\alpha} = \sum_\gamma a\begin{pmatrix}\gamma\\ p\\ \alpha\end{pmatrix} x_{p,\gamma}$$

seront dites *duales* l'une de l'autre lorsque, pour chaque valeur de p, les deux matrices $A\begin{bmatrix}\alpha\\ p\\ \beta\end{bmatrix}$ et $a\begin{pmatrix}\alpha\\ p\\ \beta\end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre; pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit : ou bien qu'on ait

$$(34)\qquad L^{p,\alpha},\ l_{p,\alpha} \sim (-1)^p \qquad \text{et} \qquad L^{p,\alpha},\ l_{p,\beta} \sim 0 \qquad \text{si } \alpha \neq \beta;$$

ou bien qu'on ait

$$(35)\qquad \sum_{p,\alpha} L^{p,\alpha} \times l_{p,\alpha} = \sum_{p,\alpha} X^{p,\alpha} \times x_{p,\alpha}.$$

La relation de définition des complexes duals, $\left(\sum_{p,\alpha} X^{p,\alpha} \times x_{p,\alpha}\right)^{\bullet} = 0$, peut donc prendre la forme plus générale que voici

$$(36)\qquad \left(\sum_{p,\alpha} L^{p,\alpha} \times l_{p,\alpha}\right)^{\bullet} = 0,$$

quand $L^{p,\alpha}$ et $l_{p,\alpha}$ constituent deux bases duales.

Soit $Z^{p,\lambda}$, $U^{p,\mu}$ et $V^{p,\nu}$ une base canonique de C; soit $z_{p,\lambda}$, $v_{p,\mu}$ et $u_{p,\nu}$ la base duale; (36) devient

$$\left(\sum_{p,\lambda} Z^{p,\lambda} \times z_{p,\lambda} + \sum_{p,\mu} U^{p,\mu} \times v_{p,\mu} + \sum_{p,\nu} V^{p,\nu} \times u_{p,\nu}\right)^{\bullet} = 0;$$

développons cette relation en tenant compte des relations

$$\dot{Z}^{p,\lambda} = 0, \qquad \dot{U}^{p,\mu} = 0, \qquad \dot{V}^{p-1,\mu} = U^{p,\mu};$$

il vient

$$\sum_{p,\lambda} Z^{p,\lambda} \times \dot{z}_{p,\lambda} + \sum_{p,\mu} U^{p,\mu} \times [(-1)^p \dot{v}_{p,\mu} + u_{p-1,\mu}] + \sum_{p,\nu} (-1)^p V^{p,\nu} \times \dot{u}_{p,\nu} = 0;$$

d'où, puisque $Z^{p,\lambda}$, $U^{p,\mu}$ et $V^{p,\nu}$ sont indépendants,

$$\dot{z}_{p,\lambda} = 0, \qquad \dot{u}_{p,\nu} = 0, \qquad \dot{v}_{p,\mu} = (-1)^{p-1} u_{p-1,\mu}.$$

Ces relations prouvent que le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti de c est au plus égal à celui de C; or on peut permuter les rôles de C et c dans le calcul ci-dessus; donc *les nombres de Betti de* C *et* c *sont égaux.* Les classes d'homologie des $z_{p,\lambda}$ constituent donc une base d'homologie de c : la base canonique de c que constituent les $z_{p,\lambda}$, $v_{p,\mu}$ et $u_{p,\nu}$ sera dite *base canonique duale* de la base canonique que constituent les $Z^{p,\lambda}$, $U^{p,\mu}$ et $V^{p,\nu}$.

La relation (35), appliquée à deux bases canoniques duales, donne

$$\begin{aligned}\sum_{p,\alpha} X^{p,\alpha} \times x_{p,\alpha} &= \sum_{p,\lambda} Z^{p,\lambda} \times z_{p,\lambda} + \sum_{p,\mu} U^{p,\mu} \times v_{p,\mu} + \sum_{p,\mu} V^{p-1,\mu} \times u_{p-1,\mu} \\ &= \sum_{p,\lambda} Z^{p,\lambda} \times z_{p,\lambda} + \sum_{p,\mu} \dot{V}^{p-1,\mu} \times v_{p,\mu} + \sum_{p,\mu} (-1)^{p-1} V^{p-1,\mu} \times \dot{v}_{p,\mu} \\ &= \sum_{p,\lambda} Z^{p,\lambda} \times z_{p,\lambda} + \left(\sum_{p,\mu} V^{p-1,\mu} \times v_{p,\mu}\right)^{\bullet},\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{p,\alpha} X^{p,\alpha} \times x_{p,\alpha} \sim \sum_{p,\lambda} Z^{p,\lambda} \times z_{p,\lambda}.} \tag{37}$$

Les formules (34) appliquées à ces deux mêmes bases canoniques duales donnent

$$\boxed{Z^{p,\lambda}, z_{p,\lambda} \sim (-1)^p \quad \text{et} \quad Z^{p,\lambda}, z_{p,\mu} \sim 0 \quad \text{si} \quad \lambda \neq \mu.} \tag{38}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les transformées de $Z^{p,\lambda}$ et $z_{p,\lambda}$ par deux substitutions linéaires vérifient encore soit (37) soit (38) est que ces deux substitutions soient inverses l'une de l'autre. Donc :

LEMME 20. — *Soient des classes d'homologie,* $Z^{p,\lambda}$ *et* $z_{p,\lambda}$, *en nombres égaux aux nombres de Betti* β_p *de* C *et* c ($1 \leq \lambda \leq \beta_p$); *si ces classes satisfont à* (38), *elles satisfont à* (37) *et vice versa; elles constituent alors deux bases d'homologie de* C *et* c, *que nous dirons duales l'une de l'autre. Toute base d'homologie de* C *possède une base duale et vice versa.*

[Ce lemme fournira la cinquième partie du théorème 15, qui est la base du Chapitre III (n° **41**)].

Remarque. — Puisque C, c est sous-complexe ouvert de $C \times c$, d'après le lemme 3, (37) a pour conséquence la relation

$$\sum_{p,\alpha} X^{p,\alpha},\ x_{p,\alpha} \sim \sum_{p,\lambda} Z^{p,\lambda},\ z_{p,\lambda};$$

d'où, compte tenu de (33) et (38), *la formule d'Euler-Poincaré* [1]

(39) $$\sum_p (-1)^p \nu_p = \sum_p (-1)^p \beta_p,$$

où ν_p est le nombre des éléments à p dimensions de C et où β_p est le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti de C.

34. Groupes de Betti d'un complexe C et de son dual c, quand les coefficients sont les entiers mod. m ou les rationnels. — Soient B^p et b_p les $p^{\text{ièmes}}$ groupes de Betti de C et c, les coefficients utilisés étant les entiers mod. m ou les nombres rationnels. Les résultats du numéro précédent ne valent plus quand m n'est pas premier. Mais des résultats très simples peuvent encore être obtenus à l'aide des raisonnements qu'expose le Chapitre XI de A.-H. et qui utilisent la théorie des *caractères* des groupes abéliens (A.-H., Anhang I, § 5).

Toutes les formes et tous les cycles envisagés seront construits avec les coefficients donnés. Tous les caractères que nous envisagerons seront des fonctions (linéaires et homogènes), dont les valeurs appartiendront au groupe des coefficients. A chaque forme $l_{p,\chi}$ de c associons un caractère $\chi(L^p)$ du groupe des formes L^p de C en posant, compte tenu de (31) et (33),

(40) $$L^p,\ l_{p,\chi} \sim \chi(L^p).$$

Réciproquement : soit $\chi(L^p)$ un caractère du groupe des formes à p dimensions de C; posons $a^\alpha = \chi(X^{p,\alpha})$; nous avons

$$\chi\left(\sum_\alpha A_\alpha X^{p,\alpha}\right) = \sum_\alpha A_\alpha a^\alpha \sim \left(\sum_\alpha A_\alpha X^{p,\alpha}\right), \qquad \left(\sum_\beta a^\beta x_{p,\beta}\right);$$

la relation (40) est donc vérifiée, en posant

$$l_{p,\chi} = \sum_\beta a^\beta x_{p,\beta}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad l_{p,\chi} = \sum_\beta \chi(X^{p,\beta}) x_{p,\beta}.$$

(La correspondance entre χ et $l_{p,\chi}$ est donc un isomorphisme; par suite nous pouvons convenir d'identifier χ et $l_{p,\chi}$, c'est-à-dire d'identifier le groupe des caractères des formes L^p au groupe des formes l_p).

---

[1] Notre démonstration établit (39) quand les coefficients sont les nombres rationnels. Il est possible d'en déduire que (39) vaut plus généralement quand les coefficients sont les entiers calculés mod. un nombre premier m (A.-H. Chap. V, § 3, 9); dans ce cas notre démonstration établit seulement l'égalité mod. m des deux membres de (39).

