JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE DURAND

Sur la dynamique relativiste des milieux continus

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 25 (1946), p. 179-185.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1946_9_25__179_0>

Sur la dynamique relativiste des milieux continus;

PAR ÉMILE DURAND.

M. O. Costa de Beauregard a exposé ici (¹) cette question de la dynamique des milieux continus, tant au point de vue classique que relativiste.

Alors qu'en dynamique newtonienne la définition des grandeurs inertiques est présentée d'une manière concrète et très minutieuse, on trouve en dynamique relativiste une présentation de la question tout à fait différente et assez abstraite; cela est dû au fait que M. O. Costa de Beauregard ne s'est pas préoccupé de chercher par quelle constante on doit caractériser une particule matérielle déterminée; comme conséquence il n'y a pas d'équation de continuité dans la partie relativiste de son exposé.

Nous nous proposons de présenter cette question d'une manière différente et nous compléterons l'exposé de M. O. Costa de Beauregard en introduisant une équation de continuité.

Dans une dernière Partie nous donnerons une expression nouvelle des grandeurs inertiques, grâce à l'introduction d'un tenseur antisymétrique A^{pq}, de nature purement cinématique.

I. — Dynamique newtonienne.

Nous ne faisons ici que rappeler le raisonnement de M. O. Costa de

(¹) O. COSTA DE BEAUREGARD, *Sur les équations fondamentales classiques puis relativistes de la dynamique des milieux continus* (*Journ. de Math.*, t. XXIII, fasc. 3, 1944).

Beauregard; pour plus de détails nous prions le lecteur de se reporter à l'article déjà cité.

Soient $\vec{v}$ ou v^u $(u, v, w = 1, 2, 3)$ le champ des vitesses d'un milieu continu, Φ une fonction quelconque de x, y, z, t attachée au milieu et δu un volume matériel infinitésimal; les symboles d de différentiation se rapportent aux variations de ces grandeurs en suivant la matière du volume δu dans son mouvement; on a la formule générale

$$d(\Phi\,\delta u) = [\partial_u(\Phi v^u) + \partial_t \Phi]\,\delta u\,dt \tag{1}$$

$\Big($on a écrit ∂_u pour $\dfrac{\partial}{\partial x^u}$, ∂_t pour $\dfrac{\partial}{\partial t}$ et l'on utilise la convention de sommation sur les indices muets$\Big)$; soit $\rho(x, y, z, t)$ la densité massique du milieu continu; si l'on considère un volume δu qui soit toujours formé par les mêmes éléments de matière, on a

$$\rho\,\delta u = \text{const.} \tag{2}$$

La formule (1) appliquée au cas particulier $\Phi = \rho$ et la formule (2) conduisent à l'équation de continuité

$$\partial_u(\rho v^u) + \partial_t \rho = 0. \tag{3}$$

On définit ensuite les densités inertiques de force $\vec{f}$ (ou f^u) et d'énergie w par les formules [1], [2]

$$f^u\,\delta u\,dt = d(\rho v^u\,\delta u), \tag{4}$$

$$v_u f^u\,\delta u\,dt = d(w\,\delta u); \tag{5}$$

de ces équations (4) et (5), on tire

$$v_u\,dv^u = d\left(\frac{w}{\rho}\right),$$

et en intégrant il vient

$$\frac{w}{\rho} = \frac{1}{2} v^2 + \text{const.} \tag{6}$$

---

(1) A cause de (2) l'équation (4) s'écrit encore $f^u = \rho\left(\dfrac{dv^u}{dt}\right) = \rho\gamma^u$.

(2) Pour avoir les équations fondamentales de la dynamique du milieu, il faudrait écrire que la force d'inertie est égale aux forces appliquées à la particule, tant volumétriques que superficielles; il faut donc connaître dans chaque cas les propriétés physiques du milieu.

