JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. POLLAZEK

Sur un problème du calcul des probabilités qui se rapporte à la téléphonie

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 25 (1946), p. 307-334.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1946_9_25__307_0>

Sur un problème du calcul des probabilités qui se rapporte à la téléphonie;

PAR F. POLLACZEK.

Introduction.

Dans ce qui suit, nous traitons le problème suivant : Des personnes qui arrivent au hasard devant un groupe de *guichets* et qui, par hypothèse, ont toutes besoin de la même *durée d'expédition* (que nous choisirons comme unité de temps) sont traitées sans interruption à un quelconque des guichets non occupés; nous admettons en outre que leur fréquence $\eta (0 \leqq \eta < 1)$ (espérance mathématique d'arrivées par guichet et par unité de temps) soit constante, c'est-à-dire, ne dépende pas du temps. Nous cherchons les probabilités

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} p_0(\eta), \quad p_1(t_1;\eta), \quad \ldots, \quad p_{s-1}(t_1, \ldots, t_{s-1};\eta); \\ \qquad p_c(t_1, \ldots, t_s;\eta) \qquad (c = s, s+1, \ldots) \end{cases}$$

pour que, à un moment quelconque, exactement $c = 0, 1, \ldots$ personnes se trouvent devant les guichets, les s (ou c, pour $c < s$) personnes en cours d'expédition étant respectivement traitées depuis tout au plus une fraction $t_1, \ldots, t_s$ (ou t_c) de l'unité du temps; nous choisissons nos notations de manière qu'on ait

$$\text{(2)} \qquad 1 \geqq t_1 \geqq t_2 \geqq \ldots \geqq t_s \geqq 0,$$

de sorte qu'en particulier, t_1 et t_s se rapportent aux personnes dont l'expédition est respectivement la plus et la moins avancée.

Nous allons établir ici la solution complète de ce problème qui contient, entre autres cas particuliers, celui de la répartition statistique des durées d'attente devant un groupe de guichets, selon une méthode que nous avons exposée dans plusieurs publications antérieures (¹). En outre, nous traiterons notre problème par une autre méthode qui, grâce à l'utilisation du principe de l'équilibre statistique, mène rapidement à un grand nombre de relations entre les probabilités (1); toutefois, dans son état actuel, cette autre méthode ne fournit la solution complète de notre problème que pour $s = 1, 2, 3$.

I. — Méthode analytique.

1. CONSTRUCTION D'UN MODÈLE DES PHÉNOMÈNES EN QUESTION. — Pour commencer, nous construirons maintenant un modèle *microscopique* des phénomènes dont il s'agit ici, en admettant que pendant un intervalle de temps $(0, T)$, n personnes, numérotées selon leur ordre d'arrivée, arrivent devant nos guichets. Soient

$$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq T, \tag{3}$$

les moments de leurs arrivées; tous les cas possibles (3) de l'arrivée de n personnes, l'une après l'autre, étant par hypothèse admis comme également probables, la probabilité pour que les arrivées de la $1^{re}, \ldots, n^{ième}$ personne soient respectivement situées entre x_1 et $x_1 + dx_1, \ldots, x_n$ et $x_n + dx_n$, sera égale à $dx_1, \ldots, dx_n$, divisé par le volume $\frac{T^n}{n!}$ de la multiplicité (3). En prescrivant maintenant que toutes ces personnes soient reçues selon l'ordre de leur arrivée [cette règle ne modifie pas les valeurs des probabilités cherchées (1) mais simplifie singulièrement notre tâche], tous les phénomènes d'attente devant les guichets seront dans chaque cas particulier (3) entièrement définis en fonction des grandeurs (3) et T. En introduisant, en outre, la fréquence des arrivées

$$\frac{n \times 1}{sT} = \eta < 1,$$

(¹) *Cf.* par exemple, *Sur l'application de la Théorie des Fonctions au calcul de certaines probabilités continues utilisées dans la théorie des réseaux téléphoniques* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 10, 1946, p. 1-56).

on peut encore exprimer T par la formule

$$(4) \qquad T = \frac{n}{s\eta}.$$

Dans chaque cas particulier (3), nous pourrons maintenant déterminer le nombre $N_c(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_s)$ des personnes qui, à leur arrivée, trouvent les guichets occupés respectivement depuis tout au plus une fraction $t_1, \ldots, t_s$ de l'unité du temps, $c - s$ autres personnes attendant en outre leur tour. En prenant ensuite la moyenne de la fraction $\frac{N_c}{n}$ pour tous les cas (3), c'est-à-dire, en calculant les quotients

$$(5a) \qquad \begin{aligned} &\overline{\frac{1}{n} N_c(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_s)} \\ &= \frac{n!}{T^n} \int_0^T dx_1 \int_{x_1}^T dx_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^T \frac{1}{n} N_c(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_s)\, dx_n \\ &= P_c(t_1, \ldots, t_s; \eta, n), \end{aligned}$$

nous obtiendrons, pour notre modèle des phénomènes en question, des probabilités qui, en vertu de la relation (4), correspondent aux fonctions $p_c(t_1, \ldots, t_s; \eta)$ que nous cherchons et qui, pour n tendant vers l'infini, se confondent avec elles, donc

$$(5b) \qquad \lim_{n \to \infty} P_c(t_1, \ldots, t_s; \eta, n) = p_c(t_1, \ldots, t_s; \eta).$$

Avant d'effectuer les calculs que nous venons d'indiquer, introduisons quelques notations et une formule asymptotique qui seront utilisées dans la suite.

1° Nous désignons par $\mathbf{s}(x)$ la fonction

$$(6a) \qquad \mathbf{s}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0, \\ \frac{1}{2} & \quad \text{»} \quad x = 0, \\ 0 & \quad \text{»} \quad x < 0, \end{cases}$$

qui peut être représentée par l'intégrale de Dirichlet

$$(6b) \qquad \mathbf{s}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z} \frac{e^{xz}}{z}\, dz,$$

où C_z (et de manière analogue par la suite C_p, C_q, ...) désigne une parallèle à l'axe imaginaire des z, à droite [1] de cet axe, parcourue du bas vers le haut; pour $x=0$, l'intégrale $(6b)$ sera définie comme valeur principale au sens de Cauchy. En vertu de $(6a)$, la fonction $\mathbf{s}(x)$ satisfait à l'équation

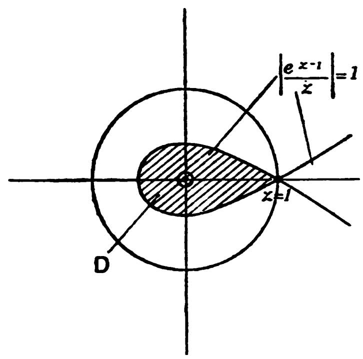
$$(6c)\qquad \mathbf{s}(x)=1-\mathbf{s}(-x)\qquad (x\gtrless 0).$$

2° Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels; nous désignons par

$$(7)\qquad \operatorname*{Max^+}_{\nu=1,\ldots,n}(a_\nu)$$

le plus grand des $n+1$ nombres $a_1, \ldots, a_n$, 0.

3° Soit $f(z)$ holomorphe dans le domaine fermé D qui est borné par la partie de la courbe $\left|\frac{e^{z-1}}{z}\right|=1$ qui appartient au cercle unité (*fig.* 1); on a alors pour les grandes valeurs de n le développement



asymptotique [*voir* par exemple *loc. cit.* [1], 1re partie, équ. (50)] de l'intégrale suivante où K_z est un petit cercle autour de l'origine

$$(8)\qquad A_n=\frac{n!}{n^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_z}\frac{e^{nz}}{z^{n+1}}f(z)\,dz=f(1)-\frac{1}{2n}f''(1)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

---

[1] Remarquons ici que tous les facteurs linéaires, tels que z dans $(6b)$, qui figurent dans les dénominateurs des fonctions à intégrer des intégrales complexes $\int_{C_z}, \int_{C_p}, \ldots$ de ce texte, ont des parties réelles positives. Cette propriété sera utilisée dans nos calculs ultérieurs sans indication particulière.

d'où

$$\lim_{n\to\infty} A_n = f(1).$$

Supposons maintenant que l'intégrale (8), où $f(z)$ signifie pour le moment une fonction qui soit méromorphe dans le domaine D, est bornée pour les grandes valeurs de n, donc $A_n = O(1)$; on reconnaît alors que $f(z)$ est encore holomorphe dans D, de sorte que la formule (8) est toujours valable. Pour nous en rendre compte, désignons pour le moment par α l'un des pôles hypothétiques de $f(z)$ dans D pour lesquels $\left|\frac{e^{\alpha-1}}{\alpha}\right|$ ($\geqq 1$) est un maximum; dans le développement asymptotique de A_n figurerait alors un terme const. $n^{\frac{1}{2}+n}\left(\frac{e^{\alpha-1}}{\alpha}\right)^n$ qui ne pourrait être compensé par aucun autre terme du même ordre, contrairement à notre hypothèse $A_n = O(1)$.

2. Réduction du problème aux fonctions $\mathcal{J}_c(t_\chi; \eta)$. — Revenant à notre problème, nous voyons d'abord qu'avec nos hypothèses, les n personnes (3) se répartiront automatiquement en s files selon les restes mod. s de leurs indices m', de sorte que la durée d'attente $\tau_{m'}$ de la personne d'indice $m' = sm + a$ ($a = 1, \ldots, s$) dépendra uniquement des arrivées des personnes dont les indices sont

$$a,\ s+a,\ \ldots,\ (m-1)s+a;$$

pour $\tau_{m'}$ on établit sans difficulté la formule suivante [*voir* par exemple *loc. cit.* (¹), 1^re partie, équ. (16)]

$$\tau_{sm+a} = \operatorname*{Max^+}_{\nu=0,1,\ldots,m-1} (x_{s\nu+a} + m - \nu - x_{sm+a}) \tag{9a}$$

$$(m = 0, 1, \ldots;\ a = 1, 2, \ldots, s).$$

Pour abréger, nous posons

$$y_{m'} = x_{m'} + \tau_{m'} \qquad (m' = 1, 2, \ldots); \tag{9b}$$

$y_{m'}$ est l'instant de *début d'expédition* de la $m'^{\text{ième}}$ personne et en vertu de nos hypothèses, on a

$$y_1 \leqq y_2 \leqq y_3 \leqq \cdots, \tag{9c}$$

ce qu'on peut vérifier aisément à l'aide de la formule (9a).