A chaque classe d'homologie $z_{p,\chi}$ de c, associons un caractère $\chi(Z^p)$ du groupe B^p en posant

$$Z^p,\ z_{p,\chi} = \chi(Z^p). \tag{41}$$

Réciproquement : soit $\chi(Z^p)$ un caractère du groupe B^p; il constitue un caractère du groupe des cycles à p dimensions de C; il peut être prolongé en un caractère du groupe des formes à p dimensions de C (A.-H., Anhang I, § 5, n^{os} 67 et 70); il existe donc une forme $l_{p,\chi}$ telle que $Z^p,\ l_{p,\chi} \sim \chi(Z^p)$, quel que soit le cycle Z^p; choisissons $Z^p = \dot{L}^{p-1}$; il vient $\dot{L}^{p-1},\ l_{p,\chi} \sim \chi(\dot{L}^{p-1}) = 0$; c'est-à-dire $L^{p-1},\ \dot{l}_{p,\chi} \sim 0$ quel que soit L^{p-1}; donc $\dot{l}_{p,\chi} = 0$; $l_{p,\chi}$ est un cycle; nommons-le $z_{p,\chi}$; la relation (41) est vérifiée.

De même à tout caractère x du groupe b_p correspond au moins un cycle $Z^{p,x}$ tel que

$$Z^{p,x},\ z_p \sim x(z_p). \tag{42}$$

La correspondance entre les classes d'homologie $z_{p,\chi}$ et les caractères χ de B^p est un homomorphisme du groupe b_p *sur* le groupe des caractères de B^p. Prouvons que cet homomorphisme est un isomorphisme en prouvant ceci : l'hypothèse que $z_{p,\chi}$ n'est pas la classe nulle de b_p entraîne que χ n'est pas identiquement nul. Cette hypothèse entraîne l'existence d'un caractère x de b_p tel que $x(z_{p,\chi}) \neq 0$ (A.-H., Anhang I, § 5, n° 60); à ce caractère x correspond, conformément à (42), au moins une classe d'homologie $Z^{p,x}$; $Z^{p,x},\ z_{p,\chi} \not\sim 0$; donc, en tenant compte de (41), $\chi(Z^{p,x}) \neq 0$. C. Q. F. D.

Cet isomorphisme de b_p et du groupe des caractères de B^p nous permet d'identifier ces deux groupes. *Vice versa* : le groupe B^p peut être identifié au groupe des caractères de b_p. Ainsi se trouve établi le lemme suivant :

Lemme 21. — *Soient* B^p *et* b_p *les* $p^{\text{ièmes}}$ *groupes de Betti d'un complexe simplicial* C *et de son dual* c, *les coefficients utilisés étant les entiers mod.* m *ou les nombres rationnels. Chaque élément* $z_{p,\chi}$ *de* b_p *constitue un caractère* χ *de* B^p *en vertu de la relation*

$$Z^p,\ z_{p,\chi} \sim \chi(Z^p);$$

b_p *est identique au groupe des caractères de* B^p. *De même* B^p *est identique au groupe des caractères de* b_p.

35. Digression : Théorèmes de dualité plus généraux. — Le numéro précédent prouve que la structure des groupes de Betti B^p d'un complexe simplicial C détermine celle des groupes de Betti b_p de son dual, et *vice versa*. On peut compléter les résultats énoncés :

D'une part lorsque les coefficients sont les entiers mod. m (ou les rationnels) B^p est isomorphe au groupe de ses caractères (A.-H., Anhang I, § 5, 63), c'est-à-dire à b_p.

D'autre part il est possible d'adapter à C et c les raisonnements de A.-H. (Chap. XI, § 3, nos 10 et 11, § 4, n° 11) et d'obtenir ainsi un renseignement sur « les groupes de torsion » de C et c. Récapitulons :

THÉORÈME DE DUALITÉ : *Soient un complexe simplicial* C *et son dual* c :

1° *Les* $p^{\text{ièmes}}$ *nombres de Betti de* C *et* c *sont égaux.*

2° *Les* $p^{\text{ièmes}}$ *groupes de Betti de* C *et* c, *construits avec les entiers* mod m, *sont isomorphes.*

3° *Le* $p^{\text{ième}}$ *groupe de torsion de* C *est isomorphe au* $(p-1)^{\text{ième}}$ *groupe de torsion de* c.

Complément. — L'hypothèse que C est simplicial est inutilement restrictive; la démonstration (nos **31**, **32** et **34**) utilise seulement les hypothèses qui permettent de légitimer (33); ce sont : C est connexe; les coefficients $C\begin{bmatrix}\beta\\ p\\ \alpha\end{bmatrix}$ de la loi de dérivation qui correspondent à des valeurs fixes de p et α et à des valeurs arbitraires de β sont premiers entre eux dans leur ensemble. Cette seconde hypothèse équivaut d'après (28) à la suivante : on ne peut pas trouver un élément $x_{p+1,\alpha}$ de c et un entier m tels que $\dot{x}_{p+1,\alpha} = 0$ mod. m.

Le théorème de dualité ainsi complété a le corollaire que voici :

COROLLAIRE. — *Pour qu'un complexe* C *soit simplicial, il suffit que son dual* $\dot{c}$ *ait les propriétés que voici :*

1° *On a* $\sum_\alpha a^\alpha = 0$ *chaque fois que* $\sum_\alpha a^\alpha x_{0,\alpha} \sim 0$ *dans* c;

2° *Dans* c *et dans chacun des sous-complexes fermés* $\overline{x_{q,\beta}}$, *deux éléments quelconques à* 0 *dimension sont homologues entre eux;*

3° *Dans chacun des* $\overline{x_{q,\beta}}$ *les cycles de dimensions positives sont homologues à zéro.*

Démonstration. — D'après les lemmes 16 et 17, $\overline{x_{q,\beta}}$ est le complexe dual de $\underline{X^{q,\beta}}$. En vertu de la condition (29) (n° **31**), 1° et 2° expriment que C et chacun des $\underline{X^{q,\beta}}$ sont connexes. Supposons C simplicial; alors $\underline{X^{q,\beta}}$ est simplicial; le théorème de dualité appliqué à $\underline{X^{q,\beta}}$ et $\overline{x_{q,\beta}}$ prouve que les cycles de dimensions positives de $\overline{x_{q,\beta}}$ sont homologues à zéro, quand les coefficients sont les entiers mod. m, donc (A.-H., Chap. V, § 4) quels que soient les coefficients : la condition 3° est vérifiée. Réciproquement supposons vérifiées les conditions 1°, 2° et 3°; le complément au théorème de dualité s'applique à $\underline{X^{q,\beta}}$ et $\overline{x_{q,\beta}}$ et prouve que les cycles de dimensions positives de $\underline{X^{q,\beta}}$ sont homologues à zéro quand les coefficients sont les entiers mod m; $\underline{X^{q,\beta}}$ est donc un simplexe (lemme 2) : C est simplicial.

36. Couverture simpliciale possédant un rétrécissement a supports simples. — Soit C un complexe concret, d'éléments $X^{p,\alpha}$; nommons *dual* de C le complexe concret c qui a pour complexe abstrait le dual du complexe abstrait de C et dont les supports sont définis par la loi $|x_{p,\alpha}| = |\underline{X^{p,\alpha}}|$; cette loi est légitime : on a $|x_{p,\alpha}| \subset |x_{q,\beta}|$ si $x_{p,\alpha} \in x_{q,\beta}$, d'après le lemme 16.

Nommons *intersection dualistique* C, c de C et c le complexe concret qui a pour complexe abstrait l'intersection dualistique des complexes abstraits de C et c et dont les supports sont définis par la loi suivante : si $X^{q,\beta}$, $x_{p,\alpha} \neq 0$, c'est-à-dire si $X^{q,\beta} \in \underline{X^{p,\alpha}}$, on pose

$$|X^{q,\beta},\ x_{p,\alpha}| = |X^{q,\beta}|;$$

notons que $|X^{q,\beta}| \subset |\underline{X^{p,\alpha}}| = |x_{p,\alpha}|$; donc C, c est un sous-complexe ouvert de C.c.

Supposons que $|C|$ soit un sous-espace bicompact d'un espace normal E. Supposons que les éléments de C aient pour supports des ensembles simples; il en est de même pour les supports de C, c; donc C, c et E.(C, c) ont mêmes groupes de Betti (lemme 14, n° **27**).

