JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. MENDES

Sur les fonctions définies par un système d'équations aux dérivées partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 27 (1948), p. 177-204.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1948_9_27__177_0>

Sur les fonctions définies par un système d'équations aux dérivées partielles ;

Par M. MENDES.

Poincaré a étudié dans sa *Thèse* ([1]) les propriétés des fonctions intégrales d'une équation aux dérivées partielles. Nous nous proposons dans ce qui suit d'étendre ses résultats au cas d'un système d'équations.

Afin de rendre la plus rapide possible la comparaison de nos résultats avec ceux de Poincaré, nous utiliserons les notations de son mémoire, dont nous suivrons également l'ordre.

INTRODUCTION.

1. Généralités. — Soit le système en involution

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_r(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0. \end{array}\right.$$

les F étant des fonctions holomorphes de leurs arguments; les x sont les variables indépendantes, z la fonction inconnue, les p les dérivées partielles de z.

([1]) *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles.*

Si $z=z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en est une surface intégrale, son plan tangent au point (x_i, z) a pour équation

$$Z-z=\sum_{i=1}^{n} p_i(X_i-x_i),$$

et dépend de n paramètres p_i liés par les relations (1), où les x et z ont des valeurs fixes.

En suivant une marche parallèle à celle de Cauchy, on démontre facilement que, si l'on désigne par Δ le déterminant fonctionnel des fonctions F par rapport à r des variables p, par exemple $p_1, p_2, \ldots, p_r$, puis que l'on pose

$$P_{kl}=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_r)}{D(p_1, \ldots, p_{k-1}, p_l, p_{k+1}, \ldots, p_r)},$$

$$X_{ki}=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_r)}{D(p_1, \ldots, p_{k-1}, x_i, p_{k+1}, \ldots, p_r)},$$

$$Z_k=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_r)}{D(p_1, \ldots, p_{k-1}, z, p_{k+1}, \ldots, p_r)},$$

un déplacement le long de la caractéristique est défini par les relations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_l}{\displaystyle\sum_{k=1}^{r} P_{kl}\,dx_k}=\dfrac{dz}{\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\left\{\Delta p_k+\sum_{l=r+1}^{n} P_{kl}p_l\right\}dx_k}=\dfrac{-dp_i}{\displaystyle\sum_{k=1}^{r}(X_{ki}+p_iZ_k)\,dx_k}=\dfrac{1}{\Delta} \quad (^1) \\ \qquad\qquad\qquad (l=r+1, \ldots, n). \end{array}\right.$$

Le calcul précédent suppose la non-nullité de Δ pour l'élément considéré.

Ce système (2) constitue alors un système aux différentielles totales complètement intégrable, qui admet une solution bien déterminée répondant à des valeurs initiales données. Les caractéristiques dépendent de $2(n-r)+1$ paramètres arbitraires. Sur une caractéristique, z, les x et les p s'expriment ainsi en fonction de r variables auxiliaires $u_1, u_2, \ldots, u_r$ et des valeurs initiales x_i^0, z^0, p_i^0, et l'on démontre

(1) Ce système, mis sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles, a été utilisé par Saltykow (*Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 57).

qu'une surface intégrale s'obtient en prenant dans les expressions précédentes de z, des x et des p les valeurs initiales de ces variables fonctions de $n-r$ variables indépendantes satisfaisant identiquement aux conditions

$$F_k(x_i^0,\ z^0,\ p_i^0) \equiv 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

$$\partial z^0 - \sum_{i=1}^{n} p_i^0\, \partial x_i^0 = 0.$$

2. Dans le cas particulier où le système (1) est linéaire par rapport aux p, soit

$$F_k \equiv A_{k1} p_1 + A_{k2} p_2 + \ldots + A_{kn} p_n - B_k = 0,$$

on trouve immédiatement que les équations (2) relatives aux x_l et à z s'écrivent

$$dx_l = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{r} P_{kl}\, dx_k,$$

$$dz = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{r} | A_{11k} \ldots A_{1,k-1} B_{11} A_{1,k+1} \ldots A_{1r} |\, dx_k, \quad (^1)$$

et ne dépendent pas des p; on peut donc les intégrer à part et les multiplicités caractéristiques ne dépendent ici que de $n-r+1$ paramètres.

3. Revenons au cas général. Si tous les déterminants fonctionnels des F par rapport à r quelconques des p sont tous nuls, on fera une transformation de contact consistant à prendre pour nouvelles variables

$$x'_1 = x_1, \quad \ldots, \quad x'_{h-1} = x_{h-1}, \quad x'_h = p_h, \quad \ldots, \quad x'_r = p_r,$$
$$x'_{r+1} = x_{r+1}, \quad \ldots, \quad x'_n = x_n,$$
$$p'_1 = p_1, \quad \ldots, \quad p'_{h-1} = p_{h-1}, \quad p'_h = -x_h, \quad \ldots, \quad p'_r = -x_r,$$
$$p'_{r+1} = p_{r+1}, \quad \ldots, \quad p'_n = p_n,$$
$$z' = z - \sum_{q=h}^{r} p_q x_q.$$

(1) On n'a écrit que la première ligne du déterminant.

Le système (1) prend alors la forme

$$(1') \qquad F'_k(x'_1, \ldots, x'_n, z', p'_1, \ldots, p'_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

et l'on a

$$\frac{D(F'_1, F'_2, \ldots, F'_r)}{D(p'_1, p'_2, \ldots, p'_r)}$$
$$= \left| \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial p_{h-1}} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) \cdots - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_r} + p_r \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) \right| = \Delta_h.$$

Si ce déterminant est différent de zéro pour l'élément considéré, raisonnant sur le système (1′) comme on a raisonné sur le système (1), on voit que l'on obtient pour les équations des caractéristiques (qui sont les mêmes pour les deux systèmes) z', les x' et les p' en fonction de r variables $u_1, u_2, \ldots, u_r$ et des valeurs initiales et que l'intégrale s'obtient en prenant ces valeurs initiales fonctions de $n - r$ variables indépendantes vérifiant, en plus des équations (1′), la relation

$$\delta z'^0 - \sum p'^0_i \, \delta x'^0_i = 0.$$

Le seul cas où la méthode précédente se trouvera en défaut est donc celui où tous les déterminants tels que Δ ou Δ_h sont nuls pour l'élément considéré.

4. Les trois problèmes qui se posent relativement au système donné sont les suivants :

Problème I. — *Rechercher les intégrales holomorphes du système* (1).

Problème II. — *Intégrer le système aux différentielles* (2) *sous l'une des formes*

$$(3) \qquad \varphi_1 = K_1, \qquad \varphi_2 = K_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{2n-r+1} = K_{2n-r+1},$$

les φ étant des fonctions des x et des p et les K *des constantes arbitraires, ou*

$$(4) \quad x_{r+1} = \psi_{r+1}, \quad \ldots, \quad x_n = \psi_n, \quad z = \psi_{n+1}, \quad p_1 = \chi_1, \quad \ldots, \quad p_n = \chi_n,$$

les ψ et les χ étant des fonctions de $x_1, \ldots, x_r$ et de $2n - r + 1$ constantes arbitraires.

