JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN BRACONNIER

Sur les groupes topologiques localement compacts

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 27 (1948), p. 1-85.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1948_9_27__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les groupes topologiques localement compacts;

PAR JEAN **BRACONNIER**.

INTRODUCTION.

L'étude de la théorie générale des groupes topologiques a été inaugurée il y a à peine vingt années. Depuis 1926, de nombreuses monographies ont été publiées à son sujet : les plus importantes sont celles de L. Pontrjagin et de A. Weil. Ces travaux ont permis d'élucider dans une certaine mesure la structure des groupes compacts et des groupes abéliens localement compacts. Mais si, parmi ceux-ci, les groupes connexes sont relativement bien connus maintenant, les groupes totalement discontinus et, par suite, les groupes abéliens localement compacts les plus généraux n'ont été l'objet que de recherches assez fragmentaires, au moins quant à leur structure de groupe topologique. J'ai essayé ici d'apporter quelque contribution à ces recherches.

La généralisation de certaines propriétés des groupes discrets m'a fourni, d'une part, un procédé d'exploration important : telles sont l'introduction de la notion de produit local de groupes topologiques et celle des groupes de nombres p-adiques. D'autre part, la théorie de la dualité dans les groupes abéliens localement compacts, telle qu'elle a été déroulée dans ces dernières années par L. Pontrjagin et A. Weil, s'est révélée comme un moyen d'étude très efficace. Sur un plan plus général, les travaux récents de N. Bourbaki sur les structures fondamentales de l'analyse mathématique m'ont fourni un moyen d'exposition et de recherche d'une grande puissance. Conformément aux principes de cet auteur, j'ai essayé de donner à ce travail une solide armature logique, par l'emploi de la méthode axiomatique, de la notion de structure, par la présentation des faits sous forme de définitions, propositions et théorèmes.

Dans le paragraphe **1** du Chapitre I, j'ai rappelé et précisé les résultats actuels de la théorie des groupes abéliens localement compacts. Aux paragraphes **2** et **3**, j'ai introduit et étudié deux notions utilisées par la suite : celle de *sous-groupe pur* d'un groupe topologique au paragraphe **3** et celle de *produit local* et de *produit direct local* de groupes topologiques au paragraphe **2**; cette dernière notion s'est révélée particulièrement intéressante, tant pour la simplification qu'elle apporte dans l'énoncé des résultats généraux que par la fabrication d'exemples tératologiques. Enfin, dans le paragraphe **4**, on trouvera un exposé rapide de certaines propriétés des groupes abéliens compacts connexes.

Dans le Chapitre II se trouve exposée la notion de groupe topologique *primaire* (associé à un entier premier p). Dans les paragraphes **2**, **3** et **4**, sont étudiés plus particulièrement les groupes

---

(1) Dans ce travail, nous adoptons la terminologie et les notations de N. Bourbaki [VI]. Conformément à cette convention, **Z** désigne l'anneau des entiers rationnels, **Q** le corps des nombres rationnels, **R** le *corps* localement compact des nombres réels, **T** le *groupe* compact **R**/**Z**. Dans ce qui suit, **Z**, **Q**, **R** désignent les groupes *additifs* de ces anneaux et corps. Si G est un groupe, nous désignerons par xy le *composé* de x et y. Si G est *abélien*, nous utiliserons la notation *additive* $x+y$ pour le composé de x et y et l'élément neutre de G sera désigné par o.

abéliens localement compacts primaires à l'aide des groupes de nombres p-adiques. Cette étude est justifiée par le rôle qu'elle joue dans le Chapitre III.

Dans ce chapitre sont examinées certaines propriétés des groupes abéliens localement compacts. Au paragraphe **1**, j'ai déterminé la structure des groupes abéliens localement compacts *totalement discontinus ainsi que leur dual* à l'aide des résultats du Chapitre II; au paragraphe **2**, la structure des groupes abéliens localement compacts dont tout élément est d'ordre fini est déterminée et les groupes abéliens localement compacts les plus généraux sont caractérisés comme sous-groupes fermés de groupes topologiques bien déterminés. Les résultats ainsi obtenus sont encore loin d'être suffisants pour apporter une solution complète au problème de la détermination de la structure des groupes abéliens localement compacts. Cependant ils permettent déjà une étude approfondie — que je n'ai pas abordée ici — de structures d'algèbre topologique plus riches : celles des anneaux, corps et espaces vectoriels localement compacts.

Dans le Chapitre IV, j'ai défini le *groupe topologique des automorphismes* d'un groupe localement compact. Dans les paragraphes **1** et **2**, j'ai donné quelques propriétés élémentaires de ce groupe : on obtient de cette façon des groupes topologiques qui jouent un rôle important en algèbre topologique. Dans un prochain travail, je reviendrai moins superficiellement sur leurs propriétés, en particulier sur celles des *groupes de Galois* d'un corps localement compact. Dans le paragraphe **3**, j'ai défini le *module* d'un automorphisme d'un groupe localement compact, nombre réel associé à cet automorphisme et jouissant des principales propriétés du déterminant d'une transformation linéaire de l'espace numérique à n dimensions.

Cette notion permet d'ailleurs de présenter de façon très simple l'étude de la structure des *corps localement compacts*.

La plupart des résultats de ce travail ont été résumés et publiés dans trois Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ([1]), dont une en collaboration avec M. J. Dieudonné.

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, t. **218**, 1944, p. 304-305; t. **218**, 1944, p. 577-579; t. **220**, 1945, p. 382-884.

Un progrès nouveau dans l'étude de la structure des groupes localement compacts me paraît lié à une extension de la notion de *limite projective* de groupes topologiques (correspondant, par exemple, à la notion de produit direct local) et à une étude systématique des groupes localement compacts dont les structures uniformes droite et gauche sont identiques, qui jouissent de propriétés généralisant celles des groupes compacts, des groupes discrets et des groupes abéliens.

Je voudrais, en terminant, exprimer toute ma reconnaissance à M. Jean Dieudonné. Au cours de la rédaction de ce travail, j'ai trouvé près de lui, les conseils les plus amicaux et surtout les plus riches d'expérience et d'érudition.

CHAPITRE I.

Groupes abéliens localement compacts.

1. Groupes abéliens localement compacts. — Rappelons le théorème suivant ([2]) :

Théorème 1. — *Tout groupe abélien localement compact est isomorphe à un groupe produit* $\mathbf{R}^n \times G$, G *étant un groupe topologique abélien ayant un sous-groupe ouvert compact. Pour que deux groupes localement compacts* $\mathbf{R}^n \times G$ *et* $\mathbf{R}^{n'} \times G'$ *soient isomorphes, il faut et il suffit que* $n = n'$ *et que* G *et* G' *soient isomorphes.*

L'étude de la structure des groupes abéliens localement compacts est ainsi ramenée à celle de la structure des groupes topologiques ayant un *sous-groupe ouvert compact.*

Le *dual* d'un groupe abélien localement compact G est le sous-

---

([2]) Ce théorème est démontré par E. R. van Kampen [III], § IV, 2, *cf.* L. Pontrjagin [V], Chap. V, §§ 2, 3 et 5. Ces auteurs ont esquissé une démonstration du théorème plus général suivant :

Si G *est un groupe localement compact dont les deux structures uniformes sont identiques,* G *est isomorphe à un groupe produit* $\mathbf{R}^n \times G'$, *où* G' *est un groupe topologique ayant un sous-groupe distingué ouvert compact.*

groupe $\hat{G}$ de $\mathbf{T}^G$ formé par les représentations continues de G dans le tore $\mathbf{T}$, appelées *caractères* de G, et muni de la topologie suivante : si $V(C, U)$ est l'ensemble des $\hat{x} \in \hat{G}$ tels que $\hat{x}(C) \subset U$, avec $U \subset \mathbf{T}$ et $C \subset G$, quand U décrit le filtre des voisinages de o dans $\mathbf{T}$ et C l'ensemble des parties compactes de G, $V(C, U)$ décrit un système fondamental de voisinages de l'élément neutre de $\hat{G}$ ([3]). On a le

THÉORÈME 2. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact,* $\hat{G}$ *son dual;* $\hat{G}$ *est un groupe abélien localement compact et le dual de* $\hat{G}$ *est* G. *Si* H *est un sous-groupe fermé de* G, *l'ensemble des caractères* $\hat{x}$ *de* G *tels que* $\hat{x}(H) = \{o\}$ *est un sous-groupe fermé* $H^\star$ *de* $\hat{G}$, *qu'on appelle le conjugué de* H *dans* $\hat{G}$. *Le conjugué de* $H^\star$ *dans* G *est* H. *Si* $(H_\iota)_{\iota \in I}$ *est une famille de sous-groupes fermés de* G, *le conjugué de* $\bigcap_{\iota \in I} H_\iota$ *dans* $\hat{G}$ *est l'adhérence du sous-groupe* $\sum_{\iota \in I} H_\iota^\star$. *Si* G *est discret,* $\hat{G}$ *est compact et inversement.*

Soit f une représentation *continue* du groupe abélien localement compact G dans un groupe abélien localement compact G' dont le dual est $\hat{G}'$. Si $\hat{x}' \in \hat{G}'$, $\hat{x}' \circ f$ est un caractère $\hat{x}$ de G et $\hat{x}' \to \hat{x}$ est une représentation *continue* ([4]) de $\hat{G}'$ dans $\hat{G}$, qu'on note $\hat{f}$ et qu'on appelle la *transposée* de f. Si H est un sous-groupe fermé de G, $\overset{-1}{\hat{f}}(H^\star)$ est un sous-groupe fermé de $\hat{G}'$, conjugué du sous-groupe fermé $\overline{f(H)}$ de G'. En effet, si $\hat{y} \in \overline{f(H)}^\star$, quel que soit $x \in H$,

$$\langle x, \hat{f}(\hat{y}) \rangle = \langle f(x), \hat{y} \rangle = o \quad \text{et} \quad \hat{f}(\hat{y}) \in H^\star,$$

c'est-à-dire $\hat{y} \in \overset{-1}{\hat{f}}(H^\star)$; donc $\overline{f(H)}^\star \subset \overset{-1}{\hat{f}}(H^\star)$. Inversement soit $y \in f(H)$;

([3]) On notera indifféremment la valeur du *caractère* $\hat{x} \in \hat{G}$ au point $x \in G$ par $\hat{x}(x)$ ou $\langle x, \hat{x} \rangle$. Sur la théorie de la dualité, en particulier sur la démonstration du théorème 2, on consultera les ouvrages de L. PONTRJAGIN [V], Chap. V, §§ 30-34, et de A. WEIL [VII], Chap, VI, § 28.

([4]) Ces propriétés sont démontrées par A. WEIL [VII], Chap. VI, § 28.

il existe $x \in H$ tel que $y = f(x)$ et

$$\langle y, \hat{y} \rangle = \langle f(x), \hat{y} \rangle = \langle x, \hat{f}(\hat{y}) \rangle = 0$$

si $\hat{y} \in \overset{-1}{\hat{f}}(H^\star)$; donc $y \in \overset{-1}{\hat{f}}(H^\star)^\star$ et $f(H) \subset \overset{-1}{\hat{f}}(H^\star)^\star$; comme $\overset{-1}{\hat{f}}(H^\star)^\star$ est fermé dans G', $\overline{f(H)} \subset \overset{-1}{\hat{f}}(H^\star)^\star$, c'est-à-dire $\overline{f(H)}^\star \supset \overset{-1}{\hat{f}}(H^\star)$; donc $\overline{f(H)}^\star = \overset{-1}{\hat{f}}(H^\star)$. En particulier le conjugué de $\overline{f(G)}$ est $\overset{-1}{\hat{f}}(0)$.

La transposée de $\hat{f}$ est f. Si f est un *homomorphisme* de G dans G', $\hat{f}$ est un *homomorphisme* de $\hat{G}'$ dans $\hat{G}$ et $f(G)$ est un sous-groupe *fermé* de G, dont le conjugué dans $\hat{G}'$ est $\overset{-1}{\hat{f}}(0)$. Si H' est un sous-groupe fermé de G contenu dans le sous-groupe fermé H, on a $H^\star \subset H'^\star$ et le dual de H/H' est $H'^\star/H^\star$. Enfin si H est un sous-groupe *ouvert* de G, son conjugué $H^\star$ dans $\hat{G}$ est un sous-groupe *compact* et inversement. En effet $H^\star$ est dual du groupe discret G/H.

Soit G un groupe topologique abélien ayant un sous-groupe *ouvert compact* H; G est localement compact. Le conjugué $H^\star$ de H dans le dual $\hat{G}$ de G est un sous-groupe ouvert compact de $\hat{G}$. L'intersection K des sous-groupes ouverts de G est un sous-groupe compact de G car $K \subset H$: c'est la *composante connexe* de 0 dans G ([5]). La réunion F des sous-groupes compacts de G est un sous-groupe ouvert de G car $H \subset F$: c'est l'ensemble des éléments x de G tels que le sous-groupe engendré par x soit *relativement compact.* Si K' est la composante connexe de zéro dans $\hat{G}$, K' est le conjugué de F dans $\hat{G}$ ([6]) : en effet, quel que soit le sous-groupe compact H de G, on a $H \subset F$ et $F^\star \subset H^\star$, donc $F^\star \subset K'$ et $K'^\star \subset F$; d'autre part $K' \subset H^\star$, donc $H \subset K'^\star$ et $F \subset K'^\star$. Il en résulte que F/K est un groupe abélien localement compact *totalement discontinu ainsi que son dual.* G/F est un groupe abélien discret dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, car il est dual du groupe compact connexe K'.

([5]) *Voir* N. Bourbaki [VI], *Topologie générale*, Chap. III, § 3, Exp. 18.

([6]) En particulier, si G est compact, la composante connexe de 0 est le conjugué du sous-groupe des éléments d'ordre fini du groupe discret $\hat{G}$.

Dans les Chapitres qui suivent, nous déterminerons dans une certaine mesure la structure des groupes topologiques K, G/F et F/K; de cette étude nous déduirons certaines propriétés de la structure du groupe G lui-même.

2. Produit local et produit direct local de groupes topologiques. — Soient $(G_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de groupes topologiques *séparés*, H_ι un sous-groupe *distingué ouvert* de G_ι, et H le groupe *topologique produit* $\prod_{\iota\in I} H_\iota$. Le filtre des voisinages de l'élément neutre dans H est un système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans une topologie séparée *compatible* avec la structure de groupe de $G = \prod_{\iota\in I} G_\iota$.

Définition 1. — *On dit que le groupe topologique* G *ainsi défini est le produit local des groupes* G_ι, *relativement aux sous-groupes distingués ouverts* H_ι.

Si $(J_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ est une *partition* de I, G est isomorphe au produit local, relativement aux sous-groupes distingués ouverts $\prod_{\iota\in J_\varkappa} H_\iota$, des groupes produits locaux des familles de groupes $(G_\iota)_{\iota\in J_\varkappa}$, relativement aux sous-groupes H_ι.

Si H'_ι est un sous-groupe *distingué ouvert* de G_ι, *égal* à H_ι pour tout $\iota\in I$ excepté un nombre *fini*, le produit local des G_ι, relativement aux H'_ι, est égal au produit local des G_ι, relativement aux H_ι. En particulier, si, pour tout $\iota\in I$ excepté un nombre *fini* $H_\iota = G_\iota$, le produit local des G_ι, relativement aux H_ι, est identique au groupe *topologique produit* $\prod_{\iota\in I} G_\iota$.

Soient G un groupe produit local d'une famille de groupes $(G_\iota)_{\iota\in I}$, relativement à des sous-groupes distingués ouverts H_ι, et J une partie *finie* de I. Si $J' = \complement J$, le groupe topologique $G_J = \prod_{\iota\in J} G_\iota$ est isomorphe au sous-groupe *distingué* fermé de G, formé par les $(x_\iota)_{\iota\in I}$ tels que $x_\iota = e_\iota$ pour $\iota\in J'$. Dans tout ce qui suit, nous *identifierons* ces deux groupes. Le sous-groupe K_J de G, formé par les $(x_\iota)_{\iota\in I}$ tels que $x_\iota \in H_\iota$ si $\iota \in J'$ est un sous-groupe *distingué ouvert* de G et K_J est isomorphe au groupe topologique $\prod_{\iota\in J} G_\iota \times \prod_{\iota\in J'} H_\iota$. Si $J = \{\iota\}$, on pose $K_J = K_\iota$. H est un sous-groupe *distingué ouvert* de G et K_J/H est un sous-groupe distingué du groupe discret G/H, isomorphe à $\prod_{\iota\in J} G_\iota/H_\iota$.

Si G'_ι est la *composante connexe* de e_ι dans G_ι, la composante connexe de l'élément neutre dans G est $\prod_{\iota\in I} G'_\iota$, car c'est la composante connexe de l'élément neutre dans H.

Pour que G soit *complet*, il faut et il suffit que chacun des G_ι le soit. C'est nécessaire, car G_ι est un sous-groupe *fermé*, donc *complet*, de G ; c'est suffisant, car H est un sous-groupe ouvert complet de G.

Proposition 1. — *Pour qu'un groupe topologique* G, *produit local de groupes* G_ι, *relativement à des sous-groupes* H_ι, *soit localement compact, il faut et il suffit que tous les* G_ι *le soient et que, pour tout* $\iota \in I$, *excepté pour un nombre fini*, H_ι *soit compact.*

En effet, si G est *localement compact*, pour toute partie *finie* J de I, K_J est localement compact et isomorphe à $\prod_{\iota\in J} G_\iota \times \prod_{\iota\in \complement J} H_\iota$; donc, pour tout $\iota \in I$, G_ι est localement compact et tous les H_ι, excepté au plus un nombre *fini* sont compacts. La réciproque est triviale.

Soit G le produit local de groupes G_ι, relativement à des sous-groupes distingués ouverts H_ι. Quand J décrit l'ensemble des parties *finies* de I, la *réunion* G' des sous-groupes K_J est formée par les $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ tels que $x_\iota \in H_\iota$ excepté au plus pour un nombre *fini* d'indices ι ; G' est un sous-groupe ouvert de G car $H \subset G'$ et, pour toute partie *finie* J de I, on a $G_J \subset K_J \subset G'$. On voit facilement que G' est l'*adhérence* dans G du *produit direct* des sous-groupes G_ι (7).

---

(7) Pour que le filtre des voisinages de l'élément neutre dans $H = \prod_{\iota\in I} H_\iota$ soit un système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans une topologie

DÉFINITION 2. — *Le groupe topologique* G' *ainsi défini est appelé le produit direct local des groupes* G_ι, *relativement aux sous-groupes ouverts* H_ι.

Si, pour tout $\iota \in I$, H'_ι est un sous-groupe *ouvert* de H_ι, *égal* à H_ι excepté pour un nombre *fini* d'indices ι, le produit direct local des G_ι, relativement aux H'_ι, est *identique* au produit direct local des G_ι, relativement aux H_ι.

Le groupe discret G'/H est engendré par la *réunion* des sous-groupes K_J/H. Comme, pour toute partie finie J de I, K_J/H est isomorphe à $\prod_{\iota \in J} K_\iota/H$, G'/H est *produit direct* des sous-groupes K_ι/H, respectivement isomorphes à G_ι/H_ι [8].

Pour que G' soit *localement compact*, il faut et il suffit que tous les G_ι le soient et que, pour tout $\iota \in I$, excepté en nombre *fini*, H_ι soit *compact*. En effet, G' est un sous-groupe *ouvert* de G.

PROPOSITION 2. — *Soit* G *le produit direct local des groupes* G_ι, *relativement aux sous-groupes distingués ouverts* H_ι; *pour que* G *soit compact, (resp. discret), il faut et il suffit que, pour tout* $\iota \in I$, G_ι *soit compact (resp. discret) et que* $H_\iota = G_\iota$ *(resp.* $H_\iota = \{e_\iota\}$*), excepté au plus pour un nombre fini d'indices* ι. G *est alors le produit des groupes* G_ι *(resp. le produit direct des sous-groupes* G_ι*).*

En effet, si G est compact, tous les G_ι sont compacts et G/H est un groupe compact discret, donc un groupe fini. Comme il est produit direct des sous-groupes G_ι/H_ι, on a $G_\iota = H_\iota$ excepté au plus pour un nombre *fini* d'indices ι. G est donc produit des groupes G_ι. La réciproque est triviale.

Si G est discret, tous les G_ι sont discrets et H est un groupe fini. Comme il est produit des groupes G_ι, on a $H_\iota = \{e_\iota\}$ excepté au plus pour un nombre *fini* d'indices ι. G est produit direct des sous-groupes G_ι. La réciproque est triviale.

---

compatible avec la structure de groupe de G' il suffit de supposer que les H_ι sont des sous-groupes *ouverts* (non nécessairement *distingués*). On voit facilement que G' est l'adhérence du produit direct de la famille $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de sous-groupes de G.

[8] *Voir* N. BOURBAKI [VI], *Algèbre*, Chap. I, § 6, Ex. 18.

Pour que le groupe G, produit direct local des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes H_ι, soit *abélien*, il faut et il suffit que chacun des G_ι le soit. Si, dans ce cas, G et les G_ι sont notés *additivement*, on dit que G est *somme directe locale* des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes H_ι.

THÉORÈME 1. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact somme directe locale de groupes* G_ι, *relativement à des sous-groupes ouverts compacts* H_ι; *alors le dual* $\hat{G}$ *de* G *est somme directe locale des groupes* $\hat{G}_\iota$, *duals des groupes* G_ι, *relativement aux sous-groupes ouverts compacts* $H_\iota^\star$, *conjugués des* H_ι *dans* $\hat{G}_\iota$.

Identifions G_ι au sous-groupe de G formé des éléments dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf celle d'indice ι. Pour tout caractère $\hat{x}$ du groupe G, la restriction $\hat{x}_\iota$ de $\hat{x}$ à G_ι est un caractère de G_ι; l'application $\hat{x} \to (\hat{x}_\iota)_{\iota\in I}$ est une représentation φ du dual $\hat{G}$ de G dans le produit (non topologique) des groupes $\hat{G}_\iota$; nous allons montrer que φ est un isomorphisme du groupe topologique $\hat{G}$ sur la somme directe locale G′ des $\hat{G}_\iota$, relativement aux groupes $H_\iota^\star$.

Soit H le groupe compact produit des groupes compacts H_ι. La restriction $\hat{y}$ de $\hat{x}$ au groupe H est un caractère de H; on sait ([9]) que si $\hat{y}_\iota$ est la restriction de $\hat{y}$ (donc de $\hat{x}$) à H_ι, on a $\hat{y}_\iota = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, et, pour tout $x = (x_\iota) \in H$, $\hat{y}(x) = \sum_\iota \hat{y}_\iota(x_\iota)$ (somme finie d'après ce qui précède). On en conclut d'abord que $\hat{x}_\iota \in H_\iota^\star$ sauf pour un nombre fini d'indices, donc $(\hat{x}_\iota)_{\iota\in I}$ appartient bien à la somme directe locale G′ des $\hat{G}_\iota$ relativement aux $H_\iota^\star$.

Remarquons maintenant que tout $x \in G$ appartient à un sous-groupe K_J pour une partie finie J de I; si l'on pose $y = (y_\iota)_{\iota\in I}$ avec $y_\iota = 0$ si $\iota \in J$, $y_\iota = x_\iota$ si $\iota \notin J$, on a $y \in H$, donc

$$\hat{x}(x) = \hat{y}(y) + \sum_{\iota\in J} \hat{x}_\iota(x_\iota) = \sum_{\iota\in I} \hat{x}_\iota(x_\iota).$$

([9]) *Voir* L. PONTRJAGIN [V], Chap. V, § 34, et E. R. VAN KAMPEN [III], § 3, 6, *m*).

Réciproquement, pour tout $(\hat{x}_\iota)_{\iota\in I}$ appartenant à G′, et tout $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ de G, la somme $\sum_{\iota\in I} \hat{x}_\iota(x_\iota)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, donc a toujours un sens; si on la désigne par $\hat{x}(x)$, la représentation $\hat{x}$ de G dans **T** ainsi définie est un caractère de G, car elle est continue dans le sous-groupe ouvert H de G ([9]). Ceci montre que φ est un isomorphisme (de structure algébrique) de $\hat{G}$ *sur* G′.

Pour voir que φ est un isomorphisme du groupe *topologique* $\hat{G}$ sur le groupe *topologique* G′, il suffit de montrer que la restriction de φ au sous-groupe ouvert $H^\star$ de $\hat{G}$ est un isomorphisme de ce groupe topologique sur un sous-groupe ouvert de G′. Or $H^\star$ est un groupe topologique isomorphe au dual de G/H, et $H_\iota^{\star\prime}$ est de même isomorphe au dual de G_ι/H_ι; comme G/H est un groupe discret somme directe des G_ι/H_ι, on sait ([9]) que la restriction de φ à $H^\star$ est un isomorphisme de ce groupe topologique sur le produit $\prod_{\iota\in I} H_\iota^\star$; ce qui achève la démonstration.