Supposons en outre que C soit un rétrécissement d'une couverture K de E et envisageons une homologie entre des formes de K.c, valant dans E.c; elle vaut dans E.K.c; l'homologie correspondante vaut dans E.C.c [puisque C est un rétrécissement de K : lemme 15, n° **27**], donc dans E.(C, c) [puisque C, c est un sous-complexe ouvert de C.c : lemme 15, n° **27**], donc dans C, c [puisque C, c et E.(C, c) ont mêmes groupes de Betti]. Finalement nous avons la proposition suivante :

(π) Si une homologie entre des formes de K.c vaut dans E.c, alors l'homologie correspondante vaut dans le complexe abstrait C, c.

Supposons enfin que C soit simplicial; alors les supports des éléments de c sont simples (en vertu du corollaire 12, n° **29**). Envisageons un cycle Z^p de E et un cycle z_q de c; d'après le lemme 14 (n° **27**), il existe une classe d'homologie unique z_{q-p} de c telle qu'on ait

$$Z^p.z_q \sim z_{q-p} \quad \text{dans E}.c. \tag{43}$$

Supposons que Z^p appartienne à K; d'après la proposition (π), la relation correspondant à (43) vaut dans C, c ;

$$Z^p,\ z_q \sim z_{q-p} \quad \text{dans C},\ c. \tag{44}$$

Cette relation (44) définit d'ailleurs d'une façon univoque la classe d'homologie de z_{q-p} (lemme 19, n° **32**). Cette équivalence des relations (43) et (44) constitue le 1° du théorème suivant, qui récapitule tous les résultats acquis au cours de ce paragraphe II :

THÉORÈME 15. — *Supposons qu'une couverture* K *d'un espace connexe et normal* E *soit simpliciale et possède un rétrécissement* C *à supports simples; soit* c *le dual de* C.

1° *Nommons loi d'intersection dans* K.c *la loi qui associe à un cycle* Z^p *de* K *et à un cycle* z_q *de* c *la classe d'homologie unique* z_{q-p} *de* c *qui vérifie l'homologie* $Z^p.z_q \sim z_{q-p}$ *dans* E.c. *Nommons de même loi d'intersection dans* K, c *la loi qui associe à* Z^p *et à* z_q *la classe d'homologie unique* z_{q-p} *de* c *qui vérifie l'homologie* $Z^p, z_q \sim z_{q-p}$ *dans le complexe abstrait* K, c. *Ces deux lois d'intersection sont identiques.*

2° *En vertu de la convention* (29) *chaque cycle* Z^p *de* E *définit un caractère* χ *du* $p^{ième}$ *groupe de Betti* b_p *de* c *par la relation*

$$Z^p.z_p \sim \chi(z_p).$$

Supposons que les coefficients soient les entiers mod. *m ou les nombres rationnels; alors, d'après le lemme* 21 :

3° *On peut identifier le groupe des caractères de* b_p *avec le* $p^{ième}$ *groupe de Betti* B^p *de* K;

4° *On peut identifier le groupe* b_p *avec le groupe des caractères de* B^p.

5° *Supposons que les coefficients utilisés soient le corps des nombres rationnels ou le corps des entiers* mod. *m, m étant premier; alors, d'après le lemme* 20, *chaque base de* B^p *et de* b_p *se compose d'un même nombre de classes* β_p; β_p *est nommé* $p^{ième}$ *nombre de Betti de* K *et de* c. *Si des classes* $Z^{p,\lambda}$ *et* $z_{p,\lambda}$ *en nombres égaux à* β_p $(1 \leqq \lambda \leqq \beta_p)$ *vérifient* (45) *elles vérifient* (44) *et* vice versa

$$(44)\qquad \sum_{p,\alpha} X^{p,\alpha} \times x_{p,\alpha} \sim \sum_{p,\lambda} Z^{p,\lambda} \times z_{p,\lambda} \qquad (X^{p,\alpha} \text{ et } x_{p,\alpha} : \text{éléments de K et } c),$$

$$(45)\qquad Z^{p,\lambda}.z_{p,\lambda} \sim (-1)^p \qquad \text{et} \qquad Z^{p,\lambda}.z_{p,\mu} \sim 0 \qquad \text{si } \lambda \neq \mu.$$

Elles constituent alors deux bases d'homologie de K *et* c *que nous dirons duales l'une de l'autre. Toute base d'homologie de* K *possède une base duale et* vice versa.

6° *Enfin, en vertu de l'associativité de l'intersection,*

$$(46)\qquad (Z^p.Z^q).z_r \sim Z^p.(Z^q.z_r) \sim (-1)^{pq} Z^q.(Z^p.z_r).$$

Compléments au théorème 15. — Utilisons des coefficients qui soient les rationnels ou les entiers mod. *m*. L'ensemble des classes d'homologie Z^p de E qui sont telles que $Z^p.z_q \sim 0$, quel que soit le cycle z_q de *c*, est un *idéal* de l'anneau d'homologie de E (*cf.* n° **23**), idéal que nous nommerons $\mathfrak{J}$.

Pour qu'une classe Z^p *appartienne à* $\mathfrak{J}$, *il suffit que* $Z^p.z_p \sim 0$ *quel que soit* z_p. — *Démonstration.* — Soit z_q un cycle arbitraire de *c*; nous avons $Z^p.z_q \sim z_{q-p}$; il s'agit de prouver que $z_{q-p} \sim 0$. Soit Z^{q-p} un cycle arbitraire de E à $(q-p)$ dimensions; nous avons

$$Z^{q-p}.z_{q-p} \sim (-1)^{p(q-p)} Z^p.(Z^{q-p}.z_q) \qquad \text{(en vertu de } 6^{\circ}\text{)};$$

d'où, puisque $Z^{q-p}.z_q \sim z_p$ et que $Z^p.z_p \sim 0$, $Z^{q-p}.z_{q-p} \sim 0$; z_{q-p} est donc le caractère nul de B^{q-p}; par suite, en vertu de 4°, $z_{q-p} \sim 0$. C. Q. F. D.

Soit Z^p une classe d'homologie arbitraire de E; soit $\varkappa$ le caractère de b_p qu'elle définit (2°); soit $Z^{p,\varkappa}$ la classe d'homologie de K qui est identifiée à $\varkappa$ (3°); on a $(Z^p - Z^{p,\varkappa}).z_p \sim 0$ quel que soit z_p; donc $Z^p - Z^{p,\varkappa} \in \mathfrak{J}$. Ainsi toute classe d'homologie de E est la somme d'une classe d'homologie de K et d'une classe d'homologie de $\mathfrak{J}$ bien déterminées. Nous exprimerons comme suit ce fait : *l'anneau d'homologie de* E *est la somme directe des groupes de Betti de* K *et de l'idéal* $\mathfrak{J}$.

Application. — Supposons donné le complexe abstrait de K; des opérations en nombre fini permettent d'en déduire la loi d'intersection dans K, c, qui vaut dans K.c. Cette loi permet, étant donnés les cycles Z^p et Z^q de E, de calculer, quel que soit z_{p+q}, la classe d'homologie de $Z^p.Z^q.z_{p+q}$, donc de déterminer le cycle Z^{p+q} de K qui est homologue à $Z^p.Z^q$ mod. $\mathfrak{J}$. Nous exprimerons cette conclusion en ces termes : *On peut déduire de la connaissance du complexe abstrait de* K, *grâce au théorème* 15, *par un nombre fini d'opérations, la loi qui, étant donnés* Z^p et Z^q mod. $\mathfrak{J}$, *détermine* $Z^p.Z^q$ mod. $\mathfrak{J}$ (les coefficients étant les rationnels ou les entiers mod. m).

Remarque 1. — Si un cycle Z^p de K est tel que $Z^p.z_p \sim 0$ quel que soit z_p, le caractère de b_p que constitue Z^p est nul, donc, d'après le théorème 15 3°, $Z^p \sim 0$ dans K : cette affirmation englobe le théorème 14, qui est donc un corollaire du théorème 15.

Remarque 2. — Une couverture engendrée par un recouvrement d'un espace connexe est simpliciale (n° **10**, rem. et n° **15** lemme 4).

III. — Détermination effective de l'anneau d'homologie d'un espace possédant un recouvrement fini convexoïde.

37. Généralités. — Soit E un espace de Hausdorff bicompact, possédant une couverture simpliciale K à supports simples. D'après le théorème 12 les classes d'homologie de E sont identiques à celles de K.

Il en résulte d'abord que l'anneau d'homologie de E a une base finie (n° **28**, rem. 2). Quand les coefficients constituent le corps des rationnels ou celui des entiers mod. m. m étant premier, nous nommerons *nombres de Betti de* E les nombres de Betti β_p de K (ils sont indépendants du choix de K), et *caractéristique d'Euler de* E le nombre $\sum_p (-1)^p \beta_p = \sum_p (-1)^p \nu_p$ (ν_p = nombre des éléments à p dimensions de K; *cf. formule d'Euler-Poincaré*, n° **33**, rem.); ce nombre est indépendant du choix de K et du choix du corps des coefficients.

