JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HAIMOVICI

La géométrie intrinsèque des variétés Riemanniennes non holonomes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 25 (1946), p. 291-305.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1946_9_25__291_0>

La géométrie intrinsèque des variétés Riemanniennes non holonomes;

PAR M. HAIMOVICI.

A Jassy (Roumanie).

L'étude géométrique des variétés non holonomes a commencé en 1926, par les travaux de M. Vrănceanu (1). Le point de départ pour l'étude de ces espaces a été le problème de trouver une représentation géométrique des systèmes mécaniques non holonomes. Dans une de ses communications au Congrès de Bologne (2), M. Cartan a montré comment on peut trouver des schémas de géométrisation de ces systèmes mécaniques.

Cependant, les espaces non holonomes ont été étudiés surtout du point de vue géométrique (3), tout à fait indépendamment du problème mécanique, et cela dans trois directions (4) :

a. Le point de vue rigide, qui consiste à considérer un espace de Riemann avec la métrique

$$(A) \qquad ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

(1) G. VRĂNCEANU, *Studio geometrico dei sistemi anolonomi* (*Annali di Matematica*, 4e série, t. 6, 1928-1929, p. 9).

(2) É. CARTAN, *Représentation géométrique des systèmes matériels non holonomes* (*Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, t. 4, p. 253-261, Bologna. Zanichelli, 1928).

(3) G. VRĂNCEANU, *Mémorial des Sciences mathématiques*, t. 76, Paris, Gauthier-Villars, 1936. Dans ce travail on trouve aussi une bibliographie du sujet.

(4) G. VRANCEANU, *Sur les trois points de vue dans l'étude des espaces non holonomes* (*Comptes rendus*. **188**, 1929, p. 973-975).

et, dans cet espace, un connexe défini par le système de Pfaff

$$\text{(B)} \qquad \omega_\alpha = 0 \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n),$$

b. Le point de vue semi-intrinsèque qui consiste à se donner le système de Pfaff (A) et la métrique

$$\text{(C)} \qquad ds^2 = \sum_i \omega_i^2 \qquad (\text{mod}\, \omega_\alpha) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

sur la variété non holonome qu'il représente et, en outre, en chaque point, un élément plan normal à la variété. Cet élément plan serait défini par un système de Pfaff

$$\omega_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

et l'étude des variétés non holonomes de ce point de vue revient au problème à l'étude des pfaffiens ω_α et ω_i considérés par rapport au groupe (¹)

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} \overline{\omega}_\alpha = \sum_\beta A_{\alpha\beta}\omega_\beta & (\alpha, \beta = m+1, \ldots, n), \\ \overline{\omega}_i = \sum_j C_{ij}\omega_j & (i, j = 1, \ldots, m), \end{cases}$$

où $A_{\alpha\beta}$ sont des coefficients quelconques et C_{ij} sont les coefficients d'une transformation orthogonale.

c. Le point de vue intrinsèque, qui consiste à considérer seulement le système de Pfaff (B) et la métrique sur la variété. Cela revient à se donner la métrique (A) seulement à une forme différentielle quadratique près qui s'annule pour $\omega_\alpha = 0$ c'est-à-dire dont l'expression serait

$$\sum_\beta \omega_\beta \overline{r}_\beta \qquad (\beta = m+1, \ldots, n),$$

$\overline{r}_\alpha$ étant des pfaffiens arbitraires. Le ds^2 de la variété peut être mis

---

(¹) E. CARTAN, *loc. cit.*; G. VRĂNCEANU, *Mémorial*, *loc. cit.*, p. 14. Dans le paragraphe **19** de ce dernier travail, on considère aussi un point de vue plus général. *Voir* aussi G. VRĂNCEANU, *Bull. de la Faculté des Sciences de Cernauti*, t. **5**, 1932, p. 177.

sous la forme (C) et la géométrie de la variété revient à l'étude du système de pfaffiens ω_α, ω_i par rapport au groupe

$$(G) \qquad \begin{cases} \overline{\omega}_\alpha = \sum_\beta A_{\alpha\beta}\omega_\beta, \\ \overline{\omega}_i = \sum C_{ij}\left(\omega_j + \sum_\beta B_{j\beta}\omega_\beta\right), \end{cases}$$

$A_{\alpha\beta}$ et $B_{j\beta}$ étant des coefficients arbitraires et C_{ij} étant les coefficients d'une transformation orthogonale.

A ces points de vue, on pourrait ajouter le point de vue de M. E. Bortolotti (¹), qui consiste à se donner les formes (A) et la métrique sur la variété et, en outre, sur la variété $\omega_\alpha = 0$, m congruences orthogonales, à l'aide desquelles on définirait le parallélisme sur la variété.