3. Sous-groupes purs d'un groupe topologique abélien. — Soit G un groupe topologique abélien séparé et n un entier rationnel; $x \to nx$ est un *endomorphisme* continu f_n de G.

On notera qu'en général f_n n'est pas un *homomorphisme de* G *dans* G, même si f_n est une représentation biunivoque de G sur lui-même. En effet, soit $(G_\iota)_{\iota\in I}$ une famille infinie de groupes discrets isomorphes à **Q** et H_ι le sous-groupe des entiers rationnels de G_ι. Soit G le groupe topologique abélien produit local des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes ouverts H_ι. f_n est une représentation biunivoque continue de G sur lui-même, pour tout entier n. $H = \prod_{\iota\in I} H_\iota$ est un sous-groupe ouvert de G; $f_n(H)$ est l'ensemble des $(nx_\iota)_{\iota\in I}$, avec $x_\iota \in H_\iota$; si $f_n(H)$ était ouvert, il existerait une partie finie J de I telle que, si $H'_\iota = H_\iota$ pour $\iota \notin J$ et $H'_\iota = \{0\}$ pour $\iota \in J$, $\prod_{\iota\in I} H'_\iota \subset f_n(H)$, ce qui est absurde. Donc $f_n(H)$ n'est pas ouvert et f_n n'est pas un homomorphisme ([10]).

([10]) Un autre exemple du fait que f_n n'est pas un homomorphisme est le suivant : soit $(G_\iota)_{\iota\in I}$ une famille infinie de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/(p^2)$, Si $n > 0$, f_{-n} est *composé* de f_n et de la *symétrie* $x \to -x$. Si n et n' sont deux entiers > 0, on a $f_n \circ f_{n'} = f_{n'} \circ f_n = f_{nn'}$. Soit $G_{(n)}$ l'ensemble des $x \in G$ tels que $nx = 0$ et $G^{(n)}$ l'ensemble des $x \in G$ de la forme $x = nx'$. On a $\overset{-1}{f_n}(0) = G_{(n)}$ et $f_n(G) = G^{(n)}$; $G_{(n)}$ est donc un sous-groupe *fermé* de G.

Proposition 1. — *Si* G *est un groupe abélien séparé, somme directe locale d'une famille de groupes* $(G_\iota)_{\iota \in I}$, *relativement à des sous-groupes ouverts* H_ι, $G_{(n)}$ *est un groupe séparé, somme directe locale de la famille de groupes* $(G_{\iota(n)})_{\iota \in I}$ *relativement aux sous-groupes ouverts* $H_{\iota(n)}$ *de* $G_{\iota(n)}$.

En effet, si $x = (x_\iota)_{\iota \in I} \in G_{(n)}$, il existe une partie finie J de I telle que $x_\iota \in H_\iota$ si $\iota \notin J$; donc, pour tout $\iota \in I$, $x_\iota \in G_{\iota(n)}$ et, si $\iota \notin J$, $x_\iota \in H_\iota \cap G_{\iota(n)}$. Inversement, si $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$ appartient à la somme directe locale des $G_{\iota(n)}$, relativement aux $H_{\iota(n)}$, on a $nx_\iota = 0$ et $nx = 0$, donc $x \in G_{(n)}$.

$G^{(\infty)} = \bigcap\limits_{n>0} G^{(n)}$ est un sous-groupe de G. Si $x \in G^{(\infty)}$, on dit que x est de *hauteur infinie dans* G.

Définition 1. — *On dit qu'un sous-groupe* H *d'un groupe abélien séparé* G *est pur si, pour tout entier* $n > 0$, $H^{(n)} = G^{(n)} \cap H$ ([11]).

Si H est un sous-groupe pur de G, $H^{(\infty)} = G^{(\infty)} \cap H$.

Proposition 2. — *Pour qu'un sous-groupe* H *d'un groupe abélien*

H_ι le sous-groupe de G_ι, isomorphe à $\mathbf{Z}/(p)$ et G le groupe abélien *localement compact* somme directe locale des G_ι, relativement aux H_ι. $f_p(G)$ est partout dense dans $H = \prod\limits_{\iota \in I} H_\iota$ et $\neq H$; donc f_p n'est pas un homomorphisme de G dans G.

([11]) La notion du sous-groupe *pur* (Servanzuntergruppe) a été introduite par H. Prüfer [I] et, plus récemment, par L. Kulikoff [VIII]. Dans ce dernier Mémoire, on trouvera des propriétés des sous-groupes purs d'un groupe abélien discret. Une définition équivalente dans le cas où tous les éléments $\neq 0$ du groupe G sont d'ordre infini a été donnée et étudiée par E. Liapin, dans *On the decomposition of abelian groups into direct sum of rational groups* (*Rec. Math. Moscou*, N. S., 8, Moscou, 1940, p. 205-235).

séparé G *soit pur, il faut et il suffit que, pour tout entier premier* p, *on ait* $H^{(p^k)} = G^{(p^k)} \cap H$, *pour tout entier* $k > 0$.

C'est évidemment nécessaire. Pour montrer que c'est suffisant, on peut se borner à montrer que, si p est un entier premier et q un entier premier avec p, « $H^{(p^k)} = G^{(p^k)} \cap H$ et $H^{(q)} = G^{(q)} \cap H$ » entraîne « $H^{(p^kq)} \supset G^{(p^kq)} \cap H$ ». Soit $x \in G^{(p^kq)} \cap H$. Il existe $z \in G$ tel que $x = p^k q z$. Donc $x \in G^{(p^k)} \cap H = H^{(p^k)}$ et il existe $y \in H$ tel que $x = p^k y$; donc $p^k(y - qz) = 0$ et l'ordre de $y - qz$ est une puissance de p inférieure à p^k. p et q étant premiers entre eux, dans le groupe cyclique engendré par $y - qz$ il existe z' tel que $y - qz = qz'$ et l'on a $y = q(z + z')$. Donc $y \in G^{(q)} \cap H = H^{(q)}$ et il existe $y' \in H$ tel que $y = qy'$; d'où $x = p^k q y' \in H^{(p^kq)}$.

On notera qu'en général, si H est un sous-groupe *pur* d'un groupe abélien séparé G, son adhérence $\overline{H}$ n'est pas un sous-groupe *pur* de G.

Par exemple, soit G le groupe abélien localement compact, produit local d'une famille infinie $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/(4)$, relativement aux sous-groupes H_ι de G_ι isomorphes à $\mathbf{Z}/(2)$. On a $G^{(2)} = \prod_{\iota \in I} H$, $G^{(4)} = \{0\}$ et $G^{(p^k)} = G$ si p est un entier premier > 2. Soit H le sous-groupe de G, somme directe des sous-groupes G_ι, $H^{(2)}$ est somme directe des sous-groupes H_ι et $H^{(2)} = G^{(2)} \cap H$. $H^{(4)} = \{0\}$ et $H^{(p^k)} = H = G^{(p^k)} \cap H$ si $p > 2$, donc H est pur. L'adhérence $\overline{H}$ du sous-groupe H est la somme directe locale des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes H_ι, et $\overline{H}^{(2)}$ est la somme directe de la famille de sous-groupes $(H_\iota)_{\iota \in I}$; I étant infini, $\overline{H}^{(2)}$ n'est pas fermé et est partout dense dans $\prod_{\iota \in I} H_\iota = G^{(2)}$. Donc $\overline{H}^{(2)} \neq G^{(2)} \cap \overline{H}$ et $\overline{H}$ n'est pas un sous-groupe pur de G.

Cependant, si H est un sous-groupe *pur relativement compact* d'un groupe abélien séparé G dont tous les éléments sont de hauteur infinie, son adhérence $\overline{H}$ est encore un sous-groupe pur de G. En effet, on a $\overline{H} = \overline{H}^{(n)} = \overline{H^{(n)}}$, car $f_n(\overline{H}) = \overline{f_n(H)}$, puisque $\overline{H}$ est compact.

On remarquera que, si H est un sous-groupe de G dont tous les éléments sont de hauteur infinie dans H, H est *pur*.

Si G est un groupe abélien séparé produit de deux groupes H et K, H et K sont deux sous-groupes purs de G.

Proposition 3 ([12]). — *Si* G *est un groupe abélien séparé et si* H *est un sous-groupe pur ouvert dont tous les éléments sont de hauteur infinie dans* H, G *est isomorphe à* $H \times (G/H)$ ([13]).

Définition 2. — *On dit qu'un groupe abélien séparé* G *est réduit si tout sous-groupe pur fermé* H *de* G *dont tout élément est de hauteur infinie dans* H *se réduit à* $\{0\}$.

Dans un groupe abélien discret G, la *réunion* de tous les sous-groupes purs K tels que tout élément de K soit de hauteur infinie dans K est un sous-groupe H de G ayant les mêmes propriétés et, d'après la proposition 3, G est produit de H et d'un groupe *réduit* isomorphe à G/H.

Théorème 1. — *Si* G *est un groupe abélien localement compact, il existe un groupe abélien localement compact* $\widetilde{G}$ *dont tous les éléments sont de hauteur infinie et un sous-groupe ouvert* G' *de* $\widetilde{G}$, *isomorphe à* G *et tel que tous les éléments de* $\widetilde{G}/G'$ *soient d'ordre fini.*

Soit G un groupe abélien localement compact, S un *système de générateurs* de G et H un groupe abélien (non topologique) somme directe d'une famille $(H_y)_{y\in S}$ de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}$. Désignons par H'_y le sous-groupe des entiers rationnels de H_y : H'_y est un sous-groupe cyclique infini engendré par un élément z_y de H. La somme directe H' de la famille $(H'_y)_{y\in S}$ est un sous-groupe de H et, si $z \in H'$, il existe une partie finie X de S et des entiers n_y ($y \in X$), déterminés de façon unique, tels que $z = \sum_{y\in X} n_y z_y$. On vérifie facilement que $z \to \sum_{y\in X} n_y y$ est une représentation du groupe H' sur le groupe (non topologique) G. Si K désigne le sous-groupe de H' formé par

---

([12]) On trouvera une démonstration de cette proposition, connue sous le nom de *Lemme d'Alexander*, dans A. Weil [VII], Chap. VI, § 26, lemme 1. *Cf.* aussi R. Baer [IV].

([13]) Cette proposition est aussi exacte dans le cas où tous les éléments de H sont d'*ordre borné*. *Voir* L. Kulikoff [VIII], th. 5.

les éléments $\sum_{y\in X} n_y z_y$ tels que $\sum_{y\in X} n_y y = 0$, $\sum_{y\in X} n_y y \to K + \sum_{y\in X} n_y z_y$ est un isomorphisme φ du groupe G sur le groupe quotient $G' = H'/K$. G' est un sous-groupe du groupe quotient $\widetilde{G} = H/K$ dont tous les éléments sont évidemment de hauteur infinie. D'autre part, H/H' est isomorphe à $\widetilde{G}/G'$ et tous les éléments de H/H' sont d'ordre fini : en effet, H/H' est somme directe de la famille de sous-groupes $(H_y/H'_y)_{y\in S}$ de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Enfin, l'image $\varphi(\mathfrak{V})$ par φ du filtre $\mathfrak{V}$ des voisinages de θ dans G est une base de filtre dans $\widetilde{G}$ et il est immédiat que $\varphi(\mathfrak{V})$ est un système fondamental de voisinages de o dans une topologie *compatible* avec la structure de groupe de $\widetilde{G}$: φ est un isomorphisme du groupe topologique G dans le groupe $\widetilde{G}$ muni de cette topologie et $G' = \varphi(G)$ est un sous-groupe ouvert de $\widetilde{G}$. Si V est un voisinage compact de o dans G, $\varphi(V)$ est un voisinage compact de o dans $\widetilde{G}$ et $\widetilde{G}$ est localement compact, d'où le théorème ([14]).

Si G est *totalement discontinu*, il en est de même de $\widetilde{G}$. En effet, comme G' est un sous-groupe ouvert de $\widetilde{G}$, la composante connexe de o dans $\widetilde{G}$ est identique à la composante connexe de o dans G', c'est-à-dire $\{0\}$.

Si G est *réunion de sous-groupes compacts*, il en est de même de $\widetilde{G}$. En effet, comme tous les éléments de $\widetilde{G}/G'$ sont d'ordre fini, si $x \in \widetilde{G}$, il existe un entier n tel que $nx \in G'$. Soit H l'adhérence du sous-groupe engendré par nx dans G'. H est compact et le sous-groupe engendré par x dans $\widetilde{G}$ est contenu dans l'ensemble compact $\bigcup_{k=0}^{n-1}(kx + H)$, donc *relativement compact*, d'où la propriété.

Dans le cas où G est un groupe abélien *discret* dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, on peut préciser le théorème 1 comme suit :

THÉORÈME 2. — *Soit* G *un groupe abélien discret dont tous les*

([14]) Ce théorème est évidemment encore exact dans le cas où G n'est pas localement compact; mais alors $\widetilde{G}$ n'est pas localement compact.

éléments $\neq 0$ *sont d'ordre infini; il existe alors un groupe discret* $\widetilde{G}$ *somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à* $\mathbf{Q}$ *et un sous-groupe* G' *de* $\widetilde{G}$ *isomorphe à* G *et tel que tous les éléments de* $\widetilde{G}/G'$ *soient d'ordre fini.*

En effet, G est un **Z**-*module régulier* et, d'après un théorème de C. Chevalley [15], il existe un *espace vectoriel* $\widetilde{G}$ par rapport au corps $\mathbf{Q}$, contenant un sous-module G' isomorphe à G et tel que $\widetilde{G} = \mathbf{Q}G'$. Si $x \in \widetilde{G}$, il existe des entiers m et n tel que

$$\frac{m}{n}x = x' \in G',$$

c'est-à-dire $mx = nx' \in G'$ et la classe de x dans $\widetilde{G}/G'$ est d'ordre fini. D'autre part, l'espace vectoriel $\widetilde{G}$ est somme directe d'une famille de sous-modules $(\mathbf{Q}x_\iota)_{\iota \in I}$, donc isomorphes à $\mathbf{Q}$, d'où le théorème.

En particulier si tous les éléments de G sont de hauteur infinie, $\widetilde{G} = G'$ et G est somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}$.

On *identifie* les groupes G et G' et l'on dit que le groupe $\widetilde{G}$ est *associé* à G. Ce groupe $\widetilde{G}$ est déterminé à une isomorphie près par la condition de contenir un sous-groupe G' isomorphe à G et tel que toutes les classe de $\widetilde{G}/G'$ soient d'ordre fini. Plus précisément [15] :

PROPOSITION 4. — *Soit* G *et* G_1 *deux groupes abéliens discrets dont tous les éléments* $\neq 0$ *sont d'ordre infini,* $\widetilde{G}$ *et* $\widetilde{G}_1$ *les groupes qui leur*

---

[15] Ce théorème de Chevalley s'énonce ainsi : *Soit* M *un module régulier sur un anneau d'intégrité* A; *il existe un espace vectoriel* $\widetilde{M}$ *sur le corps des quotients* K *de* A *et un sous-module* (*sur* A) M' *de* $\widetilde{M}$ *isomorphe à* M *et tel que* $\widetilde{M} = KM'$. *Si* M_1 *est un autre* A-*module régulier et si* $\widetilde{M}_1$ *est l'espace vectoriel qui lui est ainsi associé, tout isomorphisme de* M *sur* M_1 *se prolonge de façon unique en un isomorphisme de* $\widetilde{M}$ *sur* $\widetilde{M}_1$. *Voir* C. CHEVALLEY, *L'arithmétique dans les algèbres de matrices* (*Actualités Scientifiques et Industrielles*, n° 323, Hermann, Paris, Appendice I, p. 27. Pour le cas présent, *voir* aussi R. BAER [IV]).

sont associés; alors tout isomorphisme f de G *sur* G_1 *se prolonge de façon unique en un isomorphisme de* $\widetilde{G}$ *sur* $\widetilde{G}_1$.

Soient G un groupe abélien localement compact, $\hat{G}$ son dual et $\hat{f}_n$ le *transposé* de l'endomorphisme f_n. $\hat{f}_n$ n'est autre que l'endomorphisme continu $\hat{x} \to n\hat{x}$ de $\hat{G}$, car on a

$$\langle x, \hat{f}_n(\hat{x})\rangle = \langle f_n(x), \hat{x}\rangle = \langle nx, \hat{x}\rangle = \langle x, n\hat{x}\rangle.$$

Le conjugué dans $\hat{G}$ du sous-groupe fermé $G_{(n)}$ de G est donc l'adhérence du sous-groupe $\hat{G}^{(n)}$ de G. En effet, $\overset{-1}{f_n}(0) = G_{(n)}$ et $\hat{f}_n(\hat{G}) = \hat{G}^{(n)}$.

Proposition 5. — *Si* G *est un groupe abélien localement compact ayant un sous-groupe pur ouvert compact, pour tout entier* $n > 0$, f_n *est un homomorphisme de* G *dans lui-même.*

Soit H un sous-groupe pur ouvert compact de G. La restriction de f_n à H coïncide avec l'endomorphisme $x \to nx$ de H. Cet endomorphisme est continu et, comme H est compact, c'est un homomorphisme de H dans lui-même. On a

$$f_n(H) = H^{(n)} = H \cap G^{(n)} = H \cap f_n(G);$$

$f_n(H)$ est donc un sous-groupe ouvert de $G^{(n)}$ et f_n est un homomorphisme de G dans lui-même.

De plus, $G^{(n)}$ est alors un sous-groupe fermé de G isomorphe à $G/G_{(n)}$. Le transposé $\hat{f}_n$ de f_n est aussi un homomorphisme de $\hat{G}$ dans lui-même et $\hat{G}^{(n)}$ est un sous-groupe *fermé* de $\hat{G}$ conjugué dans $\hat{G}$ du sous-groupe $G_{(n)}$ de G. En particulier, $\hat{G}^{(n)} = \hat{G}$ équivaut à $G_{(n)} = \{0\}$.

Corollaire. — *Pour qu'un groupe abélien compact* G *ait tous ses éléments* $\neq 0$ *d'ordre infini, il faut et il suffit que tous les éléments du groupe discret* $\hat{G}$ *soient de hauteur infinie.*

4. Groupes abéliens localement compacts connexes. — Proposition 1. — *Dans un groupe abélien compact* G, *l'ensemble des éléments de*

hauteur infinie dans G *est un sous-groupe pur fermé, identique à la composante connexe de l'élément neutre.*

En effet, $G^{(n)}$ est un sous-groupe fermé de G et $G^{(\infty)} = \bigcap_{n>0} G^{(n)}$ est aussi un sous-groupe fermé de G. Si $\hat{G}$ est le groupe abélien discret dual de G, le conjugué dans G de $\hat{G}_{(n)}$ est le sous-groupe $G^{(n)}$; donc, dans G, $G^{(\infty)}$ est le conjugué du sous-groupe $\bigcup_{n>0} \hat{G}_{(n)}$, c'est-à-dire du sous-groupe $\hat{F}$ des éléments d'ordre *fini* de $\hat{G}$. $G^{(\infty)}$ est donc identique à la composante connexe de o dans G ([16]). Le dual de $G^{(\infty)}$ est le groupe quotient $\hat{G}/\hat{F}$ dont toutes les classes différentes de $\hat{F}$ sont d'ordre infini : tous les éléments de $G^{(\infty)}$ sont donc de hauteur infinie dans $G^{(\infty)}$, d'après le raisonnement précédent appliqué au groupe $G^{(\infty)}$, et $G^{(\infty)}$ est un sous-groupe pur de G.

Corollaire. — *Dans un groupe abélien localement compact la composante connexe de l'élément neutre est un sous-groupe pur fermé dont tous les éléments sont de hauteur infinie.*

En effet, si $\mathbf{R}^n \times G$ est un groupe abélien localement compact, G étant un groupe abélien ayant un sous-groupe ouvert compact, la composante connexe de o dans G est un groupe compact connexe K dont tous les éléments sont de hauteur infinie et la composante connexe de o dans $\mathbf{R}^n \times G$ est $\mathbf{R}^n \times K$.

Soit G un groupe abélien séparé ayant un sous-groupe ouvert compact. La composante connexe de l'élément neutre de G est un sous-groupe pur compact K dont tous les éléments sont de hauteur infinie. On peut donc prolonger l'application identique de K sur lui-même en une représentation f de G sur K ([17]). $\overset{-1}{f}(o) = K'$ est un sous-groupe de G et le groupe (non topologique) G est isomorphe au produit des groupes K et K'. Pour que le groupe topologique G soit isomorphe à $K \times K'$, il faut et il suffit que la représentation f soit

([16]) *Voir* note ([6]).

([17]) *Voir* A. Weil [VII], Chap. I, § 4 et Chap. III, § 26, lemme 1.

continue ou bien que K' soit un sous-groupe *fermé* de G ([18]). Il en est ainsi, en particulier, d'après la proposition 3 du paragraphe **3**, lorsque K est un sous-groupe ouvert de G. Donc :

PROPOSITION 2. — *Si dans un groupe abélien localement compact* G, *la composante connexe de l'élément neutre est un sous-groupe ouvert* G' *de* G, G *est isomorphe au produit du groupe connexe* G' *et d'un groupe discret* G/G'.

Plus particulièrement, il en est ainsi lorsque G est *localement connexe*. En effet, il existe alors un voisinage connexe V de o et la composante connexe de o contient V.

Soit G un groupe compact connexe. Ou bien G est *localement connexe*, ou bien tous les points de G sont des points *singuliers* ([19]) : en effet, s'il existe un élément x de G tel que tout système fondamental de voisinages de x contienne un voisinage non connexe, il en est de même pour tout système fondamental de voisinages d'un élément quelconque de G. Dans ce dernier cas, on dit que G est *non localement connexe*.

Si G est un groupe abélien compact connexe, tous les éléments $\neq$ o du groupe abélien discret $\hat{G}$, dual de G, sont d'ordre infini et inversement.

DÉFINITION 1. — *Le groupe abélien compact* $\mathbf{S}$, *dual du groupe additif discret de* $\mathbf{Q}$, *est appelé groupe solénoïdal* ([20]).

Le groupe $\mathbf{S}$ est un groupe connexe, à *une dimension*. Tous ses éléments $\neq$ o sont d'ordre infini. Tout sous-groupe fermé de $\mathbf{S}$ et $\neq \mathbf{S}$ est totalement discontinu.

([18]) *Voir* N. BOURBAKI [VI], *Topologie générale,* Chap. III, § **2**, Ex. 19.

([19]) On dit qu'un point x d'un espace topologique compact connexe E est *singulier* si tout système fondamental de voisinages de x contient un ensemble non connexe. *Voir* N. BOURBAKI [VI], *Topologie générale*, Chap. II, § **4**, Ex. 17.

([20]) Le groupe *solénoïdal* $\mathbf{S}$ a été défini et étudié par D. VAN DANTZIG, dans *Über topologisch-homogene Continua* (*Fund. Math.*, vol. **14**, 1930, p. 102-125).

Théorème 1. — *Soit* G *un groupe abélien compact connexe; il existe alors un groupe* $\widetilde{G}$, *produit d'une famille de groupes solénoïdaux et un sous-groupe fermé totalement discontinu* H *de* $\widetilde{G}$ *tel que* G *soit isomorphe à* $\widetilde{G}/H$. *Le groupe* $\widetilde{G}$ *est déterminé, à une isomorphie près, par cette propriété.*

En effet le dual $\hat{G}$ du groupe G est un groupe discret dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini. Le groupe $\widetilde{G}$, dual du groupe G' associé au groupe $\hat{G}$ est produit de groupes isomorphes à $\mathbf{S}$, car G' est somme directe de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}$. Si H désigne le conjugué de $\hat{G}$ dans $\widetilde{G}$, H est un sous-groupe fermé de $\widetilde{G}$, dual de $G'/\hat{G}$, donc totalement discontinu et $\widetilde{G}/H$ est isomorphe au dual de $\hat{G}$, c'est-à-dire à G. Enfin, si G_1 est un autre groupe abélien compact connexe et $\widetilde{G}_1$ le groupe dual du groupe G'_1, associé au groupe discret $\hat{G}_1$ dual de de G_1, tout isomorphisme $\hat{f}$ de $\hat{G}$ sur $\hat{G}_1$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme f de G' sur G'_1, donc tout isomorphisme $\overset{-1}{f}$ de G sur G_1 se prolonge de façon unique en un isomorphisme $\overset{-1}{f'}$ de $\widetilde{G}$ sur $\widetilde{G}_1$. H est un groupe abélien compact totalement discontinu dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini; nous déterminerons sa structure dans le paragraphe 4 du Chapitre III.