Problème III. — *Chercher l'intégrale du système* (1) *se réduisant identiquement à une fonction holomorphe donnée de* $x_1, \ldots, x_n$,

$$\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

quand r *autres fonctions holomorphes données en* $x_1, \ldots, x_n$

$$\theta_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \theta_r(x_1, \ldots, x_n)$$

sont égales à zéro.

Les relations

$$z = \beta, \quad \theta_1 = 0, \quad \ldots, \quad \theta_r = 0$$

permettant de tirer $z, x_1, \ldots, x_n$ en fonctions algébroïdes de $n - r$ variables auxiliaires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-r}$, ces fonctions s'annulant avec ces variables, sous la forme

$$z = \beta_1(\mu_1, \ldots, \mu_{n-r}), \quad x_i = \gamma_i(\mu_1, \ldots, \mu_{n-r}),$$

le problème III peut également s'énoncer

Trouver une intégrale du système (1) *qui se réduise identiquement à* β_1 *quand on y remplace* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

5. Équations linéaires. — Si les équations (1) sont linéaires aux p, les équations (2) relatives à z et aux x_i s'intégrant pour elles-mêmes, le problème II consiste à mettre la solution sous l'une des formes

$$\varphi_1 = K_1, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-r+1} = K_{n-r+1},$$

ou

$$x_{r+1} = \psi_{r+1}, \quad \ldots, \quad x_n = \psi_n, \quad z = \psi_{n+1}.$$

On trouvera alors l'intégrale demandée dans le problème III en substituant dans les fonctions φ, $\beta_1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ à la place de $z, x_1, \ldots, x_n$, ce qui donnera à ces fonction φ la forme

$$\Phi_1(\mu_1, \ldots, \mu_{n-r}), \quad \ldots, \quad \Phi_{n-r+1}(\mu_1, \ldots, \mu_{n-r}),$$

et en substituant ensuite dans les fonctions ψ, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r+1}$ à la place de $K_1, K_2, \ldots, K_{n-r+1}$; on obtiendra ainsi $z, x_{r+1}, \ldots, x_n$ en fonction de $x_1, \ldots, x_r, \mu_1, \ldots, \mu_{n-r}$. L'élimination des μ, si elle est possible, fournira z en fonction des x.

6. Équations non linéaires. — Si l'intégrale cherchée existe, les dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_n$ doivent se réduire identiquement, quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, à certaines fonctions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, faciles à déterminer, et que l'on pourrra toujours supposer être des fonctions algébroïdes de $\mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_{n-r}$.

Si les équations (2) ont été intégrées sous la double forme (3) et (4), nous obtiendrons l'expression implicite de cette intégrale en remplaçant dans $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-r+1}$, respectivement

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n$$

par

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \gamma_n, \quad \beta_1, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n,$$

de sorte que les fonctions φ deviendront des fonctions

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{2n-r+1}$$

des μ, puis en remplaçant dans $\psi_{r+1}, \ldots, \psi_{n+1}, \chi_1, \ldots, \chi_n$, respectivement

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_{2n-r+1}$$

par

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{2n-r+1};$$

nous aurons ainsi $x_{r+1}, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ en fonction de $x_1, \ldots, x_r$ et des μ, et ce sera l'expression implicite de l'intégrale cherchée, si celle-ci existe.

Pour que la fonction z ainsi définie représente réellement une intégrale, il faut et il suffit que les fonctions

$$J_\rho = \frac{\partial z}{\partial \mu_\rho} - \sum_{l=r+1}^{n} p_l \frac{\partial x_l}{\partial \mu_\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n-r)$$

soient identiquement nulles, et il faut pour cela que, parmi les déterminants tels que Δ et Δ_n, l'un au moins soit différent de zéro pour l'élément considéré.

Nous envisagerons donc successivement les deux hypothèses :

1[re] *Hypothèse.* — Un des déterminants tels que Δ ou Δ_h est différent de zéro pour l'élément considéré.

2[e] *Hypothèse.* — Tous les déterminants tels que Δ ou Δ_h sont nuls pour l'élément considéré.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DES CAS OÙ L'UN DES DÉTERMINANTS TELS QUE Δ OU Δ_h EST DIFFÉRENT DE ZÉRO.

7. Dans ce cas on n'a pas à se préocuper de la condition relative aux fonctions J_p.

Nous supposerons d'abord qu'on veuille étudier une intégrale autour du point $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = z = 0$, cette intégrale devant se réduire à $\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ quand on a

$$\theta_1(x_1, \ldots, x_n) = \theta_2(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = \theta_r(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

β et les θ étant des fonctions holomorphes de leurs arguments s'annulant avec eux; que, de plus, les fonctions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, auxquelles doivent se réduire $p_1, p_2, \ldots, p_n$ quand $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_r = 0$, prennent, pour tous les x nuls, des valeurs finies $y_1, y_2, \ldots, y_n$; qu'enfin, en substituant

$$0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad y_1, \quad \ldots, \quad y_n,$$

dans les P_{ij} ($j = i$ ou $j \neq i$) et les déterminants tels que Δ_h, à la place de

$$z, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad p_1, \quad \ldots, \quad p_n,$$

toutes ces fonctions ne s'annulent pas à la fois.

Problème I.

8. Il est résolu par le théorème suivant :

Théorème. — *Si $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ se réduisent identiquement à $x_1, x_2, \ldots, x_r$, c'est-à-dire si l'on a à étudier une intégrale qui se réduit à β pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0$, cette intégrale est holomorphe pourvu que Δ soit différent de zéro.*

Problème II.

9. Si nous posons

$$X_k(\varphi) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{\Delta}\sum_{l=r+1}^{n} P_{kl}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} + \left(p_k + \frac{1}{\Delta}\sum_{l=r+1}^{n} P_{kl}p_l\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$
$$- \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}(X_{ki} + p_i Z_k)\frac{\partial\varphi}{\partial p_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

l'intégration du système (2) est équivalente à celle du système

$$(5) \qquad X_1(\varphi) = 0, \qquad X_2(\varphi) = 0, \qquad \ldots, \qquad X_r(\varphi) = 0.$$

Si $\Delta \neq 0$, ce système est résolu par rapport à $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_r}$. Si $\Delta = 0$, mais $\Delta_h \neq 0$, on peut le résoudre par rapport à

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_{h-1}}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial p_h}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial p_r}.$$

Si $\Delta \neq 0$, cherchons $2n - r + 1$ intégrales $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-r+1}$, de (5) assujetties à se réduire, pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, à

$$f_1(x_{r+1}, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_{2n-r+1}(x_{r+1}, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n),$$

toutes ces fonctions f étant des fonctions holomorphes en

$$x_{r+1}, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad p_1 - y_1, \quad \ldots, \quad p_n - y_n,$$

dont le déterminant fonctionnel par rapport à

$$x_{r+1}, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad p_1, \quad \ldots, \quad p_n,$$

ne s'annule pas quand ces variables se réduisent respectivement à

$$0, \quad \ldots, \quad 0, \quad 0, \quad y_1, \quad \ldots, \quad y_n,$$

et les fonctions $f_1, \ldots, f_r$ étant ce que deviennent les fonctions $F_1, \ldots, F_r$ quand on y fait $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0$.