L'identité des classes d'homologie de E et de K a ensuite la conséquence suivante : l'idéal $\mathcal{J}$ que définit le numéro précédent est nul; l'application que fait ce numéro du théorème 15 fournit donc, à partir de la donnée du complexe abstrait de K, la loi d'intersection mutuelle des classes d'homologie de E (c'est-à-dire la loi qui, étant donnés deux cycles Z^p et Z^q, indique la classe d'homologie de leur intersection $Z^p.Z^q$).

L'hypothèse précédente « E possède une couverture K dont chaque élément a un support simple » implique que E possède un recouvrement fini par des ensembles fermés et simples. Réciproquement, soit E un espace de Hausdorff bicompact, connexe, possédant un recouvrement fini *convexoïde* (c'est-à-dire constitué par des ensembles fermés qui sont simples et dont les intersections mutuelles sont simples ou vides); la couverture K qu'engendre ce recouvrement est à supports simples et est simpliciale (n° **36**, rem. 2); la connaissance de son complexe abstrait détermine donc celle de l'anneau d'homologie de E. En résumé : *Lorsqu'on connaît un recouvrement fini convexoïde d'un espace de Hausdorff bicompact* E, *l'application des théorèmes* 12 *et* 15 *permet de déterminer, au moyen d'un nombre fini d'opérations, la structure de l'anneau d'homologie de* E; *cet anneau a une base finie; la caractéristique d'Euler de* E *est définie et peut être calculée par la formule d'Euler-Poincaré.*

Le numéro suivant va déterminer par cette méthode l'anneau d'homologie du plan projectif, la couverture utilisée étant d'un usage particulièrement commode; néanmoins les calculs sont longs. La seconde partie de ce cours effectuera une détermination beaucoup plus rapide de la structure de cet anneau; cette détermination utilisera les propriétés de certaines représentations en lui-même de l'espace projectif. D'une façon générale, le procédé de détermination de l'anneau d'homologie d'un espace E que fournissent les théorèmes 12 et 15 a également recours au théorème 6 (n° **21**), c'est-à-dire utilise les propriétés des représentations de sous-ensembles de E dans E; un emploi, approprié à chaque cas, des propriétés de ces représentations permet de déterminer la structure de l'anneau d'homologie plus élégamment que ne le permettent les théorèmes généraux 12 et 15.

38. Exemple : le plan projectif. — Utilisons dans le plan projectif E les coordonnées homogènes (x, y, z). Soit K le complexe qui a la structure suivante : il possède trois éléments à zéro dimension : A, B, D; six éléments à une dimension : L, M, N, P, Q, R; quatre éléments à deux dimensions : T. U, V, W. La loi de dérivation est

$$\dot{A} = L + M - N - P; \quad \dot{L} = T + U; \quad \dot{M} = V + W;$$
$$\dot{B} = Q + R - L - M; \quad \dot{N} = U + V; \quad \dot{P} = T + W;$$
$$\dot{D} = N + P - Q - R; \quad \dot{Q} = V + T; \quad \dot{R} = U + W;$$
$$\dot{U} = \dot{V} = \dot{W} = \dot{T} = 0.$$

Les supports sont définis par les systèmes de relations suivants (*fig.* 7) :

$$|A| : |z| \geqq |x| \text{ et } |z| \geqq |y|; \quad |B| : |x| \geqq |y| \text{ et } |x| \geqq |z|;$$
$$|D| : |y| \geqq |x| \text{ et } |y| \geqq |z|;$$
$$|L| : x = z \text{ et } |x| = |z| \geqq |y|; \quad |M| : x = -z \text{ et } |x| = |z| \geqq |y|;$$
$$|N| : y = z \text{ et } |y| = |z| \geqq |x|; \quad |P| : y = -z \text{ et } |y| = |z| \geqq |x|;$$
$$|R| : x = y \text{ et } |x| = |y| \geqq |z|; \quad |Q| : x = -y \text{ et } |x| = |y| \geqq |z|;$$
$$|U| : x = y = z; \quad |V| : -x = y = z; \quad |W| : x = y = -z; \quad |T| : x = -y = z.$$

En étudiant l'intersection de K par un point arbitraire de E, on constate que K est une couverture de E (connexe conformément au lemme 4). K est

Fig. 7.

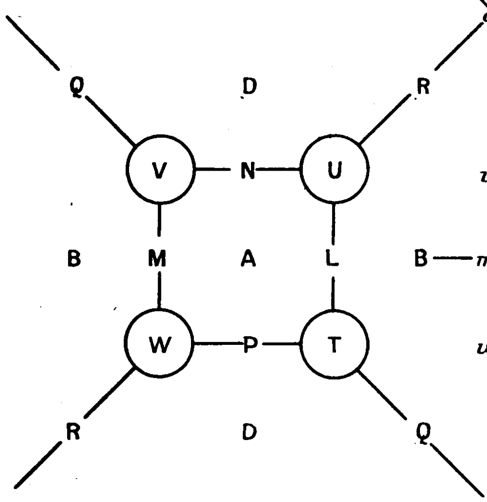
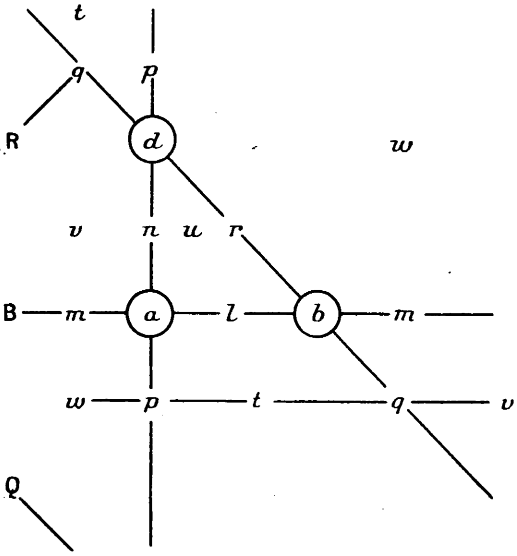


Fig. 8.



une couverture simpliciale à supports simples; appliquons-lui les théorèmes 12 et 15 :

La caractéristique d'Euler de E est $\nu_0 - \nu_1 + \nu_2 = 1$.

Détermination des groupes de Betti de K. — On peut ajouter à toute forme à une dimension de K une combinaison linéaire de $\dot{B}$ et $\dot{C}$ qui annule les coefficients de M et P. Toute forme de dimension 1 est donc homologue à une forme unique du type $\alpha L + \beta N + \gamma Q + \delta R$ (les lettres grecques étant des coefficients). La dérivée d'une forme de ce type contient le terme δW; donc $\delta = 0$ si la forme est un cycle : tout cycle à une dimension est homologue à un cycle bien déterminé du type $\alpha L + \beta N + \gamma Q$. La relation $(\alpha L + \beta N + \gamma Q)^{\bullet} = 0$ s'écrit $\alpha(T + U) + \beta(U + V) + \gamma(V + T) = 0$, c'est-à-dire $(\alpha + \beta)U + (\beta + \gamma)V + (\alpha + \gamma)T = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \beta = \gamma$, $2\alpha = 0$.

En résumé toute classe d'homologie à une dimension Z^1 contient un seul cycle du type $\alpha(L+N+Q)$, une forme de ce type n'étant effectivement un cycle que si $2\alpha = 0$.

Par ailleurs la seule classe d'homologie à deux dimensions de K qui puisse différer de zéro est la classe Z^2 qui vérifie les relations

$$Z^2 \sim T \sim U \sim V \sim W; \quad 2Z^2 \sim 0.$$

D'où, par application du théorème 12, les conclusions partielles suivantes :

Cas où les coefficients sont des entiers. — L'anneau d'homologie du plan projectif E se compose des classes βE^0 et de la classe Z^2 qui vérifie les relations $2Z^2 \sim 0$; $Z^2 . Z^2 \sim 0$.

Cas où les coefficients sont les nombres rationnels, ou bien les entiers mod μ, μ étant impair. — L'anneau d'homologie de E se compose des seules classes βE^0 (car $2\alpha = 0$ entraîne $\alpha = 0$ et $2Z^2 \sim 0$ entraîne $Z^2 \sim 0$).