En vue de calculer maintenant, pour $c \geqq s$, le nombre désigné plus haut par N_c, marquons sur l'axe des temps les points $y_{sm+1}, \ldots, y_{sm+s}$ et x_{sm+c+1}, c'est-à-dire, les débuts d'expédition de la $sm+1, \ldots, (sm+s)^{\text{ième}}$ et l'arrivée de la $(sm+c+1)^{\text{ième}}$ personne. Afin que, dans un cas particulier (3), la $(sm+c+1)^{\text{ième}}$ personne compte pour le nombre N_c, il faut évidemment qu'on ait

$$(10a) \qquad y_{sm+1}+t_1 > x_{sm+c+1}, \qquad \ldots, \qquad y_{sm+s}+t_s > x_{sm+c+1}.$$

Il résulte de la première des inégalités qu'au moment x_{sm+c+1}, au moins les $sm+1, \ldots, (sm+c)^{\text{ième}}$ personnes, donc au moins c personnes, se trouvent devant les guichets. En outre, l'inégalité

$$(10b) \qquad y_{sm+1} < x_{sm+c+1}$$

fournit la condition pour que, à cet instant, la $sm^{\text{ième}}$ personne soit déjà partie [ou ce qui revient au même, que l'expédition de la $(sm+s)^{\text{ième}}$ personne ait déjà commencé].

Introduisons maintenant la notation

$$(11) \qquad \sigma_{sm+c+a}(x;\, t_1, \ldots, t_s) = \prod_{i=1}^{s} \mathbf{s}(y_{sm+a-1+i}+t_i - x_{sm+a+c})$$

et formons l'expression

$$(12) \quad \sigma_{sm+c+1}(x;\, t_1, \ldots, t_s) - \sigma_{sm+c+1}(x;\, t_1, \ldots, t_{s-1}, 0)$$
$$= \prod_{i=1}^{s-1} \mathbf{s}(y_{sm+i}+t_i - x_{sm+c+1})\big(\mathbf{s}(y_{sm+s}+t_s - x_{sm+c+1}) - \mathbf{s}(y_{sm+s} - x_{sm+c+1})\big);$$

on voit immédiatement que cette expression est égale à 1 si toutes les inégalités (10a) et (10b) sont satisfaites, et égale à 0 dans le cas contraire. En désignant par $[x]$ le plus grand entier $\leqq x$, on a donc

$$N_c = \sum_{a=1}^{s} \sum_{m=0}^{n'} \big(\sigma_{sm+c+a}(x;\, t_1, \ldots, t_s) - \sigma_{sm+c+a}(x;\, t_1, \ldots, t_{s-1}, 0)\big),$$

où

$$n' = \left[\frac{n-a-c}{s}\right],$$

et en introduisant ceci dans les équations ($5a$) et ($5b$), on obtient

$$p_c(t_1, \ldots, t_s; \eta) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_a \sum_m \left(\overline{\sigma_{sm+c+a}(x; t_1, \ldots, t_s)} - \overline{\sigma_{sm+c+a}(x; t_1, \ldots, t_{s-1}, 0)} \right),$$

où la moyenne $\bar{\sigma}$ doit être prise par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$.

Dans la dernière formule, nous pourrons nous contenter de prendre la somme $\sum\limits_m$ pour $a = 1$, c'est-à-dire, pour les seules $(sm + c + 1)^{\text{ièmes}}$ personnes, ce qui n'entraîne qu'une erreur de l'ordre de $\frac{1}{n}$ et ne modifie donc pas p_c; en supposant en outre, pour simplifier nos formules, que $n \equiv c + 1$ (mod. s), nous obtenons

$$(13) \quad \begin{cases} p_c(t_1, \ldots, t_s; \eta) \\ \quad = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{s}{n} \sum\limits_{m=0}^{\frac{n-1-c}{s}} \left(\overline{\sigma_{sm+c+1}(x; t_1, \ldots, t_s)} - \overline{\sigma_{sm+c+1}(x; t_1, \ldots, t_{s-1}, 0)} \right) \\ \qquad\qquad (c = s, s+1, \ldots). \end{cases}$$

La résolution de notre problème nécessite donc le calcul des intégrales n uples

$$\overline{\sigma_{sm+c+1}(x; t_1, \ldots, t_s)} = \overline{\prod_{i=1}^{s} \mathbf{s}(y_{sm+i} + t_i - x_{sm+c+1})},$$

que nous allons réduire au calcul plus facilement abordable des intégrales

$$(14) \qquad i_{sm+c+1}(t_1, \ldots, t_s) = \overline{\prod_{i=1}^{s} \mathbf{s}(x_{sm+c+1} - y_{sm+i} - t_i)}.$$

En utilisant l'équation ($6c$), on obtient pour le produit (11)

$$(15) \quad \sigma_{sm+c+1}(x; t_1, \ldots, t_s) = \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \mathbf{s}(x_{sm+c+1} - y_{sm+i} - t_i)\right)$$
$$= (-1)^s \prod_{i=1}^{s} \mathbf{s}(x_{sm+c+1} - y_{sm+i} - t_i)$$
$$+ (-1)^{s-1} \sum_{k=1}^{s} \prod_{i \neq k}' \mathbf{s}(x_{sm+c+1} - y_{sm+i} - t_i) + \ldots + 1,$$

et dans ceux parmi les produits du dernier développement qui contiennent moins de s facteurs, nous allons intercaler des facteurs supplémentaires sans en modifier la valeur. Puisque [*voir* l'équ. (9c)] $-y_{sm+i-1} \geqq -y_{sm+i}$, on a évidemment

$$\begin{aligned}&\mathbf{s}(x_{sm+c+1}-y_{sm+\varkappa}-t_\varkappa)\\ &\quad=\mathbf{s}(x_{sm+c+1}-y_{sm+\varkappa-1}-t_\varkappa)\,\mathbf{s}(x_{sm+c+1}-y_{sm+\varkappa}-t_\varkappa),\end{aligned}$$

et plus généralement

$$(16)\quad \begin{aligned}&\mathbf{s}(x_{sm+c+1}-y_{sm+i}-t_i)\,\mathbf{s}(x_{sm+c+1}-y_{sm+\varkappa}-t_\varkappa)\\ &\quad=\mathbf{s}(x_{sm+c+1}-y_{sm+i}-t_i)\prod_{\nu=i+1}^{\varkappa}\mathbf{s}(x_{sm+i+1}-y_{sm+\nu}-t_\varkappa)\qquad\text{pour } i<\varkappa\leqq s.\end{aligned}$$

En remplissant, comme dans le schéma (16), tous les vides dans les facteurs des produits du développement (15) et en prenant ensuite la moyenne par rapport aux variables $x_\varkappa$, on obtient avec la notation (14)

$$(17)\quad \begin{aligned}&\overline{\sigma_{sm+c+1}(x;\,t_1,\,\ldots,\,t_s)}-\overline{\sigma_{sm+c+1}(x;\,t_1,\,\ldots,\,t_{s-1},\,0)}\\ &\quad=\sum_{\nu=0}^{s-1}(-1)^{\nu-1}\sum_{1',\ldots,\nu'}\Big(i_{sm+c+1}(t_{1'},\,\ldots,\,t_{1'},\,t_{2'},\,\ldots,\,t_{2'},\,\ldots,\,t_{\nu'},\,t_s,\,\ldots,\,t_s)\\ &\qquad\qquad-i_{sm+c+1}\,i\,(t_{1'},\,\ldots,\,t_{1'},\,t_{2'},\,\ldots,\,t_{2'},\,\ldots,\,t_{\nu'},\,0,\,\ldots,\,0)\Big);\end{aligned}$$

ici, la somme intérieure doit être étendue à toutes les combinaisons ν à ν, écrites en ordre ascendant, des indices $1, \ldots, s-1$, et les arguments $t_{1'}, t_{2'}, \ldots, t_s$ (ou 0) doivent respectivement être posés $1'$, $2'-1'$, $\ldots$, $s-\nu'$ fois.

En introduisant la formule (17) dans l'équation (13) et en posant

$$(18)\quad \begin{aligned}\mathfrak{J}_c(t_1,\,\ldots,\,t_s;\,\eta)&=\lim_{n\to\infty}\frac{s}{n}\sum_{m=0}^{\frac{n-1-c}{s}}i_{sm+1+c}(t_1,\,\ldots,\,t_s)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{s}{n}\sum_{m=0}^{\frac{n-1-c}{s}}\overline{\prod_{i=1}^{s}\mathbf{s}(x_{sm+c+1}-y_{sm+i}-t_i)},\end{aligned}$$

on obtient enfin

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} p_c(t_1, \ldots, t_s; \eta) = \sum_{\nu=0}^{s-1} (-1)^{\nu-1} \sum_{1', \ldots, \nu'} \Big(& \mathcal{J}_c(t_{1'}, \ldots, t_{1'}, \ldots, t_{\nu'}, t_s, \ldots, t_s) \\ & - \mathcal{J}_c(t_{1'}, \ldots, t_{1'}, \ldots, t_{\nu'}, 0, \ldots, 0)\Big) \qquad (c = s, s+1, \ldots) \end{aligned}\right.$$

et ici, il faut sommer de la même manière que dans la formule (17).