Si les mémoires sur les variétés non holonomes considérés des points de vue a et b sont assez nombreux, il n'en est pas de même du point de vue intrinsèque. Outre le travail déjà cité de M. Vrănceanu (⁴) dans lequel il fait une systématisation de ces points de vue et le travail de M. Bortolotti (¹), qu'on pourrait rattacher au point de vue intrinsèque, nous pouvons citer seulement un travail de MM. P. Franklin et C. L. E. Moore (²) dans lequel sont étudiées les géodésiques de longueur minimum dans les variétés non holonomes et un travail de M. Vrănceanu (³), dans lequel il établit que ces géodésiques sont intrinsèquement liées à la variété.

Le but de ce travail est précisément de construire la géométrie intrinsèque des variétés non holonomes. La méthode que nous employons est inspirée directement des méthodes générales d'équivalence de M. Cartan (⁴), méthodes qui ont déjà montré leur puissance

---

(¹) E. Bortolotti, *Trasporti rigidi e geometria delle varietà anolonome* (*Bolletino dell'Unione Matematica Italiana*, t. 10, 1931, p. 1).

(²) P. Franklin et C. L. E. Moore, *Geodesics of Pfaffians* (*Journal of Mathematics and Physics*, Mass, t. 10, 1931, p. 157).

(³) G. Vrănceanu, *Bull. de la Faculté des Sciences de Cernauti*, t. 5, 1932, p. 177.

(⁴) É. Cartan, *Les sous-groupes des groupes continus de transformations* (*Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3ᵉ série, t. 25, 1908, p. 57-73).

et leur fécondité en tant de problèmes considérés par M. Cartan [1] lui-même ou par ses élèves.

Nous supposerons que le système de Pfaff (B) a le système dérivé nul. Nous supposerons en outre qu'on ne peut associer à chaque équation du système une direction $\omega_i\left(\underset{\alpha}{d}\right)$ $(\bmod \omega_\alpha)$ telle que pour tout accroissement δx on ait

$$\omega'_\alpha(\delta, d) = -\sum_\beta \lambda_\beta \omega'_\beta\left(\delta, \underset{\alpha}{d}\right) \qquad (\bmod \omega_\alpha)$$

si

$$\omega_i(d) = \sum_\beta \lambda_\beta \omega_i\left(\underset{(\beta)}{d}\right).$$

Cette dernière condition est remplie si m est pair et si le rang [2] du système (B) est m. Mais elle est aussi remplie dans des conditions plus générales.

Dans ces conditions, si nous nous supposons dans le domaine réel, nous pouvons associer à chaque point de la variété non holonome et d'une manière intrinsèque un élément plan à $n - m$ dimensions normal à la variété.

Cela fait, l'étude des variétés non holonomes peut être poursuivie par les mêmes méthodes que l'étude semi-intrinsèque. Nous donnons aussi l'interprétation géométrique des conditions imposées pour définir l'élément plan normal.

1. Première réduction du nombre des variables auxiliaires. — En calculant les covariants bilinéaires des pfaffiens ω_α, on peut écrire

$$(1) \qquad \omega'_\alpha = \sum_{(i,j)} p_{\alpha ij}[\omega_i, \omega_j] \qquad (\bmod \omega_\alpha) \quad (p_{\alpha ij} + p_{\alpha ji} = 0) \quad [3],$$

---

[1] É. Cartan, *Notice sur les travaux scientifiques*. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1932.

[2] E. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff*, Paris, Hermann, 1922, p. 291.

[3] Les indices en lettres grecques vont de $m+1$ à n, tandis que les indices en lettres latines vont de 1 à m.

la somme $\sum\limits_{(i,j)}$ s'étendant aux couples de valeurs i, j de 1 à m (¹). En y substituant les formes ω_α, ω_i par leurs expressions tirées de (G), on obtient

$$\overline{\omega}'_\alpha = \sum_{(r,s)} c_{\alpha rs}[\overline{\omega}_r, \overline{\omega}_s], \tag{2}$$

où

$$c_{\alpha rs} = \sum_\gamma \sum_{i,j} A_{\alpha\gamma} p_{\gamma ij} C_{ri} C_{sj}. \tag{3}$$

En tenant compte des égalités

$$\sum_j C_{ij} C_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k, \end{cases}$$

et

$$c_{\alpha rs} + c_{\alpha sr} = 0,$$

on déduit

$$\sum_{(r,s)} c_{\alpha rs} c_{\beta rs} = \sum_{\gamma,\delta} \sum_{(r,s)} A_{\alpha\gamma} A_{\beta\delta} p_{\gamma rs} p_{\delta rs}.$$

En choisissant les coefficients $A_{\alpha\beta}$ de manière que la forme quadratique dont les coefficients seraient

$$k_{\gamma\delta} = \sum_{(r\beta)} p_{\gamma rs} p_{\delta rs}$$

(¹) Si ω_1 et ω_2 sont deux formes de Pfaff, le produit extérieur $[\omega_1, \omega_2]$ de ces deux formes est, par définition

$$\omega_1(d)\omega_2(\delta) - \omega_1(\delta)\omega_2(d),$$

$\omega(d)$ et $\omega(\delta)$ signifiant les valeurs de ω respectivement pour les systèmes dx et δx d'accroissements des variables. Si $\omega = \sum\limits_1^n A_i dx_i$, le covariant bilinéaire ω' de cette forme est

$$\omega' = \sum_1^n [dA_i, dx_i].$$

devienne une somme de carrés, on arrive à avoir

$$(4) \qquad \sum_{(r,s)} c_{\alpha rs} c_{\beta rs} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

En effet, d'après l'hypothèse que le système dérivé du système de Pfaff $\omega_\alpha = 0$ est nul ([1]), dans la matrice des $p_{\alpha ij}$, où α serait l'indice des lignes et le couple (ij) l'indice des colonnes, il y a un déterminant d'ordre $n-m$ différent de zéro. Donc le déterminant $|k_{\gamma\delta}|$, qui est le carré de cette matrice, est différent de zéro.