En particulier, si tous les éléments $\neq 0$ du groupe G sont d'ordre infini, G est produit d'une famille de groupes solénoïdaux.

Si G a un nombre fini n de dimensions, il y a exactement n éléments *linéairement indépendants* dans son dual $\hat{G}$ ([21]), et le groupe associé à $\hat{G}$ est somme directe de n sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}$. Donc :

Proposition 3. — *Si* G *est un groupe abélien compact connexe à* n *dimensions, il est isomorphe au quotient* $\mathbf{S}^n/H$ *de* $\mathbf{S}^n$ *par un sous-groupe fermé totalement discontinu* H.

La réciproque est triviale.

([21]) *Voir* E. R. van Kampen [III], § 3, 6, *h*, et A. Weil [VII], Chap. VI, § 29.

D'autre part, on sait [22] que tout groupe compact G est *limite projective d'une famille* $(L_\iota)_{\iota \in I}$ *de groupes de Lie* compacts. Si G est connexe, tous les L_ι le sont aussi et si G a *n dimensions*, on peut supposer que tous les L_ι ont n dimensions. Donc tout groupe abélien compact connexe est limite projective d'une famille de groupes $(\mathbf{T}^{n_\iota})_{\iota \in I}$. En particulier :

Proposition 4. — *Si* G *est un groupe abélien compact connexe à n dimensions, il existe un groupe abélien compact* G′ *totalement discontinu, ayant un système fondamental dénombrable de voisinages de* o *tel que* G *soit isomorphe au quotient de* $\mathbf{R}^n \times G'$ *par un sous-groupe isomorphe à* $\mathbf{Z}^n$ [23].

Nous déterminerons la structure du groupe G′ dans le paragraphe 4 du Chapitre II et dans le paragraphe 1 du Chapitre III.

Si G est *localement connexe,* il est isomorphe à $\mathbf{T}^n$.

CHAPITRE II.

Groupes topologiques primaires.

1. Groupes topologiques primaires. — Définition 1. — *On dit qu'un groupe topologique séparé* G *est primaire (associé à l'entier premier p), si, pour tout* $x \in G$, *la représentation* $n \to x^n$ *de* $\mathbf{Z}$ *(muni de la structure p-adique) dans* G *se prolonge par continuité en une représentation de* $\mathbf{Z}_p$ *dans* G [1].

---

[22] On trouvera une démonstration de ce fait dans A. Weil [VII], Chap. V, § 25.

[23] *Voir* A. Weil [VII], Chap. V, § 25.

[1] Conformément aux notations adoptées, $\mathbf{Z}_p$ (resp. $\mathbf{Q}_p$) désigne l'anneau compact des entiers p-adiques (resp. *le corps* localement compact des nombres p-adiques), $\mathfrak{p}$ désigne l'*idéal principal* (p) de $\mathbf{Z}_p$. On dit qu'un *entier* p-adique est de *hauteur* p^r s'il appartient à $\mathfrak{p}^r \cap \complement \mathfrak{p}^{r+1}$. Une définition équivalente à celle des groupes primaires compacts a été introduite par N. Jacobson, dans *Locally compact totally disconnected rings* (*American Journal of Mathematics*, t. LVIII, 1936, p. 433).

La représentation ainsi obtenue, qu'on note $q \to x^q$, est unique et est un *homomorphisme* π_x de $\mathbf{Z}_p$ dans G, car $\mathbf{Z}_p$ est compact et G séparé. Donc, pour tout $x \in G$, $\pi_x(\mathbf{Z}_p)$ est un sous-groupe abélien compact de G, et c'est le plus petit sous-groupe fermé contenant x, car c'est *l'adhérence* du sous-groupe engendré par x. D'autre part, $\overset{-1}{\pi}_x(e)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbf{Z}_p$, donc un $\mathfrak{p}^r$ (resp. $\{0\}$) si x est d'ordre fini (resp. infini) et $\pi_x(\mathbf{Z}_p)$ isomorphe à $\mathbf{Z}_p/\overset{-1}{\pi}_x(e)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/(p^r)$ (resp. $\mathbf{Z}_p$).

Proposition 1. — *Étant donné un groupe topologique séparé* G, *il existe au plus un entier premier p tel que* G *soit primaire (associé à p).*

Soit G un groupe primaire (associé à p) et primaire (associé à $p' \neq p$). Alors, si $x \in G$, $\pi_x(\mathbf{Z}_p) = \pi'_x(\mathbf{Z}_{p'})$, car c'est l'adhérence du sous-groupe engendré par x, ce qui est absurde si $x \neq 0$, d'après ce qui précède.

Tout sous-groupe *fermé* d'un groupe primaire (ass. à p) est évidemment un groupe primaire (associé au même entier).

Proposition 2. — *Tout sous-groupe fini d'un groupe primaire (associé à p) a pour ordre une puissance de p.*

En effet, tout élément d'ordre fini d'un groupe primaire G (associé à p) a pour ordre une puissance de p. Si H est un sous-groupe *fini* de G d'ordre n et si p' est un diviseur premier de n, il existe $x \in G$ d'ordre p' ([2]), mais x a pour ordre une puissance de p, donc $p = p'$ et $n = p^r$.

Proposition 3. — *L'image par une représentation continue d'un groupe primaire (associé à p) dans un groupe séparé est un groupe primaire (associé au même entier).*

En effet, G étant un groupe primaire (associé à p) et f une représentation *continue* de G dans un groupe séparé, pour tout $x \in G$,

---

([2]) *Voir* A. Speiser, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 2, Kap. § 14, Satz 40.

$q \to f(x^q)$ est une représentation continue de $\mathbf{Z}_p$ dans G, prolongeant la représentation $n \to f(x^n) = (f(x))^n$ de $\mathbf{Z}$ dans G.

Corollaire. — *Si* H *est un sous-groupe distingué fermé d'un groupe primaire* G (*associé à p*), G/H *est un groupe primaire* (*associé au même entier*).

En effet, G/H est l'image de G par l'*homomorphisme canonique* $x \to x\mathrm{H}$.

Proposition 4. — *Soit* $(\mathrm{G}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ *une famille de groupes topologiques séparés; pour que le groupe* $\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{G}_\iota$ *soit primaire* (*associé à p*), *il faut et il suffit que, pour tout* $\iota \in \mathrm{I}$, G_ι *soit primaire* (*associé à p*).

En effet, si pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, G_ι est primaire (associé à p) quel que soit $x_\iota \in \mathrm{G}_\iota$, $q \to (x_\iota^q)_{\iota \in \mathrm{I}}$ est une représentation continue de $\mathbf{Z}_p$ dans $\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{G}_\iota$, prolongeant la représentation $n \to (x_\iota^n)_{\iota \in \mathrm{I}}$. Inversement, si $\mathrm{G} = \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{G}_\iota$ est primaire (associé à p) pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, $pr_\iota(\mathrm{G}) = \mathrm{G}_\iota$ est un groupe primaire (associé à p), d'après la proposition 2.

Il en résulte que, pour qu'un groupe topologique G, *limite projective* [3] d'une famille $(\mathrm{G}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ de groupes topologiques séparés, *relativement à des homomorphismes* $f_{\iota\varkappa}$, soit primaire (associé à p) il faut et il suffit que, pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, G_ι soit primaire (associé à p). C'est suffisant car G est un sous-groupe *fermé* de $\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{G}_\iota$. C'est nécessaire, car G_ι est l'image de G par l'homomorphisme pr_ι de G sur G_ι.

Proposition 5. — *Pour qu'un groupe séparé complet* G *soit primaire* (*associé à p*), *il faut et il suffit que, pour tout* $x \in \mathrm{G}$, *la représentation* $n \to x^n$ *de* $\mathbf{Z}$ (*muni de la structure p-adique*) *dans* G *soit continue*.

---

[3] La théorie des limites projectives, avec les notations utilisées ici, est exposée par A. Weil [VII], Chap. I, § 5.

C'est évidemment nécessaire; c'est suffisant d'après la proposition suivante : *Toute représentation continue d'un sous-groupe partout dense d'un groupe complet* G *dans un groupe complet* G' *peut être prolongée par continuité en une représentation continue de* G *dans* G' ([4]).

Si G est un groupe primaire (associé à p) non complet et admettant un groupe *complété* $\widetilde{G}$, le groupe topologique $\widetilde{G}$ n'est pas en général primaire (associé à p).

Par exemple, dans le tore **T**, qui n'est primaire (associé à aucun entier premier p), le sous-groupe des éléments dont l'ordre est une puissance de p est partout dense et primaire (associé à p).

Cependant le groupe complété $\widetilde{G}$ d'un groupe abélien primaire G (associé à p) est primaire (associé au même entier) dans le cas où l'application $(n, x) \rightarrow nx$ de $\mathbf{Z} \times G$ sur G est continue ($\mathbf{Z}$ étant muni de la structure p-adique). En effet, $(n, x) \rightarrow nx$ est une *application bilinéaire continue* de $\mathbf{Z} \times G$ sur G et l'on peut la *prolonger par continuité* ([5]) en une application bilinéaire continue $(q, x) \rightarrow qx$ de $\mathbf{Z}_p \times \widetilde{G}$ sur $\widetilde{G}$ et, d'après le *théorème de continuité partielle* ([6]), pour tout $x \in \widetilde{G}$, la représentation $q \rightarrow qx$ de $\mathbf{Z}_p$ dans $\widetilde{G}$ est continue et prolonge la représentation $n \rightarrow nx$; donc $\widetilde{G}$ est primaire (associé à p).

Définition 2. — *On dit qu'un groupe est un p-groupe si chacun de ses éléments a pour ordre une puissance de l'entier premier p.*

Proposition 6. — *Pour qu'un groupe discret soit primaire (associé à p), il faut et il suffit qu'il soit un p-groupe.*

Toute structure topologique séparée compatible avec la structure d'un p-groupe en fait un groupe primaire (associé à p). Cela résulte trivialement de la définition 1.

Proposition 7. — *Soient* G *un groupe séparé complet et* H *un sous-groupe*

([4]) *Voir* N. Bourbaki [VI], *Topologie générale*, Chap. III, § 3. Remarque suivant la proposition 6.

([5]) *Voir* N. Bourbaki [VI], *Topologie générale*, Chap. III, § 5, th. 1.

([6]) *Voir* N. Bourbaki [VI], *Topologie générale*, Chap. I, § 8, th. 2.

distingué ouvert de G; *pour que* G *soit primaire* (*associé à* p) *il faut et il suffit que* H *et* G / H *soient des groupes primaires* (*associés à* p).

C'est nécessaire d'après le corollaire de la proposition 3. C'est suffisant, car, si G/H est primaire (associé à p), c'est un p-groupe discret et, pour tout $x \in G$, il existe un entier $r \geqq 0$ tel que $x^{p^r} \in H$. D'autre part, H est ouvert, donc complet et, pour tout $x \in H$ et tout voisinage V de dans G, il existe un entier $r' \geqq 0$ tel que, pour tout $k \geqq 0$, $x^{kp^{r'}} \in V \cap H$. Donc, pour tout $x \in G$ et tout voisinage V de e il existe $s = r + r'$ tel que, pour tout $k \geqq 0$, $x^{kp^s} \in V \cap H \subset V$, ce qui entraîne la continuité de la représentation $n \to x^n$ de $\mathbf{Z}$ (muni de la structure p-adique) dans G et, comme G est complet, il est primaire (associé à p).

Il en résulte que, pour que la *somme directe locale* d'une famille $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de groupes abéliens *complets*, relativement à des sous-groupes ouverts H_ι, soit primaire (associé à p), il faut et il suffit que chacun des groupes G_ι soit primaire (associé à p). C'est nécessaire, car G_ι est isomorphe à un sous-groupe fermé de G. C'est suffisant, car, si, pour tout $\iota \in I$, G_ι est primaire (associé à p), $H = \prod_{\iota \in I} H_\iota$ est primaire (associé à p) et G/H est un p-groupe discret, car il est *somme directe* de p-groupes discrets isomorphes à G_ι / H_ι.

2. Groupes localement compacts primaires. — Proposition 1. — *Tout groupe compact primaire* (*associé à* p) *est limite projective d'une famille de p-groupes finis et inversement.*

Tout groupe compact G est limite projective d'une famille $(L_\iota)_{\iota \in I}$ de groupes de Lie compacts. Pour que G soit primaire (associé p), il faut et il suffit que, pour tout $\iota \in I$, L_ι le soit (paragraphe **1**). Or, si L_ι est primaire, c'est nécessairement un p-groupe fini, car si L_ι n'était pas fini, il contiendrait un sous-groupe compact isomorphe à $\mathbf{T}$, ce qui est absurde, puisque $\mathbf{T}$ n'est pas primaire.

La réciproque est triviale.

Proposition 2. — *Pour qu'un groupe compact* G *soit primaire* (*associé à* p), *il faut et il suffit qu'il soit totalement discontinu et que, pour* *chacun des sous-groupes distingués ouverts* H *de* G, G/H *soit un p-groupe fini.*

C'est nécessaire, car la composante connexe de e dans G est limite projective des composantes connexes des éléments neutres des L_ι (7), donc $\{e\}$; pour tout sous-groupe distingué ouvert H de G, G/H est un groupe compact discret primaire (associé à p), c'est-à-dire un p-groupe fini. C'est suffisant, car, si G est compact et *totalement discontinu* l'ensemble $\mathfrak{J}$ des sous-groupes distingués ouverts de G est un système fondamental de voisinage de e (8); G est donc primaire (associé à p), car c'est un sous-groupe *fermé* du groupe primaire $\prod\limits_{H \in \mathfrak{J}} G/H$. En particulier, tout groupe abélien compact primaire (associé à p) est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe produit de p-groupes cycliques.

De la proposition 2 du paragraphe 1 on déduit immédiatement :

PROPOSITION 3. — *L'image d'un groupe abélien localement compact primaire (associé à* p*) par chacun de ses caractères est un sous-groupe cyclique de* **T** *dont l'ordre est une puissance de* p*, ou bien la réunion de tous ces sous-groupes.*

THÉORÈME 1 — *Le groupe dual d'un groupe abélien localement compact primaire (associé à* p*) est primaire (associé au même entier).*

Soient G un groupe abélien localement compact primaire (associé à p) et $\hat{G}$ son dual. Montrons d'abord que, si G est compact, $\hat{G}$ est un p-groupe discret; en effet, si $\hat{x}$ est un caractère de G, $\hat{x}(G)$ est un sous-groupe fermé de **T**, donc un groupe cyclique d'ordre p^r, d'après la proposition précédente. Autrement dit, pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, il existe $r \geqq 0$ tel que, pour tout $x \in G$, $p^r \hat{x}(x) = 0$ et $\hat{x}$ est d'ordre p^r dans $\hat{G}$, qui est donc un p-groupe. Supposons maintenant G localement compact; alors $\hat{G}$ est localement compact et totalement discontinu :

---

(7) *Voir* A. WEIL [VII], Chap. V, § 25.

(8) *Voir* N. BOURBAKI [VI], *Topologie générale*, Chap. III, § 3, Ex. 19.

en effet, pour tout $x \in \mathrm{G}$, le sous-groupe engendré par x est *relativement compact* [9]. Donc, dans $\hat{\mathrm{G}}$, l'ensemble $\mathcal{J}$ des sous-groupes ouverts compacts de $\hat{\mathrm{G}}$ est un système fondamental de voisinage de zéro. Si $\mathrm{H}^\star \in \mathcal{J}$, $\hat{\mathrm{G}}/\mathrm{H}^\star$ est dual d'un sous-groupe ouvert compact H de G, conjugué de $\mathrm{H}^\star$. H est primaire (associé à p), donc $\hat{\mathrm{G}}/\mathrm{H}^\star$ est un p-groupe, d'après la remarque précédente. Pour tout $\hat{x} \in \hat{\mathrm{G}}$ et tout $\mathrm{H}^\star \in \mathcal{J}$, il existe donc un entier $r \geqq 0$ tel que $kp^r \hat{x} \in \mathrm{H}^\star$ pour tout entier k. Ceci entraîne la continuité de la représentation $n \to n\hat{x}$ de $\mathbf{Z}$ (muni de la structure p-adique) dans $\hat{\mathrm{G}}$, pour tout $\hat{x} \in \hat{\mathrm{G}}$. $\hat{\mathrm{G}}$ étant complet est primaire (associé à p).

De plus la valeur au point x du caractère $q\hat{x}$ ($q \in \mathbf{Z}_p$) est égale à la valeur au point qx du caractère $\hat{x}$. En effet, on a

$$q\hat{x}(x) = \lim_{\substack{n \in \mathbf{Z} \\ n \to q}} n\hat{x}(x) = \lim_{\substack{n \in \mathbf{Z} \\ n \to q}} \hat{x}(nx) = \hat{x}\Big(\lim_{\substack{n \in \mathbf{Z} \\ n \to q}} nx\Big) = \hat{x}(qx),$$

car $\hat{x}$ est continu.

Corollaire 1. — *Pour qu'un groupe abélien localement compact* G *soit primaire (associé à p), il faut et il suffit qu'il soit totalement discontinu et que, pour tout sous-groupe ouvert compact* H *de* G, G/H *soit un p-groupe.*

Corollaire 2. — *Tout groupe abélien localement compact primaire (associé à p) est limite projective d'une famille de p-groupes discrets.*

En effet, soit G un groupe abélien localement compact primaire (associé à p). Il est *complet* et l'ensemble $\mathcal{J}$ des sous-groupes ouverts compacts de G est un système fondamental de voisinage de zéro, donc G est limite projective de la famille $(\mathrm{G}/\mathrm{H})_{\mathrm{H} \in \mathcal{J}}$ de p-groupes abéliens discrets [10].

Proposition 4. — *Si* G *est un groupe abélien localement compact primaire (associé à p),* $(q, x) \to qx$ *est une application bilinéaire continue de* $\mathbf{Z}_p \times \mathrm{G}$ *sur* G.

---

(9) *Voir* Chapitre I, fin du paragraphe **1**.

(10) *Voir* A. Weil [VII], Chap. I, § 5, p. 25.

Comme G est abélien, pour tout x et tout y dans G,

$$n(x+y)=nx+ny;$$

d'autre part, on a $(m+n)x=mx+nx$. Donc $(n, x)\to nx$ est une *application bilinéaire* de $\mathbf{Z}\times G$ sur G. Montrons qu'elle est *continue* en tout point (n, x) de $\mathbf{Z}\times G$, ($\mathbf{Z}$ étant muni de la structure p-adique). L'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G est un système fondamental de voisinages de zéro dans G. Pour tout $x\in G$ et tout sous-groupe ouvert compact H de G, il existe un entier $r\geqq 0$ tel que $kp^r x\in H$ pour tout entier k, car $n\to nx$ est une représentation continue de $\mathbf{Z}$ dans G. D'autre part, on a pour tout entier n.

$$(n+kp^r)(x+x')=nx+nx'+kp^r x+kp^r x';$$

donc, pour tout $x'\in H$,

$$(n+kp^r)(x+x')\in nx+H+H+H=nx+H,$$

et ceci montre que $(n, x)\to nx$ est une application bilinéaire continue de $\mathbf{Z}\times G$ sur G. Donc (paragraphe **1**) $(q, x)\to qx$) est une application bilinéaire continue de $\mathbf{Z}_p\times G$ sur G.

En particulier, d'après le théorème de *continuité partielle*, $x\to qx$ est un *endomorphisme continu* de G, pour tout $q\in\mathbf{Z}_p$.

Il résulte de cette proposition que, si G est un groupe abélien localement compact primaire (associé à p), la loi de groupe et la *loi de composition externe* $(q, x)\to qx$ font de G un $\mathbf{Z}_p$*-module topologique* ([11]) localement compact. Il y a identité entre les sous-modules fermés de G et les sous-groupes fermés [donc primaires (associés à p)] de G et il y a identité entre les endomorphismes continus du $\mathbf{Z}_p$-module G et les endomorphismes continus du groupe G

Soit q un entier p-adique de hauteur p^r. Alors $\pi_{qx}(\mathbf{Z}_p)=\pi_x({}_q\mathbf{Z}_p)$ est un sous-groupe fermé de $\pi_x(\mathbf{Z}_p)$, $\pi_x(\mathbf{Z}_p)$ étant, en tant que $\mathbf{Z}_p$-

---

([11]) Soient A un anneau topologique et M un A-module. On dit que M est un A-*module topologique* si M est muni d'une topologie compatible avec la structure de groupe abélien de M et telle que la loi de composition externe $(\lambda, x)\to\lambda x$ soit une application bilinéaire *continue* de $A\times M$ dans M.

module, isomorphe à $\mathbf{Z}_p$ ou à un de ces modules quotients. $\pi_{qx}(\mathbf{Z}_p)$ est donc identique à $\pi_{p^r x}(\mathbf{Z}_p)$.

Définition 1. — *Si* G *est un groupe abélien localement compact primaire (associé à p) on dit que* $a \in G$ *est de hauteur* p^r *dans* G *si r est le plus grand entier tel que* $a = p^r x$ *ait une solution dans* G.

On a donc la

Proposition 5. — *Si q est un entier p-adique d'ordre* p^r, *pour que l'équation* $a = qx$ *ait une solution x dans* G, *il faut et il suffit que a soit de hauteur* p^r *dans* G.

On en déduit que $G^{(p^r)}$ est l'ensemble des éléments de G de hauteur $\geqq p^r$ et l'on a

$$G_{(n)} = G_{(p^r)} \qquad G^{(n)} = G^{(p^r)} \qquad \text{si} \qquad n \in \mathfrak{p}^r \cap \complement \mathfrak{p}^{r+1}$$

et

$$G_{(p^r)} \subset G_{(p^{r+1})} \quad \text{et} \quad G^{(p^r)} \supset G^{(p^{r+1})}, \quad G_{(1)} = \{O\} \quad \text{et} \quad G^{(1)} = G.$$

De là résulte que, pour que le $\mathbf{Z}_p$-module G soit *régulier*, il faut et il suffit que chacun de ses éléments $\neq$ o soit d'ordre infini.

Proposition 6. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact primaire (associé à p),* $\hat{G}$ *son dual; si le sous-groupe des éléments d'ordre fini (resp. de hauteur infinie) de* G *est partout dense, tous les éléments de* $\hat{G}$ *sont de hauteur finie (resp. d'ordre infini).*

Cela résulte immédiatement du fait que le conjugué dans $\hat{G}$ de $\overline{G^{(p^r)}}$ (resp. $G_{(p^r)}$) est $\hat{G}_{(p^r)}$ (resp. $\overline{\hat{G}^{(p^r)}}$) (12).

Définition 2. — *On dit qu'un groupe abélien localement compact* G *primaire (associé à p) est de rang n si tout sous-module de* G, *somme directe de sous-modules engendrés par un élément, est somme directe de n au plus de ces sous-modules.*

On sait (13) que, si G est un $\mathbf{Z}_p$-module (non topologique) de rang 1,

(12) *Voir* Chapitre I, paragraphe **3**, Proposition 5.

(13) *Voir* H. Prüfer [I] et W. Krull [IX], § 1.

il est isomorphe à $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{Z}_p$, $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, ou $\mathbf{Z}/(p^r)$ et que, si G est de rang n, il est somme directe de n sous-modules de rang 1. La seule topologie d'espace localement compact *compatible* avec la structure de p-groupe de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ est la topologie *discrète*, car $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ est *dénombrable* ([14]). Il en résulte que la seule structure de groupe localement compact primaire (associé à p) compatible avec la structure de groupe de $\mathbf{Q}_p$ est la structure habituelle. En effet, si $\mathbf{Q}_p$ est primaire (associé à p), l'ensemble $\mathbf{Z}_p = \pi_1(\mathbf{Z}_p)$ des entiers p-adiques est compact et $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ est *discret;* donc $\mathbf{Z}_p$ est aussi ouvert et les voisinages de zéro dans $\mathbf{Z}_p$ forment un système fondamental de voisinages de zéro dans $\mathbf{Q}_p$. Il en résulte que tout groupe abélien localement compact primaire (associé à p) de rang 1 est isomorphe à $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{Z}_p$, $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ ou $\mathbf{Z}/(p^r)$ et, plus généralement :

Proposition 7. — *Tout groupe abélien localement compact, primaire (associé à p), de rang fini n est produit de n groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{Z}_p$, $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ ou $\mathbf{Z}/(p^r)$.*

La proposition 6 du paragraphe 3 donne une autre caractérisation des groupes abéliens compacts ou discrets, primaires (associés à p) de rang fini.