La dernière formule montre que notre problème revient dans sa partie essentielle au calcul des expressions (18). Avant d'aborder ce calcul, montrons que les probabilités $p_0, p_1, \ldots, p_{s-1}$ qui nous manquent encore peuvent être exprimées à l'aide de la fonction $\mathcal{J}_s(t_1, \ldots, t_s; \eta)$. Pour obtenir d'abord p_0, notons que la $(sm + s + 1)^{\text{ième}}$ personne trouvera les guichets non occupés si son arrivée est postérieure aux moments de départ $y_{sm+1} + 1, \ldots, y_{sm+s} + 1$ des s personnes qui la précèdent. Le produit

$$\prod_{i=1}^{s} \mathbf{s}(x_{sm+s+1} - y_{sm+i} - 1)$$

sera égal à 1 dans ce cas, et égal à 0 dans le cas contraire; donc, la limite, pour n tendant vers l'infini, de la moyenne (par rapport aux variables $x_\varkappa$ et aux indices m) de ce produit sera égale à p_0, ce qui nous donne [*voir* l'équ. (18)]

$$(20a)\qquad p_0(\eta) = \mathcal{J}_s(1, \ldots, 1; \eta).$$

De manière analogue, l'étude de l'expression

$$\prod_{i=1}^{s-1} \mathbf{s}(x_{sm+s+1} - y_{sm+i} - 1)\big(\mathbf{s}(y_{sm+s} + t_1 - x_{sm+s+1}) - \mathbf{s}(y_{sm+s} - x_{sm+s+1})\big)$$

conduit à la formule

$$p_1(t_1; \eta) = \mathcal{J}_s(1, \ldots, 1, 0; \eta) - \mathcal{J}_s(1, \ldots, 1, t_1; \eta)$$

et de manière générale, on obtient la formule

$$(20b)\quad \left\{\begin{aligned} p_c(t_1, \ldots, t_c; \eta) = \sum_{\nu=0}^{c-1} (-1)^{\nu-1} & \sum_{1' \ldots \nu'} \\ \times \Big(& \mathcal{J}_s(1, \ldots, 1, t_{1'}, \ldots, t_{1'}, \ldots, t_{\nu'}, t_c, \ldots, t_c; \eta) \\ & - \mathcal{J}_s(1, \ldots, 1, t_{1'}, \ldots, t_{1'}, \ldots, t_{\nu'}, 0, \ldots, 0; \eta)\Big) \\ & (c = 1, 2, \ldots, s-1), \end{aligned}\right.$$

où la somme intérieure doit être étendue à toutes les combinaisons ν à ν, écrites en ordre ascendant, des indices $1, \ldots, c-1$, et où les arguments $1, t_{1'}, t_{2'}, \ldots, t_{c}$ (ou 0) doivent respectivement être posés $s-c$, $1'$, $2'-1'$, $\ldots$, $c-\nu'$ fois. Ainsi, notre problème est ramené aux fonctions $\mathfrak{J}_c(t_\varkappa;\, \eta)$ [équ. (18)] dont la signification, en tant que probabilités, est évidente.

3. Calcul des valeurs moyennes (14). — De la formule de définition (5*a*) des valeurs moyennes, on tire

$$
\begin{aligned}
(21)\qquad & \overline{\prod_{i=1}^{s} \mathbf{s}(x_{sm+c+1}-y_{sm+i}-t_i)} \\
&= \frac{n!}{\mathrm{T}^n}\int_0^{\mathrm{T}} dx_1 \ldots \int_{x_{n-1}}^{\mathrm{T}} \prod_1^s \mathbf{s}(x_{sm+c+1}-y_{sm+i}-t_i)\, dx_n \\
&= \frac{n!}{\mathrm{T}^n}\int_0^{\mathrm{T}} dx_1 \ldots \int_{x_{sm+c}}^{\mathrm{T}} \prod_1^s \mathbf{s}(x_{sm+c+1}-y_{sm+i}-t_i) \\
&\quad \times \frac{(\mathrm{T}-x_{sm+c+1})^{n-sm-c-1}}{(n-sm-c-1)!}\, dx^{n-sm-c-1},
\end{aligned}
$$

la dernière formule résultant du fait que la fonction $\prod_1^s$ ne dépend pas des variables $x_{sm+c+2}, \ldots, x_n$.

Afin de pouvoir représenter maintenant tous les facteurs de la dernière fonction à intégrer sous forme d'intégrales *de Fourier*, nous procédons de la manière suivante.

Grâce aux formules

$$
\begin{aligned}
(22)\qquad \mathbf{s}\big(b-\operatorname*{Max^+}_{\nu=1,\ldots,n}(a_\nu)\big) &= \mathbf{s}\big(b-\mathrm{Max}(0, a_1, \ldots, a_n)\big) \\
&= \mathbf{s}\big(b+\mathrm{Min}(0, -a_1, \ldots, -a_n)\big) \\
&= \mathbf{s}\,\mathrm{Min}(b, b-a_1, \ldots, b-a_n) = \mathbf{s}(b)\prod_{\nu=1}^{n}\mathbf{s}(b-a_\nu),
\end{aligned}
$$

on tire des équations (9*b*) et (9*a*)

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{s}(x_{sm+c+1}-y_{sm+i}-t_i) \\
&\quad = \mathbf{s}\big(x_{sm+c+1}-x_{sm+i}-t_i-\operatorname*{Max^+}_{\nu=0,\ldots,m-1}(x_{s\nu+i}+m-\nu-x_{sm+i})\big) \\
&\quad = \prod_{\nu=0}^{m}\mathbf{s}\big(x_{sm+c+1}-x_{s\nu+i}-t_i-(m-\nu)\big);
\end{aligned}
$$

ensuite, la formule (6*b*) nous fournit la représentation suivante

$$(23)\qquad \prod_{l=1}^{s} \mathbf{s}(x_{sm+c+1} - y_{sm+l} - t_l) = \prod_{l=1}^{s}\prod_{\nu=0}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{s\nu+l}} \frac{e^{q_{s\nu+l}(x_{sm+c+1}-x_{s\nu+l}-(m-\nu)-t_l)}}{q_{s\nu+l}}\, dq_{s\nu+l},$$

qui peut évidemment être écrite aussi sous forme d'une intégrale multiple. En introduisant les formules (23) et

$$(24)\qquad \frac{(T - x_{sm+c+1})^{n-sm-c-1}}{(n-sm-c-1)!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} \frac{e^{p(T-x_{sm+c+1})}}{p^{n-sm-c}}\, dp \qquad (T \geqq x_{sm+c+1}),$$

dans le dernier membre de l'équation (21), nous obtenons enfin

$$(25)\qquad \prod_{l=1}^{s} \mathbf{s}(x_{sm+c+1} - y_{sm+l} - t_l) = \frac{n!}{T^n}\int_0^T dx_1 \ldots \int_{x_{sm+c}}^{T} dx_{sm+c+1} \frac{1}{(2\pi i)^{sm+s+1}}$$
$$\times \int_{C_p}\int_{C_1}\ldots\int_{C_{sm+s}} \exp\Bigg[p(T - x_{sm+c+1})$$
$$+ \sum_{l=1}^{s}\sum_{\nu=0}^{m} q_{s\nu+l}\big(x_{sm+c+1} - x_{s\nu+l} - (m-\nu) - t_l\big)\Bigg] \frac{dp\, dq_1 \ldots dq_{sm+s}}{p^{n-sm-c}\prod_{\nu=1}^{sm+s} q_\nu}.$$

En intervertissant ensuite l'ordre des intégrations réelles et complexes et en intégrant par rapport à dx_{sm+c+1}, on a

$$(26)\qquad \int_{x_{sm+c}}^{T} \exp\left[x_{sm+c+1}\left(\sum_{\nu=1}^{sm+s} q_\nu - p\right)\right] dx_{sm+c+1}$$
$$= \frac{\exp\left[x_{sm+c}\left(\sum_{1}^{sm+s} q_\nu - p\right)\right] - \exp\left[T\left(\sum_{1}^{sm+s} q_\nu - p\right)\right]}{p - \sum_{1}^{sm+s} q_\nu}$$

et en traçant ici le chemin d'intégration [*voir* la note (²)] de manière qu'on ait

$$(27a)\qquad R\left(p-\sum_{\nu=1}^{sm+s} q_\nu\right)>0 \qquad \text{sur } C_p,$$

on obtient que l'opération $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_p}\dots\frac{e^{p\tau}\,dp}{p^{n-sm-c}}$, indiquée dans l'équation (25), annule le second terme du numérateur de (26). Ainsi, l'opération $\int_{x_{sm+c}}^{T}\dots dx_{sm+c+1}$ ajoute à la fonction à intégrer de l'expression (25) un facteur $\frac{1}{p-\sum_{1}^{sm+s} q_\nu}$ et y remplace x_{sm+c+1} par x_{sm+c}. De la même manière, l'opération $\int_{x_{sm+s}}^{T} dx_{sm+s+1}\dots\int_{x_{sm+c}}^{T}\dots dx_{sm+c+1}$ ajoute à cette fonction le facteur $\frac{1}{\left(p-\sum_{1}^{sm+s} q_\nu\right)^{c+1-s}}$, tandis que dans le facteur $\exp[\dots]$, x_{sm+c+1} est remplacé par x_{sm+s}.