En imposant la condition que les relations (4) se conservent, les coefficients $A_{\alpha\beta}$ ne peuvent plus être arbitraires, mais ils sont contraints à être les coefficients d'une transformation orthogonale. C'est que nous supposerons dans la suite.

2. Expression complète des covariants bilinéaires des $\overline{\omega}_\alpha$. — Le covariant bilinéaire de ω_α peut être écrit

$$(5) \qquad \omega'_\alpha = \sum_{(\beta,\gamma)} m_{\alpha\beta\gamma}[\omega_\beta, \omega_\gamma] + \sum_\beta \sum_i n_{\alpha\beta i}[\omega_\beta, \omega_i] + \sum_{(i,j)} p_{\alpha ij}[\omega_i, \omega_j].$$

Nous supposons que nous avons déjà fait sur les ω_α une substitution linéaire de manière que les coefficients $p_{\alpha ij}$ eussent été amenés à satisfaire aux relations

$$\sum_{(i,j)} p_{\alpha ij} p_{\beta ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

De (G), on obtient

$$(6) \qquad \overline{\omega}'_\alpha = \sum_\beta [dA_{\alpha\beta}\,\omega_\beta] + \sum_\beta A_{\alpha\beta}\,\omega'_\beta,$$

$A_{\alpha\beta}$ étant les coefficients d'une transformation orthogonale. En remplaçant dans (6) les ω_β, ω'_β par leur expression tirée de (5) et (G), on

---

([1]) Le système dérivé d'un système de Pfaff $\omega_\alpha = 0$, est l'ensemble des combinaisons linéaires indépendantes de ces équations telles que

$$(\Sigma\lambda_\alpha\omega_\alpha)' = 0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega_\alpha)$$

(c'est-à-dire si $\omega_\alpha = 0$).

obtient

$$(7)\qquad \overline{\omega}'_\alpha = \sum_\beta [\overline{\omega}_\beta, \overline{\pi}_{\beta\alpha}] + \sum_\beta \sum_i q^\star_{\alpha\beta i} [\overline{\omega}_\beta, \overline{\omega}_i] + \sum_{(i,j)} c_{\alpha ij} [\omega_i, \overline{\omega}_j],$$

où

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} \pi_{\beta\alpha} &= -\sum_\gamma A_{\beta\gamma}\, dA_{\alpha\gamma} + \sum_\gamma R_{\alpha\beta\gamma} \overline{\omega}_\gamma, \\ q^\star_{\alpha\beta i} &= \sum_{\lambda,\sigma} \sum_r A_{\alpha\lambda} A_{\beta\sigma} C_{ir} \Big(n_{\lambda\sigma r} - 2 \sum_{s,j} p_{\lambda jr} B_{s\sigma} \Big), \\ c_{\alpha ij} &= \sum_\lambda \sum_{r,s} A_{\alpha\lambda} p_{\lambda sr} C_{ir} C_{js}, \end{aligned} \right.$$

où nous avons posé

$$R_{\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\gamma\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\sigma\tau} A_{\alpha\lambda} A_{\beta\sigma} A_{\gamma\tau} \times \Big(m_{\lambda\sigma\tau} + \sum_i n_{\lambda\sigma i} B_{i\tau} - \sum_i n_{\lambda\tau i} B_{i\sigma} + \sum_{i,j} p_{\lambda ij} B_{i\sigma} B_{j\tau} \Big).$$

Remarquons qu'on peut remplacer dans (7) les pfaffiens $\pi_{\beta\alpha}$ par

$$\omega^\star_{\beta\alpha} = \pi_{\beta\alpha} - \sum_\gamma \Big(R_{\beta\alpha\gamma} + R_{\gamma\alpha\beta} \Big) \overline{\omega}_\gamma,$$

sans altérer l'égalité. On pourra donc écrire

$$\omega_{\beta\alpha} + \omega^\star_{\alpha\beta} = 0$$

et

$$(9)\qquad \overline{\omega}'_\alpha = \sum_\beta [\overline{\omega}_\beta, \overline{\omega}^\star_{\beta\alpha}] + \sum_\beta \sum_i q^\star_{\alpha\beta i} [\overline{\omega}_\beta, \overline{\omega}_i] + \sum_{(i,j)} c_{\alpha ij} [\overline{\omega}_i, \overline{\omega}_j].$$