3. p-GROUPES ABÉLIENS DISCRETS ET GROUPES ABÉLIENS COMPACTS PRIMAIRES.

Théorème 1. — *Pour qu'un p-groupe abélien discret ait tous ses éléments de hauteur infinie, il faut et il suffit qu'il soit somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$* ([15]).

C'est évidemment suffisant, car tout élément de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ est de hauteur infinie. Montrons que c'est nécessaire. Soit G un p-groupe

([14]) D'après un théorème bien connu de Baire, qui, appliqué aux groupes topologiques, donne le résultat suivant : *la seule structure topologique d'espace localement compact compatible avec la structure de groupe d'un groupe dénombrable est la topologie discrète.* Dans le cas actuel, on peut le voir autrement : si $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ est localement compact et primaire (associé à p), l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ est un système fondamental de voisinages de 0; tout sous-groupe de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ est cyclique et fini ; donc $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ est discret.

([15]) Ce théorème est démontré, dans le cas d'un groupe dénombrable par H. Prüfer [I] et L. Zippin [II], § 4, th. 4.3. *Voir* aussi R. Baer [IV], I et II.

abélien discret dont tous les éléments sont de hauteur infinie. Montrons d'abord que, pour tout $x \in G$ et $\neq 0$, il existe un sous-groupe H_x de G contenant x et isomorphe à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. Définissons par récurrence la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de G : posons $x = x_0$ et soit x_n défini par $x_{n-1} = px_n$ pour tout entier $n > 0$. Soit H_x le sous-groupe de G engendré par la suite (x_n); si x_0 est d'ordre p^k, posons $y_n = p^{k-n}x_0$ pour $1 \leqq n \leqq k$, $y_n = x_{n-k}$ pour $n > k$; y_n est d'ordre p^n pour tout n. Il est immédiat que tout élément $y \in H_x$ est de la forme hy_n, pour des entiers $n > 0$ et $h \geqq 0$ convenables; en outre, si $ry_m = sy_n$ et si par exemple $m \leqq n$, on a $p^{n-m}r \equiv s (\text{mod. } p^n)$, donc les classes (mod. $\mathbf{Z}_p$) de $p^{-m}r$ et $p^{-n}s$ sont égales. A tout $y \in H_x$ on peut donc faire correspondre un élément bien déterminé de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, et l'on vérifie aussitôt que l'application ainsi définie est un isomorphisme de H_x sur $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.

Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties X de G telles que la somme $H_X = \sum_{x\in X} H_x$ soit *directe*. On voit facilement que l'ensemble $\mathfrak{F}$, ordonné par inclusion, est *de caractère fini*, donc il est *inductif* et possède un *élément maximal* Y ([16]). H_Y est un sous-groupe pur de G dont tous les éléments sont de hauteur infinie. Montrons que $G = H_Y$. Supposons que $G \neq H_Y$. Il existe, d'après la proposition 3 du paragraphe **3** du Chapitre I, un sous-groupe $K \neq \{0\}$ de G tel que G soit somme directe de K et de H_Y. Si $x \in K$ et $x \neq 0$, pour tout entier $n \geqq 0$, il existe $y \in H_Y$ et $z \in K$ tels que $x = p^n(y + z)$, c'est-à-dire $x - p^n z = p^n y$. Or $H_Y \cap K = \{0\}$, donc $x = p^n z$ et K est un sous-groupe pur de G dont tous les éléments sont de hauteur infinie. D'après ce qui précède, il existe un sous-groupe H_x de K isomorphe à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ et la somme $H_x + H_Y$ est directe, donc $\{x\} \cup Y \in \mathfrak{F}$, ce qui est contradictoire, car Y est maximal. Donc $G = H_Y$, d'où le théorème.

PROPOSITION 1. — *Pour que deux p-groupes abéliens discrets* G *et* G', *respectivement sommes directes des familles* $(H_\lambda)_{\lambda\in I}$ *et* $(K_\mu)_{\mu\in J}$ *de sous-groupes isomorphes à* $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, *soient isomorphes, il faut et il suffit que* I *et* J *soient équipotents.*

---

(16) *Voir* N. BOURBAKI [VI], *Théorie des ensembles*, Fasc. de résultats, § **6**, nos **10** et **11**.

C'est évidemment suffisant. C'est nécessaire, car $G_{(p)}$ (resp. $G'_{(p)}$) est alors somme directe de la famille $(H_{\lambda(p)})_{\lambda \in I}$ [resp. $(K_{\mu(p)})_{\mu \in J}$] de sous-groupes cycliques d'ordre p; ces sous-groupes sont *simples*, d'où le résultat [17].

Proposition 2. — *Tout p-groupe abélien discret est somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ et d'un sous-groupe réduit.*

En effet, dans un p-groupe abélien discret G, il existe un plus grand sous-groupe pur H dont tous les éléments sont de hauteur infinie et G / H est réduit. G est isomorphe à $H \times (G/H)$, d'après la proposition 3 du paragraphe 3 du Chapitre I.

Proposition 3. — *Tout p-groupe abélien discret est isomorphe à un sous-groupe d'un p-groupe abélien discret, somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.*

Soient G un p-groupe abélien discret, S un système de générateurs de G, H_x le sous-groupe d'ordre p^{n_x} engendré par $x \in S$ et $(K_x)_{x \in S}$ une famille de groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. Quel que soit $x \in S$, il existe un élément $y_x \in K_x$ engendrant un sous-groupe H'_x de K_x isomorphe à H_x. Soient G′ un groupe abélien discret *somme directe* des groupes K_x et H′ le sous-groupe de G′, somme directe des sous-groupes H'_x. G′ est un p-groupe abélien discret dont tous les éléments sont de hauteur infinie. Si $y \in H'$, il existe une partie finie X de S et des entiers $r_x (0 \leq r_x < p^{n_x}, x \in X)$ déterminés de façon unique tels que $y = \sum_{x \in X} r_x y_x$. On vérifie facilement que $y \rightarrow \sum_{x \in X} r_x x$ est une représentation de H′ sur G. Si K désigne le sous-groupe de H′ formé par

---

[17] En effet, on a le théorème bien connu : *Si un groupe abélien à opérateurs complètement réductible est somme directe d'une famille* $(H_\iota)_{\iota \in I}$ *de sous-groupes stables simples et somme directe d'une famille* $(H'_\varkappa)_{\varkappa \in J}$ *de sous-groupes stables simples, il existe une application biunivoque* φ *de* I *sur* J, *telle que, pour tout* $\iota \in I$, H_ι *soit isomorphe à* $H'_{\varphi(\iota)}$. *Voir* par exemple N. Bourbaki [VI], *Algèbre*, Chap. I, § 6, ex. 18. On peut aussi démontrer cette proposition en remarquant que G et I (resp. G′ et J′) sont équipotents.

les éléments $\sum_{x \in X} r_x y_x$ tels que $\sum_{x \in X} r_x x = 0$, G est isomorphe au groupe quotient H'/K. H'/K est un sous-groupe du p-groupe quotient G'/K dont tous les éléments sont évidemment de hauteur infinie. G'/K est donc somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}$, d'après le théorème 1, d'où la proposition.

THÉORÈME 2. — *Pour qu'un groupe abélien compact primaire (associé à p) ait tous ses éléments $\neq 0$ d'ordre infini, il faut et il suffit qu'il soit produit de groupes isomorphes à* $\mathbf{Z}_p$.

En effet, si G est un groupe abélien compact primaire (associé à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, son dual G est un p-groupe abélien discret dont tous les éléments sont de hauteur infinie, d'après le corollaire de la proposition 5 du paragraphe **3** du Chapitre I. $\hat{G}$ est donc somme directe d'une famille $(\hat{H}_\iota)_{\iota \in I}$ de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ et G est isomorphe au produit des groupes H_ι, duals des $\hat{H}_\iota$, donc isomorphes à $\mathbf{Z}_p$. La réciproque est triviale.

PROPOSITION 4. — *Pour que deux groupes abéliens compacts primaires (associés à p), respectivement produits des familles $(H_\lambda)_{\lambda \in I}$ et $(K_\mu)_{\mu \in J}$ de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}_p$, soient isomorphes, il faut et il suffit que* I *et* J *soient équipotents.*

Cela résulte immédiatement de la proposition 1.

THÉORÈME 3. — *Pour qu'un groupe abélien compact primaire (associé à p) soit un p-groupe, il faut et il suffit qu'il soit produit de groupes cycliques d'ordres bornés.*

C'est évidemment suffisant. Montrons que c'est nécessaire. Soit G un p-groupe abélien discret tel que son dual $\hat{G}$ soit un p-groupe abélien compact. Tous les éléments $\neq 0$ de G sont de hauteur finie, d'après la proposition 6 du paragraphe **2**. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties X de G telles que la somme H_X des sous-groupes engendrés par les $x \in X$ soit *directe* et soit un sous-groupe *pur* de G. On voit facilement que l'ensemble $\mathcal{F}$, ordonné par inclusion, est de *caractère* *fini*, donc *inductif* et possède un *élément maximal* Y. H_Y est un sous-groupe pur de G, somme directe de la famille des sous-groupes cycliques engendrés par les $x \in Y$. Montrons que $G = H_Y$. Supposons $G \neq H_Y$. Tous les éléments H_Y du groupe quotient H / G_Y sont de hauteur finie, car dans son dual $H_Y^* \subset \hat{G}$, tous les éléments sont d'ordre fini. Il existe donc dans G / H_Y une classe $\dot{y}$ d'ordre p et de hauteur p^{r-1}. Il existe $\dot{x} \in G / H_Y$ tel que $\dot{y} = p^{r-1}\dot{x}$ et $\dot{x}$ est de hauteur 1 et d'ordre p^r. Le sous-groupe engendré par x dans H / G_Y est pur : en effet, si $\dot{z} = p^k \dot{x} (0 \leqq k < r)$ était de hauteur $p^{k'} > p^k$, on aurait $p^{r-k-1}\dot{z} = \dot{y}$ et $\dot{y}$ serait de hauteur $p^{k'+r-k-1} > p^{r-1}$, ce qui n'est pas. Soit $x' \in G$ un représentant de la classe $\dot{x}$, x' est d'ordre $p^{r'} \geqq p^r$, sinon $\dot{x}$ serait d'ordre $< p^r$. On a $p^r x' \in H_Y$ et, comme H_Y est pur, il existe $x'' \in H_Y$ tel que $p^r x' = p^r x''$ et $x = x' - x''$ est d'ordre p^r et appartient à la classe $\dot{x}$. La somme de H_Y et du sous-groupe H_x engendré par x est directe. En effet, supposons qu'on ait $p^n x \in H_Y$; on a nécessairement $n \geqq r$, sinon la classe $\dot{x}$ de x serait d'ordre $< p^r$. D'où $p^n x = 0$ et $H_x \cap H_Y = \{0\}$. Montrons que le sous-groupe $H_x + H_Y$ est pur. Soit $y \in H_x + H_Y$ de hauteur p^k dans G. Il existe $y' \in G$, $z \in H_Y$ et un entier n tels que $y = p^k y' = lp^n x + z$, l entier premier avec p. Si $\dot{y}'$ désigne la classe de y' dans G / H_y, on a $p^k \dot{y}' = lp^n \dot{x}$; mais le sous-groupe engendré par $\dot{x}$ est pur, donc on a $k \leqq n$. On a donc $z = p^k y' - p^n x = p^k (y' - lv^{n-k} x)$. Comme H_Y est pur, il existe $z' \in H_Y$ tel que $z = p^k z'$, c'est-à-dire $y = p^k (lp^{n-k} x - z')$ et y est de hauteur p^k dans $H_x + H_Y$, qui est ainsi un sous-groupe pur de G. Donc $\{x\} \cup Y \in \mathcal{F}$, ce qui est contradictoire, car Y est maximal. Donc $G = H_Y$ et G est somme directe des sous-groupes cycliques engendrés par les $x \in Y$. Son dual $\hat{G}$ est produit d'une famille $[\mathbf{Z} / (p^{r_x})]_{x \in Y}$ de groupes cycliques, r_x étant d'ordre de $x \in Y$. Supposons que, pour tout entier $r \geqq 0$, il existe $r_x > r$. Soit $\hat{z} = (\hat{y}_x)_{x \in Y}$, $\hat{y}_x$ engendrant $\mathbf{Z} / (p^{r_x})$. Pour tout entier $r \geqq 0$, $p^r \hat{z} = (p^r \hat{y}_x)_{x \in Y} \neq 0$, ce qui est contradictoire, car $\hat{z}$ est d'ordre fini dans $\hat{G}$. Il existe donc un entier r tel que, pour tout $x \in Y$, $r_x \leqq r$ et tous les éléments de G sont ainsi d'ordre $\leqq p^r$, d'où le théorème.

THÉORÈME 4. — *Pour qu'un p-groupe abélien discret ait tous ses éléments d'ordre* $\leqq p^r$, *il faut et il suffit qu'il soit somme directe d'une famille de sous-groupes cycliques dont l'ordre divise* p^r (18).

C'est évidemment suffisant. C'est nécessaire, car, si G est un p-groupe abélien discret dont tous les éléments sont d'ordre $\leqq p^r$, pour chacun de ses caractères $\hat{x}$, on a $p^r\hat{x}(x) = \hat{x}(p^r x) = 0$ et le dual de G est un p-groupe abélien compact dont tous les éléments sont d'ordre $\leqq p^r$; il est donc produit d'une famille $(\mathbf{Z}/(p^{r_\iota}))_{\iota\in I}$ de groupes cycliques d'ordre $p^{r_\iota} \leqq p^r$. G est donc somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes aux $\mathbf{Z}/(p^{r_\iota})$.

PROPOSITION 5. — *Soit* G (*resp.* G′) *un p-groupe abélien discret, somme directe d'une famille* $\left((H_{\lambda_r})_{\lambda_r\in I_r\,(r=1,2,\ldots)}\left(\textit{resp.}\ (H'_{\mu_r})_{\mu_r\in J_r\,(r=1,2\ldots)}\right)\right)$ *de sous-groupes,* H_{λ_r} *et* H'_{μ_r} *étant cycliques d'ordre* p^r; *pour que* G *et* G′ *soient isomorphes, il faut et il suffit que, pour tout* $r > 0$, I_r *et* J_r *soient équipotents.*

C'est évidemment suffisant. Montrons que c'est nécessaire. Pour tout entier $r > 0$, posons

$$(G(p^r))_{(p)} = G_r \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda_r\in I_r} H_{\lambda_r} = H_r$$

$$\left[\text{resp.}\ (G'(p^r))_{(p)} = G'_r \quad \text{et} \quad \sum_{\mu_r\in J_r} H'_{\mu_r} = H'_r\right].$$

Alors G_{r-1} (resp. G'_{r-1}) est somme directe de G_r et de H_r (resp. de G'_r et de H'_r) et G_{r-1}/G_r (resp. G'_{r-1}/G'_r) est isomorphe à H_r (resp. H'_r) donc somme directe de sous-groupes simples. G et G′ étant isomorphes, H_r et H'_r le sont aussi et I_r et J_r sont équipotents (18).

On déduit facilement de cette proposition, à l'aide de la théorie de la dualité, les conditions d'isomorphie de deux p-groupes *compacts*.

---

(18) Ce théorème a été démontré, dans le cas d'un groupe *dénombrable*, par H. PRÜFER [I], p. 48 et 57, et dans le cas général, par R. BAER, dans *Der Kern, eine charakteristische Untergruppe* (*Compositio Mathematica*, Vol. I, 1934, § 5, Lemma I), par une méthode directe tout à fait différente. A ce sujet, ainsi que pour le théorème 5, on pourra consulter R. BAER [IV].

Théorème 5. — *Soit* G *un p-groupe abélien discret tel que toutes les classes de* $G/G^{(\infty)}$ *soient d'ordre* $\leqq p^r$; G *est alors somme directe d'une famille de sous-groupes cycliques d'ordres* $\leqq p^r$ *et de sous-groupes isomorphes à* $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.

En effet, si $x \in G^{(\infty)}$, quel que soit l'entier $n \geqq 0$, il existe $x_{n+r} \in G$ tel que $x = p^{n+r}x_{n+r}$. On a $p^r x_{n+r} = x'_n \in G^{(\infty)}$ et $x = p^n x'_n$. Donc $G^{(\infty)}$ est un sous-groupe pur de G et il est identique au plus grand sous-groupe pur de G dont tous les éléments sont de hauteur infinie. G est donc somme directe de $G^{(\infty)}$ et d'un sous-groupe isomorphe à $G/G^{(\infty)}$, d'après la proposition 3 du paragraphe 5 du Chapitre I. $G^{(\infty)}$ est somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ d'après le théorème 1 et $G/G^{(\infty)}$ est somme directe d'une famille de sous-groupes cycliques d'ordres $\leqq p_r$, d'après le théorème 4; d'où le résultat.

La réciproque est triviale.

Proposition 6. — *Soit* G *un groupe abélien compact primaire* (*associé à* p); *pour que* G *soit de rang fini, il faut et il suffit que* $G^{(p)}$ *soit un sous-groupe ouvert de* G.

C'est évidemment suffisant. Montrons que c'est nécessaire. Soit $\hat{G}$ un groupe abélien compact primaire (associé à p) tel que $\hat{G}^{(p)}$ soit un sous-groupe ouvert de $\hat{G}$. Si $n > 0$, $\hat{G}^{(p^n)}$ est alors un sous-groupe ouvert de $\hat{G}$, car $\hat{x} \to p\hat{x}$ est un homomorphisme de $\hat{G}$ dans lui-même. Le dual G de $\hat{G}$ est un p-groupe discret et $G_{(p^n)}$, conjugué de $\hat{G}^{(p^n)}$, est un sous-groupe compact, c'est-à-dire fini, de G. Soit H_n le sous-groupe de $G_{(p)}$ formé des éléments de $G_{(p)}$ qui sont de hauteur $\geqq p^n$ dans G. On a $H_{n+1} \subset H_n$, donc, comme $G_{(p)}$ est fini, il existe un indice m tel que $H_n = H_m$ pour $n \geqq m$. Le sous-groupe H_m de $G_{(p)}$ est somme directe d'un nombre fini q de groupes cycliques d'ordre p, engendrés respectivement par des éléments $x_i (1 \leqq i \leqq q)$. Comme chacun des x_i est de hauteur infinie dans G, on peut déterminer, comme dans le théorème 1, une suite $(x_{in})_{n \in \mathbf{N}}$ pour chaque indice i, telle que $x_{in} = p x_{in+1}$ pour tout $n > 0$, et $x_{i0} = x_i$. Le sous-groupe H de G engendré par les $x_{in} (1 \leqq i \leqq q,\ n \in \mathbf{N})$ est somme directe de q sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, et tous ses éléments sont de hauteur infinie (dans H). D'après la proposition 3 du Chapitre I, paragraphe 5, G est donc somme directe de H et d'un sous-groupe K; par suite $G_{(p)}$ est somme directe de $H_{(p)} = H_m$ et de $K_{(p)}$. Tout élément de K est d'ordre $\leq p^m$, sans quoi $K_{(p)}$ contiendrait des éléments de hauteur $\geq p^m$ dans G et $\neq 0$; mais un tel élément appartient aussi par définition à H_m, donc ne peut être que o, et on aboutit à une contradiction. Le sous-groupe K, étant contenu dans $G_{(p^m)}$ est fini, donc somme directe d'un nombre fini de sous-groupes cycliques, ce qui prouve que G est de rang fini; il en est évidemment de même de son dual $\hat{G}$.

Les p-groupes abéliens discrets *dénombrables* jouissent de propriétés particulières. Rappelons le théorème suivant [19] :

Théorème 6. — *Pour qu'un p-groupe abélien discret dénombrable ait tous ses éléments* $\neq 0$ *de hauteur finie, il faut et il suffit qu'il soit somme directe d'une suite de sous-groupes cycliques.*

En général, si G est un groupe abélien discret dont la puissance est supérieure au *continu*, et dont tous les éléments $\neq 0$ sont de hauteur finie, G n'est pas somme directe d'une famille de sous-groupes cycliques. En effet, L. Kulikoff [20] a montré qu'il existe de tels groupes G tels que, pour toute décomposition de G en somme directe d'une famille $(H_\iota)_{\iota \in I}$ de sous-groupes de G, il existe un $\iota \in I$ tel que H_ι ait une puissance supérieure au continu.

Le théorème 5 permet de déterminer complètement la structure des p-groupes abéliens discrets *dénombrables*. Une telle étude a été faite par H. Ulm et L. Zippin [21].

---

[19] On en trouvera la démonstration dans L. Zippin [II], § 6.

[20] *Voir* L. Kulikoff [VIII], § 3. A. Kurosch, dans un Mémoire intitulé *Einige Bemerkungen zur Theorie des unendlichen Gruppen* (*Rec. Math.*, Moscou, N. S. 5, 1939, p. 347-353), indique un moyen de construire des p-groupes discrets dont tous les éléments $\neq 0$ sont de hauteur finie, dont la puissance est quelconque, supérieure au continu, et qui ne sont pas sommes directes de sous-groupes cycliques. Nous n'avons pu consulter les mémoires originaux de L. Kulikoff et de A. Kurosch et renvoyons aux résumés de ces mémoires parus dans le *Zentrallblatt* (vol. **22**, p. 299-300).

[21] *Voir* L. Zippin [II], § 7 et H. Ulm, *Zur Theorie der abzählbar-unendlichen Abelschen Gruppen* (*Mathematische Annalen*, t. **107**, 1933, p. 774-803).

Si maintenant G est un groupe abélien compact primaire (associé à p) ayant un système fondamental *dénombrable* de voisinages de o, son dual $\hat{G}$ est un p-groupe abélien discret dénombrable. L'étude de la structure de $\hat{G}$ se ramène ainsi à celle de la structure de G. Les résultats ainsi obtenus ont été exposés par W. Krull ([22]). Signalons la propriété suivante qui résulte immédiatement du théorème 6 et de la proposition 6 du paragraphe **2**.

THÉORÈME 7. — *Pour que, dans un groupe abélien compact* G *primaire* (*associé à* p) *ayant un système fondamental dénombrable de voisinages de* o, *le sous-groupe des éléments d'ordre fini soit partout dense, il faut et il suffit que que* G *soit produit de groupes cycliques.*

4. STRUCTURE DE CERTAINS GROUPES ABÉLIENS LOCALEMENT COMPACTS PRIMAIRES. — Nous donnons ici quelques propriétés de la structure de certains groupes *abéliens localement compacts primaires* (associés à p), tout d'abord des groupes dont tout élément $\neq$ o est d'ordre infini.

THÉORÈME 1. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact primaire* (*associé à* p) *dont tout élément* $\neq$ o *est d'ordre infini; il existe alors un groupe abélien localement compact* $\widetilde{G}$ *qui est un espace vectoriel sur le corps* $\mathbf{Q}_p$, *tel que* G *soit isomorphe à un sous-module ouvert* G′ *de* $\widetilde{G}$ *tel que* $\widetilde{G} = \mathbf{Q}_p G'$.

G est un $\mathbf{Z}_p$-*module régulier*. D'après un théorème de C. Chevalley déjà cité ([23]), il existe un *espace vectoriel* $\widetilde{G}$ sur le corps (non topo-

([22]) Dans le groupe compact G il existe alors une suite décroissante $(G_n)_{n>0}$ des sous-groupes ouverts telle que $\bigcap_{n>0} G_n = \{0\}$. Les groupes abéliens compacts primaires (ass. à p) ayant un système fondamental *dénombrable* de voisinages de o sont donc identiques aux groupes « *séparables* » *compacts* introduits par W. KRULL [IX], § 9. Plus généralement, les groupes abéliens localement compacts primaires (asssocié *dénombrable* à p) ayant un système fondamental *dénombrable* de voisinages de o sont identiques aux groupes *séparables complets* (separabel abgeschlossen) de W. Krull. L'absence de l'introduction systématique d'une topologie sur ces groupes nuit à la clarté et à la concision du mémoire de W. Krull.

([23]) *Voir* la note ([15]) du Chapitre I.

logique) $\mathbf{Q}_p$, un sous-module G′ de $\tilde{G}$ tel que $\tilde{G} = \mathbf{Q}_p G'$ et un isomorphisme φ de G sur G′. Si $\mathfrak{V}$ est le filtre des voisinages de o dans G, $\varphi(\mathfrak{V})$ est un système fondamental de voisinages de o dans une topologie *compatible* avec la structure de groupe additif de $\tilde{G}$. $\tilde{G}$ muni de cette topologie est localement compact et φ est un isomorphisme du groupe topologique G dans le groupe topologique $\tilde{G}$. G′ est un sous-groupe ouvert de $\tilde{G}$ et un groupe primaire (associé à p); $\tilde{G}/G'$ est un p-groupe. Donc, d'après la proposition 7 du paragraphe **1**, $\tilde{G}$ est un groupe abélien primaire (associé à p).