En effectuant ensuite les $sm+s$ autres intégrations réelles, tenons compte de ce que des inégalités (27 a) et

$$R(q_\nu)>0 \quad (\nu=1,\ \dots,\ sm+s) \qquad \text{sur } C_\nu$$

résultent aussi les inégalités suivantes :

$$(27b)\qquad R\left(p-\sum_{\nu=1}^{sm+s-1} q_\nu\right)>0,\qquad \dots,\qquad R(p-q_1)>0 \qquad \text{sur } C_p;$$

on obtient alors

$$\overline{\prod_{i=1}^{s} \mathbf{s}(x_{sm+c+1}-y_{sm+i}-t_i)}$$

$$=\frac{n!}{T^n}\frac{1}{(2\pi i)^{sm+s+1}}\int_{C_p}\int_{C_1}\dots\int_{C_{sm+s}}\exp\left[pT-\sum_{i=1}^{s} t_i\sum_{\nu=0}^{m} q_{s\nu+i}-\sum_{i=1}^{s}\sum_{\nu=0}^{m}(m-\nu)q_{s\nu+i}\right]$$

$$\times\frac{dp\,dq_1\dots dq_{sm+s}}{\left(p-\sum_{1}^{sm+s} q_\nu\right)^{c+1-s}\left(p-\sum_{1}^{sm+s-1} q_\nu\right)\dots(p-q_1)\,p^{n-sm-c+1}\prod_{\nu=1}^{sm+s} q_\nu}.$$

Nous remplacerons maintenant les q_ν par de nouvelles variables d'intégration $p_0, \ldots, p_{sm+s-1}$ en vertu des équations

$$(28\,a)\qquad p_0 = p - \sum_{\nu=1}^{sm+s} q_\nu,\qquad p_1 = p - \sum_{\nu=1}^{sm+s-1} q_\nu,\qquad \ldots,\qquad p_{sm+s-1} = p - q_1$$

ou

$$(28\,b)\qquad q_{s\nu+i} = p_{s(m-\nu+1)+1-i} - p_{s(m-\nu+1)-i}\qquad (i=1,\ldots,s;\ \nu=0,\ldots,m;\ p_{sm+s}\equiv p)$$

qui transforment l'intégrale

$$\int_{C_1}\cdots\int_{C_{sm+s}}\cdots dq_1\ldots dq_{sm+s}\quad\text{en}\quad\int_{C_0}\cdots\int_{C_{sm+s-1}}\cdots dp_0\ldots dp_{sm+s-1}$$

En posant, pour abréger,

$$(29)\qquad S_i = \sum_{\nu=0}^{m} p_{s\nu+i}\quad (i=0,1,\ldots,s),\qquad \text{d'où}\quad S_s = S_0 + p - p_0,$$

on tire des équations $(28\,b)$

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{\nu=0}^{m} q_{s\nu+i} = S_{s+1-i} - S_{s-i}\qquad (i=1,\ldots,s),\\ &\sum_{i=1}^{s} t_i \sum_{\nu=0}^{m} q_{s\nu+i} = t_1(p-p_0) - \sum_{i=1}^{s-1}(t_i - t_{i+1})(S_{s-i} - S_0),\\ &\sum_{i=1}^{s}\sum_{\nu=0}^{m}(m-\nu)q_{s\nu+i} = \sum_{\nu=0}^{m}(m-\nu)(p_{s(m-\nu+1)} - p_{s(m-\nu)}) = mp - S_0 + p_0.\end{aligned}\right.$$

Avec les relations $(28\,b)$ et (30), la dernière intégrale prend la forme

$$\begin{aligned}\frac{n!}{T^n}\frac{1}{(2\pi i)^{sm+s-1}}\int_{C_p}\int_{C_0}\cdots\int_{C_{sm+s-1}}\exp\Big[&p(T-m-t_1) - p_0(1-t_1)\\ &+ S_0 + \sum_{i=1}^{s-1}(t_i - t_{i+1})(S_{s-i} - S_0)\Big]\end{aligned}$$

$$\times\frac{dp\,dp_0\ldots dp_{sm+s-1}}{p^{n+1-sm-r}p_0^{c-s}(p_1-p_0)(p_2-p_1)\ldots(p-p_{sm+s-1})\prod_{\nu=0}^{sm+s-1}p_\nu}$$

et en introduisant ici la formule

$$\frac{e^{-p_0(1-t_1)}}{p_0^{c-s}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{e^{-q(1-t_1)}}{q^{c-s}(p_0-q)}\,dq \qquad (c \geqq s;\ t_1 \leqq 1;\ \mathrm{R}(p_0-q)>0)$$

et en posant

$$(31)\qquad t'_i = t_i - t_{i+1}\ (\geqq 0) \qquad (i=1,\ \ldots,\ s-1)$$

et

$$(32)\qquad g_m(p,\ q;\ t'_1,\ \ldots,\ t'_{s-1})$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^{sm}}\int_{C_0}\cdots\int_{C_{sm-1}} \exp\left[\sum_{\nu=0}^{m-1} p_{s\nu} + \sum_{i=1}^{s-1} t'_i\left(\sum_{\nu=0}^{m-1} p_{s\nu+s-i} - \sum_{\nu=0}^{m-1} p_{s\nu}\right)\right]$$
$$\times \frac{dp_0\ldots dp_{sm-1}}{(p_0-q)(p_1-p_0)\ldots(p-p_{sm-1})\prod_{\nu=0}^{sm-1} p_\nu},$$

nous obtenons enfin

$$(33)\qquad \overline{\prod_{i=1}^{s} \mathrm{s}(x_{sm+c+1} - y_{sm+i} - t_i)}$$
$$= \frac{n!}{\mathrm{T}^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{C_q} \frac{e^{p(\mathrm{T}-m-t_1)-q(1-t_1)}}{p^{n+1-sm-c}\,q^{c-s}}\, g_{m+1}(p,\ q\ ;\ t'_1,\ \ldots,\ t'_s)\,dp\,dq.$$

Finalement, nous utilisons la fonction génératrice des intégrales multiples g_m, la série

$$(34)\qquad \mathcal{G}(p,\ q,\ z;\ t'_1,\ \ldots,\ t'_{s-1}) = \frac{1}{p-q} + \sum_{m=1}^{\infty} z^{sm} g_m(p,\ q,\ t'_\kappa),$$

qui converge pour $|z|$ suffisamment petit; $\mathcal{G}$ satisfait à une équation intégrale linéaire non homogène, facile à établir, et peut être calculée explicitement à l'aide de celle-ci (1).

Exprimons maintenant dans l'équation (33) le facteur g_{m+1} comme

(1) F. Pollaczek, *Résolution de certaines questions intégrales linéaires de deuxième espèce*, [équ. (24), (31), (38), (39), (40)], *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 24, 1945, p. 73-94. Les notations $\varphi(x)$, x, ξ_ν, q, n, $t_i(i=1,\ldots,n-1)$, t_n de ce Mémoire correspondent respectivement à $\mathcal{G}, p, p_\nu, q, s, t'_i(i=1,\ldots,s-1)$, $1-\sum_1^{s-1} t'_i$.

résidu de $\frac{\mathcal{G}(p,\,q,\,z)}{z^{sm+s}}$ au point $z=0$; cette formule prend alors la forme

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\overline{\prod_{l=1}^{s} \mathbf{s}(x_{sm+c+l} - y_{sm+l} - t_l)} \\
&= \frac{n!}{\mathrm{T}^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{\mathrm{C}_p}\int_{\mathrm{C}_q}\int_{\mathrm{K}_z} \frac{e^{p(\mathrm{T}-t_1)-q(1-t_1)}}{p^{n+1-c}\,q^{c-1}\,z^{s+1}}\left(\frac{e^{-p}p^s}{z^s}\right)^m \mathcal{G}(p,q,z;t'_\varkappa)\,dp\,dq\,dz \\
&\qquad\qquad (c \geqq s;\quad m = 0,\,1,\,\ldots),
\end{aligned}
\right.
$$

où K_z est un petit cercle autour de l'origine du plan des z.

Dans cette intégrale, $\mathcal{G}$ est donné par la formule (3)

$$
(36)\quad \mathcal{G}(p,q,z;t'_\varkappa) = \frac{pq^{s-1}}{q^s - z^s e^q}\,\frac{1}{\mathrm{M}_{11}}
\begin{vmatrix}
\frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-w_0} & \cdots & \frac{1}{p-w_{s-1}} \\
1 & 1 & \cdots & 1 \\
\frac{e^{q(1-t'_1)}}{q^{s-1}} & \frac{e^{w_0(1-t'_1)}}{w_0^{s-1}} & \cdots & \frac{e^{w_{s-1}(1-t'_1)}}{w_{s-1}^{s-1}} \\
\frac{e^{q\left(1-\sum_{i=1}^{2} t'_i\right)}}{q^{s-2}} & \frac{e^{w_0\left(1-\sum_{i=1}^{2} t'_i\right)}}{w_0^{s-2}} & \cdots & \frac{e^{w_{s-1}\left(1-\sum_{1}^{2} t'_i\right)}}{w_{s-1}^{s-2}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{e^{q\left(1-\sum_{1}^{s-1} t'_i\right)}}{q} & \frac{e^{w_0\left(1-\sum_{1}^{s-1} t'_i\right)}}{w_0} & \cdots & \frac{e^{w_{s-1}\left(1-\sum_{1}^{s-1} t'_i\right)}}{w_{s-1}}
\end{vmatrix},
$$

Ici, M_{11} désigne le mineur du premier élément $\frac{1}{p-q}$ du déterminant (36) et $w_0(z),\,\ldots,\,w_{s-1}(z)$ sont les s racines de l'équation

$$
(37)\qquad x^s - z^s e^x = 0 \qquad (\text{donc } w_\varkappa^s\,e^{-w_\varkappa} = z^s,\ \varkappa = 0,\,\ldots,\,s-1),
$$

qui sont régulières dans un voisinage de $z=0$; il est évident que pour $|z|$ suffisamment petit, l'équation (37) ne possède pas d'autres racines dans le demi-plan gauche des x.

Avant de continuer, nous remplaçons les deux premiers éléments de la première colonne du déterminant (36) respectivement par

$$
\frac{1}{p-q} - \frac{q^s - z^s e^q}{q^s(p-q)} = \frac{z^s e^q}{q^s(p-q)}
$$

et par

$$1 - \frac{q^s - z^s e^q}{q^s} = \frac{z^s e^q}{q^s};$$

la fonction qui résulte de $\mathcal{G}$ par cette modification, sera appelée $\mathcal{G}'(p, q, z)$.