Remarquons que les égalités (9) déterminent complètement les coefficients $c_{\alpha ij}$, mais qu'il n'en est pas de même des coefficients $q^\star_{\alpha\beta i}$, et des pfaffiens $\omega^\star_{\beta\alpha}$, même si l'on impose la condition $\omega^\star_{\beta\alpha} + \omega^\star_{\alpha\beta} = 0$. En effet, si l'on ajoute à $\omega^\star_{\beta\alpha}$ une expression de la forme

$$\sum_i V_{\alpha\beta i} \overline{\omega}_i \qquad (V_{\alpha\beta i} = -V_{\beta\alpha i}),$$

et qu'on retranche de $q^\star_{\alpha\beta i}$ la quantité $V_{\alpha\beta i}$, $\overline{\omega}'_\alpha$ conserve la forme (9). Les pfaffiens $\omega^\star_{\beta\alpha}$ et les coefficients $q^\star_{\alpha\beta i}$ deviennent

$$\omega_{\beta\alpha} = \omega^\star_{\beta\alpha} + \sum_i V_{\alpha\beta i} \overline{\omega}_i, \qquad q_{\alpha\beta i} = q^\star_{\alpha\beta i} - V_{\alpha\beta i},$$

On peut déterminer $\omega_{\beta\alpha}$ et $q_{\alpha\beta i}$ en imposant la condition que $q_{\alpha\beta i} = q_{\beta\alpha i}$. On aura alors

$$(10) \quad \begin{cases} V_{\alpha\beta i} = -V_{\beta\alpha i} = \frac{1}{2}(q^{*}_{\alpha\beta i} - q^{*}_{\beta\alpha i}), \\ q_{\alpha\beta i} = \frac{1}{2}(q^{*}_{\alpha\beta i} + q^{*}_{\beta\alpha i}), \qquad \omega_{\beta\alpha} = \omega^{*}_{\beta\alpha} + \frac{1}{2}\sum_{i}(q^{*}_{\alpha\beta i} - q^{*}_{\beta\alpha i})\,\omega_i. \end{cases}$$

3. Conditions a imposer en vue d'une définition intrinsèque de l'élément plan normal a la variété. — L'expression de $q_{\alpha\beta i}$ peut être écrite

$$(11) \qquad q_{\alpha\beta i} = P_{\alpha\beta i} + \sum_{s}\sum_{\sigma} Q_{\alpha\beta i s\sigma} B_{s\sigma},$$

où

$$(12) \quad \begin{cases} P_{\alpha\beta i} \;\; = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\sigma}\sum_{r} A_{\alpha\lambda}A_{\beta\sigma}C_{ir}(n_{\lambda\sigma r} + n_{\sigma\lambda r}), \\ Q_{\alpha\beta i s\sigma} = -\sum_{\lambda}\sum_{r}(A_{\alpha\lambda}A_{\beta\sigma} + A_{\beta\lambda}A_{\alpha\sigma})C_{ir}p_{\lambda sr}. \end{cases}$$

Calculons l'expression $\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i} Q_{\alpha\beta i t\tau} q_{\alpha\beta i}$. On obtient

$$(13) \qquad \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i} Q_{\alpha\beta i s\sigma}Q_{\alpha\beta i t\tau} = 2\sum_{\lambda\mu}\sum_{r}(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\sigma\tau} + \delta_{\lambda\tau}\delta_{\sigma\mu})p_{\lambda sr}p_{\mu tr}$$

$$(\delta_{\lambda\mu}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ 1 & \text{si } \lambda = \mu, \end{cases}$$

et

$$(14) \qquad \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i} Q_{\alpha\beta i t\tau}P_{\alpha\beta i} = -\sum_{\lambda,\mu}\sum_{r}(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\tau\sigma} + \delta_{\lambda\sigma}\delta_{\tau\mu})p_{\lambda tr}r_{\mu\sigma r},$$

Donc, d'aprés (11),

$$(15) \quad \sum_{\alpha\beta}\sum_{i} Q_{\alpha\beta i t\tau}q_{\alpha\beta i} = -\sum_{\mu,\lambda,\sigma}(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\sigma\tau} + \delta_{\lambda\tau}\delta_{\sigma\mu})\Big(\sum_{j,s,r}p_{\lambda sr}p_{\mu tr}B_{s\sigma} + \sum_{r}p_{\lambda tr}r_{\mu\sigma r}\Big).$$

On voit que cette expression ne dépend pas des coefficients $A_{\alpha\beta}$ (pourvu qu'ils soient les coefficients d'une transformation orthogonale).