On notera que le groupe topologique $\tilde{G}$ *n'est pas* en général un espace vectoriel *topologique*, au sens qu'on donne d'ordinaire à ces termes ([24]). En effet, soit K un sous-groupe ouvert compact de $\tilde{G}$; si K n'est pas de rang fini, l'image de K par l'application $x \to px$ n'est pas un sous-groupe ouvert de $\tilde{G}$, d'après la proposition 6 du paragraphe **3**; il en résulte que dans $\tilde{G}$, l'application $x \to p^{-1}x$ n'est pas continue. En d'autres termes, $\tilde{G}$ n'est un espace vectoriel topologique sur $\mathbf{Q}_p$ que s'il est de *dimension finie*.

Dans ce qui suit, nous *identifierons* les $\mathbf{Z}_p$-modules G et G′ et l'espace vectoriel $\tilde{G}$ sera dit *associé* au groupe G. Cet espace est déterminé à une isomorphie près par la condition de contenir un $\mathbf{Z}_p$-module ouvert G′ isomorphe à G et tel que $\tilde{G} = \mathbf{Q}_p G'$. Plus précisément :

Proposition 1. — *Soient* G *et* G_1 *deux groupes abéliens localement compacts primaires (associés à p) dont tous les éléments* $\neq$ o *sont d'ordre infini,* $\tilde{G}$ *et* $\tilde{G}_1$ *les espaces vectoriels sur* $\mathbf{Q}_p$ *qui leur sont respectivement associés; alors tout isomorphisme f de* G *sur* G_1 *se prolonge de manière unique en un isomorphisme* $\bar{f}$ *de* $\tilde{G}$ *sur* $\tilde{G}_1$.

Le théorème de Chevalley montre qu'il existe un isomorphisme $\bar{f}$

([24]) Soient K un corps topologique et E un espace vectoriel sur K. On dit que E est un *espace vectoriel topologique si* E est muni d'une topologie compatible avec la structure de groupe abélien de E et telle que la loi de composition $(\lambda, x) \to \lambda x$ soit une application bilinéaire *continue* de $K \times E$ sur E. Dans ce paragraphe, nous dirons, par abus de langage, que H est un sous-module d'un espace vectoriel $\tilde{G}$ sur $\mathbf{Q}_p$ si H est un sous-module par rapport à $\mathbf{Z}_p$.

unique du groupe (non topologique) $\widetilde{G}$ sur le groupe $\widetilde{G}_1$, prolongeant f Mais G (resp. G_1) étant un sous-groupe ouvert de ($\widetilde{G}$ resp. $\widetilde{G}_1$), $\bar{f}$ et $\overset{-1}{\bar{f}}$ sont continus.

Nous allons maintenant *construire* effectivement l'espace vectoriel $\widetilde{G}$ associé à un groupe abélien localement compact G primaire (associé à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini. Soit H un sous-groupe *ouvert compact* de G. H est un groupe abélien compact primaire (associé à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, d'après le théorème 2 du paragraphe **3**, H est produit d'une famille $(H_\iota)_{\iota\in I}$ de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}_p$. Soit $(G_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p$. H_ι peut être identifié au sous-groupe des entiers p-adiques de G_ι. Soit G_0 le produit local des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes ouverts compacts H_ι. G_0 est un espace vectoriel (non topologique) sur $\mathbf{Q}_p$; $H' = \prod_{\iota\in I} H_\iota$ est un ensemble ouvert compact de G_0 et un $\mathbf{Z}_p$-module. Soient φ l'isomorphisme du $\mathbf{Z}_p$-module H sur H' et $\widetilde{G}$ le sous-espace vectoriel *engendré* par H' dans G_0 ([25]). Soit $x \in G$; G / H étant un p-groupe, il existe un plus petit entier r tel que $p^r x \in H$. Soit $(x_\iota)_{\iota\in I} = \varphi(p^r x)$; x_ι est un entier p-adique appartenant à H_ι et $p^{-r}x_\iota$ est un nombre p-adique appartenant à G_ι. On a $\big(p_r(p^{-r}x_\iota)\big)_{\iota\in I} \in H'$ et l'on vérifie facilement que $x \to (p^{-r}x_\iota)_{\iota\in I}$ est un isomorphisme $\bar{\varphi}$ du groupe (non topologique) G sur un sous-groupe G' de $\widetilde{G}$, prolongeant φ. On a évidemment $\widetilde{G} = \mathbf{Q}_p H = \mathbf{Q}_p G'$. Donc, d'après le théorème de Chevalley, il existe un isomorphisme de l'espace véctoriel (non topologique) $\widetilde{G}$ ainsi obtenu sur l'espace vectoriel associé au groupe G et cet isomorphisme est continu, ainsi que son application réciproque, car $\bar{\varphi}(G) = G'$ est un sous-groupe ouvert de $\widetilde{G}$, isomorphe à G.

Soit H_1 un sous-groupe compact ouvert de G, différent de H. $K = H \cap H_1$ est un sous-groupe ouvert compact de H et de H_1; H / K est donc un p-groupe fini et le dual de H et le dual de K sont des

([25]) $\widetilde{G}$ est l'*image réciproque* du sous-groupe des éléments d'ordre *fini* de G_0/H par l'homomorphisme canonique de G_0 sur G_0/H.

p-groupes discrets équipotents. D'après la proposition 1 du paragraphe 3, ils sont sommes directes de familles *équipotentes* de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. K est donc produit d'une famille de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}_p$, *équipotente* à la famille $(H_\iota)_{\iota\in I}$ et il en est de même de H_1. Autrement dit, la *puissance* de l'ensemble d'indices I est un *invariant* du groupe G. On dit que c'est le *rang* du groupe primaire (associé à p) G. Cette remarque et la construction précédente montrent que l'espace vectoriel $\widetilde{G}$, associé au groupe G, est entièrement déterminé par la donnée de la *puissance* de l'ensemble I. Plus précisément :

Proposition 2. — *Soient* G *et* G_1 *deux groupes abéliens localement compacts primaires (associés à p) dont tous les éléments* $\neq$ o *sont d'ordre infini*; $\widetilde{G}$ *et* $\widetilde{G}_1$ *les espaces vectoriels sur* $\mathbf{Q}_p$ *qui leur sont respectivement associés; pour que* $\widetilde{G}$ *et* G_1 *soient isomorphes, il faut et il suffit que les groupes* G *et* G_1 *soient localement isomorphes ou bien aient même rang*.

Si G et G_1 sont localement isomorphes, il existe un isomorphisme local φ d'un voisinage V de o dans G sur le voisinage $\varphi(V)$ de o dans G_1; mais V contient un sous-groupe ouvert compact H et la restriction de φ à H est un isomorphisme de H sur le sous-groupe ouvert compact $\varphi(H)$ de G_1; donc G et G_1 ont même rang. La réciproque est triviale. D'où la proposition 2.

Nous allons maintenant examiner la structure des *p-groupes abéliens localement compacts*.

Théorème 2. — *Tout groupe abélien localement compact dont tous les éléments* $\neq$ o *sont d'ordre p est produit d'un groupe compact, produit d'une famille de groupes isomorphes à* $\mathbf{Z}/(p)$, *et d'un groupe discret, somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à* $\mathbf{Z}/(p)$.

Soit G un groupe abélien localement compact dont tous les éléments $\neq$ o sont d'ordre p; G est primaire (associé à p). Soit H un sous-groupe ouvert compact de G. Le groupe (non topologique) G est isomorphe au produit des groupes H et G/H, car il est somme directe de sous-groupes simples, d'après le théorème 4 du paragraphe 3 ([26]). Donc tout $x \in G$ est de la forme (x_1, x_2) avec $x_1 \in H$ et $x_2 \in G/H$ et $x \rightarrow x_2$ est une représentation f de G sur G/H. Cette représentation est continue car $\overset{-1}{f}(o) = H$ est un sous-groupe ouvert de G. Donc le groupe topologique G est isomorphe au produit $H \times (G/H)$. H est un p-groupe compact dont tous les éléments $\neq o$ sont d'ordre p; H est donc produit d'une famille de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/(p)$. G/H est un p-groupe discret dont tous les éléments $\neq o$ sont d'ordre p; G/H est donc somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/(p)$. La réciproque est triviale.

Comme la somme directe locale de groupes topologiques est *associative*, ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Corollaire. — *Tout groupe abélien localement compact dont tout élément $\neq o$ est d'ordre p est somme directe locale de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/(p)$ et inversèment.*

Théorème 3. — *Si* G *est un p-groupe abélien localement compact,* G *est isomorphe à un sous-groupe ouvert d'un groupe abélien localement compact* G_0 *produit local d'une famille de groupes isomorphes à* $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, *relativement à des sous-groupes cycliques d'ordres bornés.*

Soient G un p-groupe abélien localement compact et H un sous-groupe ouvert compact de G. H est un p-groupe abélien compact. D'après le théorème 3 du paragraphe 3, H est produit d'une famille $(H_\iota)_{\iota \in J}$ de groupes cycliques d'ordres bornés. G/H est un p-groupe discret G′. Soit $\widetilde{G}'$ le p-groupe abélien associé à G′, d'après la proposition 3 du paragraphe 3 : G′ est un sous-groupe de $\widetilde{G}'$ et $\widetilde{G}'$ est somme directe d'une famille $(G_{\iota'})_{\iota' \in J'}$ de groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. Soient I l'ensemble somme des ensembles d'indices J et J′ et $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. Si $\iota \in J$, on peut identifier H_ι à un sous-groupe cyclique bien déterminé de G_ι. Posons $H_\iota = \{o\}$

([26]) On a en effet le théorème suivant qui complète celui de la note ([17]) : *Soit* G *un groupe abélien à opérateurs complètement réductibles, somme directe d'une famille* $(H_\iota)_{\iota \in I}$ *de sous-groupes stables simples; si* H *est un sous-groupe stable de* G, *il existe une sous-famille* $(H_\iota)_{\iota \in J}$ *de la famille* $(H_\iota)_{\iota \in I}$ *telle que* G *soit somme directe de* H *et des groupes* H_ι *de cette sous-famille.*

si $\iota \in J'$. Soit G_0 le groupe abélien localement compact produit local de la famille de groupes $(G_\iota)_{\iota \in I}$, relativement aux sous-groupes cycliques d'ordres bornés H_ι. Tous les éléments de G_0 sont de hauteur infinie. $\widetilde{G}'$ est un sous-groupe discret de G_0 et $H = \prod_{\iota \in I} H_\iota$ est un sous-groupe ouvert compact de G_0. D'après le théorème 2 du paragraphe **4**, $G(p)$ est produit du sous-groupe ouvert compact $H_{(p)} = H \cap G_{(p)}$ et d'un sous-groupe discret G_1 de G. $H + G_{(p)}$ est produit des groupes G_1 et H. En effet, H est compact, G_1 discret et $H \cap G_1 = \{0\}$ ([27]). G_1 est isomorphe au sous-groupe $(H + G_{(p)})/H$ de G/H, donc à un sous-groupe de $\widetilde{G}' \subset G_0$. Soit ψ l'isomorphisme de G_1 dans G_0 ainsi défini. Si $y \in H + G_{(p)}$, on a $y = z + (x_\iota)_{\iota \in I}$ avec $z \in G_1$ et $x_\iota \in H_\iota$, et l'on voit, immédiatement que $y \to \psi(z) + (x_\iota)_{\iota \in I}$ est un isomorphisme φ du sous-groupe ouvert $H + G_{(p)}$ de G dans G_0. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des isomorphismes φ_L d'un sous-groupe fermé L de G dans G_0, prolongeant l'isomorphisme φ. On voit facilement que l'ensemble $\mathcal{J}$, ordonné par la relation « φ_L est *prolongé* par $\varphi_{L'}$ », est *inductif* et, par suite, possède un *élément maximal* φ_L. L est un sous groupe fermé de G contenant $H + G_{(p)}$. Supposons $G \neq L$. Il existe alors $x \notin L$ tel que $px \in L$. Soit $y' = \varphi_L(px)$. y' est de hauteur infinie dans G_0; il existe donc $y \in G_0$ tel que $y' = py$. On a $y \notin \varphi_L(L)$, sinon il existerait $x_1 \in L$ tel que $y = \varphi_L(x_1)$ et $\varphi_L(px) = py = p\varphi_L(x_1) = \varphi_L(px_1)$. Comme φ_L est un isomorphisme, on a $px_1 = px$ et $p(x - x_1) = 0$, c'est-à-dire $x - x_1 \in G_{(p)}$, d'où $x \in x_1 + G_{(p)} \subset L$, car $G_{(p)} \subset L$; on arrive ainsi à une contradiction, car $x \notin L$. La classe de y dans le groupe quotient $G_0/\varphi_L(L)$ est donc d'ordre p. Soit L' le sous-groupe ouvert de G engendré par $L \cup \{x\}$. Si $z \in L'$, on a $z = kx + x'$, avec $0 \leq k < p$ et $x' \in L$ bien déterminés, et l'on voit facilement que $z \to ky + \varphi_L(x')$ est un homomorphisme $\varphi_{L'}$ de L' dans G_0, car L est un sous-groupe ouvert de G. Soit $kx + x' \in L'$ tel que $ky + \varphi_L(x') = 0$. On a $ky = -\varphi_L(x') \in \varphi_L(L)$, donc $k = 0$ et, par suite, $x' = 0$. Donc $\overset{-1}{\varphi_{L'}}(0) = \{0\}$ et $\varphi_{L'}$ est un isomorphisme de $L' \supset L$ dans G_0, prolongeant l'isomorphisme φ_L, donc φ. D'où $\varphi_{L'} \in \mathcal{J}$, ce qui est absurde car φ_L est un élément maximal de $\mathcal{J}$. Donc $L = G$, d'où le résultat.

([27]) *Voir* N. Bourbaki [VI], *Topologie générale*, Chap. III, § **6**, Ex. 18.

On remarquera que le groupe G_0 ainsi défini est totalement discontinu, mais non primaire (associé à p). Cependant l'ensemble $\widetilde{G}$ des éléments d'ordre *fini* de G_0 est un sous-groupe *pur* ouvert de G_0 ([28]). $\widetilde{G}$ est donc un p-groupe abélien localement compact et G est isomorphe à un sous-groupe ouvert G' de $\widetilde{G}$. Dans ce qui suit, on *identifiera* les deux groupes G et G' et l'on dira que le p-groupe abélien localement compact $\widetilde{G}$ ainsi défini est *associé* au groupe G.

Les démonstrations des théorèmes **1** et **3** sont très différentes. On remarque pourtant une grande analogie dans la définition du p-groupe associé à un *p-groupe* abélien localement compact et dans celle de l'espace vectoriel associé à un groupe abélien localement compact primaire (associé à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'*ordre infini*. En effet, si G est un groupe abélien localement compact primaire (associé à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, il existe un groupe G_0, *produit local* d'une famille $(G_\iota)_{\iota\in I}$ de groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p$, relativement à des sous-groupes H_ι, tel que G soit isomorphe à un sous-groupe ouvert de $\widetilde{G}$, $\widetilde{G}$ étant l'*image réciproque* du sous-groupe des éléments d'ordre *fini* de G_0/H par l'homomorphisme canonique de G_0 sur G_0/H, avec $H = \prod_{\iota\in I} H_\iota$. Si G est un p-groupe abélien localement compact, il existe un groupe G_0 *produit local* d'une famille $(G_\iota)_{\iota\in I}$ de groupes isomorphes à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, relativement à des sous-groupes H_ι, tel que G soit isomorphe à un sous-groupe ouvert de $\widetilde{G}$, $\widetilde{G}$ étant l'*image réciproque* du sous-groupe des éléments d'ordre *fini* de G_0/H par l'homomorphisme canonique de G_0 sur G_0/H, avec $H = \prod_{\iota\in I} H_\iota$. En effet, tous les éléments de H étant d'ordre borné, l'ensemble des éléments d'ordre fini de G_0 est $\widetilde{G}$. Cependant l'arbitraire qui règne dans la définition du p-groupe discret associé à G/H ne permet pas d'écrire des conditions d'isomorphie analogues à celles des propositions **1** et **2**.

Si G est un p-groupe abélien compact ou discret (resp. localement compact) dont tous les éléments sont d'ordre $\leq p^r$ (resp. $\leq p$), G est *somme directe locale* d'une famille de groupes cycliques d'ordres p^r (resp. p), relativement à certains sous-groupes. Mais si G est un

([28]) On voit que $\widetilde{G}$ est la *composante primaire* (associée à p) du groupe abélien localement compact totalement discontinu G_0 (*voir* Chap. III, paragraphe **1**).

groupe abélien localement compact dont tous les éléments sont d'ordre $\leq p^r (r > 1)$, G n'est pas en général somme directe locale d'une famille de groupes cycliques d'ordre p^r.

Par exemple, soit G un groupe topologique, produit local d'une famille infinie $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de groupe isomorphes à $\mathbf{Z}/(p^2)$, relativement aux sous-groupes H_ι de G_ι isomorphes à $\mathbf{Z}/(p)$. Tous les éléments de G sont d'ordre $\leq p^2$ et G est localement compact et non compact. $G^{(p)} = \prod_{\iota \in I} H_\iota$ est un sous-groupe ouvert compact de G. Supposons que G soit isomorphe à un groupe G', somme directe locale d'une famille $(G'_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/(p^2)$, relativement à des sous-groupes $H'_\varkappa$. L'ensemble des $\varkappa \in K$ tels que $H'_\varkappa \neq G'_\varkappa$ est infini, sinon G', et par suite G, seraient compacts, ce qui n'est pas. G' est produit du groupe compact $G_1 = \prod_\varkappa G'_\varkappa$, avec $G'_\varkappa = H'_\varkappa$, et du groupe G_2, somme directe locale des groupes $G'_\varkappa$ tels que $G'_\varkappa \neq H'_\varkappa$, relativement aux sous-groupes $H'_\varkappa$. $G_1^{(p)}$ est le sous-groupe compact de G_1, produit des sous-groupes cycliques d'ordres p de $G'^{(p)}_\varkappa$. $G_2^{(p)}$ est un sous-groupe partout dense de $\overline{G_2^{(p)}}$, différent de $\overline{G_2^{(p)}}$ si $\overline{G_2^{(p)}}$ est compact. $G'^{(p)}$ est égal à $G_1^{(p)} \times G_2^{(p)}$ et non compact, ce qui est absurde, car $G^{(p)}$ et $G'^{(p)}$ sont isomorphes. G n'est donc isomorphe à aucun groupe G' somme directe locale de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/(p^2)$ relativement à des sous-groupes quelconques.

Cependant on a la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *Tout groupe abélien localement compact dont tous les éléments sont d'ordre $\leq p^r$ est isomorphe à un sous-groupe ouvert d'un groupe produit local de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/(p^r)$.*

En effet, avec les notations de la démonstration du théorème 3, le sous-groupe fermé $G_{(p^r)}$ de G est isomorphe au sous-groupe ouvert $G' \cap \widetilde{G}_{(p^r)}$ de $\widetilde{G}_{(p^r)}$. D'après la proposition 1 du paragraphe 3 du Chapitre I, $\widetilde{G}_{(p^r)}$ est isomorphe à la somme directe locale de la famille de groupes $(G_{\iota(p^r)})_{\iota \in I}$, relativement aux sous-groupes $H_\iota \cap G_{\iota(p^r)}$, et $G_{\iota(p^r)}$ est le sous-groupe cyclique d'ordre p^r de G_ι. Si tous les éléments de G sont d'ordre $\leq p^r$, on a $G = G_{(p^r)}$, d'où le résultat.

La réciproque est triviale.

CHAPITRE III.

Groupes abéliens localement compacts totalement discontinus.

1. Composantes primaires d'un groupe topologique. Définition I. — *L'ensemble* G_p *des éléments* x *d'un groupe topologique séparé* G *tels que la représentation* $n \to x^n$ *de* $\mathbf{Z}$ *dans* G *se prolonge par continuité en une représentation de* $\mathbf{Z}_p$ *dans* G *est appelé la composante primaire* (*associée à* p) *de* G.

Si $x \in G_p$ et si π_x est la représentation de $\mathbf{Z}_p$ dans G qui prolonge la représentation $n \to x^n$, π_x est un *homomorphisme* de $\mathbf{Z}_p$ dans G et $\pi_x(\mathbf{Z}_p)$ est l'*adhérence* du sous-groupe engendré par x; c'est un sous-groupe abélien compact de G, isomorphe à $\mathbf{Z}_p$ ou cyclique d'ordre p^r et l'on a $\pi_x(\mathbf{Z}_p) \subset G_p$. Si p' est un entier premier différent de p, on a $G_p \cap G_{p'} = \{0\}$, car si $x \in G_p \cap G_{p'}$, on a $\pi_x(\mathbf{Z}_p) = \pi'_x(\mathbf{Z}_{p'})$, ce qui est absurde si $x \neq 0$.

Si H est un sous-groupe *fermé* de G, la composante primaire (associée à p) de H est $H_p = H \cap G_p$: on a évidemment $H_p \subset G_p$ et si $x \in H \cap G_p$, $\pi_x(\mathbf{Z}_p) \subset H$ et $x \in H_p$.

Si G est *complet*, pour qu'un élément $x \in G$ appartienne à G_p, il faut et il suffit que la représentation $n \to x^n$ de $\mathbf{Z}$ (muni de la structure p-adique) dans G soit continue.

La composante primaire (associée à p) d'un groupe *discret* G est l'ensemble des éléments de G dont l'ordre est une puissance de p.

En général, l'ensemble G_p n'est pas *fermé* et n'est pas un *sous-groupe* de G.

Dans le tore $\mathbf{T}$, la composante primaire (associée à p) est l'ensemble des éléments dont l'ordre est une puissance de p; cet ensemble est un sous-groupe partout dense de $\mathbf{T}$, et, par suite, non fermé. Dans le groupe tétraédrique discret $\mathfrak{T}$, la composante primaire (associée à 2) est l'ensemble des éléments dont l'ordre est une puissance de 2 : cet ensemble n'est pas un sous-groupe de $\mathfrak{T}$.

Soient G un groupe topologique séparé et $\mathcal{J}_p$ l'ensemble des sous-groupes primaires (associé à p) de G. Si $H \in \mathcal{J}_p$, $H \subset G_p$. Soient $\mathfrak{G}$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{J}_p$, ordonné par inclusion, et K le sous-groupe engendré par $\bigcup_{H \in \mathfrak{G}} H$. Si $x \in K$, il existe une partie finie de $\mathfrak{G}$ dont le plus grand élément H' contient x. On peut donc prolonger par continuité la représentation $n \to x^n$ en une représentation π_x de $\mathbf{Z}_p$ dans G; celle-ci est unique et $\pi_x(\mathbf{Z}_p) \subset H' \subset K$. Donc $K \in \mathfrak{F}_p$ et $\mathfrak{F}_p$ est *inductif*. D'après le théorème de Zorn, il possède un élément *maximal*.

Définition 2. — *On dit qu'un sous-groupe maximal de* $\mathfrak{F}_p$ *est un sous-groupe de Sylow (associé à* p*) de* G [1].

Proposition 1. — *Si* G *est un groupe localement compact, totalement discontinu dont les deux structures uniformes sont identiques, tout sous-groupe de Sylow (associé à* p*) de* G *est fermé.*

Soit H_p un sous-groupe de Sylow (associé à p) de G et soit $x \in \overline{H}_p$. L'ensemble des sous-groupes distingués ouverts compacts de G étant un système fondamental de voisinages de e [2], quel que soit le sous-groupe distingué ouvert compact H de G, il existe $y \in H_p$ tel que $x \in Hy$. La représentation $n \to y^n$ de $\mathbf{Z}$ (muni de la structure p-adique, dans G est continue; il existe donc un entier $n \geqq 0$ tel que $y^{kp^n} \in H$) pour tout entier $k \geqq 0$, et $x^{kp^n} \in Hy^{kp^n} \subset H$, car H est *distingué*. La représentation de $\mathbf{Z}$ (muni de la structure p-adique) dans G est donc *continue* et l'on a $x \in G_p$. Comme $\overline{H}_p$ est un sous-groupe fermé de G, on a $\pi_x(\mathbf{Z}_p) \subset \overline{H}_p$. $\overline{H}_p$ est donc un sous-groupe primaire (associé à p) de G contenant H_p, ce qui est absurde si $H_p \neq \overline{H}_p$, car H_p est maximal. Donc $H_p = \overline{H}_p$.