Cas où les coefficients sont les entiers mod. 2ν. — L'anneau d'homologie de E se compose des classes βE^0, de la classe $Z^1 \sim \nu(L+N+Q)$ et de la classe $Z^2 \sim T$, qui vérifient les relations

$$(47) \qquad 2Z^1 \sim 0; \quad 2Z^2 \sim 0; \quad Z^1 . Z^1 \sim \gamma Z^2; \quad Z^1 . Z^2 \sim 0; \quad Z^2 . Z^2 \sim 0,$$

où γ est un coeffcient, que le théorème 15 va nous permettre de déterminer.

A cet effet étudions le dual c de K, les coefficients étant désormais les entiers mod. 2ν. (La figure 8 représente non c lui-même, mais l'un de ses rétrécissements.)

Le dual c de K possède trois éléments à zéro dimension a, b, d; six éléments à une dimension l, m, n, p, q, r; quatre éléments à deux dimensions t, u, v, w. La loi de dérivation est

$$\dot{a} = \dot{b} = \dot{d} = 0;$$
$$\dot{l} = \dot{m} = a - b; \quad \dot{n} = \dot{p} = d - a; \quad \dot{q} = \dot{r} = b - d;$$
$$\dot{t} = -l - p - q; \quad \dot{u} = -l - n - r; \quad \dot{v} = -m - n - q; \quad \dot{w} = -m - p - r.$$

On en déduit aisément qu'il existe dans c une classe d'homologie à une dimension, z_1, vérifiant les relations

$$z_1 \sim l - m \sim n - p \sim r - q; \quad 2z_1 \sim 0$$

et une classe d'homologie à deux dimensions z_2 vérifiant les relations

$$z_2 \sim \nu(t+u+v+w); \qquad 2z_2 \sim 0,$$

ce qui est conforme au théorème de dualité (n° **35**).

Loi d'intersection dans K, c. — Les formules (31) et (33) (n° **32**) nous donnent

$$(L+N+Q),\ (l-m) = L,\ l \sim -1, \qquad \text{d'où } Z^1,\ z_1 \sim \nu;$$
$$T,\ (t+u+v+w) = T,\ t \sim 1, \qquad \text{d'où } Z^2,\ z_2 \sim \nu.$$

D'autre part un calcul, calqué sur le calcul général du n° 17, va nous permettre de déterminer à quelle classe d'homologie de c est homologue le cycle $\nu(\mathrm{L}+\mathrm{N}+\mathrm{Q}), (t+u+v+w)$ de K, c :

$$\nu(\mathrm{L}+\mathrm{N}+\mathrm{Q}), (t+u+v+w) = \nu(\mathrm{L}+\mathrm{Q}), t+\nu(\mathrm{L}+\mathrm{N}), u+\nu(\mathrm{N}+\mathrm{Q}), v;$$

or

$$\nu(\mathrm{L}+\mathrm{Q}), \quad t=\nu(\mathrm{Q}+\mathrm{R}-\mathrm{L}-\mathrm{M}), \quad t=\nu\dot{\mathrm{B}}, \quad t\sim\nu\mathrm{B}, \dot{t},$$

de même

$$\nu(\mathrm{L}+\mathrm{N}), \quad u\sim\nu\mathrm{A}, \dot{u} \quad \text{et} \quad \nu(\mathrm{N}+\mathrm{Q}), \quad v\sim\nu\mathrm{D}, \dot{v};$$

donc

$$\begin{aligned}&\nu(\mathrm{L}+\mathrm{N}+\mathrm{Q}), (t+u+v+w)\sim\nu[\mathrm{A}, \dot{u}+\mathrm{B}, \dot{t}+\mathrm{D}, \dot{v}]\\ &=\nu[\mathrm{A}, (l+n)+\mathrm{B}, (l+q)+\mathrm{D}, (n+q)]=\nu[(\mathrm{A}+\mathrm{B}), l+(\mathrm{A}+\mathrm{D}), n+(\mathrm{B}+\mathrm{D}), q]\\ &=\nu(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{D}), (l+n+q)\sim\nu(l+n+q)\sim\nu z_1\end{aligned}$$

d'où finalement la formule

$$\nu(\mathrm{L}+\mathrm{N}+\mathrm{Q}), (t+u+v+w)\sim\nu z_1,$$

qui a pour corollaire

$$\mathrm{Z}^1, z_2\sim\nu^2 z_1$$

(c'est-à-dire $\mathrm{Z}^1, z_2\sim 0$ si ν est pair; $\mathrm{Z}^1, z_2\sim z_1$ si ν est impair).

Calcul de $\mathrm{Z}^1.\mathrm{Z}^1$. — D'après le théorème 15 la loi d'intersection qui vaut dans K.c est celle qui vaut dans K,c; c'est donc

$$\mathrm{Z}^1.z_1\sim\mathrm{Z}^2.z_2\sim\nu; \qquad \mathrm{Z}^1.z_2\sim\nu^2 z_1.$$

On en tire

$$\mathrm{Z}^1.\mathrm{Z}^1.z_2\sim\nu^2\mathrm{Z}^1.z_1\sim\nu^3,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Z}^1.\mathrm{Z}^1.z_2\sim\nu^3.$$

Faisons dans cette dernière relation la substitution $\mathrm{Z}^1.\mathrm{Z}^1\sim\gamma\mathrm{Z}^2$; il vient

$$\gamma\nu\sim\nu^3, \quad \text{c'est-à-dire } \gamma\nu=\nu^3 \mod. 2\nu, \quad \text{c'est-à-dire } \gamma=\nu^2 \mod. 2.$$

Celle des formules (47) qu'il nous restait à préciser pour connaître complètement la structure de l'anneau d'homologie du plan projectif, quand les coefficients sont les entiers mod. 2ν, est donc

(48) $\qquad \mathrm{Z}^1.\mathrm{Z}^1\sim 0$ quand ν est pair; $\quad \mathrm{Z}^1.\mathrm{Z}^1\sim\mathrm{Z}^2$ quand ν est impair.

39. Les polyèdres. — Tout polyèdre (connexe) E est le support d'un complexe k dont les éléments $x_{p,\alpha}$, écrits en notation inférieure, ont les propriétés suivantes (A.-H., Zellenkomplex) :

a. $p\geqq 0$; la dérivée de chaque $x_{1,\alpha}$ est du type

(49) $$\dot{x}_{1,\alpha}=x_{0,\beta}-x_{0,\gamma};$$

b. dans chacun des sous-complexes fermés $\overline{x_{p,\alpha}}$ tout cycle de dimension positive est homologue à zéro et

$$(50) \qquad x_{0,\alpha} \sim x_{0,\beta}, \quad \text{quels que soient } \alpha \text{ et } \beta;$$

c. $|x_{p,\alpha}|$ est une « cellule convexe » (A.-H., Konvexe Zelle);

d. l'ensemble $|x_{p,\alpha}| - |\dot{x}_{p,\alpha}|$ n'est pas vide (nous nommerons centre de $x_{p,\alpha}$ un point choisi arbitrairement dans cet ensemble).

A partir d'un tel complexe *k* nous allons construire une couverture K de E, qui sera simpliciale et à supports simples [par exemple : si E est le plan projectif et si *k* est le complexe ([1]) que représente la figure 8, K sera la couverture que représente la figure 7].

Le complexe abstrait de K aura pour dual le complexe abstrait de *k*; K est simplicial en vertu du corollaire du théorème de dualité qu'énonce le n° **35**.

Nous construirons les supports des éléments de K par le procédé récurrent que voici : Soit $x_{p,\alpha}$ un élément de *k* de dimension *p* maximum; soit K′ le complexe qui se déduit de K en annulant $X^{p,\alpha}$; soit $E' = (E - |x_{p,\alpha}|) + |\dot{x}_{p,\alpha}|$; supposons définis les supports $|X'^{q,\beta}|$ des éléments $X'^{q,\beta}$ de E′ de telle façon que :

α'. K′ soit une couverture du polyèdre E′;
β'. $|X'^{q,\beta}|$ soit une pyramide ayant pour sommet le centre de $x_{q,\beta}$.

Posons les définitions suivantes :

$$|X^{q,\beta}| = |X'^{q,\beta}|, \qquad \text{sauf si } x_{q,\beta} \in \overline{x_{p,\alpha}};$$

$|X^{p,\alpha}|$ est le centre de $x_{p,\alpha}$;

si $x_{q,\beta} \in \overline{x_{p,\alpha}}$ et si $x_{q,\beta} \neq x_{p,\alpha}$, alors $|X^{q,\beta}|$ est la réunion de $|X'^{q,\beta}|$ et de la pyramide qui a pour base $|X'^{q,\beta}| . |\dot{x}_{p,\alpha}|$ et pour sommet $|X^{p,\alpha}|$.

On constate sans peine que :

α. K est une couverture de E (en effet, l'intersection de K par $|X^{p,\alpha}|$ est $\underline{X^{p,\alpha}}$, qui est un simplexe; l'intersection de K par un autre point de E est isomorphe à l'intersection de K′ par un point de E′ convenablement choisi, intersection qui est un simplexe).