Nous allons imposer la condition

$$(16) \qquad \sum_{\alpha}\sum_{i} c_{\alpha i j}q_{\alpha\beta i} = 0,$$

On a, d'après (8) et (12),

$$(17)\quad \begin{cases} \sum_\alpha \sum_t c_{\alpha t l} Q_{\alpha\beta t s\sigma} = \sum_t C_{jt} \sum_{\lambda,\mu} \sum_r (\delta_{\lambda\mu} A_{\beta\sigma} + \delta_{\sigma\mu} A_{\beta\lambda}) p_{\lambda s r} p_{\mu t r} \\ \qquad = \sum_\tau \sum_t A_{\beta\tau} C_{jt} \sum_{\lambda,\mu} \sum_r (\delta_{\lambda\mu} \delta_{\sigma\tau} + \delta_{\lambda\tau} \delta_{\sigma\mu}) p_{\lambda s r} p_{\mu t r} \\ \qquad = \frac{1}{2} \sum_\tau \sum_t A_{\beta\tau} C_{jt} \sum_{\alpha\beta} \sum_t Q_{\alpha\beta t s\sigma} Q_{\alpha\beta t t\tau} \end{cases}$$

et

$$(18)\quad \begin{cases} \sum_\alpha \sum_i c_{\alpha\beta i} P_{\alpha\beta i} = -\sum_\tau \sum_t A_{\beta\tau} C_{jt} \sum_\lambda \sum_r p_{\lambda t r} (n_{\lambda\tau r} + n_{\tau\lambda r}) \\ \qquad = -\sum_\tau \sum_t A_{\beta\tau} C_{jt} \sum_{\lambda,\mu} \sum_r (\delta_{\lambda\mu} \delta_{\tau\sigma} + \delta_{\lambda\sigma} \delta_{\tau\mu}) p_{\lambda t r} n_{\mu\sigma r} \\ \qquad = \sum_\tau \sum_t A_{\beta\tau} C_{jt} \sum_{\alpha\beta} \sum_i Q_{\alpha\beta i t\tau} P_{\alpha\beta i}. \end{cases}$$

Il en résulte, d'après (11), que la condition (16) est équivalente à

$$(19)\quad \sum_{\alpha\beta} \sum_i Q_{\alpha\beta i t\tau} q_{\alpha\beta i} \equiv \sum_{\alpha\beta} \sum_i Q_{\alpha\beta i t\tau} P_{\alpha\beta i} + \sum_{\alpha\beta\sigma} \sum_{is} Q_{\alpha\beta i t\tau} Q_{\alpha\beta i s\sigma} B_{s\sigma} = 0.$$

Il nous faut maintenant établir dans quels cas le système d'équations en $B_{s\sigma}$, auquel cette condition donne lieu, est compatible et détermine les $B_{s\sigma}$. Pour cela, considérons le déterminant à $m(n-m)$ lignes et $m(n-m)$ colonnes des quantités

$$R_{t\tau,s\sigma} = \sum_{\alpha\beta} \sum_i Q_{\alpha\beta i t\tau} Q_{\alpha\beta i s\sigma},$$

t, τ étant les indices des lignes et $s\sigma$ ceux des colonnes. Si ce déterminant est différent de zéro, les équations (19) auront une solution unique et bien déterminée en $B_{s\sigma}$.

Or, ce déterminant est le carré de la matrice à $m(n-m)$ lignes et $m(n-m)^2$ colonnes des quantités $Q_{\alpha\beta i s\sigma}$, $s\sigma$ étant les indices des lignes et $\alpha\beta i$ ceux des colonnes. Il peut donc s'exprimer par la somme des carrés des déterminants d'ordre $m(n-m)$ formés de cette matrice et, si nous nous limitons au domaine réel, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit différent de zéro est que le rang de la matrice des quantités $Q_{\alpha\beta i s\sigma}$ soit $m(n-m)$. C'est-à-dire que le système d'équations en $X_{s\sigma}$

$$\sum_s \sum_\sigma Q_{\alpha\beta i s\sigma} X_{s\sigma} = 0 \tag{20}$$

n'admette que la solution $X_{s\sigma} = 0$. D'après (12), ce système est équivalent à

$$\sum_j (c_{\alpha ij} X_{j\beta} + c_{\beta ij} X_{j\alpha}) = 0. \tag{21}$$

Nous supposerons cette condition satisfaite. Elle l'est toujours par exemple si le rang du système de Pfaff $\omega_\alpha = 0$ est m (ce qui suppose, naturellement, que m est un nombre pair $m = 2p$). Dans ce cas, en effet, on peut supposer que le rang du déterminant des quantités c_{1ij} est différent de zèro. Des relations

$$\sum_j c_{1ij} X_{j1} = 0 \tag{22}$$

qui suivent de (21) pour $\alpha = \beta = 1$, on déduit $X_{j1} = 0$. De (21) il suit encore

$$\sum_j (c_{1ij} X_{j\beta} + c_{\beta ij} X_{j1}) = 0,$$

et, par suite,

$$\sum_j c_{1ij} X_{j\beta} = 0,$$

c'est-à-dire

$$X_{j\beta} = 0.$$

Notre hypothèse revient à dire qu'on ne peut pas associer à toute forme $\overline{\omega}_\sigma$ une direction $\overline{\omega}_i\left(\underset{\sigma}{d}\right) \pmod{\overline{\omega}_\alpha}$ telle que l'on ait

$$\overline{\omega}'_\sigma(\delta, d) = -\sum_\tau \lambda_\tau \overline{\omega}'_\tau\left(\delta, \underset{\sigma}{d}\right) \qquad (\operatorname{mod} \overline{\omega}_\alpha),$$

si

$$\overline{\omega}_i(d) = \sum_\tau \lambda_\tau \overline{\omega}_i\left(\underset{\tau}{d}\right) \qquad (\operatorname{mod} \overline{\omega}_\alpha).$$