Les $2n-r+1$ intégrales ainsi définies sont holomorphes en

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad p_1-y_1, \quad \ldots, \quad p_n-y_n;$$

et les r premières se réduisent à $F_1, F_2, \ldots, F_r$.

Le système (2) est alors intégré sous la forme

$$(3) \qquad \varphi_1 = K_1, \qquad \varphi_2 = K_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{2n-r+1} = K_{2n-r+1},$$

où $\varphi_1 = F_1, \ldots, \varphi_r = F_r$, et où $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_{2n-r+1}$, sont holomorphes en $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$.

Si $\Delta = 0$ et $\Delta_h \neq 0$, on obtiendra de même $2n-r+1$ intégrales dont les premiers membres seront des fonctions holomorphes de

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z - \sum_{q=h}^{r} p_q x_q, \quad p_1, \quad \ldots, \quad p_n,$$

donc encore de

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad p_1, \quad \ldots, \quad p_n.$$

10. Pour mettre les intégrales de (2) sous la forme (4), il suffira alors de résoudre le système (3) et d'exprimer $2n-r+1$ des variables qui y entrent en fonction des r autres, en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_r$, par exemple, calcul possible en vertu de la non-nullité du déterminant fonctionnel des fonctions f par rapport à $x_{r+1}, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$, pour les valeurs initiales.

Problème III.

Premier cas.

11. Théorème I. — *Dans le cas où le déterminant*

$$D = \begin{vmatrix} \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial \theta_1}{\partial x_i} & \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial \theta_2}{\partial x_i} & \cdots & \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial \theta_r}{\partial x_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_i \frac{\partial F_r}{\partial p_i}\frac{\partial \theta_1}{\partial x_i} & \sum_i \frac{\partial F_r}{\partial p_i}\frac{\partial \theta_2}{\partial x_i} & \cdots & \sum_i \frac{\partial F_r}{\partial p_i}\frac{\partial \theta_r}{\partial x_i} \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas pour les valeurs initiales des variables, l'intégrale z est holomorphe.

En effet, faisons un changement de variables en posant

$$y_k = \theta_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

En vertu de l'hypothèse, tous les déterminants fonctionnels des fonctions θ par rapport à r des variables x ne sont pas nuls, car le déterminant D est égal à

$$\sum \frac{D(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)}{D(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_r})} \frac{\partial F_1}{\partial p_{a_1}} \cdots \frac{\partial F_r}{\partial p_{a_r}},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_r$ représentant une permutation quelconque des nombres $1, 2, \ldots, r$.

Soit donc $\dfrac{D(\theta_1, \theta_1, \ldots, \theta_r)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_r)} \neq 0$. On tirera alors des équations précédentes

$$x_k = G_k(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n),$$

les G étant holomorphes.

Si $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont les nouvelles dérivées partielles de z par rapport à $y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$, on a

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Z(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n),$$

d'où

$$p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum_{k'=1}^{r} \frac{\partial Z}{\partial \theta_{k'}} \frac{\partial \theta_{k'}}{\partial x_k} = \sum_{k'} q_{k'} \frac{\partial \theta_{k'}}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

$$p_l = \frac{\partial z}{\partial x_l} = q_l + \sum_{k'=1}^{r} q_{k'} \frac{\partial \theta_{k'}}{\partial x_l} \qquad (l = r+1, \ldots, n).$$

On en déduit que le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_r)}{D(q_1, q_2, \ldots, q_r)}$ n'est autre que D, donc est différent de zéro.

L'intégrale cherchée est donc assujettie à se réduire à une fonction

$$\beta[G_1(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), G_2(\ldots), \ldots, G_r(\ldots), x_{r+1}, \ldots, x_n],$$

holomorphe en $y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ quand $y_1 = y_2 = \ldots = y_r = 0$, avec la condition $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_r)}{D(q_1, q_2, \ldots, q_r)} \neq 0$.

z est donc holomorphe en $y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$, et, par conséquent, aussi en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. C. Q. F. D.

Remarque. — Le déterminant D est égal à

$$\sum \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_r)}{D(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_r})} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial \theta_r}{\partial x_{\alpha_r}}.$$

L'hypothèse $D \neq 0$ entraîne donc qu'un déterminant fonctionnel des F par rapport à r des variables p est différent de zéro.

Deuxième cas.

12. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ restent finis, mais la condition du premier cas n'est pas remplie. Si le système (1) est linéaire, on a le théorème suivant :

Théorème 2. — Dans ce cas, *l'intégrale z peut s'exprimer en égalant à zéro une fonction Φ holomorphe par rapport à z et aux x, et s'annulant avec ces variables, pourvu que, si*

$$\varphi_1 = K_1, \qquad \varphi_2 = K_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n-r+1} = K_{n-r+1},$$

représentent les intégrales du système (2) *et si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r+1}$ s'annulent avec z et les x, $z - \beta$ et $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ ne s'annulent pas identiquement à la fois quand tous les φ sont nuls.*

Démonstration analogue à celle de Poincaré, en prenant pour nouvelles variables

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_r, \quad \varphi_1, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-r+1}.$$

Troisième cas.

13. Les y restant finis, la condition du premier cas n'est pas remplie et le système (1) n'est pas linéaire.

Théorème 3. — Dans ce cas, *l'intégrale z peut s'exprimer en égalant à zéro $n+1$ fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n+1}$, holomorphes par rapport à $z, x_1, \ldots, x_n, p_1 - y_1, \ldots, p_n - y_n$, et s'annulant avec ces variables, pourvu que, si*

$$\varphi_1 = K_1, \qquad \varphi_2 = K_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{2n-r+1} = K_{2n-r+1},$$

représentent les intégrales du système (2), *si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-r+1}$ s'an-*

nulent quand z et les x se réduisent à zéro et les p aux y, les fonctions

$$z-\beta,\quad p_1-\omega_1,\quad \ldots,\quad p_n-\omega_n,\quad \theta_1,\quad \ldots,\quad \theta_r$$

ne s'annulent pas identiquement à la fois quand $\varphi_1=\varphi_2=\ldots=\varphi_{2n-r+1}=0$.

Démonstration analogue à celle de Poincaré, en prenant pour nouvelles variables, en plus de $x_1, \ldots, x_r$, les fonctions ψ et χ définies par les équations (4).

14. Théorème 4. — *Si,* dans le troisième cas, *z ou les p ne prennent pas une forme indéterminée quand les x s'annulent, z est une fonction algébroïde des x.*

Démonstration de Poincaré.