Le même raisonnement montre d'ailleurs que la *composante primaire* (associée à p) G_p de G est un ensemble *fermé*.

---

(1) Cette définition, dans le cas des groupes finis, coïncide avec la définition classique des sous-groupes de Sylow. On trouvera des propriétés des sous-groupes de Sylow d'un groupe infini discret dans le Mémoire de R. Baer intitulé *Sylow-theorems for infinite groups* (*Duke Mathematical Journal*, 6, 1940, p. 598-614).

(2) Voir N. Bourbaki [VI], *Topologie générale*, Chap. III, § 3, Ex. 19.

Si G est un groupe *abélien*, la composante primaire (associée à p) de G est évidemment le seul sous-groupe de Sylow (associé à p) de G. En effet, si $x \in G_p$ et $y \in G_p$, la représentation continue $q \to qx - qy$ de $\mathbf{Z}_p$ dans G prolonge la représentation $n \to n(x-y) = nx - ny$ de $\mathbf{Z}$ dans G et G_p est un sous-groupe de G.

Si donc G est un groupe abélien localement compact, totalement discontinu, la composante primaire (associée à p) de G est un sous-groupe *fermé* de G.

Proposition 2. — *Tout groupe abélien compact totalement discontinu est produit de ses composantes primaires* [3].

Soient G un groupe abélien compact totalement discontinu, G_p la composante primaire (associée à p) de G et $\hat{G}$ le dual de G. On sait que $\hat{G}$ est un groupe abélien discret dont tous les éléments sont d'ordre fini. La composante primaire (associée à p) de $\hat{G}$ est l'ensemble $\hat{G}_p$ des éléments dont l'ordre est une puissance de p; il est bien connu [4] que $\hat{G}$ est *somme directe* de ses composantes primaires $\hat{G}_p$ ($p = 2, 3, \ldots$). Soit G'_p le conjugué dans G du sous-groupe $\sum_{q \neq p} \hat{G}_q$ de $\hat{G}$. G est isomorphe au produit des groupes $G'_p (p = 2, 3, \ldots)$ [5]. $\hat{G}_p$ est isomorphe à $\hat{G} / \sum_{q \neq p} \hat{G}_q$: G'_p est donc dual de $\hat{G}_p$ et primaire (associé à p). On a ainsi $G'_p \subset G_p$ et, par suite, $G^\star_p \subset \sum_{q \neq p} \hat{G}_q$, $G^\star_p$ désignant le conjugué de G_p dans $\hat{G}$. D'autre part, $\hat{G} / G^\star_p$ est le dual de G_p; c'est par suite un p-groupe; $\left(\sum_{q \neq p} \hat{G}_q\right) / G^\star_p$ est un sous-groupe de $\hat{G} / G^\star_{p}$, c'est-à-dire un p-groupe, ce qui est absurde,

---

[3] N. Jacobson a esquissé une démonstration directe de ce résultat. Voir *Locally compact totally disconnected rings* (*American Journal of Mathematics*, t. LVIII, 1936, p. 433-438).

[4] Voir par exemple L. Zippin (II), § **1** et **2**.

[5] Voir la démonstration du théorème **1** du paragraphe **2** du Chapitre I et L. Pontrjagin [V], Chap. V, § **34**.

car, dans $\sum_{q\neq p}\hat{G}_q$, aucun élément $\neq 0$ n'a pour ordre un multiple de p.

Donc $\sum_{q\neq p}\hat{G}_q = G_p^\star$ et $G'_p = G_p$.

Plus généralement :

THÉORÈME 1. — *Soient* G *un groupe abélien localement compact totalement discontinu, ainsi que son dual, et* H *un sous-groupe ouvert compact quelconque de* G; G *est isomorphe à la somme directe locale de ses composantes primaires* G_p, $(p = 2, 3, 5, \ldots)$, *relativement aux composantes primaires* $H \cap G_p$ *de* H.

H est un groupe abélien compact totalement discontinu. D'après la proposition précédente, il est produit de ses composantes primaires qui sont, on l'a vu, égales à $H \cap G_p$ $(p = 2, 3, 5, \ldots)$. Soit $x \in G$ et H_x le sous-groupe ouvert de G engendré par $H \cap \{x\}$. La classe de x dans G/H est d'ordre fini : en effet, le conjugué H^* de H dans le dual $\hat{G}$ de G est un sous-groupe compact totalement discontinu; c'est le dual du groupe discret G/H dont tous les éléments sont ainsi d'ordre fini. Le groupe H_x est donc réunion des classes $nx + H$ qui sont compactes et en nombre fini. Le groupe H_x est donc compact et isomorphe au produit de ses composantes primaires $H_x \cap G_p$ $(p = 2, 3, 5, \ldots)$. Soit x_p la projection de x dans $H_x \cap G_p$. Le groupe quotient H_x/H étant d'ordre fini m, la classe de x_p dans $(H_x \cap G_p)/(H \cap G_p)$ est d'ordre fini diviseur de m et cet ordre est une puissance de p. Par suite, on a $x_p \in H \cap G_p$, sauf pour les entiers premiers p (en nombre fini) qui divisent l'ordre de H_x/H. G' étant la somme directe locale des groupes G_p $(p = 2, 3, 5, \ldots)$, relativement aux sous-groupes ouverts $H \cap G_p$, on voit ainsi que $x \to (x_p)_{p=2,3,5,\ldots}$ est un isomorphisme φ de G dans G'. Mais la somme $H + \sum_{i=1}^{n} G_{p_i}$ est un sous-groupe de G, pour toute suite finie d'entiers premiers $(p_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ et G' est, par définition, réunion des sous-groupes $H + \prod_{i=1}^{n} G_{p_i} = \varphi\left(H + \sum_{i=1}^{n} G_{p_i}\right)$. Donc $\varphi(G) = G'$, d'où le théorème.

Ce théorème admet une réciproque; plus précisément :

Proposition 3. — *Soient* $(G_p)_{p=2,3,5,\ldots}$ *une suite de groupes abéliens localement compacts primaires (associés aux différents entiers premiers* p*) et* H_p *un sous-groupe ouvert compact de* G_p*; la somme directe locale des groupes* $(G_p)(p=2, 3, 5, \ldots)$*, relativement aux sous-groupes* H_p*, est un groupe abélien localement compact totalement discontinu ainsi que son dual, et* G_p *est la composante primaire (associée à* p*) de* G.

En effet, soient G la somme directe locale des G_p, relativement aux H_p, G'_p la composante primaire (associée à p) de G. G est localement compact et totalement discontinu et son dual $\hat{G}$, somme directe locale des groupes primaires $\hat{G}_p$, relativement aux sous-groupes H^*_p, est aussi totalement discontinu. Enfin, on a $G_p \subset G'_p$; inversement, si $x \in G'_p$, on a $x=(x_q)_{q=2,3,\ldots}$, avec $x_q \in G_q$. Comme $x \to x_q$ est une représentation continue de G'_p dans G_q, on a $x_q \in G'_p$ (Chap. II, § 1, Prop. 3). Or $G'_p \cap G'_q = \{0\}$ si $p \neq q$; on a donc $x_q = 0$ si $p \neq q$ et $x \in G_p$. Donc $G'_p \subset G_p$ et $G'_p = G_p$.

De plus on a les conditions d'isomorphie suivantes, qui résultent immédiatement du paragraphe **2** du Chapitre I [6] :

Proposition 4. — *Soit* G *(resp.* G'*) un groupe abélien localement compact, somme directe locale de ses composantes primaires* G_p (resp. G'_p) $(p=2, 3, 5, \ldots)$ *relativement à des sous-groupes ouverts compacts* H_p *(resp.* H'_p*); pour que* G *et* G' *soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme* φ_p *de* G_p *sur* G'_p *tel que, pour tous les entiers premiers* p*, excepté au plus un nombre fini,* $H'_p = \varphi_p(H_p)$.

On notera qu'en général, la donnée d'une suite de groupes abéliens localement compacts primaires (associés à p) $(G_p)_{p=2,3,\ldots}$ ne suffit pas *à déterminer à une isomorphie près* un groupe abélien G localement compact, totalement discontinu, ainsi que son dual, dont la composante primaire (associée à p) est isomorphe à G_p.

---

(6) Voir le théorème **1** du paragraphe **2** du Chapitre I.

Un exemple trivial de ce fait est le suivant. Soient G le groupe compact produit des groupes $\mathbf{Z}/(p)$ $(p=2, 3, \ldots)$ et G' le groupe discret somme directe de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/(p)$ $(p=2, 3, \ldots)$. Les composantes primaires (associées à p) de G et G' sont évidemment isomorphes à $\mathbf{Z}/(p)$, cependant les groupes topologiques G et G' ne sont pas isomorphes, car ils sont infinis.

2. Structure de certains groupes abéliens localement compacts. — Nous allons étudier ici la structure des groupes abéliens localement compacts, à l'aide des résultats obtenus dans le paragraphe **4** du Chapitre I, le paragraphe **4** du Chapitre II et le paragraphe **1** du Chapitre III.

Examinons d'abord les groupes abéliens localement compacts dont tout élément est d'*ordre fini*.

Proposition 1. — *Tout groupe abélien localement compact dont tout élément est d'ordre fini est totalement discontinu, ainsi que son dual.*

En effet, soit G un groupe abélien localement compact dont tous les éléments sont d'ordre *fini*. G possède un sous-groupe ouvert compact H. Soit $\hat{\mathrm{H}}$ le dual de H; $\hat{\mathrm{H}}$ est isomorphe au groupe $\hat{\mathrm{G}}/\mathrm{H}^*$, quotient du dual $\hat{\mathrm{G}}$ de G par le conjugué H^* de H dans G. Si $\hat{x}\in\hat{\mathrm{H}}$, $\hat{x}(\mathrm{H})$ est un sous-groupe fermé de $\mathbf{T}$ dont tous les éléments sont d'ordre fini, c'est-à-dire un groupe cyclique fini. Tous les éléments de $\hat{\mathrm{H}}$ sont donc d'ordre fini et H est totalement discontinu [7]. Comme H est ouvert dans G, la composante connexe de o dans G est identique à la composante connexe de o dans H et se réduit donc à $\{0\}$: G est totalement discontinu. H^* est un groupe compact totalement discontinu, car il est dual du groupe discret G/H dont tous les éléments sont d'ordre fini. Comme H^* est ouvert dans $\hat{\mathrm{G}}$, on voit comme précédemment que $\hat{\mathrm{G}}$ est totalement discontinu.

Soit G un groupe abélien *compact* dont tous les éléments sont d'ordre *fini*. G est produit de ses composantes primaires G_p $(p=2, 3, \ldots)$, qui sont des p-groupes abéliens compacts. Quel que soit $x\in\mathrm{G}$, on a $x=(x_p)_{(p=2,3,\ldots)}$, avec $x_p\in\mathrm{G}_p$ et il existe un

---

[7] Cf. Note [6] du Chapitre I.

entier $k \geqq 0$ tel que $kx = 0$, donc $kx_p = 0$. Par suite, pour tous les entiers premiers p qui ne divisent pas k, on a $x_p = 0$. Il en résulte que, pour tous les entiers premiers p, excepté un nombre fini, $G_p = \{0\}$ et G est produit d'un nombre fini de p-groupes compacts G_p $(p = p_1, p_2, \ldots, p_n, p_1 < p_2 < \ldots < p_n)$, D'après le théorème 3 du paragraphe **4** du Chapitre II, G_p est produit d'une famille de p-groupes cycliques d'ordres bornés. Donc tous les éléments de G sont d'ordre borné et on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Tout groupe abélien compact dont tout élément est d'ordre fini est produit d'une famille de groupes cycliques d'ordres bornés* [8].

La réciproque est triviale.

G_{p_i} est produit d'une famille $\big((H_\iota)_{\iota \in I(p_i^{r_i})}\big)$, $(0 < r_i \leqq k_i)$ de groupes cycliques d'ordres $\leqq p_i^{k_i}$, H_ι étant un groupe d'ordre p^{r_i} si $\iota \in I(p_i^{r_i})$. On dit que les $\sum_{i=1}^{n} k_i$ ensembles d'indices $I(p_i^{r_i})$, $(0 < r_i \leqq k_i,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ sont associés au groupe G. Ceci permet d'écrire les conditions d'isomorphie suivantes :

PROPOSITION 2. — *Soit* G (*resp.* G′) *un groupe abélien compact dont tous les éléments sont d'ordre fini,* $I(p_i^{r_i})$, $(0 < r_i \leqq k_i,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ (*resp.* $I'(q_j^{s_j})$, $(0 < s_j \leqq l_j,\ j = 1, 2, \ldots, n')$), *les ensembles d'indices qui lui sont associés. Pour que* G *et* G′ *soient isomorphes, il faut et il suffit que* $n = n'$, $p_i = q_i$ *et* $k_i = l_i$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, n$ *et que, pour tout* r_i $\big(0 < r_i \leqq k_i (i = 1, 2, \ldots, n)\big)$, $I(p_i^{r_i})$ *et* $I'(p_i^{r_i})$ *soient équipotents.*

Cela résulte immédiatement de la proposition 5 du paragraphe **2** du Chapitre II et de la proposition 4 du paragraphe **1** du Chapitre III.

---

[8] Ce théorème et la proposition **2** sont l'extension la plus grande possible du théorème de Gauss-Kronecker sur la décomposition d'un groupe abélien fini en produit de groupes cycliques. Remarquons, à ce propos, que de nombreuses propriétés des groupes finis s'étendent non pas, comme il semblerait naturel, aux groupes infinis discrets, mais aux groupes infinis compacts.

Soient maintenant G un groupe abélien localement compact dont tous les éléments sont d'ordre *fini*, H un sous-groupe ouvert compact de G et G_p la composante primaire (associée à p) de G. G_p est un p-groupe abélien localement compact et G est somme directe locale des groupes G_p $(p = 2, 3, \ldots)$, relativement aux sous-groupes ouverts compacts $H \cap G_p$. $H \cap G_p$ est la composante primaire (associée à p) de H et le groupe compact H est isomorphe au produit des groupes $H \cap G_p$ $(p = 2, 3, \ldots)$. Mais, d'après le théorème précédent, $H \cap G_p = \{0\}$, sauf pour un nombre fini d'entiers premiers $p_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Donc si $p \neq p_i$, G_p est un p-groupe *discret*. Soit G_0 le groupe discret somme directe des p-groupes $G_p (p \neq p_i)$ et G_1 le groupe somme directe locale des groupes $G_{p_i} (i = 1, 2, \ldots, n)$, relativement aux sous-groupes $H \cap G_{p_i}$. G_1 est isomorphe au groupe localement compact $\prod_{i=1}^{n} G_{p_i}$. Comme la somme directe locale de groupes est *associative*, G est isomorphe à $G_0 \times G_1$ D'où :

Théorème 2. — *Tout groupe abélien localement compact dont tous les éléments sont d'ordre fini, est produit d'un nombre fini de p_i-groupes localement compacts $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et d'un groupe abélien discret, somme directe de p-groupes discrets $(p \neq p_i, i = 1, 2, \ldots, n)$.*

Signalons encore la proposition suivante :

Proposition 3. — *Si* G *est un groupe abélien compact totalement discontinu dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini,* G *est produit de familles de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}_p (p = 2, 3, 5, \ldots)$.*

Cela résulte de la proposition 2 du paragraphe 1 du Chapitre III et du théorème 2 du paragraphe 3 du Chapitre II.

Nous allons maintenant caractériser les groupes abéliens localement compacts *généraux* comme *sous-groupes fermés* de groupes topologiques dont on peut étudier la structure à l'aide des résultats précédents. Rappelons que tout groupe abélien localement compact est de la forme $\mathbf{R}^n \times G$, où G est un groupe topologique abélien ayant un sous-groupe ouvert compact.

Soient d'abord G un groupe abélien localement compact *totalement* *discontinu* et G son dual. La réunion des sous-groupes compacts de G est un sous-groupe ouvert F de G. G/F est un groupe abélien discret dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini et F est dual de $\hat{G}/\hat{K}$, $\hat{K}$ étant la composante connexe de $\hat{G}$. Soit S une partie de G telle que les classes $y+F$ ($y \in S$) forment un *système de générateurs* de G/F. Soit K' un groupe abélien discret, somme directe d'une famille de sous-groupes cycliques infinis engendrés par une famille $(z_y)_{y \in S}$ d'éléments de K'. Si $z \in K'$, il existe une partie finie X de S et des entiers n_y ($y \in X$) déterminés de façon unique et tels que $z = \sum_{y \in x} n_y z_y$. On vérifie facilement que $z \to \sum_{y \in x} n_y y$ est une représentation de K' dans G. Donc l'application $(x, z) \to x + \sum_{y \in x} n_y y$ est une représentation φ du groupe (non topologique) $F \times K'$ sur G. Cette représentation est un homomorphisme, car sa restriction au sous-groupe ouvert F de $F \times K'$ coïncide avec l'automorphisme identique du sous-groupe ouvert F de G. Le dual $\hat{K}'$ de K' est isomorphe à $\mathbf{T}^S$ et le transposé $\hat{\varphi}$ de φ est un isomorphisme de $\hat{G}$ dans le groupe $\hat{K}' \times (\hat{G}/\hat{K})$, dual de $F \times K'$.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par G un groupe topologique abélien ayant un sous-groupe *ouvert compact,* par F la réunion des sous-groupes compacts de G et par K la composante connexe de o. F est un sous-groupe ouvert de G et K un sous-groupe compact de F. Le raisonnement précédent appliqué à F (au lieu de $\hat{G}$) permet d'écrire le résultat suivant :

PROPOSITION 4. — *Si* S *est un système de générateurs du dual de* K, F *est isomorphe à un sous-groupe fermé du groupe* $\mathbf{T}^S \times (F/K)$.

G/F est un groupe abélien discret G_2 dont tous les éléments $\neq 0$ sont *d'ordre infini* [9]. $G_1 = F/K$ est un groupe abélien localement

---

[9] *Voir* le paragraphe 1 du Chapitre I. On pourra étudier la structure du groupe G_2 à l'aide des résultats obtenus par A. MALCEV, *Torsionsfreie Abelsche Gruppen von endlichen Rang* (*Rec. Math. de Moscou*, t. 4, N. S., 1938, p. 45-67).

compact, totalement discontinu ainsi que son dual. Soit $\widetilde{G}_1$ le groupe abélien localement compact associé au groupe G_1, d'après le théorème 1 du paragraphe **3** du Chapitre I. Tous les éléments de $\widetilde{G}_1$ sont de hauteur infinie et G_1 est isomorphe à un sous-groupe ouvert G'_1 de $\widetilde{G}_1$ tel que tous les éléments de $\widetilde{G}_1 / G'_1$ soient d'ordre fini. On a vu, au paragraphe **3** du Chapitre I, que $\widetilde{G}_1$ est totalement discontinu ainsi que son dual. D'après le théorème 1 du paragraphe **1** du Chapitre III, $\widetilde{G}_1$ est somme directe locale de ses composantes primaires (associées aux différents entiers premiers p) ([10]). Avec ces notations, on a le théorème suivant, S désignant un *système de générateurs du dual de* K :

THÉORÈME 3. — *Si* G *est un groupe abélien ayant un sous-groupe ouvert compact,* G *est isomorphe à un sous-groupe fermé du groupe abélien localement compact* $\mathbf{T}^S \times \widetilde{G}_1 \times G_2$.

Soit G_0 le groupe topologique $\mathbf{T}^S \times \widetilde{G}_1 \times G_2$. D'après la proposition précédente, il existe un isomorphisme ψ du sous-groupe ouvert F de G dans le sous-groupe ouvert $\mathbf{T}^S \times \widetilde{G}_1$ de G_0. Tous les éléments de $\mathbf{T}^S \times \widetilde{G}_1$ sont de hauteur infinie; on peut donc prolonger ([11]) ψ en une représentation continue $\overline{\psi}$ de G dans $\mathbf{T}^S \times \widetilde{G}_1$. Soit $x \in G$ et $\dot{x}$ la classe de x dans $G/F = G_2$. $(\overline{\psi}(x), \dot{x})$ est un élément de G_0 et $x \to (\overline{\psi}(x), \dot{x})$ est une représentation φ du groupe (non topologique) G dans le groupe G_0. Cette représentation est continue, car elle prolonge l'isomorphisme ψ du sous-groupe ouvert F de G dans G_0. φ est biunivoque. En effet, soient x et x' dans G tels que $\varphi(x) = \varphi(x')$. On a

$$\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(x')$$

et la classe de x dans G/F est identique à celle de x'. Autrement dit, on a

$$x - x' \in F \qquad \text{et} \qquad \overline{\psi}(x - x') = \psi(x - x') = \psi(x) - \psi(x') = 0,$$

([10]) Si G_p est la *composante primaire* (associée à p) de $\widetilde{G}_1$, G_p est un groupe abélien localement compact primaire (associé à p) dont tous les éléments sont de hauteur infinie, car G_p est un sous-groupe pur *fermé* de $\widetilde{G}_1$.

([11]) *Voir* A. WEIL [VII], Chap. VI, § **26**, lemme 1.

d'où $x = x'$, car ψ est un isomorphisme. Enfin, la restriction de φ au sous-groupe ouvert F de G n'est autre que l'isomorphisme $x \to (\psi(x), o)$ du groupe topologique F sur le sous-groupe ouvert

$$\varphi(F) = \varphi(G) \cap (\mathbf{T}^s \times \tilde{G}_1)$$

de $\varphi(G)$; donc φ est un isomorphisme du groupe *topologique* G dans G_0.

CHAPITRE IV.

Groupe d'automorphismes d'un groupe localement compact.

1. Groupe d'automorphismes d'un groupe localement compact. — Soient G un groupe topologique séparé et $\mathcal{G}(G)$ le *groupe des automorphismes* de la structure de groupe topologique de G. Si $u \in \mathcal{G}(G)$, u est un automorphisme de la structure de groupe de G, u est continu et uniformément continu à droite et à gauche, ainsi que l'automorphisme réciproque $\overset{-1}{u}$. C et U étant des parties de G, on désigne par W(C, U) l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que pour tout $x \in G$, $u(x)x^{-1} \in U$. Quand G décrit l'ensemble des parties compactes de G et U un système fondamental de voisinages de l'élément neutre e de G, W(C, U) décrit une base de filtre $\mathfrak{B}$ sur $\mathcal{G}(G)$, car

$$W(C \cup C', U \cap U') \subset W(C, U) \cap W(C', U').$$

et l'intersection des W(C, U) est l'automorphisme identique.

Supposons que G soit *localement compact*, Alors $\mathfrak{B}$ vérifie les axiomes (GV'_I), (GV'_{III}) et (GV'_{IV}) des systèmes fondamentaux de voisinages de l'élément neutre dans un groupe topologique [1]. En effet, si U est un voisinage de e et C une partie compacte de G, il existe un voisinage *compact* U′ de e tel que, $U'^3 \subset U$; $C' = C \cup U'$ est une partie compacte de G et l'on a

$$W(C', U') \circ W(C', U') \subset W(C, U).$$

---

[1] On trouvera un énoncé des axiomes (GV'_I), (GV'_{II}), (GV'_{III}) et (GV'_{IV}) que vérifie un système fondamental de voisinages de l'élément neutre d'un groupe topologique dans N. Bourbaki [VI], *Topologie générale*, Chap. III, § 1, n° 2.

En effet, si u et $v \in W(C', U')$, pour tout $x \in C'$, $u(x) \in U'x$, $v(x) \in U'x$ et $u(U') \subset U'^2$; donc $u(v(x)) \in u(U')u(x) \subset U'^3 x \subset Ux$ et $u \circ v \in W(C, U)$. L'axiome (GV'_I) est donc vérifié. L'intersection des $W(C, U)$ est l'automorphisme identique et l'axiome (GV'_{III}) est aussi vérifié. Soit enfin C une partie compacte de G, U un voisinage de e et $u_0 \in \mathcal{G}(G)$; alors $C' = u_0(C)$ est une partie compacte de G et $U' = u_0(U)$ est un voisinage de e et l'on a $\overset{-1}{u_0} \circ W(C', U') \circ u_0 \subset W(C, U)$. En effet, si $u \in W(C', U')$ et si $v = \overset{-1}{u_0} \circ u \circ u_0$, pour tout $x \in C$, $v(x) \in \overset{-1}{u_0}(U' u_0(x)) \subset \overset{-1}{u_0}(U')x \subset Ux$. donc $v \in W(C, U)$ et l'axiome (GV'_{IV}) est vérifié. De même, les ensembles $\overset{-1}{W}(C, U)$ décrivent une base de filtre $\overset{-1}{\mathfrak{B}}$ vérifiant les axiomes (GV'_I), (GV'_{III}) et (GV'_{IV}). Donc, si $u \in \mathcal{G}(G)$, les bases de filtre $u \circ \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B} \circ u$ (resp. $u \circ \overset{-1}{\mathfrak{B}}$ et $\overset{-1}{\mathfrak{B}} \circ u$) sont *équivalentes* et forment un système fondamental de voisinages de u dans une topologie séparée $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) sur le groupe $\mathcal{G}(G)$ telle que l'application $(u, v) \to u \circ v$ de $\mathcal{G}(G) \times \mathcal{G}(G)$ sur $\mathcal{G}(G)$ soit *continue*. Pour que la topologie $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) soit *compatible* avec la structure de groupe de $\mathcal{G}(G)$, il faut et il suffit que l'application $u \to \overset{-1}{u}$ de $\mathcal{G}(G)$ sur lui-même soit *continue*, c'est-à-dire que les deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ soient identiques. Il n'en est généralement pas ainsi.