Si cette hypothèse est satisfaite, les équations (16) déterminent $B_{i\sigma}$, donc un élément plan normal à la variété non holonome. Si nous prenons les formes ω_i de manière que les équations $\omega_i = 0$ représentent cet élément plan normal $\left(\text{c'est-à-dire si nous prenons } \omega_i - \sum_\alpha B_{i\alpha}\omega_\alpha \text{ au lieu de } \omega_i\right)$, le groupe (G) se trouve restreint par la condition $B_{i\sigma} = 0$, c'est-à-dire se réduit au groupe (Γ).

4. Définition des autres invariants de la variété non holonome. — Une fois l'élément plan normal à la variété déterminé, la géométrie intrinsèque de cette variété devient un cas particulier de la géométrie semi-intrinsèque. Cette dernière, en effet, suppose donné arbitrairement un tel élément plan normal. Cependant, certaines propriétés suivent précisément des conditions que nous avons imposées pour définir l'élément plan normal. Nous allons construire les autres invariants de la variété [1].

D'après ce que nous avons dit dans les paragraphes précédents, en imposant la condition que les équations $\omega_i = 0$ représentent l'élément plan normal à la variété non holonome, le groupe (G) se trouve restreint, les coefficients $B_{j\beta}$ étant nuls et les coefficients $A_{\alpha\beta}$ et C_{ij} étant liés par les conditions que nous venons de préciser. Dans certains cas, ils peuvent être réduits aux coefficients de la transformation identique.

En calculant les covariants bilinéaires des pfaffiens ω_i, nous trouvons des expressions de la forme

$$\omega'_i = \sum_{(j,k)} M_{ijk}[\omega_j, \omega_k] + \sum_\alpha \sum_j N_{ij\alpha}[\omega_i, \omega_\alpha] + \sum_{(\alpha,\beta)} P_{i\alpha\beta}[\omega_\alpha, \omega_\beta]. \tag{23}$$

Or, on a

$$\overline{\omega}'_i = [dC_{ij}, \omega_j] + C_{ij}\omega'_j, \tag{24}$$

et en remplaçant dans ces relations les ω_i, ω_α, ω'_j par leurs expressions en fonction des $\overline{\omega}$, $\overline{\omega}_\alpha$, on trouve comme au paragraphe **2** des égalités

---

[1] É. Cartan, *Atti del Congresso di Bologna*, loc. cit.

de la forme

$$(25) \qquad \overline{\omega}'_i = \sum_j [\overline{\omega}_j, \omega_{ji}] + \sum_\alpha \sum_j \gamma_{ij\alpha} [\overline{\omega}_j, \overline{\omega}_\alpha] + \sum_{(\alpha,\beta)} \delta_{i\alpha\beta} [\overline{\omega}_\alpha, \overline{\omega}_\beta].$$

Les pfaffiens ω_{ij} et les coefficients $\gamma_{ij\alpha}$ et $\delta_{i\alpha\beta}$ seront déterminés sans ambiguïté si nous imposons les conditions

$$\omega_{ji} + \omega_{ij} = 0, \qquad \gamma_{ij\alpha} + \gamma_{ji\alpha} = 0,$$

On a

$$\omega_{ji} = -\sum_k C_{jk} dC_{ik} + \sum_k (R_{ijk} - R_{jik} - R_{kij}) \overline{\omega}_k + \frac{1}{2} \sum_\alpha (\gamma^*_{ij\alpha} - \gamma^*_{ji\alpha}) \overline{\omega}_\alpha.$$

$$\gamma_{ij\alpha} = \gamma_{ji\alpha} = \frac{1}{2} (\gamma^*_{ij\alpha} + \gamma^*_{ji\alpha}),$$

$$\delta_{i\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu} \sum_r C_{ir} P_{r\lambda\mu} A_{\alpha\lambda} A_{\beta\mu},$$

avec

$$R_{ijk} = -R_{ikj} = \frac{1}{2} \sum_{r,s,t} C_{ir} C_{js} C_{kt} M_{rst}; \qquad \gamma^*_{ij\alpha} = \sum_\beta \sum_{r,s} C_{ir} C_{js} A_{\alpha\beta} N_{rs\beta}.$$

3. Interprétation géométrique des coefficients $q_{\alpha\beta i}$, $c_{\alpha ij}$, $\gamma_{ij\alpha}$, $\delta_{i\alpha\beta}$ et des formes de Pfaff ω_{ij} et $\omega_{\alpha\beta}$. — Nous allons rappeler brièvement les notions introduites par M. Cartan pour l'interprétation géométrique des coefficients qui interviennent dans les covariants bilinéaires des pfaffiens $\overline{\omega}_\alpha$ et $\overline{\omega}_i$, et nous allons donner ensuite l'interprétation géométrique des conditions que nous avons imposées pour la détermination de l'élément normal intrinsèque. Nous suivrons, naturellement la méthode du repère mobile.