15. Théorème 5. — Dans le second et le troisième cas, *l'intégrale cherchée peut s'exprimer en égalant z et les x à des fonctions algébroïdes de n nouvelles variables.*

Démonstration de Poincaré.

Calcul des intégrales.

A. — *Système d'équations linéaires homogènes.*

16. Soit le système

$$\left\{\begin{array}{l} X_{11}\dfrac{\partial z}{\partial x_1}+X_{21}\dfrac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_{n1}\dfrac{\partial z}{\partial x_n}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{1r}\dfrac{\partial z}{\partial x_1}+X_{2r}\dfrac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_{nr}\dfrac{\partial z}{\partial x_n}=0. \end{array}\right.$$

Pour en trouver une intégrale qui se réduise à $\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ quand on a

$$\theta_1(x_1, \ldots, x_n)=\theta_2(\ldots)=\ldots=\theta_r(\ldots.)=0,$$

il faut :

1° Remplacer $x_{r+1}, \ldots, x_n$ par les expressions

$$x_{r+1}=\psi_{r+1},\qquad \ldots,\qquad x_n=\psi_n;$$

les expressions $z-\beta$, θ_1, θ_2, ..., θ_r deviennent alors holomorphes par rapport à $x_1, \ldots, x_r$ et à $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-r}$;

2° Résoudre par rapport à $x_1, \ldots, x_r$ les équations

$$\theta_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \theta_r = 0$$

ainsi transformées et remplacer $x_1, \ldots, x_r$ par leurs valeurs dans l'équation $z-\beta=0$, également transformée;

3° Remplacer dans l'équation $z-\beta=0$, après cette double transformation, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-r}$ par leurs valeurs en fonction de $x_1, \ldots, x_n$.

Si les équations

$$\theta_k = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, r),$$

après leur transformation, restent distinctes pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0$, on en déduira $x_1, x_2, \ldots, x_r$ en fonctions algébroïdes de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-r}$. Soit m le degré de ces fonctions. z sera également une fonction algébroïde de degré m en $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-r}$, et, par conséquent, en $x_1, \ldots, x_n$. z sera donc solution d'une équation de la forme

$$z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0,$$

les A étant holomorphes en $x_1, \ldots, x_n$.

Une généralisation du raisonnement de Poincaré montre que les A sont, ici, comme dans le cas d'une seule équation, solutions du système donné et que l'on a identiquement

$$\beta^m + A_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + A_1\beta + A_0 = \sum_k \lambda^k \theta_k,$$

les λ étant des fonctions holomorphes des x.

B. — *Équations linéaires non homogènes.*

17. Soit à trouver une intégrale du système

$$X_{1k}\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_{2k}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_{nk}\frac{\partial z}{\partial x_n} = Z_k \qquad (k=1, 2, \ldots, r),$$

où les X, Z sont holomorphes en $x_1, \ldots, x_n, z$, cette intégrale étant assujettie aux mêmes conditions initiales que précédemment.

Cela revient à chercher une intégrale du système

$$X_{1k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+X_{2k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\ldots+X_{nk}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}+Z_k\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

qui se réduise à $z-\beta$ quand $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_r=0$, problème que nous venons de traiter.

Si φ s'exprime par une fonction algébroïde des x et de z

$$\varphi^m+A_{m-1}\varphi^{m-1}+\ldots+A_1\varphi+A_0=0,$$

l'équation $A_0=0$ nous donne implicitement z en fonction des x. On aura z en fonction algébroïde des x, si le coefficient d'une certaine puissance de z n'est pas nul pour $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

C. — *Équations non linéaires.*

18. Soit à trouver une intégrale de

$$F_1=0,\qquad F_2=0,\qquad \ldots,\qquad F_r=0,$$

répondant toujours aux mêmes conditions initiales.

On calculera les fonctions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, auxquelles $p_1, p_2, \ldots, p_n$ doivent se réduire quand $\theta_k=0$, puis on cherchera par la méthode précédente, $n+1$ intégrales du système (5) qui se réduisent respectivement à $z-\beta$, $p_1-\omega_1, \ldots, p_n-\omega_n$, quand $\theta_k=0$.

On obtiendra ainsi $n+1$ fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, qui seront données par des équations de la forme

$$\varphi^m+A_{m-1}\varphi^{m-1}+\ldots+A_1\varphi+A_0=0,$$

où les termes A_0 se réduiront respectivement à des fonctions H_1, $H_2, \ldots, H_{n+1}$, holomorphes par rapport à z, aux x et aux p.

Les équations

$$H_1=H_2=\ldots=H_{n+1}=0$$

fournissent implicitement l'intégrale cherchée.

Examen de deux cas.

19. *Premier cas.* — Supposons que les ω ne restent pas finis, mais restent déterminés quand les x s'annulent.

L'intégrale étant assujettie à se réduire à β quand $\theta_k = 0$, les ω sont donnés par les formules

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} F'_1 = 0, \qquad F'_2 = 0, \qquad \dots, \qquad F'_r = 0, \\ \omega_1 - \dfrac{\partial\beta}{\partial x_1} = \lambda_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_r \dfrac{\partial\theta_r}{\partial x_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega_n - \dfrac{\partial\beta}{\partial x_n} = \lambda_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial x_n} + \dots + \lambda_r \dfrac{\partial\theta_r}{\partial x_n}, \end{array}\right.$$

où les λ sont des paramètres à éliminer et $F'_1, \dots, F'_r$, ce que deviennent $F_1, \dots, F_r$ quand on y remplace z par β et $p_1, \dots, p_n$ par $\omega_1, \dots, \omega_n$.

L'hypothèse signifie que, pour $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, les ω vérifient des relations de la forme

$$\frac{\omega_1}{A_1} = \frac{\omega_2}{A_2} = \dots = \frac{\omega_n}{A_n} = \frac{1}{A_{n+1}},$$

avec $A_{n+1} = 0$, $A_1, A_2, \dots, A_n$ n'étant au contraire pas nuls.

A_1 n'étant pas nul, on considérera x_1 comme fonction de $z, x_2, \dots, x_n$ et l'on obtiendra, pour déterminer les valeurs $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n$ que prennent les dérivées $q_1, q_2, \dots, q_n$ de x_1 par rapport à $z, x_2, \dots, x_n$ quand on fait $\theta_k = 0$, les équations

$$\left\{\begin{array}{l} F''_1 = 0, \qquad F''_2 = 0, \qquad \dots, \qquad F''_r = 0, \\ 1 - \omega'_1 \dfrac{\partial\beta}{\partial x_1} = \lambda_1 \omega'_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_r \omega'_1 \dfrac{\partial\theta_r}{\partial x_1}, \\ \omega'_2 + \omega'_1 \dfrac{\partial\beta}{\partial x_2} + \lambda_1 \omega'_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x_2} + \dots + \lambda_r \omega'_1 \dfrac{\partial\theta_r}{\partial x_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega'_n + \omega'_1 \dfrac{\partial\beta}{\partial x_n} + \lambda_1 \omega'_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_r \omega'_1 \dfrac{\partial\theta_r}{\partial x_n} = 0, \end{array}\right.$$

$F''_1, F''_2, \dots, F''_r$ étant ce que deviennent $F'_1, F'_2, \dots, F'_r$, quand on remplace $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ par $\frac{1}{\omega'_1}, -\frac{\omega'_2}{\omega'_1}, \dots, -\frac{\omega'_n}{\omega'_1}$ et qu'on rend les fonctions entières en les multipliant par une puissance convenable de ω'_1, chose possible si les F sont des polynomes aux p.