En transformant les seconds membres de (4) et (5) à l'aide de l'équation (1), on obtient

$$f^u = \partial_v(\rho v^u v^v) + \partial_t(\rho v^u), \tag{7}$$

$$v_u f^u = \partial_v(w v^v) \quad + \partial_t(w). \tag{8}$$

II. — Dynamique relativiste.

1. Définitions des densités inertiques de force et d'énergie. — Considérons comme dans le Chapitre précédent, un volume infinitésimal δu qui contienne toujours les mêmes éléments de matière; on ne peut pas dire qu'il contient toujours la même masse δm car cette dernière varie avec la vitesse; il nous faut donc préciser en disant qu'il contient la même quantité de *matière au repos* ([1]); si ρ_0 et δu_0 sont la densité massique et le volume au repos, on aura

$$\rho' \delta u = \rho_0 \delta u_0 = \text{const.}; \tag{9}$$

nous introduisons ainsi une nouvelle densité ρ'; d'après la variance relativiste

$$\delta u = \sqrt{1 - \beta^2}\, \delta u_0; \tag{10}$$

Pour que le premier membre de (9) soit invariant, il faut que l'on ait

$$\rho' = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{11}$$

Il faut donc distinguer la densité ρ' (de variance 4) que nous appellerons *densité de présence* ([2]) de la densité massique ρ (de variance 4,4) telle que

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \beta^2}; \tag{12}$$

ce n'est que pour l'état de repos que les deux densités coïncident.

([1]) Si l'on veut se faire une idée plus précise et conforme à la théorie atomique de la matière, on imaginera que ce milieu n'est continu qu'en apparence et qu'il est en fait constitué par une multitude de particules très rapprochées; le volume δu contiendra un nombre constant de ces particules.

([2]) Par analogie avec la densité de probabilité de présence de la mécanique ondulatoire.

L'équation (1') appliquée au cas particulier $\Phi = \rho'$ et la formule (9) conduisent alors à l'équation de continuité

$$\partial_u(\rho' v^u) + \partial_t \rho' = 0. \tag{13}$$

Ce n'est donc plus la masse qui se conserve, mais la *présence;* ce sont les équations (9), (11), (13) qui manquent dans l'exposé de M. O. Costa de Beauregard. Nous pensons qu'elles sont indispensables et d'ailleurs on les trouve dans les traités classiques [1].

Nous allons maintenant pouvoir définir les grandeurs relativistes de la même manière qu'en dynamique newtonienne; les densités inertiques de force et d'énergie seront encore définies par (4) et (5), mais ρ et δu seront donnés respectivement par les équations (10) et (12); dans ces conditions on peut écrire

$$f^u\, \delta u\, dt = d\left(\frac{v^u}{\sqrt{1-\beta^2}}\rho'\, \delta u\right), \tag{14}$$

$$v_u f^u\, \delta u\, dt = d\left(\frac{w}{\rho'}\rho'\, \delta u\right); \tag{15}$$

et, à cause de (9), il vient

$$f^u\, dt = \rho'\, d\left(\frac{v^u}{\sqrt{1-\beta^2}}\right), \tag{16}$$

$$v_u f^u\, dt = \rho'\, d\left(\frac{w}{\rho'}\right); \tag{17}$$

multiplions l'équation (16) par v_u et comparons l'équation obtenue à (17); on en tire

$$d\left(\frac{w}{\rho'}\right) = d\left(\frac{c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

En faisant nulle la constante d'intégration, il vient

$$w = \frac{\rho' c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \rho c^2. \tag{18}$$

C'est la relation bien connue entre la masse et l'énergie; elle correspond à l'équation (6) [2].

---

[1] Von Laue, *La Théorie de la Relativité*, trad. G. Létang, t. I, p. 286.

[2] (18) ne se réduit pas à (6) pour les faibles vitesses; si dans (6) on fait la

Comme conséquence de (1), (4), (5), les équations (7) et (8) sont encore valables en dynamique relativiste; la nouveauté est introduite par les expressions (12) et (18) de ρ et w.

2. Emploi des notations d'Univers. — Introduisons le temps propre τ défini par

$$d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\, dt.$$

La quadrivitesse a pour expression

$$V^p = \frac{dx^p}{d\tau} \qquad (p = 1, 2, 3, 4;\ x_4 = ict);$$

soit

$$V^u = \frac{v^u}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad V^4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dans tout ce qui suit on fait usage du jeu des 4 indices p, q, r, s et l'on utilise la règle de sommation sur les indices muets dans l'espace temps de Minkowski.

L'équation de continuité (13) peut s'écrire

$$\boxed{\partial_q(\rho_0 V^q) = 0} \tag{20}$$

$\left(\text{on écrit } \partial_4 \text{ au lieu de } \dfrac{\partial}{\partial x_4} \text{ ou } \dfrac{1}{ic}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$.