Considérons un chemin quelconque (C) dans l'espace et imaginons qu'à chacun de ses points soit associé un repére rectangulaire formé par m vecteurs $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_m$ situés sur la variété et $n-m$ vecteurs $\underline{e}_{m+1}, \underline{e}_{m+2}, \ldots, \underline{e}_n$ normaux à la variété. Pour un déplacement élémentaire quelconque dP sur ce chemin, nous pouvons écrire par convention

$$dP = \overline{\omega}_1 \underline{e}_1 + \ldots + \overline{\omega}_m \underline{e}_m + \overline{\omega}_{m+1} \underline{e}_{m+1} + \ldots + \overline{\omega}_m \underline{e}_n,$$

$$de_i = \sum_j \overline{\omega}_{ij} \underline{e}_j, \qquad d\underline{e}_\alpha = \sum_\beta \overline{\omega}_{\alpha\beta} \underline{e}_\beta.$$

Les pfaffiens $\overline{\omega}_i$ représentent les composantes sur les vecteurs $\underline{e}_i$ du déplacement élémentaire et les pfaffiens $\overline{\omega}_\alpha$ (¹) les composantes sur les vecteurs $\underline{e}_\alpha$ du même déplacement. La variation des vecteurs $\underline{e}_i$ n'a pas de composantes sur les vecteurs e_α et inversement.

Un vecteur quelconque

$$\underline{\lambda} = \lambda_1 \underline{e}_1 + \ldots + \lambda_m \underline{e}_m + \lambda_{m+1} \underline{e}_{m+1} + \ldots + \lambda_n \underline{e}_n$$

subira, dans son déplacement de P à P + dP, la variation intrinsèque

$$(26) \qquad \begin{aligned} d\underline{\lambda} &= \sum_i d\lambda_i \underline{e}_i + \sum_\alpha d\lambda_\alpha \underline{e}_\alpha + \sum_{i,j} \lambda_{ij}\omega_{ij}\underline{e}_j + \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \omega_{\alpha\beta}\underline{e}_\beta \\ &= \sum_i \Big(d\lambda_i + \sum_k \lambda_k \omega_{ki}\Big)\underline{e}_i + \sum_\alpha \Big(d\lambda_\alpha + \sum_\beta \lambda_\beta \omega_{\beta\alpha}\Big)\underline{e}_\alpha, \end{aligned}$$

et les équations

$$(27) \qquad d\lambda_i + \sum_k \lambda_k \omega_{ki} = 0,$$

$$(28) \qquad d\lambda_\alpha + \sum_\beta \lambda_\beta \omega_{\beta\alpha} = 0$$

définiront le déplacement parallèle du vecteur. En particulier, si le vecteur est intérieur à la variété, son déplacement parallèle sera défini par les relations (27). Un vecteur intérieur reste intérieur par le transport parallèle défini plus haut.

Les relations (26) permettent de développer la courbe (C) sur un espace euclidien. Sa projection sur la variété non holonome se développera suivant la projection de la courbe développée sur une variété plane à m dimensions. Sa projection sur la variété non holonome normale se développera suivant la projection de la courbe développée sur la variété plane à $n - m$ dimensions normale à la première.

Considérons maintenant un parallélogramme infinitésimal $PP_1P_2P_3$ ayant pour côtés PP_1 et PP_3 les vecteurs de composantes respectivement $\omega(d)$ et $\omega(\delta)$. En développant le contour de ce parallélogramme, le point P revient, après le développement avec les coor-

(¹) *Voir* aussi E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

données

$$(29)\quad \begin{cases} \Omega_i = \overline{\omega}'_i - \sum_l [\overline{\omega}_l\ \omega_{li}] = \sum_\alpha \sum_j \gamma_{ij\alpha} [\overline{\omega}_j,\ \overline{\omega}_\alpha] + \sum_{(\alpha,\beta)} \delta_{i\alpha\beta} [\overline{\omega}_\alpha,\ \overline{\omega}_\beta], \\ \Omega_\alpha = \overline{\omega}'_\alpha - \sum_\beta [\overline{\omega}_\beta\ \omega_{\beta\alpha}] = \sum_\beta \sum_i q_{\alpha\beta i} [\overline{\omega}_\beta,\ \omega_i] + \sum_{(i,j)} c_{\alpha ij} [\omega_i,\ \overline{\omega}_j]. \end{cases}$$

On voit que, si les côtés PP_1 et PP_3 sont situés sur la variété non holonome, le point P subit, après la description du cycle, un déplacement normal à la variété. De même, si les côtés PP_1 et PP_3 sont normaux à la variété, le point P subit, après la description du cycle. un déplacement tangent à la variété. Ces déplacements sont respectivement définis par les vecteurs de composantes

$$(30)\qquad \sum_{(i,j)} c_{\alpha ij} [\overline{\omega}_i,\ \overline{\omega}_j],\quad 0 \qquad \text{et} \qquad 0,\ \sum_{(\alpha,\beta)} \delta_{i\alpha\beta} [\overline{\omega}_\alpha,\ \overline{\omega}_\beta].$$