En remplaçant dans l'équation (35), $\mathcal{G}$ par $\mathcal{G}'$, nous ne changeons pas la valeur du deuxième membre, car les parties de la fonction à intégrer qui sont respectivement proportionnelles à $\dfrac{q^s - z^s e^q}{q^s(p-q)}$ et à $\dfrac{q^s - z^s e^q}{q^s}$, sont nulles, l'une parce que $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{K_z} \frac{dz}{z^{sm+s+1}} = 0$ et l'autre parce que $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_q} \frac{e^{-q(1-t_1)}}{q^{r-s+1}}\, dq = 0$. Ensuite, nous multiplions les lignes du numérateur de $\mathcal{G}'$, à partir de la troisième, (et celles du dénominateur à partir de la deuxième) par z^s, et les colonnes respectivement par $\dfrac{q^s}{z^s} e^{q(t_1-1)}$, $e^{w_0 t_1}$, $\ldots$, $e^{w_{s-1} t_1}$ et remplaçons e^{w_i} selon l'équation (37) par $\dfrac{w_i^s}{z^s}$ $(\iota = 0, \ldots, s-1)$, et t'_i selon l'équation (31) par $t_i - t_{i+1}$. Ainsi nous obtenons pour $\mathcal{G}'$ l'expression

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{G}'(p, q, z) = \frac{p q^{-1} z^s e^{q(1-t_1)}}{q^s - z^s e^q} &\begin{vmatrix} \dfrac{e^{q t_1}}{p-q} & \dfrac{e^{w_0 t_1}}{p - w_0} & \ldots & \dfrac{e^{w_{s-1} t_1}}{p - w_{s-1}} \\ e^{q t_1} & e^{w_0 t_1} & \ldots & e^{w_{s-1} t_1} \\ q\, e^{q t_2} & w_0 e^{w_0 t_2} & \ldots & w_{s-1} e^{w_{s-1} t_2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ q^{s-1} e^{q t_s} & w_0^{s-1} e^{w_0 t_s} & \ldots & w_{s-1}^{s-1} e^{w_{s-1} t_s} \end{vmatrix} \\ &\times \left| w_\chi^\iota e^{w_\chi t_{\iota+1}} \right|^{-1}_{\iota, \chi = 0, \ldots, s-1}, \end{aligned}\right.$$

qui, en tant que fonction de q, est évidemment régulière pour $q = w_0(z), \ldots, w_{s-1}(z)$ et par conséquent, dans le demi-plan gauche des q; donc, dans l'intégrale (35), formée avec $\mathcal{G}'$ au lieu de $\mathcal{G}$, le chemin d'intégration C_q peut être remplacé par un petit cercle K_q autour de l'origine que nous choisissons de manière qu'on ait

$$(39)\qquad K_q < K_z, \quad \text{c'est-à-dire} \quad |q| < |z|.$$

4. Calcul des fonctions $\mathcal{J}_c(t_\chi; \eta)$ et des formules finales. — Pour obtenir $\mathcal{J}_c(t_\varkappa;\eta)$ [voir l'équ. (18)], il faut effectuer dans l'équation (35) l'opération $\frac{s}{n}\sum_{m=0}^{\frac{n-1-c}{s}}$, donc y remplacer $\left(\frac{e^{-p}p^s}{z^s}\right)^m$ par

$$(40)\quad \frac{s}{n}\sum_{m=0}^{\frac{n-1-c}{s}}\left(\frac{e^{-p}p^s}{z^s}\right)^m = -\frac{s}{n}\,\frac{\left(\frac{e^{-p}p^s}{z^s}\right)^{\frac{n+s-1-c}{s}}-1}{\frac{e^{-p}p^s}{z^s}-1}$$

$$= \frac{s}{n}\,\frac{e^{-p\frac{n-1-c}{s}}p^{n+s-1-c}z^{-n+c+1}}{p^s-z^s e^p} - \frac{s}{n}\,\frac{z^s e^p}{p^s-z^s e^p}.$$

Mais le second terme de la dernière expression peut être supprimé, car la partie de la fonction à intégrer modifiée de (35) qui lui correspond est régulière au voisinage de $z=0$ de sorte que pour cette partie, $\int_{K_z}\cdots dz$ s'annule. Par conséquent, on déduit des équations (18), (35), (40), en utilisant $\mathcal{G}'$ au lieu de $\mathcal{G}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_c(t_\varkappa;\eta) = {} & \lim_{n\to\infty}\frac{s}{n}\,\frac{n!}{T^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{K_q}\int_{K_z}\frac{\exp p\left(T-\frac{n-1-c}{s}-t_1\right)}{q^{c-s+1}z^{n-c}}\,\frac{p^{s-1}}{p^s-z^s e^p} \\ & \times\frac{1}{q^s-z^s e^q}\begin{vmatrix}\frac{e^{qt_1}}{p-q} & \cdots & \frac{e^{w_\varkappa t_1}}{p-w_\varkappa} & \cdots \\ e^{qt_1} & \cdots & e^{w_\varkappa t_1} & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ q^i e^{qt_{i+1}} & \cdots & w_\varkappa^i e^{w t_{\varkappa i+1}} & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\end{vmatrix}_{i,\varkappa=0,\ldots,s-1} \\ & \times\left|w_\varkappa^i e^{w t_{i\varkappa+1}}\right|_{i,\varkappa=0,\ldots,s-1}^{-1}\,dp\,dq\,dz.\end{aligned}$$

Considérée en tant que fonction de p, la dernière fonction à intégrer tend exponentiellement vers zéro pour $R(p)$ tendant vers $-\infty$, car le coefficient

$$T-\frac{n-1-c}{s}-t_1=\frac{n}{s}\left(\frac{1}{\eta}-1\right)+\frac{c+1}{s}-t_1$$

est positif; par conséquent, $\int$ est égale aux résidus aux points $p=q$ et $p=w_0(z)$, ..., $w_{s-1}(z)$ seuls pôles qui se trouvent à gauche de C_p.

Mais l'intégrale $\int_{K_z}$, étendue au résidu en $p = q$, est proportionnelle à $\frac{1}{2\pi i}\int_{K_z} \frac{dz}{z^{n-c}(q^s - z^s e^q)^2}$, donc nulle en raison de (39); en calculant ensuite les résidus aux pôles de deuxième ordre $w_0(z), \ldots, w_{s-1}(z)$, qui sont tous égaux au résidu en $p = w_0(z)$, nous obtenons

$$(41) \quad \mathcal{J}_c(t_\varkappa;\eta) = \lim_{n\to\infty} \frac{s^2}{n} \frac{n!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{K_q}\int_{K_z} \frac{\exp w_0\left(T - \frac{n-1-c}{s}\right)}{q^{c-s+1} z^{n-c}(q^s - z^s e^q)} w_0^{s-1}$$
$$\times \left[\left(T - \frac{n-1-c}{s} - t_1\right) \frac{1}{w_0^s\left(1 - \frac{s}{w_0}\right)} \right.$$
$$\left. \times \left| q^i e^{q t_{i+1}} \ldots w_\varkappa^i e^{w_\varkappa t_{i+1}} \ldots \right|_{\substack{i=0,\ldots,s-1\\ \varkappa=1,\ldots,s-1}} + O(1) \right]$$
$$\times \left| w_\varkappa^i e^{w_\varkappa t_{i+1}} \right|^{-1}_{i,\varkappa=0,\ldots,s-1} dq\, dz,$$

où plusieurs termes de l'expression entre crochets qui ne dépendent pas de n et disparaîtront à la limite, ont été désignés par $O(1)$.

Posons maintenant

$$(42\,a) \qquad w_0 = s\eta z_0, \qquad \ldots, \qquad w_{s-1} = s\eta z_{s-1},$$

de sorte qu'on a [*voir* l'équ. (37)]

$$(42\,b) \qquad \begin{cases} z^s = w_0^s e^{-w_0} = (s\eta z_0)^s e^{-s\eta z_0} = \ldots = (s\eta z_{s-1})^s e^{-s\eta z_{s-1}}, \\ \dfrac{s\,dz}{z} = \left(\dfrac{s}{w_0} - 1\right) dw_0 = \left(\dfrac{1}{\eta z_0} - 1\right)\eta s\, dz_0 \end{cases}$$

et remplaçons, dans l'intégrale (41), les variables z et q par z_0 et $s\eta q$; ceci donne, compte tenu de l'équation (4)

$$(43) \quad \mathcal{J}_c(t_\varkappa; q) = \lim_{n\to\infty} s(1-\eta)\frac{n!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{K_q}\int_{K_{z_0}} \frac{e^{nz_0}}{z_0^{n+1}} \frac{z_0^{c+1}}{q^{c-s+1}} \frac{-1}{q^s - z_0^s e^{s\eta(q-z_0)}}$$
$$\times \left[\left| q^i e^{s\eta q t_{i+1}} \ldots z_\varkappa^i e^{s\eta z_\varkappa t_{i+1}} \ldots \right|_{\substack{i=0,\ldots,s-1\\ \varkappa=1,\ldots,s-1}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$
$$\times \left| z_\varkappa^i e^{s\eta z_\varkappa t_{i+1}} \right|^{-1}_{i,\varkappa=0,\ldots,s-1} dq\, dz_0.$$

Ici, les grandeurs $z_\varkappa(\eta z_0)$ [*voir* l'équ. (42 *b*)] sont les s solutions, régulières à l'origine des z_0, de l'équation

$$(44\,a) \qquad z_\varkappa^s e^{-s\eta z_\varkappa} = z_0^s e^{-s\eta z_0}$$

et l'on démontre facilement les inégalités suivantes :

$$(44\,b) \qquad |z_x(\eta z_0)| < z_0 \quad (x = 1, \ldots, s-1) \qquad \text{pour} \quad z_0 > 0.$$

La dérivée partielle du premier membre de l'équation $(44\,a)$ par rapport à z_x est $z_x^s e^{-s\eta z_x}\left(\frac{s}{z_x} - s\eta\right)$; cette expression ne s'annule que pour $z_x = \frac{1}{\eta}$, et les valeurs correspondantes de z_0, c'est-à-dire, les points de ramification des fonctions $z_x(\eta z_0)$, satisfont à l'équation

$$\eta^{-s} e^{-s} = z_0^s e^{-s\eta z_0} \qquad \text{ou} \qquad \frac{e^{\eta z_0 - 1}}{\eta z_0} = e^{\frac{2\pi i x'}{s}},$$

donc à l'équation $\left|\frac{e^{\eta z_0 - 1}}{\eta z_0}\right| = 1$.