On déduit alors des relations précédentes

$$\frac{1}{A_1} = -\frac{\omega'_2}{A_2} = \dots = -\frac{\omega'_n}{A_n} = \frac{\omega'_1}{A_{n+1}},$$

et l'on est ramené aux cas déjà étudiés. On peut obtenir l'intégrale en égalant à zéro $n+1$ fonctions holomorphes en z, x_1, ..., x_n, $q_1-\gamma'_1$, ..., $q_n-\gamma'_n$, où γ'_1, ..., γ'_n désignent ce que deviennent ω'_1, ..., ω'_n pour $x_1=\ldots=x_n=z=0$.

20. *Second cas.* — Supposons que les ω ne restent pas déterminés quand les x s'annulent. C'est ce qui arrive quand $A_1=A_2=\ldots=A_{n+1}=0$, et que, par conséquent, les équations (6) ne restent pas distinctes quand on y annule les x.

Soit γ_1, γ_2, ..., γ_n un système quelconque de valeurs qui, mises à la place de ω_1, ω_2, ..., ω_n dans le système (6), y satisfont quand les x s'annulent.

Supposons qu'on veuille étudier un élément de la fonction z tel que x_1, x_2, ..., x_n soient suffisamment voisins de zéro et que p_1, p_2, ..., p_n soient suffisamment voisins de γ_1, γ_2, ..., γ_n. On obtiendra l'intégrale cherchée de la façon suivante.

Des r relations

$$\left\{\begin{array}{l}
\omega_1-\dfrac{\partial\beta}{\partial x_1}=\lambda_1\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x_1}+\lambda_2\dfrac{\partial\theta_2}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_r\dfrac{\partial\theta_r}{\partial x_1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega_r-\dfrac{\partial\beta}{\partial x_r}=\lambda_1\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x_r}+\lambda_2\dfrac{\partial\theta_2}{\partial x_r}+\ldots+\lambda_r\dfrac{\partial\theta_r}{\partial x_r},
\end{array}\right.$$

on peut tirer λ_1, λ_2, ..., λ_r.

Pour que les équations suivantes soient compatibles avec celles-là, il faudra que tous les caractéristiques relatifs à $\dfrac{D(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)}{D(x_1,x_2,\ldots,x_r)}$ soient nuls, c'est-à-dire qu'on ait les relations

$$\left|\begin{array}{ccc|c}
 & & & \omega_1-\dfrac{\partial\beta}{\partial x_1}\\
 & \dfrac{D(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)}{D(x_1,x_2,\ldots,x_r)} & & \ldots\ldots\\
 & & & \ldots\ldots\\
 & & & \omega_r-\dfrac{\partial\beta}{\partial x_r}\\
\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x_{r+l}} & \ldots & \dfrac{\partial\theta_r}{\partial x_{r+l}} & \omega_{r+l}-\dfrac{\partial\beta}{\partial x_{r+l}}
\end{array}\right|=0\qquad(l=r+1,\ldots,n).$$

Cherchons alors $n-r+1$ intégrales $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-r+1}$ du système (5) se réduisant à

$$\left\{\begin{array}{l} z-\beta, \\[2ex] \left|\begin{array}{cccc} \multicolumn{3}{c}{\dfrac{D(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_r)}} & \begin{matrix} \omega_1 - \dfrac{\partial\beta}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \omega_r - \dfrac{\partial\beta}{\partial x_r} \end{matrix} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x_{r+l}} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_r}{\partial x_{r+l}} & \omega_{r+l} - \dfrac{\partial\beta}{\partial x_{r+l}} \end{array}\right| \end{array}\right. \qquad (l = r+1, \ldots, n), \tag{7}$$

quand on a $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_r = 0$, puis annulons ces intégrales.

Les expressions (7) étant holomorphes en z et aux x_i et $p_i - \gamma_i$, les intégrales précédentes sont algébroïdes par rapport aux mêmes variables et les équations

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{n-r+1} = 0$$

sont équivalentes à $n-r+1$ équations

$$H_1 = H_2 = \ldots = H_{n-r+1} = 0, \tag{8}$$

où les H sont holomorphes en z et aux x_i et $p_i - \gamma_i$.

Ces équations, jointes aux équations $F_k = 0$, fournissent l'intégrale cherchée z et ses dérivées $p_1, \ldots, p_n$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$, c'est-à-dire que le théorème 3 est toujours applicable.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DES CAS OÙ TOUS LES DÉTERMINANTS TELS QUE Δ OU Δ_h SONT NULS.

PREMIÈRE SECTION.

Le système proposé est linéaire et homogène.

21. Considérons le système jacobien

$$\left\{\begin{array}{l} X_1(f) = A_{11}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_{1n}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_r(f) = A_{r1}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_{rn}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \end{array}\right.$$

et supposons que les A, fonctions holomorphes des x, s'annulent pour tous les x nuls, et que, de plus, $A_{11}, \ldots, A_{1n}$ contiennent tous des termes du premier degré pouvant se réduire à $\lambda_1 y_1, \ldots, \lambda_n y_n$ par un changement linéaire de variables.

Sous des conditions connues, l'équation

$$X_1(f) = \lambda_i f$$

admet l'intégrale holomorphe T_i.

Prenons alors les T_i comme nouvelles variables indépendantes. Si l'on pose

$$T_i = \alpha_i x_i + \ldots,$$

on voit que $\dfrac{D(T_1, T_2, \ldots, T_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, qui se réduit à $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ pour tous les x nuls, est différent de zéro. Les x sont donc des fonctions holomorphes des T.