En effet, nous allons construire un groupe localement compact G dont le groupe d'automorphisme $\mathcal{G}(G)$ n'a pas cette propriété. Soit $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille infinie de groupes topologiques isomorphes à $\mathbf{Q}_p$ et H_ι le sous-groupe des entiers p-adiques de G_ι; H_ι est un sous-groupe ouvert compact de G_ι. Soit G la somme directe locale des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes H_ι, et $H = \prod_{\iota \in I} H_\iota$. G est un groupe abélien localement compact totalement discontinu et H est un sous-groupe ouvert compact de G. Soit C une partie compacte de G; il existe des $x_i \in G$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) tels que $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + H) = C'$ et C' est une partie compacte de G. Si $x_i = (x_{i,\iota})_{\iota \in I}$, on a $x_{i,\iota} \in H_\iota$ excepté si ι appartient à une partie finie J_i de I et $pr_\iota(C') = \bigcup_{i=1}^{n} pr_\iota(x_i + H) = \bigcup_{i=1}^{n} (x_{i,\iota} + H_\iota)$, $J = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$ est une partie finie de I et, si $\iota \notin J$, $pr_\iota(C') = H_\iota$. On a $C \subset C' \subset \prod_{\iota \in I} pr_\iota(C') = C''$ et C''

est une partie compacte de G. Soit U un voisinage de zéro dans G; il existe une partie finie J′ de I et un sous-groupe ouvert H'_ι de H_ι tel que $H'_\iota = H_\iota$ si $\iota \notin J'$ et que $\prod_{\iota \in I} H'_\iota = U' \subset U$. U′ est un voisinage de zéro et $W(C'', U') \subset W(C, U)$. I étant infini, soit $\varkappa \notin J \cup J'$. Soit $x = (x_\iota)_{\iota \in I} \in G$ et $x'_\iota = x_\iota$ si $\iota \neq \varkappa$ et $x'_\varkappa = px_\varkappa$. Alors $x \to (x'_\iota)_{\iota \in I}$ est un automorphisme u du groupe topologique G. On a $u \in W(C'', U')$ [car, si $\iota \neq \varkappa$, $x'_\iota - x_\iota = 0 \in H'_\iota$ et, si $x_\varkappa \in H_\varkappa$,

$$x'_\varkappa - x_\varkappa = (p-1)x_\varkappa \in H_\varkappa = H'_\varkappa;$$

donc, si $x = (x_\iota)_{\iota \in I} \in C''$,

$$u(x) - x = (x'_\iota - x_\iota)_{\iota \in I} \in \prod_{\iota \in I} H'_\iota = U'\Big];$$

d'autre part, $\overset{-1}{u} \notin W(H, H)$ [car, si $x = (x_\iota)_{\iota \in I} \in H$, avec $x_\varkappa \in H_\varkappa \cap \complement H_\varkappa^{(p)}$, $x_\varkappa - p^{-1}x_\varkappa = (1 - p^{-1})x_\varkappa \notin H_\varkappa$ et $\overset{-1}{u}(x) - x \in H$]. Il résulte de ceci que, lorsque $W(C, U)$ décrit $\mathfrak{B}$, $W(C'', U')$ décrit une base de filtre équivalente à $\mathfrak{B}$ et pour tout $W(C'', U')$, il existe un $u \in W(C'', U')$ tel que $\overset{-1}{u} \notin W(H, H)$. Donc l'application $u \to \overset{-1}{u}$ n'est pas continue sur le groupe $\mathcal{G}(G)$.

Cependant, si G est le groupe $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{Q}_p^n$), les topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont *identiques;* le groupe $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ [resp. $\mathcal{G}(\mathbf{Q}_p^n)$] est le groupe linéaire réel (resp. p-adique) de rang n, muni de la topologie habituelle.

Si G est un groupe *compact* et si $W(U)$ est l'ensemble des automorphismes u de G tels que $u(x)x^{-1} \in U$ pour tout $x \in G$, quand U décrit un système fondamental de voisinages de e, $W(U)$ décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans les topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ qui sont identiques. En effet, $W(U) = \overset{-1}{W}(U^{-1})$. car si $\overset{-1}{u} \in W(U^{-1})$ et $x \in G$, $\overset{-1}{u}\big(u(x)\big) = x \in U^{-1}u(x)$ et $u(x)$ décrit G quand x décrit G.

Si G est un groupe *discret* et si $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est l'ensemble des automorphismes u de G tels que $u(x_i) = x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, alors quand $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ décrit l'ensemble des parties finies de G, $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un *sous-groupe ouvert* de $\mathcal{G}(G)$ qui décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans les topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ qui sont ainsi identiques.

Soit $\mathcal{T}$ la *borne supérieure* (²) des topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ et $V(C, U)$ l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x)x^{-1} \in U$ et $\overset{-1}{u}(x)x^{-1} \in U$ pour tout $x \in C$. Lorsque C décrit l'ensemble des parties compactes de G

(²) *Voir* N. Bourbaki [VI], *Topologie générale*, Chap. 1, § 2.

et U un système fondamental de voisinages de e, $V(C, U)$ décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans la topologie $\mathfrak{T}$ et l'on voit comme précédemment que celui-ci vérifie les axiomes (GV'_{I}), (GV'_{III}) et (GV'_{IV}). De plus, $V(C, U)$ étant symétrique, l'application $u \rightarrow \overset{-1}{u}$ de $\mathcal{G}(G)$ sur lui-même est continue. La topologie $\mathfrak{T}$ vérifie donc l'axiome (GV'_{II}) (¹); elle est donc compatible avec la structure de groupe de $\mathcal{G}(G)$. Nous dirons que la topologie $\mathfrak{T}$ est la *topologie de G. Birkhoff* [3].

Définition 1. — *On dit que le groupe* $\mathcal{G}(G)$, *muni de la topologie de G. Birkhoff, est le groupe d'automorphismes du groupe localement compact* G.

Dans tout ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, $\mathcal{G}(G)$ désignera le groupe *topologique* ainsi défini.

Soit G un groupe localement compact; si $s \in G$, l'automorphisme *intérieur* $x \rightarrow sxs^{-1}$ est un automorphisme $u_s \in \mathcal{G}(G)$ et l'ensemble des automorphismes intérieurs est un sous-groupe *distingué* de $\mathcal{G}(G)$.

Proposition 1. — *Si* G *est un groupe localement compact dont les deux structures uniformes sont identiques,* $s \rightarrow u_s$ *est une représentation continue de* G *dans* $\mathcal{G}(G)$ [4].

$s \rightarrow u_s$ est une représentation de G dans $\mathcal{G}(G)$, car, si $s \in G$ et $t \in G$, $u_s(u_t(x)) = stxt^{-1}s^{-1} = u_{st}(x)$. Cette représentation est continue.

En effet, quel que soit le voisinage U de e, il existe un voisinage

---

(³) Cette topologie (appelée par N. Bourbaki topologie de *convergence compacte*) est aussi *compatible* avec la structure algébrique du *groupe des automorphismes* d'un espace uniforme localement compact. *Voir*, par exemple, le Mémoire de G. Birkhoff, *The topology of transformation-sets* (*Annals of Mathematics*, t. 35, 1934, p. 861-875).

(⁴) Le groupe des automorphismes intérieurs de G est relativement compact si on le munit de la topologie définie ainsi : les ensembles $V(G, C \cap U)$ (C étant un voisinage compact de e *fixe*) forment un système de voisinages de l'automorphisme identique dans la topologie $\mathfrak{T}'$ quand U décrit un système fondamental de voisinages de e dans G. La proposition 1 est encore exacte si G est un groupe localement compact quelconque.

symétrique U' de e tel que pour tout $x \in G$, $xU'x^{-1} = U'$ et $U'^2 \subset U$ (5); donc $U'xU'x^{-1} \subset U'^2 \subset U$ et, si $s \in U'$, $sxs^{-1}x^{-1} \in U$ et $s^{-1}xsx^{-1} \in U$, pour tout x appartenant à une partie compacte quelconque C de G; donc $u_s \in V(C, U)$.

L'image réciproque de l'automorphisme identique par cette représentation est le *centre* de G.

Corollaire. — *Si* G *est un groupe compact et si* Z *est son centre, l'ensemble des automorphismes intérieurs de* G *est un sous-groupe compact de* $\mathcal{G}(G)$, *isomorphe à* G/Z.

En effet, les deux structures uniformes de G sont identiques et $s \rightarrow u_s$ est un *homomorphisme* de G dans $\mathcal{G}(G)$.

Proposition 2. — *Pour tout* $x \in G$, $u \rightarrow u(x)$ *est une application continue de* $\mathcal{G}(G)$ *dans* G.

En effet, soit U un voisinage de e. L'ensemble des $v \in \mathcal{G}(G)$ tels que $v(x)u(x)^{-1} \in U$ est $W(\{x\}, U) \circ u \supset V(\{x\}, U) \circ u$ qui est un voisinage de u dans $\mathcal{G}(G)$.

En particulier, l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x) = x$ est un sous-groupe *fermé* de $\mathcal{G}(G)$ (6).

Soient H un sous-groupe de G et $u \in \mathcal{G}(G)$ tel que $u(x) = x$ quel que soit $x \in H$. On a $u(H) = H$ et, par suite, $\overline{H}$ est un sous-groupe fermé de G tel que $\overline{u(H)} = \overline{H} = u(\overline{H})$. La restriction de u à $\overline{H}$ est donc un automorphisme de $\overline{H}$, prolongeant l'automorphisme identique de H : c'est l'automorphisme identique de $\overline{H}$.

Comme $H \subset \overline{H}$, l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$, tels que $u(x) = x$ pour tout $x \in \overline{H}$ est égal à l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$, tels que $u(x) = x$ pour tout $x \in H$. Cet ensemble est un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}(G)$, car il est l'intersection des sous-groupes fermés de $\mathcal{G}(G)$ formés par les u tels que $u(x) = x$, quand x décrit H.

---

(5) *Voir* N. Bourbaki [VI], *Topologie générale*, Chap. III, § 3, Ex. 3.

(6) Plus généralement, si A et B désignent des fermés de G, l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x)x^{-1} \in B$ et $u(x)x^{-1} \in B$ pour tout $x \in A$ est un ensemble fermé $V(A, B)$ de $\mathcal{G}(G)$; on a, avec les notations de ce paragraphe, $\mathcal{N}(H) = V(H, H)$, $\mathcal{C}(H) = V(H, \{e\})$ et $\mathcal{Z}(H) = V(G, H)$.

DÉFINITION 2. — *Si* H *est un sous-groupe fermé de* G, *le sous-groupe fermé* $\mathcal{C}(H)$ *de* $\mathcal{G}(G)$ *formé par les* $u \in \mathcal{G}(G)$ *tels que* $u(x) = x$ *pour tout* $x \in H$ *est appelé le centralisateur de* H *dans* $\mathcal{G}(G)$ (⁷).

Soient K un *corps topologique* localement compact, K′ un sous-corps fermé de K. L'ensemble des automorphismes du corps K qui appartiennent au centralisateur $\mathcal{C}(K')$ de K′ est un sous-groupe fermé $\mathcal{G}(K, K')$ de $\mathcal{G}(K)$, qu'on appelle le groupe de Galois de K par rapport à K. Les *groupes de Galois topologiques* ainsi définis jouent un rôle important dans la théorie des corps localement compacts, en particulier dans la théorie des corps discrets (⁸).

Soient H un sous-groupe de G et $u \in \mathcal{G}(G)$ tel que $u(H) = H$. On a $u(\overline{H}) = \overline{H}$, car $H = u(H)$ est un sous-groupe partout dense dans $\overline{H}$ et dans $\overline{u(H)} = u(\overline{H})$.

Si H est un sous-groupe fermé de G, l'ensemble des $u \subset \mathcal{G}(G)$ tels que $u(H) = H$ est un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}(G)$; en effet, si $u(H) = H$ et $v(H) = H$, $\overset{-1}{v}(H) = H$ et $u\big(\overset{-1}{v}(H)\big) = u(H) = H$; c'est un ensemble fermé, car c'est l'intersection des ensembles, fermés d'après la proposition **2**, formés par les $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x) \in H$, quand x décrit H.

DÉFINITION 3. — *Si* H *est un sous-groupe fermé de* G, *le sous-groupe fermé* $\mathcal{N}(H)$ *de* $\mathcal{G}(G)$ *formé par les* $u \in \mathcal{G}(G)$ *tels que* $u(H) = H$ *est appelé le normalisateur de* H *dans* $\mathcal{G}(G)$ (⁷).

Le centralisateur $\mathcal{C}(H)$ de H est un sous-groupe *distingué* fermé de $\mathcal{N}(H)$. En effet, si $u \in \mathcal{N}(H)$, $v \in \mathcal{C}(H)$ et $x \in H$, on a

$$u\Big(v\big(\overset{-1}{u}(x)\big)\Big) = u\big(\overset{-1}{u}(x)\big) = x.$$

car $u(x) \in H$; donc $u \circ v \circ \overset{-1}{u} \in \mathcal{C}(H)$.

(⁷) Si u_s est l'automorphisme intérieur $x \to sxs^{-1}$, l'image réciproque de $\mathcal{C}(H)$ [resp. $\mathcal{N}(H)$, $\mathcal{K}(G)$] par $s \to u_s$ est un sous-groupe fermé de G qu'on appelle *centralisateur* de H (resp. normalisateur de H, noyau) dans G. *Voir* par exemple H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, III, § 4.

(⁸) Cette définition des *groupes de Galois* coïncide avec celle déjà donnée dans les cas étudiés. *Voir* par exemple W. KRULL, *Galoische Théorie der unendlichen Normalkörper* (*Mathematische Annalen*, t. 100, 1928, p. 687-698).

Proposition 3. — *Si* H *est un sous-groupe ouvert compact de* G, *son normalisateur est un sous-groupe ouvert de* $\mathcal{G}(G)$.

En effet, montrons que $\mathfrak{N}(H) = V(H, H)$. Si $u \in \mathfrak{N}(H)$ et si $x \in H$, $u(x) \in H$ et $u(x)x^{-1} \in H$; de même $\overset{-1}{u}(x)x^{-1} \in H$; donc $u \in V(H. H)$. Inversement, si $u \in V(H, H)$ et si $x \in H$, $u(x)x^{-1} \in H$ et $u(H) = H$; de même $\overset{-1}{u}(H) = H$; d'où $u(H) = H$. On en déduit la proposition, car $V(H, H)$ est un voisinage de l'automorphisme identique.

Soient H un sous-groupe fermé de G et $u \in \mathfrak{N}(H)$. La restriction u_H de u à H est un automorphisme de H. On vérifie facilement que $u \to u_H$ est une représentation de $\mathfrak{N}(H)$ sur le sous-groupe de $\mathcal{G}(H)$ formé par les automorphismes u_H de H qui peuvent être prolongés en un automorphisme de G. Cette représentation est continue. En effet, $u \in \mathfrak{N}(H) \cap V(C, U)$, C étant une partie compacte de G et U un voisinage de e, quel que soit $x \in H$, on a $u(x) \in H$, $u(x)x^{-1} \in Hx^{-1} \cap H$ et, quel que soit $x \in C$, $u(x)x^{-1} \in U$; donc, si $x \in C \cap H$, $u(x)x^{-1} \in U \cap H$; de même $u(x)x^{-1} \in U \cap H$, si $x \in C \cap H$; donc $u \in V(C \cap H, U \cap H)$. $V(C \cap H, U \cap H)$ décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(H)$ et l'image réciproque de $V(C \cap H, U \cap H)$ par $u \to u_H$ contient $\mathfrak{N}(H) \cap V(C, U)$, donc est ouvert dans $\mathfrak{N}(H)$. En résumé :

Proposition 4. — *Si* H *est un sous-groupe fermé de* G *et si* $u \in \mathfrak{N}(H)$, *la restriction* u_H *de* u *à* H *est un automorphisme de* H *et* $u \to u_H$ *est une représentation continue de* $\mathfrak{N}(H)$ *dans* $\mathcal{G}(H)$.

L'image réciproque de l'automorphisme identique de H par cette représentation est l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que, pour tout $x \in H$, $u(x) = x$, c'est-à-dire $\mathcal{C}(H)$. $u \to u_H$ n'est généralement pas un homomorphisme.

Soit maintenant H un sous-groupe distingué fermé de G. G/H est un groupe localement compact; soit $\mathcal{G}(G/H)$ son groupe d'automorphismes. Si $u \in \mathfrak{N}(H)$ et si $x \in G$ et $y \in G$, $xy^{-1} \in H$ équivaut à $u(x)u(y)^{-1} \in H$ ou à $\overset{-1}{u}(x)\overset{-1}{u}(y)^{-1} \in H$ et l'on a

$$u(xyH) = u(x)u(y)H = u(x)Hu(y)H$$

et

$$\overset{-1}{u}(xy)\mathrm{H} = \overset{-1}{u}(x)\overset{-1}{u}(y)\mathrm{H} = \overset{-1}{u}(x)\mathrm{H}\overset{-1}{u}(y)\mathrm{H}.$$

Donc $x\mathrm{H} \to u(x)\mathrm{H}$ est un automorphisme $\dot{u}$ du groupe (non topologique) G/H. Si U est un voisinage de e, $u(\mathrm{U})\mathrm{H} = u(\mathrm{UH})$ est ouvert dans G/H; donc $\dot{u}$ est bicontinu et $\dot{u} \in \mathcal{G}(\mathrm{G/H})$. On voit facilement que $u \to \dot{u}$ est une représentation de $\mathcal{N}(\mathrm{H})$ dans $\mathcal{G}(\mathrm{G/H})$ et cette représentation est continue. En effet, soit U un voisinage compact de e et C′ une partie compacte de G/H. Il existe des $x_i \in \mathrm{G}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tels que $\mathrm{C}' \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i\mathrm{UH}$; soit $\mathrm{C} = \bigcup_{i=1}^{n} x_i\mathrm{U}$: C est une partie compacte de G et CH une partie compacte de G/H contenant C′. Si

$$u \in \mathcal{N}(\mathrm{H}) \cap \mathrm{V}(\mathrm{C}, \mathrm{U}),$$

on a, quel que soit $x \in \mathrm{C}$,

$$u(x)x^{-1} \in \mathrm{U}, \quad u(x\mathrm{H})x^{-1}\mathrm{H} = u(x)x^{-1}\mathrm{H} \subset \mathrm{UH}.$$

De même $\overset{-1}{\dot{u}}(x\mathrm{H})x^{-1}\mathrm{H} \subset \mathrm{UH}$ et $\dot{u} \in \mathrm{V}(\mathrm{CH}, \mathrm{UH}) \subset \mathrm{V}(\mathrm{C}', \mathrm{UH})$. $\mathrm{V}(\mathrm{C}', \mathrm{UH})$ décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique de $\mathcal{G}(\mathrm{G/H})$ et l'image réciproque de $\mathrm{V}(\mathrm{C}', \mathrm{UH})$ par $u \to \dot{u}$ contient $\mathcal{N}(\mathrm{H}) \cap \mathrm{V}(\mathrm{C}, \mathrm{U})$, donc est ouverte dans $\mathcal{N}(\mathrm{H})$. En résumé :

Proposition 5. — *Si* H *est un sous-groupe distingué fermé de* G *et si* $u \in \mathcal{N}(\mathrm{H})$, $x\mathrm{H} \to u(x)\mathrm{H}$ *est un automorphisme* $\dot{u} \in \mathcal{G}(\mathrm{G/H})$ *et* $u \to \dot{u}$ *est une représentation continue de* $\mathcal{N}(\mathrm{H})$ *dans* $\mathcal{G}(\mathrm{G/H})$.

L'image réciproque de l'automorphisme identique de G/H par $u \to \dot{u}$ est le sous-groupe distingué fermé $\mathfrak{Z}(\mathrm{H})$ de $\mathcal{N}(\mathrm{H})$ formé par les $u \in \mathcal{G}(\mathrm{G})$ tels que, pour tout $x \in \mathrm{G}$, $u(x\mathrm{H}) = x\mathrm{H}$, c'est-à-dire $u(x)x^{-1} \in \mathrm{H}$. $\mathcal{C}(\mathrm{H}) \cap \mathfrak{Z}(\mathrm{H})$ est un sous-groupe *abélien fermé* (9) de $\mathcal{G}(\mathrm{G})$. $u \to \dot{u}$ n'est généralement pas un homomorphisme.

L'intersection des normalisateurs de tous les sous-groupes fermés

---

(9) *Voir* H. Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, II, Aufgabe 6.

de G est appelée le *noyau* [10] de $\mathcal{G}(G)$. C'est un sous-groupe *fermé* de $\mathcal{G}(G)$, car c'est l'intersection des sous-groupes fermés $\mathfrak{N}(H)$, quand H décrit l'ensemble des sous-groupes fermés de G. On désigne le noyau de $\mathcal{G}(G)$ par $\mathcal{K}(G)$. $\mathcal{K}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}(G)$, car si $u \in \mathcal{K}(G)$ et si $v \in \mathcal{G}(G)$, on a, pour tout sous-groupe fermé H de G, $u\left(\overset{-1}{v}(H)\right) = \overset{-1}{v}(H)$ et $v\left(u\left(\overset{-1}{v}(H)\right)\right) = v\left(\overset{-1}{v}(H)\right) = H$; donc $v \circ u \circ \overset{-1}{v} \in \mathcal{G}(G)$.

Proposition 6. — *Pour qu'un automorphisme $u \in \mathcal{G}(G)$ appartienne à $\mathcal{K}(G)$, il faut et il suffit que, pour tout sous-groupe cyclique* H *de* G, $u(\overline{H}) = \overline{H}$ [10].

Soit H un sous-groupe cyclique de G; si $u \in \mathcal{K}(G)$, $u(\overline{H}) = \overline{H}$. Inversement, si H est un sous-groupe fermé quelconque de G et si, pour tout sous-groupe H_x de G engendré par $x \in G$, $u(\overline{H}_x) = \overline{H}_x$, on a, si $x \in H$,

$$u(x) \in u(H_x) \subset u(\overline{H}_x) = \overline{H}_x \subset H,$$

donc $u \in \mathcal{K}(G)$.

Définition 4. — *Un sous-groupe fermé* H *de* G *est dit caractéristique si* $\mathfrak{N}(H) = \mathcal{G}(G)$.

Tout sous-groupe caractéristique est distingué. Si H est un sous-groupe de G tel que $u(H) = H$ pour tout $u \in \mathcal{G}(G)$, son adhérence $\overline{H}$ est un sous-groupe caractéristique de G.

Théorème 1. — *Soit* G *un groupe localement compact, produit d'une famille* $(G_\iota)_{\iota \in I}$ *de sous-groupes fermés caractéristiques; le groupe topologique* $\mathcal{G}(G)$ *est isomorphe au produit de la famille de groupes* $(\mathcal{G}(G_\iota))_{\iota \in I}$.

Remarquons que tous les G_ι sont localement compacts et même compacts, à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

Soit $u \in \mathcal{G}(G)$. La restriction de u à G_ι est un automorphisme u_ι du

---

[10] Le noyau de G, dans le cas d'un groupe discret, a été défini et étudié par R. Baer dans *Der Kern, eine charakteristische Untergruppe* (*Compositio Mathematica*, t. 1, 1934, p. 254-283).

groupe topologique G_ι et l'on a

$$u(x) = \big(u_\iota(pr_\iota(x))\big)_{\iota \in I}.$$

En effet, soit $\mathfrak{F}$ le *filtre des sections* de l'ensemble des parties finies de I, ordonné par la relation $\subset$. Tout $x \in G$ est *limite* suivant $\mathfrak{F}$ de l'application $J \to pr_J(x)$; comme u est continue dans G, $u(x)$ est limite suivant $\mathfrak{F}$ de l'application $J \to u(pr_J(x)) = \big(u_\iota(pr_\iota(x))\big)_{\iota \in J}$, d'où l'expression de $u(x)$ donnée ci-dessus.