Or, puisque $0 \leqq \eta < 1$, la courbe $\left|\frac{e^{\eta z_0 - 1}}{\eta z_0}\right| = 1$ (*voir* la figure 1) est évidemment située à l'extérieur du domaine D, de sorte que dans ce domaine, la fonction à intégrer de (43) n'est pas ramifiée mais tout au plus méromorphe. Mais $\mathcal{J}_c(t_x; \eta)$, étant une probabilité, est $o(1)$, de sorte que nous sommes en droit d'utiliser la formule (8) ce qui donne

$$(45\,a) \quad \mathcal{J}_c(t_x; \eta) = s(1-\eta)\frac{1}{2\pi i}\int_{K_q} \frac{1}{e^{s\eta(q-1)} - q^s}\left| q^i e^{s\eta q t_{i+1}} \ldots z_x^i e^{s\eta z_x t_{i+1}} \ldots \right|_{\substack{i=0,\ldots,s-1 \\ x=1,\ldots,s-1}}$$
$$\times \left| z^i e^{s\eta z_x t_{i+1}} \right|^{-1}_{i,x=0,\ldots,s-1} \frac{dq}{q^{c-s+1}} \qquad (c \geqq s);$$

ici, on a $z_0 = 1$, et les $z_x(\eta)$ $(x = 1, \ldots, s-1)$ sont, en vertu des équations $(44\,a)$ et $(44\,b)$, les $s-1$ racines de module < 1 de l'équation $z^s e^{s\eta(1-z)} = 1$, donc

$$|z_x(\eta)| < 1, \qquad z_x^s e^{s\eta(1-z_x)} = 1 \qquad (x = 1, \ldots, s-1).$$

Comme corollaire de la formule $(45\,a)$, nous obtenons le lemme suivant. Le déterminant

$$(46\,a)\begin{cases} \Delta = \left| z_x^i(z_0) e^{s z_x(z_0) t_{i+1}} \right|_{i,x=0,\ldots,s-1} \\ 1 \geqq t_1 \geqq \ldots \geqq t_s \geqq 0; \qquad z_x^s e^{-s z_x} = z_0^s e^{-s z_0} \qquad (x = 1, \ldots, s-1), \end{cases}$$

où les fonctions $z_x(z_0)$ sont régulières à l'origine, ne s'annule pas dans le domaine ouvert D′ [*voir* la figure (1)].

$$(46\,b)\qquad |z_0| < 1, \qquad \left|\frac{e^{z_0-1}}{z_0}\right| < 1,$$

sauf à l'origine (¹).

Nous introduisons maintenant la fonction génératrice des $\mathcal{J}_c(t_\varkappa;\eta)$ $(c \geqq s)$, la série

$$(47)\qquad \Phi(t_\varkappa;\eta,z) = \sum_{c=s}^{\infty} z^c \mathcal{J}_c(t_\varkappa;\eta),$$

qui, grâce à la formule (45 *a*), prend la forme

$$(48)\qquad \Phi(t_\varkappa;\eta,z) = \frac{s(1-\eta)z^s}{e^{s\eta(z-1)} - z^s}\left| z^i e^{s\eta z t_{i+1}} \;\ldots\; z_\varkappa^i e^{s\eta z_\varkappa t_{i+1}} \;\ldots \right|_{\substack{i=0,\ldots,s-1\\ \varkappa=1,\ldots,s-1}} \times \left| z_\varkappa^i(\eta) e^{s\eta z_\varkappa(\eta) t_{i+1}} \right|^{-1}_{i,\varkappa=0,\ldots,s-1}$$

Les formules (48) et (45 *a*) sont équivalentes; en particulier, (45 *a*) fournit pour la fonction $\mathcal{J}_s(t_\varkappa;\eta)$ qui figure dans nos formules (20 *a*) et (20 *b*) pour $p_0, \ldots, p_{s-1}$, l'expression

$$(49)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{J}_s(t_1,\ldots,t_s;\eta) = s(1-\eta)e^{s\eta}\left| z_\varkappa^i e^{s\eta z_\varkappa t_{i+1}} \right|_{i,\varkappa=1,\ldots,s-1} \cdot \left| z_\varkappa^i e^{s\eta z_\varkappa t_{i+1}} \right|^{-1}_{i,\varkappa=0,\ldots,s-1} \\ &\qquad\qquad (z_\varkappa = z_\varkappa(\eta)). \end{aligned} \right.$$

Ainsi, les probabilités $p_0, \ldots, p_{s-1}$ sont explicitement connues en vertu de (20 *a*), (20 *b*), (49), tandis que les formules (19), (47), (48) permettent d'établir la fonction génératrice des p_c pour $c \geqq s$. De (19) et (47), on tire la formule

$$(50)\qquad \begin{aligned} &\sum_{c=s}^{\infty} z^c p_c(t_1,\ldots,t_s;\eta) \\ &\quad = \sum_{\nu=0}^{s-1}(-1)^{\nu-1}\sum_{1',\ldots,\nu'}\Big(\Phi(t_{1'},\ldots,t_{1'},\ldots,t_{\nu'},t_s,\ldots,t_s) \\ &\qquad\qquad - \Phi(t_{1'},\ldots,t_{1'},\ldots,t_{\nu'},0,\ldots,0)\Big), \end{aligned}$$

(¹) Les indications données à la suite de l'équation (8) montrent d'abord que les s expressions $\frac{M_{i0}}{\Delta}$ (mineurs des éléments de la première colonne du déterminant, divisés par Δ) sont holomorphes dans le domaine D′. Comme pour des raisons de symétrie, le même vaut pour les autres colonnes, le déterminant $\left|\frac{M_{ik}}{\Delta}\right| = \frac{1}{\Delta}$ est holomorphe dans D′, ce qui entraîne le lemme.

où il faut sommer de la même manière que dans l'équation (17), et introduire pour Φ l'expression (48); ceci achève la résolution de notre problème.

II. — Esquisse d'une méthode basée sur des considérations de probabilité.

Nous recommençons maintenant l'étude de notre problème d'après une autre méthode que nous nous proposons de développer ici, autant que possible, sans recourir aux résultats établis dans ce qui précède.

Figurons-nous un grand nombre de dispositifs à s guichets auxquels des personnes accèdent à la fréquence ηs par unité de temps (c'est-à-dire, par durée d'expédition de chaque personne) et qui fonctionnent depuis très longtemps. Alors, la fraction de ceux parmi ces dispositifs devant lesquels, à un moment donné t, il se trouvera exactement c personnes dont les premières sont en cours d'expédition depuis tout au plus $t_1, t_2, \ldots, t_{c'}$ unités de temps, sera égale à $p_c(t_1, \ldots, t_{c'})$; nous avons posé ici

$$c' = \min(c, s) \tag{1}$$

et nous choisissons nos notations de telle sorte que $1 \geqq t_1 \geqq \ldots \geqq t_{c'} \geqq 0$.

Au moment $t + dt$, l'ensemble $p_c(t_1, \ldots, t_{c'})$ aura perdu $\eta s\, dt p_c$ « éléments » du fait de l'arrivée de nouvelles personnes pendant l'intervalle dt, et

$$p_c(t_1, \ldots, t_{c'}) - p_c(t_1 - dt, \ldots, t_{c'} - dt) \sim dt \sum_{\varkappa} \frac{\partial p_c}{\partial t_\varkappa}$$

éléments du fait de la prolongation des durées de certaines expéditions au-delà respectivement de $t_1, \ldots, t_{c'}$.

Par contre, cet ensemble aura été augmenté pendant l'intervalle dt de $\eta s\, dt p_{c-1}(t_1, \ldots, t_{(c-1)'})$ éléments du fait de nouvelles arrivées, et de

$$\begin{aligned}p_{c+1}(1, t_1 - dt, \ldots, t_{(c+1)'-1} - dt) - p_{c+1}(1 - dt, t_1 - dt, \ldots, t_{(c+1)'-1} - dt) \\ \sim dt \left.\frac{\partial p_{c+1}(t_0, t_1, \ldots)}{\partial t_0}\right|_{t_0 = 1}\end{aligned}$$

éléments en raison de la terminaison de certaines expéditions.