Le système donné étant jacobien, on a

$$X_1\big(X_2(T_i)\big) = X_2\big(X_1(T_i)\big) = X_2(\lambda_i T_i) = \lambda_i X_2(T_i).$$

$X_2(T_i)$ est donc une solution holomorphe de

$$X_1(f) = \lambda_i f,$$

comme T_i. On a donc, b_i étant une constante,

$$X_2(T_i) = b_i T_i,$$

et, de même,

$$X_3(T_i) = c_i T_i, \qquad \ldots, \qquad X_r(T_i) = l_i T_i.$$

L'égalité

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(T_1, T_2, \ldots, T_n)$$

donne alors

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} X_k(T_i) \frac{\partial F}{\partial T_i} = Y_k(F) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

d'où le système équivalent au système donné

$$\left\{\begin{array}{l} Y_1(F) = \lambda_1 T_1 \dfrac{\partial F}{\partial T_1} + \lambda_2 T_2 \dfrac{\partial F}{\partial T_2} + \ldots + \lambda_n T_n \dfrac{\partial F}{\partial T_n} = 0, \\ Y_2(F) = b_1 T_1 \dfrac{\partial F}{\partial T_1} + b_2 T_2 \dfrac{\partial F}{\partial T_2} + \ldots + b_n T_n \dfrac{\partial F}{\partial T_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_r(F) = l_1 T_1 \dfrac{\partial F}{\partial T_1} + l_2 T_2 \dfrac{\partial F}{\partial T_2} + \ldots + l_n T_n \dfrac{\partial F}{\partial T_n} = 0. \end{array}\right.$$

La première de ces équations admettant les intégrales

$$\varphi_k = \frac{T_k^{\frac{1}{\lambda_k}}}{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

l'intégrale générale du système sera une fonction $\mathcal{F}(\varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ vérifiant le système

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{b_k}{\lambda_k} - \frac{b_1}{\lambda_1}\right) \varphi_k \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_k} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{l_k}{\lambda_k} - \frac{l_1}{\lambda_1}\right) \varphi_k \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_k} = 0, \end{array}\right.$$

de même forme que le précédent. On en déduit que l'intégrale générale est une fonction de

$$\psi_l = \frac{\varphi_l^{\frac{1}{\frac{b_k}{\lambda_k}-\frac{b_1}{\lambda_1}}}}{\varphi_2^{\frac{1}{\frac{b_2}{\lambda_2}-\frac{b_1}{\lambda_1}}}} \qquad (l = 3, 4, \ldots, n).$$

De proche en proche, on arrivera à une seule équation et l'on verra que l'intégrale générale du système donné est fonction de $n - r$ intégrales de la forme

$$T_1^{u_1} T_2^{u_2} \ldots T_n^{u_n}.$$

DEUXIÈME SECTION.

Le système proposé est linéaire.

22. Considérons le système

$$(9) \qquad \left\{\begin{array}{l} A_{11}\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_{1n}\dfrac{\partial z}{\partial x_n} = Z_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{r1}\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_{rn}\dfrac{\partial z}{\partial x_n} = Z_r, \end{array}\right.$$

les A et les Z étant des fonctions des x et de z ayant des termes du premier degré et vérifiant des conditions supplémentaires.

Ce système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} A_{11}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_{1n}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} + Z_1\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{r1}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_{rn}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} + Z_r\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{array}\right.$$

Ce système admet des intégrales de la forme $T_1^{u_1} T_2^{u_2} \ldots T_{n+1}^{u_{n+1}}$. Donc les valeurs de z tirées des équations

$$T_1 = 0, \qquad T_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad T_{n+1} = 0$$

seront des intégrales du système donné. On en tirera, en général, z de $n + 1$ de façons différentes en fonctions holomorphes des x.

23. Considérons maintenant un système aux différentielles totales complètement intégrable

$$\left\{\begin{array}{l} dx_1 = A_{11}\dfrac{dt_1}{t_1} + A_{21}\dfrac{dt_2}{t_2} + \ldots + A_{r1}\dfrac{dt_r}{t_r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dx_n = A_{1n}\dfrac{dt_1}{t_1} + A_{2n}\dfrac{dt_2}{t_2} + \ldots + A_{rn}\dfrac{dt_r}{t_r}, \end{array}\right.$$

les A étant des fonctions holomorphes des x et $A_{11}, \ldots, A_{1n}$ vérifiant les mêmes conditions que dans la première section.

Ce système est équivalent au système jacobien

$$\left\{\begin{array}{l} X_1(f) = t_1\dfrac{\partial f}{\partial t_1} + A_{11}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_{1n}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_r(f) = t_r\dfrac{\partial f}{\partial t_r} + A_{r1}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_{rn}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \end{array}\right.$$

Si T_i représente une intégrale holomorphe de $X_1(f) = \lambda_1 f$, un raisonnement analogue au précédent montre qu'en prenant les T comme variables indépendantes, ce système peut s'écrire

$$\left\{\begin{array}{l} Y_1(F) = \lambda_1 T_1\dfrac{\partial F}{\partial T_1} + \lambda_2 T_2\dfrac{\partial F}{\partial T_2} + \ldots + \lambda_n T_n\dfrac{\partial F}{\partial T_n} + t_1\dfrac{\partial F}{\partial t_1} = 0, \\ Y_2(F) = b_1 T_1\dfrac{\partial F}{\partial T_1} + b_2 T_2\dfrac{\partial F}{\partial T_2} + \ldots + b_n T_n\dfrac{\partial F}{\partial T_n} + t_2\dfrac{\partial F}{\partial t_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_r(F) = l_1 T_1\dfrac{\partial F}{\partial T_1} + l_2 T_2\dfrac{\partial F}{\partial T_2} + \ldots + l_n T_n\dfrac{\partial F}{\partial T_n} + t_r\dfrac{\partial F}{\partial t_r} = 0, \end{array}\right.$$

et que son intégrale générale est fonction des n intégrales particulières $T_i t_1^{-\lambda_i} t_2^{-b_i} \ldots t_r^{-l_i}$. Si donc on pose

$$T_i = K_i t_1^{\lambda_i} t_2^{b_i} \ldots t_r^{l_i},$$

ces n équations fourniront les x en fonction holomorphe des quantités $K_i t_1^{\lambda_i} t_2^{b_i} \ldots t_r^{l_i}$.

24. Problème III. — *Reprenons alors le système* (9) *et cherchons-en une intégrale se réduisant à une fonction donnée* $\psi(\mu_1, \ldots, \mu_{n-r})$

quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des fonctions données $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ de $\mu_1, \ldots, \mu_{n-r}$.

On suppose que les fonctions ψ, θ sont algébroïdes et s'annulent avec les μ.

Le système donné est équivalent à un système aux différentielles totales qui fournira des relations

$$T_1 = K_1 t_1^{\alpha_1^1} t_2^{\alpha_2^1} \ldots t_r^{\alpha_r^1}, \qquad \ldots, \qquad T_{n+1} = K_{n+1} t_1^{\alpha_1^{n+1}} t_2^{\alpha_2^{n+1}} \ldots t_r^{\alpha_r^{n+1}},$$

d'où l'on tire, les fonctions f étant holomorphes,

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} z = f(T_1, \ldots, T_{n+1}) = f\left(K_1 t_1^{\alpha_1^1} t_2^{\alpha_2^1} \ldots t_r^{\alpha_r^1}, \ldots, K_{n+1} t_1^{\alpha_1^{n+1}} t_2^{\alpha_2^{n+1}} \ldots t_r^{\alpha_r^{n+1}}\right), \\ x_1 = f_1(T_1, \ldots, T_{n+1}) = f_1(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ x_n = f_n(T_1, \ldots, T_{n+1}) = f_n(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots). \end{array}\right.$$

Il faut, pour trouver l'intégrale, remplacer dans les équations

$$T_p = K_p t_1^{\alpha_1^p} t_2^{\alpha_2^p} \ldots t_r^{\alpha_r^p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n+1),$$

z par ψ et les x par les θ, et enfin les t par des variables auxiliaires ν analogues aux μ.