β. $|X^{q,\beta}|$ est une pyramide dont le sommet est le centre de $x_{q,\beta}$. Or une pyramide est un ensemble simple, d'après le théorème 6 (n° **21**). Donc K est bien une couverture simpliciale de E et ses éléments ont bien des supports simples.

([1]) A.-H. (Anhang zu Kap. IV, V, VI, n° 20) affirme que cette figure 8 ne définit pas un complexe; A.-H. s'astreint en effet à n'envisager que des complexes satisfaisant à des conditions plus strictes que les conditions que nous venons de nommer *a*, *b*, *c*, *d*; cela oblige à remplacer notre figure 8 par une figure plus compliquée, par exemple par la suivante : A.-H., Chap. IV, § 2, n° 8, fig. 14.

Grâce aux théorèmes 12 et 15 on peut donc, *de la connaissance du complexe abstrait de k, déduire la structure de l'anneau d'homologie du polyèdre* E, *par un nombre fini d'opérations.* En particulier, cet anneau d'homologie a une base finie; la caractéristique d'Euler du polyèdre est $\sum_p (-1)^p \nu_p$, où ν_p est le nombre d'éléments à p dimensions de k.

Remarque 1. — Soit B^p le groupe que constituent les classes d'homologie à p dimensions de E et soit b_p le groupe de ses caractères, les coefficients étant les nombres rationnels ou les entiers mod. m. Le théorème 15, 3°, identifie b_p au $p^{\text{ième}}$ groupe de Betti de k, qui, une fois choisi le polyèdre E, est donc le même pour tous les complexes k : c'est là le théorème d'invariance sur lequel MM. Alexandroff et Hopf (Chap. VI, § 2, n° 5 et chap. VIII, § 4, n° 4) font reposer la définition du « $p^{\text{ième}}$ *groupe de Betti de* E », qui n'est autre que b_p.

Remarque 2. — Il est fréquent qu'on obtienne une couverture de E en écrivant k en notation supérieure, c'est-à-dire en posant $x_{p,\alpha} = X^{P-p,\alpha}$; on dit alors que E est un polyèdre *orientable et fermé* de dimension P; le $p^{\text{ième}}$ groupe de Betti de cette couverture est b_{P-p}, qui est donc identique à B^p, en vertu du théorème 12; par suite, B^p est identique au groupe des caractères de B^{P-p}, lorsque les coefficients sont les nombres rationnels ou les entiers mod. m : c'est *le théorème de dualité de Poincaré.*

Il est également fréquent que, ayant écrit k en notation supérieure, on obtienne une couverture de E en annulant les éléments d'un sous-complexe fermé de k, sous-complexe de support e. On dit alors que E est *un polyèdre orientable, dont e est le bord* (¹) et dont la dimension est P. Le théorème 12 identifie B^p au $p^{\text{ième}}$ groupe de Betti de cette couverture, qui est le groupe qu'on a coutume de nommer « $(P-p)^{\text{ième}}$ groupe de Betti de E mod. e » (ou relativement à e : *cf.* A.-H., *Relativzyklus*).

40. Espaces dans lesquels une multiplication est définie (d'après le Mémoire de M. H. Hopf cité au Chap. I, § 6). — Soit E un espace qui possède un recouvrement convexoïde fini et auquel s'applique le théorème 8 (n° **24**). Le fait que l'anneau d'homologie de E a une base finie permet de préciser comme suit les conclusions de ce théorème : *Il existe un système irréductible, composé d'un nombre fini de cycles maximaux* Z^{p_i,α_i} (*et même hypermaximaux quand la multiplication est un demi-groupe*), *tel que tout cycle de* E *est homologue à une combinaison linéaire d'intersections de* Z^{p_i,α_i}. *Rappelons que toute homologie liant les* Z^{p_i,α_i} *est conséquence des suivantes :*

$$Z^{p_i,\alpha_i}.Z^{p_j,\alpha_j} \sim -Z^{p_j,\alpha_j}.Z^{p_i,\alpha_i};$$

chaque Z^{p_i,α_i} *a une dimension* p_i *impaire.*

(¹) A.-H., *Rand einer Pseudomannigfaltigkeit.*

Un tel système s'appellera *système générateur irréductible*.

En d'autres termes : *Quand une multiplication vérifiant l'hypothèse* (h) *du théorème* 8, *ou plus particulièrement l'hypothèse* (h'), *est définie dans* E, *quand* E *possède un recouvrement convexoïde fini et quand les coefficients utilisés sont les nombres rationnels, alors l'anneau d'homologie de* E *est isomorphe à celui du produit d'un nombre fini de sphères, de dimensions impaires; le nombre et les dimensions de ces sphères sont ceux des cycles d'un système générateur irréductible* (H., n° 2).

Cycles de dimension maximum. — Le maximum des dimensions des cycles de E est alors $P = \sum p_i$; tout cycle de dimension P est homologue à un cycle $A_\alpha Z^P$, où A_α est un coefficient et où

$$(51) \qquad Z^P \sim \prod_i Z^{p_i, \alpha_i}, \qquad \text{c'est-à-dire } Z^P \sim Z^{p_1,\alpha_1}.Z^{p_2,\alpha_2}.Z^{p_3,\alpha_3}.\ldots.$$

Base de B^q. — Nommons B^q le groupe que constituent les classes d'homologie de E de dimension q. Les cycles

$$(52) \qquad Z^{q,\lambda} \sim \prod_j Z^{p_j, \alpha_j} \qquad \left(\text{où} \sum_j p_j = q\right)$$

sont tels que tout cycle Z^q de E est homologue à une combinaison linéaire unique des $Z^{q,\lambda}$. Ces cycles constituent donc une base de B^q.

Bases duales de B^q *et* B^{P-q}. — Désignons par $Z^{P-q,\lambda}$ l'intersection de ceux des Z^{p_i,α_i} qui ne figurent pas dans le second membre de (52); les $Z^{P-q,\lambda}$ constituent une base de B^{P-q}; on a

$$(53) \qquad Z^{q,\lambda}.Z^{P-q,\lambda} \sim Z^P \qquad \text{et} \qquad Z^{q,\lambda}.Z^{P-q,\mu} \sim 0 \qquad \text{si } \lambda \neq \mu;$$

nous exprimerons le fait que deux bases B^q et B^{P-q} vérifient les relations (53) en disant qu'elles sont duales.

Rapport (¹) *entre* b_q *et* B^{P-q}. — Z^P une fois choisi, chaque $Z^{P-q,\chi}$ de E définit un caractère $\chi(Z^q)$ du groupe B^q par la relation

$$(54) \qquad Z^q.Z^{P-q,\chi} \sim \chi(Z^q) Z^P.$$

Réciproquement, étant donné le caractère $\chi(Z^q)$, il lui correspond une seule classe d'homologie $Z^{P-q,\chi}$ vérifiant (54) : on a, d'après (53),

$$Z^{P-q,\chi} \sim \sum_\lambda Z^{P-q,\lambda} \chi(Z^{q,\lambda}).$$

(¹) Les résultats que nous allons obtenir présentent une analogie formelle avec le théorème de dualité de Poincaré (n° **39**, remarque 2).

Soit k le dual d'une couverture simpliciale, à supports simples, de E; nous avons convenu d'identifier le caractère $\chi(Z^q)$ à une classe d'homologie $z_{q,\chi}$ de k. La relation qui existe entre $Z^{p-q,\chi}$ et $z_{q,\chi}$ est la suivante [où le crochet représente le coefficient égal à $Z^q . z_{q,\chi}$] :

$$[Z^q . z_{q,\chi}] Z^p \sim Z^q . Z^{p-q,\chi}, \qquad \text{quel que soit } Z^q; \tag{55}$$

convenons d'exprimer cette relation par le symbole

$$z_{q,\chi} \sim \frac{Z^{p-q,\chi}}{Z^p}, \qquad \text{par exemple } 1 \sim \frac{Z^p}{Z^p}. \tag{56}$$

La relation (55) a les conséquences suivantes :
d'une part $z_{q,\chi}$ dépend linéairement de $Z^{p-q,\chi}$;
d'autre part

$$[Z^r . (Z^{q-r} . z_{q,\chi})] Z^p \sim Z^r . (Z^{q-r} . Z^{p-q,\chi}), \quad \text{quel que soit } Z^r,$$

c'est-à-dire

$$Z^{q-r} . z_{q,\chi} \sim \frac{Z^{q-r} . Z^{p-q,\chi}}{Z^p}.$$

Les formules régissant l'emploi de notre nouveau symbole sont donc

$$\boxed{\sum_\beta A_\beta \frac{Z^{q,\beta}}{Z^p} \sim \frac{\sum_\beta A_\beta Z^{q,\beta}}{Z^p}; \quad Z^r . \frac{Z^q}{Z^p} \sim \frac{Z^r . Z^q}{Z^p}; \quad \frac{Z^p}{Z^p} \sim 1.} \tag{57}$$

Problème. — Construire, si possible, un polyèdre dont l'anneau d'homologie est donné arbitrairement (*cf.* A.-H., *Anhang* zu Kap. IV, V, VI, n° 9).