Selon le principe de l'équilibre statistique, ces pertes et gains doivent se compenser puisque les probabilités p_c ne varient pas en fonction du temps t. De cette manière, on obtient

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{c'} \frac{\partial p_c(t_1, \ldots, t_{c'})}{\partial t_\varkappa} \\ \qquad + \eta s p_c(t_1, \ldots, t_{c'}) - \eta s p_{c-1}(t_1, \ldots, t_{(c-1)'}) - p'_{c+1}(1, t_1, \ldots, t_{(c+1)'-1}) = 0, \\ \qquad\qquad (c = 0, 1, \ldots;\ 1 \geqq t_1 \geqq \ldots \geqq t_s \geqq 0), \end{array}\right.$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$(3)\quad \left.\frac{\partial p_c(t_0, t_1, \ldots)}{\partial t_0}\right|_{t_0=1} = p'_c(1, t_1, \ldots).$$

En introduisant maintenant la fonction génératrice des probabilités par

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{F}_s(t_\varkappa; z) = \mathcal{F}_s(t_1, \ldots, t_s; z) = \displaystyle\sum_{c=0}^{\infty} z^c p_c(t_1, \ldots, t_{c'}), \qquad |z| < 1, \\ \qquad 1 \geqq t_1 \geqq \ldots \geqq t_s \geqq 0, \end{array}\right.$$

on tire des équations (2) par un calcul formel l'équation aux dérivées partielles

$$(5)\quad \sum_{\varkappa=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{F}_s(t_1, \ldots, t_s; z)}{\partial t_\varkappa} + \eta s(1-z)\mathcal{F}_s(t_1, \ldots, t_s; z) - \frac{1}{z}\mathcal{F}'_s(1, t_1, \ldots, t_{s-1}; z) = 0.$$

La somme de toutes les probabilités $p_c(1, \ldots, 1)$ devant être égale à 1, on a ensuite

$$(6)\quad \lim_{z \to 1-0} \mathcal{F}_s(1, \ldots, 1; z) = 1.$$

Les probabilités $p_1(0)$, $p_2(t_1, 0)$ etc. étant évidemment nulles, on a en outre

$$(7)\quad p_c(t_1, \ldots, t_{c'}) = 0 \quad \text{pour} \quad t_{c'} = 0; \qquad c = 1, 2, \ldots.$$

Finalement, nous admettons l'existence des densités de probabilité

$$\frac{\partial^{c'} p_c(t_1, \ldots, t_{c'})}{\partial t_1 \ldots \partial t_{c'}} \qquad (c = 1, 2, \ldots),$$

ce qui entraîne, en raison de la signification des p_c, l'équation

$$(8a)\quad p_c(t_1, \ldots, t_{c'}) = \underbrace{\int \cdots \int}_{s} \frac{\partial^{c'} p_c(\tau_1, \ldots, \tau_{c'})}{\partial \tau_1 \ldots \partial \tau_{c'}} d\tau_1, \ldots, d\tau_{c'},$$

le domaine d'intégration S étant défini par les inégalités

$$(8\,b)\qquad t_i \geqq \tau_i \geqq 0, \qquad i = 1, \ldots, c'; \qquad \tau_1 \geqq \tau_2 \geqq \ldots \geqq \tau_{c'} \geqq 0 \qquad \text{(domaine S)}.$$

Selon (8 a), p_c peut être obtenu en intégrant une certaine fonction de densité dans le domaine (8 b) (intersection d'un parallélépipède et d'un simplex); de cette propriété, on tire facilement les équations

$$(9)\qquad \left.\frac{\partial p_c(t_1, \ldots, t_{c'})}{\partial t_i}\right|_{t_i = t_{i-1}} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, c';\ c = 2, 3, \ldots),$$

qui sont équivalentes aux formules (7), (8 a), (8 b), et dont nous ne nous servirons d'ailleurs que pour $c \leqq s - 1$.

Pour $s = 1$, on tire de (5), qui est alors une équation différentielle ordinaire, et des équations (6) et (7), par un calcul élémentaire, la solution

$$(10)\qquad \mathcal{F}_1(t_1; z) = (1 - \eta)\frac{e^{\eta(z-1)} - z\,e^{\eta t_1(z-1)}}{e^{\eta(z-1)} - z}.$$

Donc, pour $s = 1$, cette méthode fournit rapidement la fonction génératrice et par conséquent, les p_c. Pour $s \geqq 1$, nous allon effectuer dans l'équation (5) plusieurs opérations qui, pour une partie, ne pourront être légitimées qu'*a posteriori* et qui ont pour but d'étudier F_s comme fonction analytique de la variable complexe z.

Nous posons

$$(11)\qquad \gamma = s\eta(z - 1)$$

et remplaçons dans (5) les variables $t_\varkappa$ par $t_\varkappa - \tau$, où τ doit satisfaire à l'inégalité $0 \leqq \tau \leqq t_s$; on a ainsi

$$-\frac{\partial \mathcal{F}_s(t_1 - \tau, \ldots, t_s - \tau)}{\partial \tau} - \gamma \mathcal{F}_s(t_1 - \tau, \ldots, t_s - \tau)$$
$$= \frac{1}{z}\mathcal{F}'_s(1, t_1 - \tau, \ldots, t_{s-1} - \tau),$$

et, en effectuant ici l'intégration $\int_0^{t_s} \cdots e^{\gamma\tau}\,d\tau$, nous obtenons

$$(12)\qquad \mathcal{F}_s(t_1, \ldots, t_s) - e^{\gamma t_s}\mathcal{F}_s(t_1 - t_s, \ldots, t_{s-1} - t_s, 0)$$
$$= \frac{1}{z}\int_0^{t_s} e^{\gamma\tau}\mathcal{F}'_s(1, t_1 - \tau, \ldots, t_{s-1} - \tau)\,d\tau;$$

notons que dans cette équation, on a en vertu des formules (4) et (7)

$$(13)\quad e^{\gamma t_s}\mathcal{F}_s(t_1-t_s,\ \dots,\ t_{s-1}-t_s,\ 0)=e^{\gamma t_s}\sum_{c=0}^{s-1}z^c p_c(t_1-t_s,\ \dots,\ t_c-t_s).$$

Dérivons maintenant l'équation (12) par rapport à toutes les variables $t_\varkappa$ et posons

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^s\mathcal{F}(t_1,\ \dots,\ t_s)}{\partial t_1\ \dots\ \partial t_s}=\mathcal{F}^{(s)}(t_1,\ \dots,\ t_s),\\[2ex] \dfrac{\partial^{s-1}p_{s-1}(t_1,\ \dots,\ t_{s-1})}{\partial t_1\ \dots\ \partial t_{s-1}}=p_{s-1}^{(s-1)}(t_1,\ \dots,\ t_{s-1}),\\[2ex] \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{s-1}\frac{\partial}{\partial t_\varkappa}p_{s-1}^{(s-1)}(t_1,\ \dots,\ t_{s-1})=p_{s-1}^{[s-1]}(t_1,\ \dots,\ t_{s-1}); \end{array}\right.$$

nous obtenons ainsi, compte tenu de l'équation (13),

$$(15)\quad \begin{aligned}\mathcal{F}_s^{(s)}(t_1,\ \dots,\ t_s)=z^{s-1}\frac{\partial}{\partial t_s}e^{\gamma t_s}p_{s-1}^{(s-1)}(t_1-t_s,\ \dots,\ t_{s-1}-t_s)\\ +\frac{e^{\gamma t_s}}{z}\mathcal{F}_s^{(s)}(1,\ t_1-t_s,\ \dots,\ t_{s-1}-t_s).\end{aligned}$$

En posant ici $t_1=1$ et en utilisant les notations

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} f(t_s)=\dfrac{e^{\gamma t_s}}{z},\\[2ex] h(t_\varkappa)=z^s\big(\ \gamma p_{s-1}^{(s-1)}(1-t_s,\ t_2-t_s,\ \dots,\ t_{s-1}-t_s)\\ \qquad\qquad -p_{s-1}^{[s-1]}(1-t_s,\ t_2-t_s,\ \dots,\ t_{s-1}-t_s)\big), \end{array}\right.$$

on a ensuite

$$(17)\quad \mathcal{F}_s^{(s)}(1,\ t_2,\ \dots,\ t_s)=f(t_s)h(t_\varkappa)+f(t_s)\mathcal{F}_s^{(s)}(1,\ 1-t_s,\ t_2-t_s,\ \dots,\ t_{s-1}-t_s).$$

Dans cette équation, où la variable t_1 ne figure pas, les expressions

$$(18\,a)\qquad t_2^{\mathrm{S}}=1-t_s,\qquad t_3^{\mathrm{S}}=t_2-t_s,\qquad \dots,\qquad t_s^{\mathrm{S}}=t_{s-1}-t_s$$

déterminent une transformation linéaire (¹) des variables $t_2,\ \dots,\ t_s$

(¹) Géométriquement, la substitution (18) est caractérisée par le fait qu'elle transforme le simplex $(s-1)$ dimensionnel de sommets $(0,\ \dots,\ 0)$, $(1,\ 0,\ \dots,\ 0)$, $(1,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0)$, $\dots$, $(1,\ 1,\ \dots,\ 1)$ en lui-même, en permutant cycliquement ses hyperplans-frontières à $(s-2)$ dimensions.

qui peut être représentée sous forme matricielle par la formule

$$(18\,b)\qquad \left\{\begin{aligned} &\begin{pmatrix} t_2^{\mathrm{S}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_s^{\mathrm{S}} \end{pmatrix} = \mathrm{M}\begin{pmatrix} t_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\text{où}\quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & -1 \\ 0 & 0 & 1 & & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right.$$

On reconnaît aisément $\left(\text{par exemple en établissant l'équation caractéristique de M qui est } \frac{x^s-1}{x-1}=0\right)$ que $\mathrm{M}^s = \mathrm{E}_{s-1}$, E_{s-1} étant la matrice unité de degré $s-1$; par conséquent, la $s^{\text{ième}}$ puissance de la substitution linéaire (18) est l'identité, donc

$$(18\,c)\qquad t_2^{\mathrm{S}^s} = t_2, \qquad \dots, \qquad t_s^{\mathrm{S}^s} = t_s.$$

Avec les notations (18 a), l'équation (17) prend la forme

$$\mathcal{F}_s^{(s)}(1,\, t_\chi) = f(t_s)h(t_\chi) + f(t_s)\mathcal{F}_s^{(s)}(1,\, t_\chi^{\mathrm{S}}),$$

et effectuant ici i fois $(i=0,\,1,\,\dots,\,s-1)$ la substitution S, on obtient

$$\mathcal{F}_s^{(s)}(1,\, t_\chi^{\mathrm{S}^i}) = f(t_s^{\mathrm{S}^i})h(t_\chi^{\mathrm{S}^i}) + f(t_s^{\mathrm{S}^i})\mathcal{F}_s^{(s)}(1,\, t_\chi^{\mathrm{S}^{i+1}}) \qquad (i=0,\,1,\,\dots,\,s-1).$$