$T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ deviennent alors algébroïdes par rapport aux μ; de plus

$$\left\{\begin{array}{l} K_1 = \nu_1^{-\alpha_1^1} \nu_2^{-\alpha_2^1} \ldots \nu_r^{-\alpha_r^1} \; T_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-r}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ K_{n+1} = \nu_1^{-\alpha_1^{n+1}} \nu_2^{-\alpha_2^{n+1}} \ldots \nu_r^{-\alpha_r^{n+1}} \; T_{n+1}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-r}). \end{array}\right.$$

On remplacera dans les équations (10) les K par ces valeurs, puis on posera

$$\frac{t_1}{\nu_1} = \mu_{n-r+1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{t_r}{\nu_r} = \mu_n,$$

z et les x s'expriment alors en fonctions algébroïdes de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-r}, \mu_{n-r+1}^{\alpha_1^1}, \mu_{n-r+1}^{\alpha_1^2}, \ldots, \mu_n^{\alpha_r^1}, \ldots, \mu_n^{\alpha_r^{n+1}}$, et s'annulent avec ces variables.

TROISIÈME SECTION.

Le système proposé n'est pas linéaire.

25. Problème II. — Supposons maintenant que le système proposé

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_r = 0,$$

ne soit pas linéaire.

Son intégration est équivalente à celle du système

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \displaystyle\sum_{l=r+1}^{n} P_{kl} \dfrac{\partial f}{\partial x_l} + \left(\Delta p_k + \displaystyle\sum_{l=r+1}^{n} P_{kl} p_l\right) \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_{ki} + p_i Z_k) \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_i} = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, r). \end{cases}$$

Nous supposerons que l'intégrale cherchée se réduise à $\beta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-r})$ quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des fonctions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ des mêmes variables et que, dans les mêmes conditions, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se réduisent à $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. On suppose que les ω sont nuls en même temps que les μ.

Quand on fait

$$x_1 = \ldots = x_n = z = p_1 = \ldots = p_n = 0,$$

tous les déterminants tels que P_{kl} et Δ_h sont nuls.

Nous supposerons que les équations

$$F_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_r = 0, \qquad P_{kl} = 0, \qquad \Delta_h = 0$$

sont distinctes, de sorte qu'elles ne sont pas vérifiées toutes lorsqu'on donnera à z, aux x et aux p des valeurs suffisamment voisines de zéro.

L'intégration du système (11) se ramène à celle du système aux différentielles totales (2), qui permettra d'exprimer z, les x et les p en fonction de r paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_r$. On peut mettre ces intégrales sous la forme

$$(12) \quad z = f, \qquad x_1 = f_1, \qquad \ldots, \qquad x_n = f_n, \qquad p_1 = f_{n+1}, \qquad \ldots, \qquad p_n = f_{2n},$$

les f étant des fonctions holomorphes de

$$T_1 = K_1 t_1^{\alpha_1^1} t_2^{\alpha_2^1} \ldots t_r^{\alpha_r^1}, \qquad T_{2n+1} = K_{2n+1} t_1^{\alpha_1^{2n+1}} t_2^{\alpha_2^{2n+1}} \ldots t_r^{\alpha_r^{2n+1}},$$

s'annulant avec ces variables.

26. Problème III. — On peut toujours supposer que β, les θ et les ω sont algébroïdes par rapport aux μ et qu'ils s'annulent avec ces variables et que les équations de la forme

$$\theta_i^m + A_{m-1}\theta_i^{m-1} + \ldots + A_1\theta_i + A_0 = 0,$$

qui définissent les θ, de même que celles qui définissent β et les ω, sont irréductibles.

Si l'on part d'un système de valeurs des μ et d'un système de valeurs de β, des θ et des ω vérifiant les équations précédentes, lorsque les μ varieront à partir de ce système de valeurs initiales pour atteindre un système de valeurs finales, β, les θ et les ω aboutiront par continuité, à partir de leurs valeurs initiales, à des valeurs finales qui seront appelées valeurs correspondantes de β, des θ et des ω.

Pour résoudre le problème III, il faut d'abord remplacer dans les T

$$z, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad p_1, \quad \ldots, \quad p_n,$$

par

$$\beta, \quad \theta_1, \quad \ldots, \quad \theta_n, \quad \omega_1, \quad \ldots, \quad \omega_n;$$

il viendra

$$T_1 = \psi_1, \qquad T_2 = \psi_2, \qquad \ldots, \qquad T_{2n+1} = \psi_{2n+1},$$

les ψ étant algébroïdes par rapport aux μ. Si l'on n'a substitué dans les T, à z, aux x et aux p que des valeurs correspondantes de β, des θ et des ω, les équations qui définissent les ψ sont irréductibles.

Il faut ensuite remplacer dans les équations (12) les T par les ψ et $t_1, \ldots, t_r$ par $\mu_{n-r+1}, \ldots, \mu_n$.

z, les x et les p s'expriment alors par des fonctions algébroïdes en $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-r}, \mu_{n-r+1}^{\alpha_1^1}, \mu_{n-r+1}^{\alpha_1^2}, \ldots, \mu_{n-r+1}^{\alpha_1^{2n+1}}, \ldots, \mu_n^{\alpha_r^{2n+1}}$.

Si l'on n'a donné aux ψ, dans cette substitution, que des valeurs correspondantes, les équations qui définissent z, les x et les p sont irréductibles, et l'on dira que les valeurs de z, des x et des p sont correspondantes.

Pour que les expressions de z, des x et des p que l'on vient d'obtenir donnent l'expression implicite de l'intégrale, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n.$$

Ces conditions sont certainement remplies si l'on ne donne pas à $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-r}$ des valeurs particulières annulant simultanément $\beta, \theta_1, \ldots, \theta_n, \omega_1, \ldots, \omega_n$, chose possible puisque ces fonctions ne sont pas identiquement nulles.

On voit, en effet, que, dans ce cas, les fonctions $F_1, \ldots, F_r, \Delta_h$ ne s'annulent pas à la fois quand on y remplace z, les x et les p par β, les θ et les ω et que les fonctions J_p sont alors identiquement nulles.

Supposons maintenant que l'on donne à $\mu_1, \ldots, \mu_{n-r}$ des valeurs qui annulent à la fois β, les θ et les ω.