CHAPITRE III.

POINTS FIXES DES REPRÉSENTATIONS.

Ce Chapitre III amorce la théorie des équations qu'exposera la troisième partie de notre Cours. Le paragraphe I généralise la théorie des points fixes [*voir* A.-H., Chap. XIV et certains des Mémoires cités dans l'Introduction ([9])]. Le paragraphe II étudie spécialement le cas des espaces de groupes. Quant aux applications aux polyèdres, renvoyons le lecteur à A.-H.

I. — Le nombre de Lefschetz.

41. Définitions du nombre de Lefschetz. — Soit E un espace de Hausdorff, bicompact, connexe, possédant un recouvrement fini convexoïde. Soit $\xi(x)$ une représentation de E en lui-même. Construisons une couverture simpliciale à supports simples de E; nommons-la K; soit c son dual; nommons $X^{q,\beta}$ et $x_{q,\beta}$ les éléments de K et c. La relation (25) $\left(\sum_{q,\beta} X^{q,\beta} \times x_{q,\beta}\right)^{\bullet} = 0$ et le lemme 3 prouvent que $\left(\sum_{q,\beta} \overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).x_{q,\beta}\right)^{\bullet} = 0$; $\sum_{q,\beta} \overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).x_{q,\beta}$ est donc un cycle de $E.c$; or c est à supports simples (coroll. **12**, n° **29**); d'après le lemme **14** (n° **27**) ce cycle est donc homologue à un cycle de c, c'est-à-dire à un entier positif, négatif ou nul [en vertu de la convention (29), n° **31**]; nous nommerons cet entier nombre de Lefschetz de ξ; nous le désignerons par Λ_ξ :

$$\boxed{\Lambda_\xi \sim \sum_{q,\beta} \overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).x_{q,\beta}.} \tag{58}$$

La relation (44) du théorème **15** et le lemme 3 prouvent que, si nous utilisons des coefficients constituant un corps et si nous désignons par $Z^{q,\lambda}$ et $z_{q,\lambda}$ deux bases d'homologie duales de K et c, nous avons

$$\Lambda_\xi \sim \sum_{q,\lambda} \overset{-1}{\xi}(Z^{q,\lambda}).z_{q,\lambda}. \tag{59}$$

Tenons compte des relations (45) du théorème **15**; il vient

$$\boxed{\text{en posant } \overset{-1}{\xi}(Z^{q,\lambda}) \sim \sum_{\mu} \Xi\begin{pmatrix}\lambda\\ q\\ \mu\end{pmatrix} Z^{q,\mu}, \quad \Lambda_\xi = \sum_{q,\lambda} (-1)^q\, \Xi\begin{pmatrix}\lambda\\ q\\ \lambda\end{pmatrix}.} \tag{60}$$

Les $Z^{q,\lambda}$ constituent une base d'homologie arbitraire de E; les relations (60) sont donc indépendantes du choix de K : le nombre de Lefschetz Λ_ξ *est indépendant du choix de* K; il ne dépend que de E et de ξ.

Remarque. — Si les nombres de Betti de E sont tous nuls sauf β_0 (en particulier si E est simple), la formule (60) se réduit à $\Lambda_\xi = 1$.

42. Représentations ξ homotopes. — Nous avons vu (th. 5, n° **20**) que

$$\overset{-1}{\xi}(Z^{p,\lambda}) \sim \overset{-1}{\eta}(Z^{p,\lambda})$$

si $\xi(x)$ et $\eta(x)$ sont deux représentations de E en lui-même et si elles sont homotopes entre elles dans E (la notion d'homotopie pouvant être généralisée comme l'indique le n° **23**). Donc :

Théorème 16. — *Si $\xi(x)$ et $\eta(x)$ sont deux transformations de* E *en lui-même et si elles sont homotopes entre elles dans* E, *alors* $\Lambda_\xi = \Lambda_\eta$.

Remarque. — Les corollaires 5_1 et 5_2 (n° **20**) ont pour conséquences les deux propositions suivantes, qui sont des cas particuliers du théorème 16 :

Si $\xi(x)$ est homotope dans E à une représentation constante, alors $\Lambda_\xi = 1$.

Si $\xi(x)$ est homotope dans E à la représentation identique de E en lui-même, alors Λ_ξ est égal à la caractéristique d'Euler de E.

43. Existence de points fixes. — *Définition.* — Nous nommerons *convexoïde* tout espace de Hausdorff bicompact, connexe, possédant un recouvrement dont les éléments U ont les propriétés suivantes :

a. Chaque ensemble U est fermé et simple;

b. L'intersection d'un nombre fini d'ensembles U est vide ou simple;

c. Étant donnés un point x de E et un voisinage V de x, on peut trouver un ensemble U qui appartienne à V et auquel x soit intérieur.

Nota. — *a* et *b* expriment que ce recouvrement est convexoïde; *c* implique que les intérieurs des ensembles U constituent une base de E (A.-H., Chap. I, § 2, 8); tout espace convexoïde possède évidemment un recouvrement convexoïde fini.

Théorème 17. — *Soit $\xi(x)$ une représentation en lui-même d'un espace convexoïde* E. *Si $\Lambda_\xi \neq 0$, l'équation*

$$x = \xi(x) \tag{61}$$

possède au moins une solution.

Nota. — On nomme *points fixes de la représentation* ξ les solutions de l'équation (61).

Démonstration. — Nous allons supposer que $x \neq \xi(x)$ quel que soit x et en déduire que $\Lambda_\xi = 0$. Cette hypothèse $x \neq \xi(x)$ entraîne qu'à chaque point x on peut ([1]) associer U_x ayant les propriétés que voici : U_x est un élément d'un recouvrement de E qui possède les propriétés *a*, *b* et *c*; x est intérieur à U_x; enfin $U_x . \overset{-1}{\xi}(U_x) = 0$. On peut constituer un recouvrement fini de l'espace bicompact E au moyen d'un nombre fini de U_x. On obtient ainsi un recouvrement convexoïde fini de E, dont les éléments U_Υ satisfont à la condition

$$U_\Upsilon . \overset{-1}{\xi}(U_\Upsilon) = 0. \tag{62}$$

([1]) x étant donné, on construit un voisinage V_x de x et un voisinage V_ξ de $\xi(x)$ qui soient disjoints; on choisit $U_x \subset V_x . \overset{-1}{\xi}(V_\xi)$; on a $U_x . \xi(U_x) = 0$; d'où $U_x . \overset{-1}{\xi}(U_x) = 0$.

Utilisons la couverture K qu'engendre ce recouvrement : si $X^{q,\beta}$ est le produit extérieur de $U_{\gamma_0}, U_{\gamma_1}, \ldots, U_{\gamma_p}$, on a

$$|X^{q,\beta}| = U_{\gamma_0}.U_{\gamma_1}\ldots.U_{\gamma_p} \quad \text{et} \quad |x_{q,\beta}| = U_{\gamma_0} + U_{\gamma_1} + \ldots + U_{\gamma_p};$$

d'où, en tenant compte de (62),

$$\left|\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta})\right|.|x_{q,\beta}| = 0;$$

la relation (58) se réduit donc à $\Lambda_\xi = 0$. C. Q. F. D.

Exemples. — Le théorème 17, vu les remarques des n^{os} **41** et **42**, a les corollaires suivants (*cf.* A.-H., Chap. XIV, § 1, n° 4) : Soit E un espace convexoïde; une représentation de E en lui-même possède au moins un point fixe dans chacun des trois cas suivants :

1° Tous les nombres de Betti de E de dimensions positives sont nuls (en particulier : E est simple);
2° La représentation envisagée est homotope dans E à une représentation constante;
3° La représentation envisagée est homotope dans E à la représentation identique de E sur lui-même et la caractéristique d'Euler de E diffère de zéro.