Si le vecteur PP_1 est tangent à la variété et de composantes $\overline{\omega}_i(d)$, o et le vecteur PP_3 normal à la variété et de composantes o, $\overline{\omega}_\alpha(\delta)$, le déplacement associé au cycle est défini par un vecteur dont les composantes sont

$$(31)\qquad \sum_\beta \sum_\gamma \gamma_{i j\beta} \overline{\omega}_j(d) \overline{\omega}_\beta(\delta), \quad -\sum_\beta \sum_j q_{\alpha\beta j} \overline{\omega}_\beta(\delta) \overline{\omega}_j(d).$$

6. Interprétation géométrique des conditions imposées pour la définition de l'élément plan normal a la variété. — Comme nous avons dit, le déplacement associé à un cycle $PP_1P_2P_3$, dont le côté PP_1 serait tangent à la variété non holonome et de composantes a_i, o et le vecteur PP_2 normal à la variété et de composantes o, b_α, est

$$(31')\qquad \sum_\beta \sum_j \gamma_{ij\beta} a_j b_\beta, \quad -\sum_\beta \sum_j q_{\alpha\beta j} b_\beta a_j,$$

Considérons deux vecteurs infinitésimaux tangents à la variété et orthogonaux entre eux $\underline{\underline{a}}$ et $\underline{\underline{c}}$ et deux vecteurs normaux à la variété et orthogonaux entre eux $\underline{\underline{b}}$ et d. Le déplacement du point associé au parallélogramme construit sur les vecteurs $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ est défini par le vecteur $\underline{\underline{\Omega}}_{11}$ dont les composantes sont (31'). De même, les déplacements associés aux parallélogrammes construits sur $\underline{a}$, $\underline{d}$; $\underline{c}$, $\underline{b}$; $\underline{c}$, $\underline{d}$ sont respectivement définis par les vecteurs $\underset{12}{\Omega}$, $\underset{21}{\Omega}$, $\underset{22}{\Omega}$ de composantes

$$\sum_\beta \sum_j \gamma_{ij\beta} a_j d_\beta, \quad -\sum_\beta \sum_j q_{\alpha\beta j} a_j d_\beta; \quad \sum_\beta \sum_j \gamma_{ij\beta} c_j b_\beta, \quad -\sum_\beta \sum_j q_{\alpha\beta j} c_j b_\beta;$$
$$\sum_\beta \sum_j \gamma_{ij\beta} c_j d_\beta, \quad -\sum_\beta \sum_j q_{\alpha\beta j} c_j d_\beta,$$

Les conditions $\gamma_{ij\beta} = \gamma_{ji\beta}$ et $q_{\alpha\beta i} = q_{\beta\alpha i}$ expriment que

$$\underset{11}{\Omega}\underline{c} = \underset{21}{\Omega}\underline{a}; \qquad \underset{11}{\Omega}\underline{d} = \underset{12}{\Omega}\underline{b}; \qquad \underset{12}{\Omega}\underline{c} = \underset{22}{\Omega}\underline{a}; \qquad \underset{21}{\Omega}\underline{d} = \underset{22}{\Omega}\underline{b}.$$

Occupons-nous maintenant des conditions que nous avons imposées pour définir les coefficients $B_{j\beta}$.

Le déplacement associé à un parallélogramme infinitésimal dont les côtés $\underline{a}$ et $\underline{c}$ sont tangents à la variété non holonome est défini par le vecteur $\underline{t}$ de composantes $\sum_{(i,j)} c_{\alpha ij}(a_i c_j - a_j c_i)$. Considérons le vecteur $\underline{s}$ qui définit le déplacement associé au parallélogramme construit sur le vecteur $\underline{a}$ et un autre vecteur $\underline{b}$, celui-ci normal. Les composantes de ce vecteur sur $\underline{e}_{n+1}, \ldots, \underline{e}_n$ sont $-\sum_\beta \sum_j q_{\alpha\beta j} a_j b_\beta$.

Considérons maintenant, au lieu du vecteur $\underline{a}$, m vecteurs unitaires intérieurs $\underset{1}{\underline{a}}, \underset{2}{\underline{a}}, \ldots, \underset{m}{\underline{a}}$ orthogonaux entre eux et soient $\underset{1}{\underline{t}}, \ldots, \underset{m}{\underline{t}}$; $\underset{1}{\underline{s}}, \ldots, \underset{m}{\underline{s}}$ les déplacements correspondants déduits comme plus haut. La somme des produits scalaires

$$\underset{1}{\underline{t}}\,\underset{1}{\underline{s}} + \ldots + \underset{m}{\underline{t}}\,\underset{m}{\underline{s}}$$

est nulle, d'après la condition (16).