Si les équations

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{n-r} = 0$$

sont distinctes, pour que l'on ait

$$\beta = \theta_1 = \ldots = \theta_n = \omega_1 = \ldots = \omega_n = 0,$$

et par conséquent

$$F_1 = \ldots = F_r = P_{kl} = \Delta_h = 0,$$

il faudra que l'on ait

$$(\alpha) \qquad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-r} = 0.$$

Donc, toutes les fois que ces conditions (α) ne seront pas remplies, on aura, quels que soient les μ_{n-r+k} finis et différents de zéro,

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n.$$

27. Cas a examiner. — Il nous faut maintenant envisager les cas suivants :

1° $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-r} = 0$, avec l'un des $\mu_{n-r+k} = \infty$;

2° l'un des $\mu_{n-r+k} = 0$, sans avoir en même temps

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-r} = 0 ;$$

3° tous les μ_{n-r+k} sont finis et, de plus, $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-r} = 0$.

28. Premier cas. — Supposons que μ_{n-r+1} tende vers l'infini, en même temps que $\mu_1, \ldots, \mu_{n-r}$ tendent vers zéro.

L'intégrale est donnée implicitement par des équations de la forme

$$(13)\quad T_i^m + A_{m-1}^{(i)} \mu_{n-r+1}^{\lambda_1^i} \mu_{n-r+2}^{\lambda_2^i} \cdots \mu_n^{\lambda_r^i} T_i^{m-1} + \ldots + A_0^{(i)} \mu_{n-r+1}^{m\lambda_1^i} \cdots \mu_n^{m\lambda_r^i} = 0,$$

les A étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-r}$, de sorte qu'on peut poser

$$A = \sum \chi,$$

avec

$$\chi = k \mu_1^{\beta_1} \cdots \mu_{n-r}^{\beta_{n-r}} \qquad (k, \text{ constante; les } \beta, \text{ nombres entiers}),$$

et les λ pouvant être supposés avoir tous leur partie réelle positive (¹).

L'équation (13) pourra alors s'écrire

$$\sum_{K=0}^{m} \sum \chi T_i^{m-K} \mu_{n-r+1}^{K\lambda_1^i} \mu_{n-r+2}^{K\lambda_2^i} \cdots \mu_n^{K\lambda_r^i} = 0,$$

ou, par le changement de variables

$$(14)\quad \mu_1 = \nu^{\alpha_1}, \qquad \mu_2 = \nu^{\alpha_2}\xi_2, \qquad \ldots, \qquad \mu_{n-r} = \nu^{\alpha_r}\xi_{n-r}, \qquad \mu_{n-r+1} = \nu^{-1}\xi_{n-r+1},$$

$$\sum_K \sum \Xi \nu^{K\delta} T_i^{m-K} \xi_{n-r+1}^{K\lambda_1^i} \mu_{n-r+2}^{K\lambda_2^i} \cdots \mu_n^{K\lambda_r^i} = 0,$$

avec

$$\Xi = k \xi_2^{\beta_2} \xi_3^{\beta_3} \cdots \xi_{n-r}^{\beta_{n-r}}, \qquad \delta = \frac{\beta_1}{K}\alpha_1 + \ldots + \frac{\beta_{n-r}}{K}\alpha_{n-r} - \lambda_1^i.$$

$\frac{\beta_1}{K}, \frac{\beta_2}{K}, \ldots, \frac{\beta_{n-r}}{K}$ sont réels positifs, tandis que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}, \lambda_1^i, \ldots, \lambda_r$ sont imaginaires, et l'on démontre que l'on peut choisir les α de façon qu'un ou plusieurs des δ soient nuls, pendant que les autres ont leur partie réelle positive.

L'équation (13) deviendra alors

$$(13')\quad T_i^m + A'^{(i)}_{m-1} \xi_{n-r+1}^{\lambda_1^i} \mu_{n-r+2}^{\lambda_2^i} \cdots \mu_n^{\lambda_r^i} T_i^{m-1} + \ldots$$
$$+ A'^{(i)}_1 \xi_{n-r+1}^{(m-1)\lambda_1^i} \mu_{n-r+2}^{(m-1)\lambda_2^i} \cdots \mu_n^{(m-1)\lambda_r^i} T_i + A'^{(i)}_0 \xi_{n-r+1}^{m\lambda_1^i} \mu_{n-r+2}^{m\lambda_2^i} \cdots \mu_n^{m\lambda_r^i} = 0,$$

(¹) Pour le détail de cette démonstration et des suivantes, voir le Mémoire de Poincaré.

l'un au moins des A′ dans l'une au moins de ces équations ne s'annulant pas avec ν, quels que soient les ξ.

Si l'on résout ces équations par rapport à z, aux x et aux p, on trouvera

$$z = \beta', \quad x_1 = \theta'_1, \quad \ldots, \quad x_n = \theta'_n, \quad p_1 = \omega'_1, \quad \ldots, \quad p_n = \omega'_n.$$

Ces équations donnent l'expression implicite de l'intégrale, pourvu que l'on n'ait pas

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-r} = 0 \quad \text{ou l'une des quantités} \quad \mu_{n-r+2}, \quad \ldots, \quad \mu_n = 0,$$

c'est-à-dire pourvu que l'on ait

$$\nu \neq 0, \quad \xi_2 \neq 0, \quad \ldots, \quad \xi_{n-r+1} \neq 0, \quad \mu_{n-r+2} \neq 0, \quad \ldots, \quad \mu_n \neq 0.$$

Les équations (13′) montrent que, quand les ξ tendent vers certaines valeurs différentes de zéro, ainsi que $\mu_{n-r+2}, \ldots, \mu_n$, tandis que ν tend vers zéro, les T tendent vers des valeurs finies et différentes de zéro et que, par conséquent, z, les x et les p tendent vers des valeurs finies et différentes de zéro z^0, x_1^0, $\ldots$, x_n^0, p_1^0, $\ldots$, p_n^0, satisfaisant au système (1), et l'on démontre, par une généralisation du raisonnement de Poincaré, que l'on peut prendre ν et les ξ assez voisins de leurs limites, ainsi que $\mu_{n-r+2}, \ldots, \mu_n$, pour avoir

$$z - z^0 = \sum_i (x_i - x_i^0)(p_i^0 + \varepsilon_i),$$

les modules des ε_i étant aussi petits qu'on le veut, ce qui prouve que pour $x_i = x_i^0$, on a

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n.$$

29. Deuxième cas. — Faisons les hypothèses suivantes :

$\mu_{n-r+1} = 0$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-r}$ ne sont pas nuls à la fois, et μ_{n-r+2}, $\ldots$, μ_n sont différents de zéro.

Dans ce cas, les équations (13) montrent que les T s'annulent et, par conséquent, aussi z, les x et les p, et l'on montre que l'on a en même temps

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0.$$

30. Troisième cas. — Supposons enfin que l'on ait

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-r} = 0,$$

tous les μ_{n-r+k} étant $\neq \infty$.

En ce cas, les T sont nuls, ainsi que z, les x et les p, et l'on a

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Il suffit, en effet, de faire le changement de variables (14) et de supposer

$$\nu = 0, \qquad \xi_2, \ldots, \xi_{n-r} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \xi_n = 0,$$

pour être ramené au cas précédent.