II. — Cas des espaces de groupes.

44. Adoptons les mêmes hypothèses et les mêmes notations qu'au n° **40**. Introduisons deux bases duales $Z^{q,\lambda}$ et $Z^{P-q,\lambda}$

$$Z^{q,\lambda}.Z^{P-q,\lambda} \sim Z^P \quad \text{et} \quad Z^{q,\lambda}.Z^{P-q,\mu} \sim 0 \quad \text{si } \lambda \neq \mu. \tag{53}$$

Posons $z_{q,\lambda} \sim (-1)^q \dfrac{Z^{P-q,\lambda}}{Z^P}$; en vertu de (53) et (57) les relations (45) du théorème 15 (n° **36**) sont vérifiées : $z_{q,\lambda}$ est la base duale de la base $Z^{q,\lambda}$. La formule (59) peut donc s'écrire

$$\Lambda_\xi \sim \sum_{q,\lambda} (-1)^q \overset{-1}{\xi}(Z^{q,\lambda}).\frac{Z^{P-q,\lambda}}{Z^P},$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (57),

$$\Lambda_\xi Z^P \sim \sum_{q,\lambda} (-1)^q \overset{-1}{\xi}(Z^{q,\lambda}).Z^{P-q,\lambda}. \tag{63}$$

Choisissons en particulier

$$Z^{q,\lambda} \sim \prod_j Z^{p_j,\alpha_j} \quad \left(\text{où } \sum_j p_j = q\right); \tag{52}$$

$Z^{p-q,\lambda}$ est, rappelons-le, l'intersection de ceux des Z^{p_i,α_i} qui ne figurent pas dans le second membre de (52). La formule (63) devient

$$\Lambda_\xi Z^p \sim \prod_i \left[Z^{p_i,\alpha_i} - \overset{-1}{\xi}(Z^{p_i,\alpha_i})\right]. \tag{64}$$

Supposons que E soit un espace de groupe et que les Z^{p_i,α_i} soient hypermaximaux; posons

$$\boxed{\theta(x) = x[\xi(x)]^{-1}} \tag{65}$$

— où $[\xi(x)]^{-1}$ est l'inverse de $\xi(x)$ au sens de la théorie des groupes : (61) s'écrit $\theta(x) = 1$ —. Nous avons, d'après le théorème **11** (n° **25**),

$$\overset{-1}{\theta}(Z^{p_i,\alpha_i}) \sim Z^{p_i,\alpha_i} - \overset{-1}{\xi}(Z^{p_i,\alpha_i}); \quad \overset{-1}{\theta}(Z_p) \sim \prod_i \left[Z^{p_i,\alpha_i} - \overset{-1}{\xi}(Z^{p_i,\alpha_i})\right];$$

(64) s'écrit donc

$$\boxed{\Lambda_\xi Z^p \sim \overset{-1}{\theta}(Z^p).} \tag{66}$$

Cette formule (66) établit l'identité des notions suivantes : « nombre de Lefschetz de ξ », « *Abbildungsgrad im Grossen der Abbildung* θ (A.-H., XII, § **1**, **4**) ».

Exemple. — Soient $\xi(x) = x^{1-k}$ et $\theta(x) = x^k$, k étant un entier positif, négatif ou nul; nous avons, d'après (23) (n° **25**), $\overset{-1}{\theta}(Z^{p_i,\alpha_i}) \sim kZ^{p_i,\alpha_i}$; d'où

$$\overset{-1}{\theta}(Z^p) \sim k^\lambda Z^p \tag{67}$$

et par suite

$$\Lambda_\xi = k^\lambda, \tag{68}$$

λ étant le rang [1] du groupe, c'est-à-dire le nombre de cycles dont se compose un système générateur irréductible.

Les théorèmes **16** et **17** nous permettent de déduire de (68) la proposition suivante :

Si l'espace d'un groupe est convexoïde et si la multiplication du groupe est continue, alors l'équation, dont l'inconnue x est un élément du groupe,

$$x^k = y$$

possède au moins une solution, quels que soient l'entier positif ou négatif k et l'élément y du groupe. (La démonstration suppose non nul le rang d'un tel groupe; s'il était nul, d'après le n° **43**, exemples 1°, l'équation $x = yx$ posséderait une solution quel que soit y : le groupe se réduirait à la transformation identique.)

---

[1] *Voir* H. Hopf, *Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen* (*Commentarii Math. Helvetici*, t. **13**, 1940). La formule (67) est la formule fondamentale de ce Mémoire.

ANNEXE.

Il est avantageux de substituer aux n^{os} **19** et **20** les n^{os} **19** *bis* et **20** *bis* suivants : ils établissent le théorème 5 sous des hypothèses plus larges, par des raisonnements que la troisième partie réutilisera (n° **75**, lemme 38).

19 *bis*. Représentations dépendant continûment d'un paramètre. — Soit $\varphi_{x''}(x')$ une représentation d'un *espace de Hausdorff bicompact* E′ (*cf.* : A.-H., chap. II, § 1, th. XIII) dans un espace topologique E, cette représentation dépendant continûment d'un paramètre x'', qui est un point d'un espace topologique E″ [autrement dit : $\varphi_{x''}(x')$ est une représentation de $E' \times E''$ dans E].

Lemme. — *Soient un point a'' de* E″, *un ensemble fermé* F *de points de* E *et un voisinage* V′ *de* $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(F)$; *je dis que* $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(F) \subset V'$ *quand x'' appartient à un certain voisinage* V″ *de a''.*

Démonstration. — Quel que soit $x' \in E' - V'$, $\varphi_{x''}(x')$ est étranger à F; on peut donc trouver un voisinage $V'_{x'}$ de x' et un voisinage $V''_{x'}$ de x'' tels que $\varphi_{x''}(V'_{x'})$ soit étranger à F quand $x'' \in V''_{x'}$. On peut recouvrir $E' - V'$, qui est bicompact, par un nombre fini de $V'_{x'}$, les $V'_{x'_\alpha}$; soit V″ l'intersection des $V''_{x'_\alpha}$ correspondants; $\varphi_{x''}(E' - V')$ est étranger à F quand $x'' \in V''$; c'est-à-dire $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(F) \subset V'$ quand $x'' \in V''$. C. Q. F. D.

Ce lemme a pour corollaire immédiat le suivant :

Lemme 9 *bis*. — *Soit* K *une couverture de* E; *soit* K′ *un élargissement de* $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(K)$ *tel que le support de chaque élément de* K′ *contienne un voisinage du support de l'élément correspondant de* $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(K)$ [*l'existence d'un tel élargissement est assurée par le lemme* 6 ([1])]; *je dis que* $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(K)$ *est un rétrécissement* ([2]) *de* K′ *quand x'' appartient à un certain voisinage* V″ *de a''.*

Soit Z^p un cycle de K; soit Z'^p le cycle de K′ qui correspond au cycle $\overset{-1}{\varphi}_{a''}(Z^p)$ de $\overset{-1}{\varphi}_{a''}(K)$; d'après le théorème 1 ([3]) $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(Z^p) \sim Z'^p$ quand x'' appartient au voisinage V″ de a'' que définit le lemme 9 *bis*.

([1]) Car on peut compléter comme suit l'énoncé de ce lemme : « *et telle que le support de chaque élément de* K^* *contient un voisinage du support de l'élément correspondant de* K ».

([2]) Nous dirons que K est un rétrécissement de K^* lorsqu'il existe un sous-complexe ouvert de K^* qui est un élargissement de K.

([3]) Compte tenu du sens plus général que nous venons de donner au terme rétrécissement, nous énoncerons comme suit le théorème **1** : *Si l'on rétrécit une couverture d'un espace en une couverture de ce même espace, chaque cycle reste dans la même classe d'homologie de l'espace.*

Autrement dit, la classe d'homologie de E qui contient $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(Z^p)$ est une fonction de x'' qui est constante au voisinage de chaque point de E″. Si nous supposons E″ connexe, cette classe est donc indépendante de x''. Cette conclusion va constituer notre théorème 5 :

20 *bis*. Homotopie. — Théorème 5. — *Si* $\varphi_{x''}(x')$ *est une représentation de l'espace de Hausdorff bicompact* E′ *dans l'espace topologique* E, *représentation dépendant continûment du paramètre* x'', *qui est un point de l'espace topologique connexe* E″, *et si* Z^p *est un cycle de* E, *alors* $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(Z^p)$ *appartient à une classe d'homologie de* E′ *indépendante de* x''.

Quand E″ est un segment de droite, cette proposition peut s'énoncer comme suit : *Si les deux représentations* $x = \psi(x')$, $x = \theta(x')$ *de l'espace de Hausdorff bicompact* E′ *dans l'espace topologique* E *sont homotopes entre elles dans* E, *alors on a pour tout cycle* Z^p *de* E

$$\overset{-1}{\psi}(Z^p) \sim \overset{-1}{\theta}(Z^p).$$

On en déduit, en tenant compte de (6) (n° **15**), le corollaire suivant : Corollaires 5_1, 5_2, 5_3 : sans changement.

(*A suivre.*)