En tenant compte de (12), (18) et (19), les équations (7) et (8) peuvent s'écrire

$$F^u = \partial_v(\rho_0 V^u V^v) + \partial_4(\rho_0 V^u V^4),$$

$$v_u F^u = \frac{c}{i}\partial_v(\rho_0 V^4 V^v) + \frac{c}{i}\partial_4(\rho_0 V^4 V^4).$$

En posant

$$F^4 = \frac{i}{c} v_u F^u \qquad \text{et} \qquad T^{pq} = \rho_0 V^p V^q,$$

---

constante égale à c^2, la coïncidence réapparaît quand on calcule l'énergie d'une particule du milien, car l'élément de volume n'est pas invariant en relativité; on a en effet

$$w\,\delta u = \frac{\rho_0 c^2}{1-\beta^2}\delta u = \frac{\rho_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}\delta u_0 \qquad \left(c^2 + \frac{1}{2}v^2\right)\rho_0\,\delta u_0.$$

on peut les réunir dans l'équation tensorielle unique

$$(21) \qquad \boxed{F^p = \partial_q T^{pq}} \qquad (p, q = 1, 2, 3, 4).$$

En tenant compte de l'équation de continuité (20), l'équation (21) peut s'écrire aussi

$$(22) \qquad F^p = \rho_0 V^q \partial_q V^p;$$

et si l'on se rappelle l'expression de la quadri-accélération Γ^p donnée par

$$\Gamma^p = \frac{dV^p}{d\tau} = V\partial^q{}_q V^p,$$

on voit que l'on a en définitive

$$(23) \qquad \boxed{F^p = \rho_0 \Gamma^p.}$$

3. Nouvelle expression des grandeurs inertiques. — On vérifie sans peine, à l'aide de (19), que $V_q V^q = -c^2$, d'où

$$(24) \qquad V_q \partial^p V^q = 0.$$

En retranchant du second membre de (22) la quantité nulle (24) et en posant

$$(25) \qquad A^{pq} = -[\partial^p V^q - \partial^q V^p],$$

on obtient (¹)

$$(26) \qquad \boxed{F^p = \rho_0 V_q A^{pq},}$$

c'est la nouvelle expression annoncée de la densité de force d'inertie où intervient le tenseur antisymétrique A^{pq} de nature purement cinématique (²).

(¹) A l'approximation newtonienne, les trois premières composantes de F^p donnent l'expression bien connue

$$\vec{f} = \rho_0 \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 + \left(\text{rot}\, \vec{v}\right) \wedge \vec{v} \right\}.$$

(²) Si l'on avait ajouté la quantité nulle (24) au second membre de (22) et si l'on avait introduit le tenseur symétrique

$$S^{pq} = \partial^p V^q + \partial^q V^p,$$

on aurait eu

$$F^p = \rho_0 V_q S^{pq}.$$

On remarquera l'analogie de (26) avec l'expression de la force-puissance de Lorentz en électromagnétisme. Sous forme vectorielle d'espace, en posant

$$H^{w} = A^{uv}, \qquad E^{w} = iA^{w4} \qquad (u,\ v,\ w, \text{ permutation circulaire de } 1,\ 2,\ 3),$$

l'équation (26) s'écrit

$$\vec{F} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[c\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{H})\right], \tag{27}$$

$$\vec{v}\,\vec{F} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,c(\vec{v}\,\vec{E}). \tag{28}$$

On voit que (28) s'obtient directement à partir de (27) en multipliant scalairement par $\vec{v}$.

Désignons par $\overline{A}^{pq}$ le dual du tenseur A^{pq}; d'après la définition (25), on a

$$\partial_q \overline{A}^{pq} = 0 \tag{29}$$

ou sous forme vectorialle d'espace

$$\left\{ \begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \\ &\operatorname{div}\vec{H} = 0; \end{aligned} \right. \tag{30}$$

(30) correspond au point de vue formel au second groupe des équations de Maxwell [1].

---

[1] Les équations qui correspondraient au premier groupe des équations de Maxwell pourraient s'écrire

$$\partial_q A^{pq} = \rho_0 V^p.$$

Il est facile de voir qu'elles ne sont pas vérifiées en général; par exemple quand $V^p = \text{const}$.