Ce sont s équations linéaires pour les s grandeurs $\mathcal{F}_s^{(s)}(1,\, t_\chi^{\mathrm{S}^i})$ [*voir* (18 c)] desquelles on déduit

$$(19)\quad \mathcal{F}_s^{(s)}(1,\, t_\chi) = (1 - f^{1+\mathrm{S}+\dots+\mathrm{S}^{s-1}})^{-1} \times (fh + f^{1+\mathrm{S}}h^{\mathrm{S}} + f^{1+\mathrm{S}+\mathrm{S}^2}h^{\mathrm{S}^2} + \dots + f^{1+\mathrm{S}+\dots+\mathrm{S}^{s-1}}h^{\mathrm{S}^{s-1}}).$$

En vue de calculer les expressions qui figurent ici, nous tirons des équations (18 a) les formules

$$t_s^{\mathrm{S}} = t_{s-1} - t_s, \qquad t_s^{\mathrm{S}^2} = t_{s-1}^{\mathrm{S}} - t_s^{\mathrm{S}} = t_{s-2} - t_{s-1}, \qquad \dots,$$
$$t_s^{\mathrm{S}^i} = t_{s-i} - t_{s-i+1}, \qquad \dots, \qquad t_s^{\mathrm{S}^{s-1}} = 1 - t_2,$$

grâce auxquelles [*voir* aussi (16) et (11)] nous obtenons

$$
(20\,a)\qquad \begin{cases} f(t_s)^{1+S+\ldots+S^{i-1}} = \dfrac{1}{z^i} e^{\gamma \sum_{0}^{i-1} t_\nu} = \dfrac{e^{\gamma t_{s-i+1}}}{z^i} & (i = 1, \ldots, s-1); \\[2ex] f(t_s)^{1+S+\ldots+S^{s-1}} = \dfrac{e^{\gamma}}{z^s} = \dfrac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s}, \end{cases}
$$

$$
(20\,b)\qquad h(t_\varkappa^{S^i}) = z^s\left(\gamma p_{s-1}^{(s-1)}(t_\varkappa^{S^{i+1}}) - p_{s-1}^{[s]}(t_\varkappa^{S^{i+1}})\right) \qquad (i = 0, \ldots, s-1).
$$

Avec ces expressions, l'équation (19) prend la forme

$$
(21)\qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_s^{(s)}(1, t_2, \ldots, t_s) = \dfrac{z^s}{z^s - e^{s\eta(z-1)}} \\[2ex] \qquad\qquad \times \displaystyle\sum_{i=0}^{s-1} z^{s-1-i} e^{s\eta(z-1)t_{s-i}}\left(s\eta(z-1)\, p_{s-1}^{(s-1)}(t_\varkappa^{S^{i+1}}) - p_{s-1}^{[s]}(t_\varkappa^{S^{i+1}})\right) \\[2ex] \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t_1 \equiv 1); \end{cases}
$$

donc, $\mathfrak{F}_s^{(s)}(1, t_2, \ldots, t_s)$ est égale à une forme linéaire des monomes $z^{\mu} e^{s\eta z t_\nu}$, divisée par la fonction

$$
(22)\qquad e^{s\eta(z-1)} - z^s.
$$

En vertu de l'équation (15), la fonction $\mathfrak{F}_s^{(s)}(t_1, \ldots, t_s)$ peut être exprimée de la même manière, et en posant

$$
(23)\qquad \begin{cases} \bar{t}_1 = t_1 - t_s, \quad \ldots, \quad \bar{t}_{s-1} = t_{s-1} - t_s; \\ \bar{t}_1^{S} = 1 - \bar{t}_{s-1}, \quad \bar{t}_2^{S} = \bar{t}_1 - \bar{t}_{s-1}, \quad \ldots, \quad \bar{t}_{s-1}^{S} = \bar{t}_{s-2} - \bar{t}_{s-1} \end{cases}
$$

on obtient au moyen de calculs simples

$$
\mathfrak{F}_s^{(s)}(t_1, \ldots, t_s) = \frac{z^s}{z^s - e^{s\eta(z-1)}} \sum_{i=0}^{s-1} z^{s-1-i} e^{\gamma t_{s-i}}\left(\gamma p_{s-1}^{(s-1)}\left(\bar{t}_\varkappa^{S^i}\right) - p_{s-1}^{[s]}\left(\bar{t}_\varkappa^{S^i}\right)\right),
$$

ou

$$
(24)\qquad \frac{\partial^s \mathfrak{F}_s(t_1, \ldots, t_s)}{\partial t_1 \ldots \partial t_s} = \frac{z^s}{z^s - e^{s\eta(z-1)}} \frac{\partial^s}{\partial t_1 \ldots \partial t_s}\left(\sum_{i=0}^{s-1} z^{s-1-i} e^{\gamma t_{s-i}} p_{s-1}\left(\bar{t}_\varkappa^{S^i}\right)\right).
$$

Avec la seule hypothèse que les fonctions $p_{s-1}^{(s-1)}(t_\varkappa)$ et $p_{s-1}^{[s]}(t_\varkappa)$ et par conséquent, le deuxième membre de l'équation (24), soient continues, on démontre à l'aide de (8 a) que non seulement $\mathcal{F}_s$ [équ. (6)] mais aussi $\mathcal{F}_s^{(s)}$ doit être borné dans le cercle $|z| \leqq 1$.

Donc, le numérateur du deuxième membre de l'équation (24) doit s'annuler pour les s zéros

$$(25) \qquad z_0 = 1; \qquad |z_\chi(\eta)| < 1, \qquad \chi = 1, \quad \ldots, \quad s-1$$

que la fonction (22) possède dans le cercle $|z| \leqq 1$, de sorte qu'on a

$$(26) \qquad \frac{\partial^s}{\partial t_1 \ldots \partial t_s} \sum_{i=0}^{s-1} z_\nu^{s-1-i} e^{s\eta(z_\nu-1)t_{s-i}} p_{i-1}\left(\overset{-S^i}{t_\chi}\right) = 0 \qquad (\nu = 0, \ldots, s-1);$$

pour $s = 2$, ces équations suffisent déjà pour calculer la fonction $\mathcal{F}_2(t_1, t_2; z)$.

On peut maintenant conjecturer que la fonction $\mathcal{F}_s(t_\chi; z)$ elle-même peut être représentée de manière analogue que sa dérivée $\mathcal{F}_s^{(s)}$ [équ. (24)]. Cette représentation devra avoir la forme

$$(27) \quad \mathcal{F}_s(t_\chi; z) = \frac{1}{e^{s\eta(z-1)} - z^s}\left[z^s \sum_{i=1}^{s} e^{s\eta(z-1)t_i} Q_{i-1}(t_\chi; z) + e^{s\eta(z-1)} P_{s-1}(t_\chi; z)\right]$$

où nous avons posé

$$(28) \qquad P_{s-1}(t_\chi; z) = \sum_{\nu=0}^{s-1} p_\nu(t_1, \ldots, t_\nu) z^\nu$$

et où les Q_{i-1} sont des polynomes en z de degré $i-1$, dont les $s-1$ premiers s'annulent pour $t_s = 0$, tandis que $Q_{s-1}(t_\chi; z)|_{t_s=0} = -P_{s-1}(t_\chi; z)$.

A l'aide de (27), le numérateur du premier membre de l'équation (5) devient une forme linéaire des $e^{s\eta(z-1)t_i}$ et de $e^{s\eta(z-1)}$ qui doit s'annuler identiquement en z. De là résultent s équations aux dérivées partielles entre les Q_{i-1} qui peuvent facilement être résolues à l'aide des équations (9), et l'expression (27) prend ainsi la forme

$$(29a) \quad \mathcal{F}_s(t_1, \ldots, t_s; z) = \frac{1}{e^{s\eta(z-1)} - z^s}\left(\sum_{i=1}^{s-1} z^i e^{s\eta(z-1)t_i}\left(P_{s-1}(t_\chi^{S^{s-i}}) - P_{s-1}\left(\overset{-S^{s-i}}{t_\chi}\right)\right) \right.$$
$$\left. - z^s e^{s\eta(z-1)t_s} P_{s-1}(\bar{t}_\chi) + e^{s\eta(z-1)} P_{s-1}(t_\chi)\right)$$

ou

$$
\begin{aligned}
(29\,b)\quad & \mathcal{F}_s(t_1, \ldots t_s; z) \\
& = \frac{1}{e^{s\eta(z-1)} - z^s}\left(z^s \sum_{l=1}^{s-1} e^{s\eta(z-1)t_l} \sum_{\nu=s-l}^{s-1} z^{\nu+l-s}\left(p_\nu(t_\chi^{S_s-l}) - p_\nu(\bar{t}_\chi^{S_s-l})\right)\right. \\
& \qquad \left. - z^s e^{s\eta(z-1)t_s} \sum_{\nu=0}^{s-1} z^\nu p_\nu(\bar{t}_\chi) + e^{s\eta(z-1)} \sum_{\nu=0}^{s-1} z^\nu p_\nu(t_\chi)\right).
\end{aligned}
$$

Le numérateur de la dernière expression doit s'annuler pour $z = 1$, $z_1(\eta)$, $\ldots$, $z_{s-1}(\eta)$ ce qui permet de déterminer $\mathcal{F}_3(t_\chi; z)$ au moyen de calculs étendus, mais pour $s > 3$, il nous manque encore une méthode facilement maniable pour établir les formules (19), (20 *a*), (20 *b*), (45 *a*), (49) de la première partie.