Inversement, si $u_\iota \in \mathcal{G}(G_\iota)$, $(u_\iota \circ pr_\iota)_{\iota \in I}$ est un automorphisme u du groupe (non topologique) G. $u_\iota \circ pr_\iota$ et $\overset{-1}{u_\iota} \circ pr_\iota$ étant continus, u est un homéomorphisme de G et sa restriction à G_ι est u_ι. On vérifie facilement que $u \to (u_\iota)_{\iota \in I}$ est un isomorphisme φ du groupe (non topologique) $\mathcal{G}(G)$ sur le groupe $\prod_{\iota \in \iota} \mathcal{G}(G_\iota)$. Soit $U = \prod_{\iota \in I} U_\iota$ un voisinage de e dans G, défini comme suit : U_ι est un voisinage de e_ι dans G_ι égal à G_ι excepté si ι appartient à une partie finie J de I. Si C est une partie compacte de G, $pr_\iota(C) = C_\iota$ est une partie compacte de G_ι; on a $C \subset \prod_{\iota \in I} C_\iota = C'$ et C' est une partie compacte de G. On a donc $V(C', U) \subset V(C, U)$. Si $V_\iota(C_\iota, U_\iota)$ est l'ensemble des $u_\iota \in \mathcal{G}(G_\iota)$ tels que $u_\iota(x_\iota)x_\iota^{-1} \in U_\iota$ et $\overset{-1}{u_\iota}(x_\iota)x_\iota^{-1} \in U_\iota$ pour tout $x_\iota \in C_\iota$, alors pour tout $\iota \notin J$, $V_\iota(C_\iota, U_\iota) = \mathcal{G}(G_\iota)$. Donc $\prod_{\iota \in I} V_\iota(C_\iota, U_\iota)$ est un voisinage de l'élément neutre du groupe topologique $\prod_{\iota \in I} \mathcal{G}(G_\iota)$ et on a

$$\varphi(V(C, U)) \supset \varphi(V(C', U)) = \prod_{\iota \in I} V_\iota(C_\iota, U_\iota);$$

donc l'isomorphisme $\overset{-1}{\varphi}$ est continu. D'autre part, soit $\prod_{\iota \in I} V_\iota$ un voisinage de l'élément neutre de $\prod_{\iota \in I} \mathcal{G}(G_\iota)$, défini comme suit : V_ι est un voisinage de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(G)$ égal à $\mathcal{G}(G_\iota)$ excepté si ι appartient à une partie finie J de I et, si $\iota \in J$, V_ι est l'ensemble $V_\iota(C_\iota, U_\iota)$ des $u_\iota \in \mathcal{G}(G_\iota)$ tels que $u_\iota(x_\iota)x_\iota^{-1} \in U_\iota$ et $\overset{-1}{u_\iota}(x_\iota)x_\iota^{-1} \in U_\iota$ quel que soit $x_\iota \in C_\iota$ (U_ι étant un voisinage de e_ι dans G_ι et C_ι une partie compacte de G_ι). Soit $U_\iota = G_\iota$ et C_ι une partie compacte quelconque de G_ι, pour $\iota \notin J$. Alors, pour tout $\iota \notin J$, $\mathcal{G}(G_\iota) = V_\iota = V_\iota(C_\iota, U_\iota)$. $U = \prod_{\iota \in I} U_\iota$ est un voisinage de e dans G et $C = \prod_{\iota \in I} C_\iota$ est une partie compacte de G; donc $V(C, U)$ est un voisinage de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(G)$ et

$$V(C, U) = \overset{-1}{\varphi}\left(\prod_{\iota \in I} V_\iota\right);$$

φ est donc continu et par suite est un *isomorphisme* du groupe topologique $\mathcal{G}(G)$ sur $\prod_{\iota \in I} \mathcal{G}(G_\iota)$.

Théorème 2. — *Si* G *est un groupe abélien localement compact et si* $\hat{G}$ *est son dual, les groupes topologiques* $\mathcal{G}(G)$ *et* $\mathcal{G}(\hat{G})$ *sont isomorphes.*

Si $u \in \mathcal{G}(G)$, on sait [11] que son *transposé* $\hat{u}$ est un automorphisme du groupe topologique $\hat{G}$ et l'on a, si $v \in \mathcal{G}(G)$, $\widehat{u \circ v} = \hat{v} \circ \hat{u}$. Donc $u \to \overset{-1}{\hat{u}}$ est un isomorphisme φ du groupe (non topologique) $\mathcal{G}(G)$ sur le groupe $\mathcal{G}(\hat{G})$. Quand U décrit le filtre des voisinages de zéro dans $\mathbf{T}$ et C (resp. $\hat{C}$) l'ensemble des parties compactes de G (resp. $\hat{G}$), l'ensemble $V(C, \hat{C}, U)$ des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que

$$\langle u(x) - x, \hat{x} \rangle \in U \qquad \text{et} \qquad \langle \overset{-1}{u}(x) - x, \hat{x} \rangle \in U$$

[resp. l'ensemble $\hat{V}(C, \hat{C}, U)$ des $\hat{u} \in \mathcal{G}(\hat{G})$ tels que $\langle x, \hat{u}(\hat{x}) - \hat{x} \rangle \in U$ et $\langle x, \overset{-1}{\hat{u}}(\hat{x}) - \hat{x} \rangle \in U$] quels que soient $x \in C$ et $\hat{x} \in \hat{C}$, décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique

[11] *Voir* Chapitre I, paragraphe 1.

dans $\mathcal{G}(G)$ [resp. dans $\mathcal{G}(\hat{G})$]. On a

$$\begin{aligned}\langle u(x)-x, \hat{x}\rangle &= \langle u(x), \hat{x}\rangle - \langle x, \hat{x}\rangle \\ &= \langle x, \hat{u}(\hat{x})\rangle - \langle x, \hat{x}\rangle = \langle x, \hat{u}(\hat{x})-\hat{x}\rangle;\end{aligned}$$

de même $\langle \overset{-1}{u}(x)-x, \hat{x}\rangle = \langle x, \overset{-1}{\hat{u}}(\hat{x})-\hat{x}\rangle$. Donc

$$\hat{V}(C, \hat{C}, U) = \varphi\big(V(C, \hat{C}, U)\big)$$

et φ est un homéomorphisme de $\mathcal{G}(G)$ sur $\mathcal{G}(\hat{G})$. Avec ces notations et celles de la proposition 5, on a la

Proposition 7. — *Si* H *est un sous-groupe fermé de* G *et si* $H^\star$ *est son conjugué dans* $\hat{G}$, *on a* $\varphi\big(\mathfrak{N}(H)\big) = \mathfrak{N}(H^\star)$ *et* $\varphi\big(\mathcal{C}(H)\big) = \mathfrak{Z}(H^\star)$.

En effet, on a $\langle u(x), \hat{x}\rangle = \langle x, \hat{u}(\hat{x})\rangle$. Si $x\in H$, $\hat{x}\in H^\star$ et $u\in\mathfrak{N}(H)$, on a $u(x)\in H$, $\langle u(x), \hat{x}\rangle$ o, donc $\hat{u}(\hat{x})\in H^\star$ et $\hat{u}\in\mathfrak{N}(H^\star)$. Si $\hat{u}\in\mathfrak{N}(H^\star)$, on a $\hat{u}(\hat{x})\in H^\star$, $\langle x, \hat{u}(\hat{x})\rangle = 0$, donc $u(x)\in H$ et $u\in\mathfrak{N}(H)$. D'où $\varphi\big(\mathfrak{N}(H)\big) = \mathfrak{N}(H^\star)$.

Dautre part, on a

$$\langle u(x)-x, \hat{x}\rangle = \langle u(x), \hat{x}\rangle - \langle x, \hat{x}\rangle = \langle x, \hat{u}(\hat{x})\rangle - \langle x, \hat{x}\rangle = \langle x, \hat{u}(\hat{x}) - \hat{u}\rangle.$$

Si $x\in H$, $\hat{x}\in\hat{G}$ et $u\in\mathcal{C}(H)$, on a $u(x)=x$ et $\langle x, \hat{u}(\hat{x})-\hat{x}\rangle = 0$; donc $\hat{u}(\hat{x})-\hat{x}\in H^\star$ pour tout $\hat{x}\in\hat{G}$ d'où $\hat{u}\in\mathfrak{Z}(H^\star)$. Inversement, si $\hat{u}\in\mathfrak{Z}(H^\star)$, on a $\hat{u}(\hat{x})-\hat{x}\in H^\star$ et $\langle u(x)-x, \hat{x}\rangle = 0$ donc $u(x)=x$ pour tout $x\in H$, c'est-à-dire $u\in\mathcal{C}(H)$. D'où $\varphi\big(\mathcal{C}(H)\big) = \mathfrak{Z}(H^\star)$.

2. Groupe d'automorphismes d'un groupe localement compact totalement discontinu. Proposition 1. — *Si* G *est un groupe localement compact totalement discontinu, l'ensemble des sous-groupes ouverts de* $\mathcal{G}(G)$ *est un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique.*

Soient H un sous-groupe ouvert compact de G et C une partie compacte de G. $C' = C\cup H$ est une partie compacte de G et l'on a $V(C', H)\subset V(C, H)$. Si $u\in V(C', H)$ et $v\in V(C', H)$, on a, pour tout $x\in C'$, $u(x)\in Hx$ et $\overset{-1}{v}(x)\in Hx$, d'où $u(H)\subset H$ et $\overset{-1}{v}(H)\subset H$;

donc $u\big(\overset{-1}{v}(x)\big) \in u(\mathrm{H})\, u(x) \subset \mathrm{H}x$ et, de même, $v\big(\overset{-1}{u}(x)\big) \in \mathrm{H}x$. Donc $u \circ \overset{-1}{v} \in \mathrm{V}(\mathrm{C}', \mathrm{H})$. $\mathrm{V}(\mathrm{C}', \mathrm{H})$ est donc un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}(\mathrm{G})$. D'autre part, quand C décrit l'ensemble des parties compactes de G et H l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G (qui est un système fondamental de voisinage de e), $\mathrm{V}(\mathrm{C}', \mathrm{H})$ décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(\mathrm{G})$.

Corollaire. — *Si* G *est un groupe localement compact totalement discontinu,* $\mathcal{G}(\mathrm{G})$ *est un groupe totalement discontinu.*

En effet, $\mathrm{V}(\mathrm{C}', \mathrm{H})$ est onvert et fermé; la composante connexe de l'automorphisme identique est contenue dans l'intersection des $\mathrm{V}(\mathrm{C}', \mathrm{H})$ et par suite, se réduit à l'automorphisme identique.

Soit G un groupe abélien localèment compact *totalement discontinu ainsi que son dual.* On a vu que G est *somme directe locale de ses composantes primaires* $\mathrm{G}_p\,(p = 2, 3, \ldots)$, relativement à des sous-groupes ouverts compacts H_p.

Théorème 1. — *Le groupe d'automorphismes* $\mathcal{G}(\mathrm{G})$ *est produit direct local des groupes d'automorphismes* $\mathcal{G}(\mathrm{G}_p)$ $(p = 2, 3, \ldots)$, *relativement aux sous-groupes ouverts* $\mathcal{N}(\mathrm{H}_p)$.

En effet, il est clair que, pour tout entier premier p, G_p est un sous-groupe *caractéristique* de G. Donc, si $u \in \mathcal{G}(\mathrm{G})$ la restriction de u à G_p est un automorphisme u_p de G_p. $\mathrm{H} = \prod\limits_{\mathrm{P}} \mathrm{H}_p$ et $u(\mathrm{H}) \cap \mathrm{H} = \mathrm{H}'$ sont des sous-groupes ouverts compacts de G et $u(\mathrm{H})/\mathrm{H}'$ est un groupe fini d'ordre $n = \prod\limits_{i=1}^{m} p_i^{r_i}$. En remarquant que la composante primaire (associée à p) de H [resp. de $u(\mathrm{H})$] est H_p [resp. $u(\mathrm{H}_p)$], on voit que, pour tous les entiers premiers p différents des $p_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ on a $u(\mathrm{H}_p) \subset \mathrm{H}_p$, c'est-à-dire $u_p(\mathrm{H}_p) \subset \mathrm{H}_p$. De même, pour tous les entiers premiers p différents d'entiers $p'_j (j = 1, 2, \ldots, m')$, on a $\overset{-1}{u}_p(\mathrm{H}_p) \subset \mathrm{H}_p$. Donc, pour tous les entiers premiers p, différents des p_i et des $p'_j (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, m')$ on a $u_p(\mathrm{H}_p) = \mathrm{H}_p$, c'est-à-dire $u_p \in \mathfrak{N}(\mathrm{H}_p)$. Inversement, soit $(u_p)_{p=2,3,\ldots}$ un élément du produit direct local $\mathcal{G}$ des groupes $\mathcal{G}(\mathrm{G}_p)$, relativement aux sous-groupes ouverts $\mathfrak{N}(\mathrm{H}_p)$. Si $x=(x_p)_{p=2,3,\ldots}$, avec $x_p \in \mathrm{G}_p$ pour tout entier premier p et $x_p \in \mathrm{H}_p$ pour tous les entiers premiers p, excepté un nombre fini, on a $u_p(x_p) \in \mathrm{H}_p$ pour tous les entiers premiers p, excepté un nombre fini; donc $\big(u_p(x_p)\big)_{p=2,3,\ldots} \in \mathrm{G}$. On vérifie facilement que $x \to \big(u_p(x_p)\big)_{(p=2,3,\ldots)}$ est un automorphisme u du groupe (non topologique) G. D'autre part, soit $\mathrm{H}' = \prod_p \mathrm{H}'_p$ un voisinage de zéro dans G, H'_p étant un sous-groupe ouvert compact de G_p, égal H_p, excepté pour un nombre fini d'entiers premiers p_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. $u_p(\mathrm{H}_p)$ est un sous-groupe ouvert compact de G_p, égal à H_p si $p \neq p_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, et $u(\mathrm{H}') = \prod_p u_p(\mathrm{H}_p)$ est un sous-groupe ouvert compact de G. Ceci montre que u est un isomorphisme bicontinu de G sur lui-même. Ces remarques montrent que $u \to (u_p)_{(p=2,3,\ldots)}$ est un isomorphisme φ du groupe (non topologique) $\mathcal{G}(\mathrm{G})$ sur le groupe $\mathcal{G}$. Soit $\mathrm{V}_p(\mathrm{C}_p, \mathrm{H}'_p)$ le voisinage de l'automorphisme identique de G_p formé par les $u_p \in \mathcal{G}(\mathrm{G}_p)$ tels que $u_p(x_p) - x_p \in \mathrm{H}'_p$ et $\overset{-1}{u}_p(x_p) - x_p \in \mathrm{H}'_p$ pour tout $x_p \in \mathrm{C}_p$, C_p étant une partie compacte de G_p contenant H_p et H'_p un sous-groupe ouvert de H_p tels que $\mathrm{C}_p = \mathrm{H}'_p = \mathrm{H}_p$ excepté pour un nombre fini d'entiers premiers p_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. On a $\mathrm{V}_p(\mathrm{C}_p, \mathrm{H}'_p) \subset \mathfrak{N}(\mathrm{H}_p)$ pour tout entier premier p et $\mathrm{V}_p(\mathrm{C}_p, \mathrm{H}'_p) = \mathfrak{N}(\mathrm{H}_p)$ si $p \neq p_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Les ensembles $\prod_p \mathrm{V}_p(\mathrm{C}_p, \mathrm{H}'_p)$ forment donc un système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans $\mathcal{G}$. Pour que φ soit *bicontinu*, il faut et il suffit que les $\overset{-1}{\varphi}\Big(\prod_p \mathrm{V}_p(\mathrm{C}_p, \mathrm{H}'_p)\Big)$ forment un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(\mathrm{G})$. Nous allons démontrer cette dernière propriété, C_p et H'_p étant choisis comme précédemment, $\mathrm{C}'' = \prod_p \mathrm{C}_p$ est une partie compacte de G et $\mathrm{H}' = \prod_p \mathrm{H}'_p$ est un sous-groupe ouvert de H; il est bien clair que l'on a $\overset{-1}{\varphi}\left(\prod_p \mathrm{V}_p(\mathrm{C}_p,\ \mathrm{H}'_p)\right) = \mathrm{V}(\mathrm{C}'',\ \mathrm{H}')$. D'autre part, soit $\mathrm{H}' = \prod_p \mathrm{H}'_p$ un sous-groupe ouvert de H, H'_p étant un sous-groupe ouvert de H_p, égal à H_p excepté pour un nombre fini d'entiers premiers p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), et soit C une partie compacte de G contenant H. Il existe des éléments $x_j \in \mathrm{G}$ ($j = 1, 2, \ldots, n'$) tels que

$$\mathrm{C} \subset \bigcup_{j=1}^{n'} (x_j + \mathrm{H}) = \mathrm{C}'$$

et C′ est une partie compacte de G. Si $x_j = (x_{j,p})_{p=2,3,\ldots}$, on a $x_{j,p} \in \mathrm{H}_p$, excepté pour un nombre fini d'entiers premiers

$$p_{j,k}\ (k = 1, \ldots, n_j).$$

Posons $\mathrm{C}_p = \bigcup_{j=1}^{n'} (x_{j,p} + \mathrm{H}_p)$. C_p est une partie compacte de G_p contenant H_p et l'on a $\mathrm{C}_p = \mathrm{H}_p$ si $p \neq p_{j,k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n_j$; $i = 1, 2, \ldots, n'$). $\mathrm{C}'' = \prod_p \mathrm{C}_p$ est une partie compacte de G contenant C et l'on a $\mathrm{V}(\mathrm{C}'', \mathrm{H}') \subset \mathrm{V}(\mathrm{C}, \mathrm{H})$, d'où le résultat.

Corollaire. — *Si* G *est un groupe abélien compact totalement discontinu (resp. un groupe discret dont tout élément est d'ordre fini), on a* $\mathcal{G}(\mathrm{G}) = \prod_p \mathcal{G}(\mathrm{G}_p)$.

Soit maintenant G un groupe abélien localement compact primaire (associé à p). Remarquons d'abord que le groupe topologique $\mathcal{G}(\mathrm{G})$ n'est pas en général *primaire* (associé à p).

Des exemples de ce fait sont fournis par les groupes d'automorphismes de $\mathbf{Z}/(p^r)$ et de $\mathbf{Q}_p$. En effet, d'une part, tout automorphisme de $\mathbf{Z}/(p^r)$ est de la forme $x \to ax$, où a est premier avec p et le groupe d'automorphismes de $\mathbf{Z}/(p^r)$ est un groupe $\mathfrak{U}(p^r)$ d'ordre $p^{r-1}(p-1)$. Pour qu'un automorphisme appartenant à $\mathfrak{U}(p^r)$ ait pour ordre une puissance de p, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $x \to (1 + pu)x$ avec $u \in \mathbf{Z}/(p^r)$. D'autre part tout automorphisme de $\mathbf{Q}_p$ est de la forme $x \to ax$, où $a \in \mathbf{Q}_p^*$ et le groupe d'automorphismes de $\mathbf{Q}_p$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbf{Q}_p^*$. Pour que la représentation $n \to a^n$ de $\mathbf{Z}$ (muni de la structure p-adique) dans $\mathbf{Q}_p^*$ soit continue, il faut et il suffit que $a \in 1 + \mathfrak{p}$. Ces remarques peuvent se généraliser de la façon suivante :

Proposition 2. — *Soit G un groupe abélien compact primaire (associé à p); l'ensemble des automorphismes $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x) - x \in G^{(p)}$, pour tout $x \in G$, est un sous-groupe de $\mathcal{G}(G)$ primaire (associé à p).*

Soit G un p-groupe abélien discret et u un automorphisme de G appartenant au centralisateur $\mathcal{C}(G_{(p)})$ de $G_{(p)}$. Posons $u(x) - x = v(x)$. $x \to v(x)$ est un endomorphisme de G et l'on a $\overset{n}{v}(G_{(p^n)}) = \{0\}$ si $n \geq 1$. En effet, on a $v(G_{(p)}) = \{0\}$; supposons que $\overset{n-1}{v}(G_{(p-1)}) = \{0\}$; si $x \in G_{(p^n)}$ on a $px \in G_{(p^{n-1})}$ et $p\overset{n-1}{v}(x) = \overset{n-1}{v}(px) = 0$; donc $\overset{n-1}{v}(x) \in G_{(p)}$ et $\overset{n}{v}(x) = v\left(\overset{n-1}{v}(x)\right) = 0$; d'où $\overset{n}{v}(G_{(p^n)}) = \{0\}$. Soit maintenant $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une partie *finie* de G et $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le voisinage de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(G)$, formé par les $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x_i) = x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Si r est le plus petit entier tel que $p^r x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, posons $p^r = m$; si $u \in \mathcal{C}(G_{(p)})$, on a $\overset{n'}{u} \in V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour tout entier n' de la forme lm; on a en effet

$$\begin{aligned}
\overset{m}{u}(x_i) &= x_i + \sum_{k=1}^{m} C_m^k \overset{k}{v}(x_i) + \overset{m}{v}(x_i) \\
&= x_i + \sum_{k=1}^{m} \overset{k}{v}(C_m^k x_i) \qquad \text{car} \quad \overset{m}{v}(x_i) = 0 \\
&= x_i \quad \text{car} \quad p^{r-k} \text{ divise } C_m^k (0 < k < n),
\end{aligned}$$

donc $C_m^k x_i \in G_{(p^k)}$ et $\overset{k}{v}(C_m^k x_i) = 0$; donc $\overset{m}{u} \in V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et, comme $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}(G)$, $\overset{lm}{u} \in V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ceci montre que $n \to \overset{n}{u}$ est une représentation *continue* de $\mathbf{Z}$ (muni de la structure p-adique) dans $\mathcal{C}(G_{(p)})$.

Montrons maintenant que $\mathcal{C}(G_{(p)})$ est complet. Soit $\mathfrak{F}$ un *filtre de Cauchy* sur $\mathcal{C}(G_{(p)})$. Pour tout $x \in G$, l'image de $\mathfrak{F}$ par l'extension de l'application continue $u \to u(x)$ est une base de filtre de Cauchy sur G. Comme G est complet, cette base de filtre converge vers un élément $u_0(x)$ de G. On vérifie facilement que $x \to u_0(x)$ est un endomorphisme de G et que $u_0(x) = x$ si $x \in G_{(p)}$. Posons $u_0(x) - x = v_0(x)$. $x \to v_0(x)$ est un endomorphisme de G et, d'après ce qu'on a vu précédemment, $\overset{n}{v}_0(G_{(p^n)}) = \{0\}$, si $n \geq 1$. Soit $x \in G$ et p^n l'ordre de x. L'application $y \to y + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k v_0(y)$ est un endomorphisme u'_0 de G dépendant de x et l'on a

$$\begin{aligned} u_0\big(u'_0(x)\big) &= u'_0\big(u_0(x)\big) \\ &= x + v_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \overset{k}{v}_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \overset{k+1}{v_0}(x) \\ &= x \quad \text{car} \quad \overset{n}{v}_0(x) = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que u_0 est un automorphisme de G et que $u_0 \in \mathcal{C}(G_{(p)})$. Montrons maintenant que le filtre $\mathfrak{F}$ converge vers u_0. Soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ une partie finie de G. Il existe $M \in \mathfrak{F}$ tel que $M \circ \overset{-1}{M} \subset V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$, il existe un $u_i \in M$ tel que $u_i(x_i) = u_0(x_i)$. Mais pour tout $u \in M$, on a $u(x_i) = u_i(x_i)$, car $u \circ \overset{-1}{u_i} \in V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Donc $u(x_i) = u_i(x_i) = u_0(x_i)$ et $M \subset u_0 \circ V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Il en résulte que $\mathfrak{F}$ converge vers u_0 et $\mathcal{C}(G_{(p)})$ est complet. La proposition 3 du paragraphe **1** du Chapitre II montre que $\mathcal{C}(G_{(p)})$ est primaire (associé à p). Si $\hat{G}$ désigne le dual de G, $\hat{G}$ est un groupe abélien compact primaire (associé à p) et $\hat{G}^{(p)}$ est le conjugué de $G_{(p)}$ dans $\hat{G}$. L'ensemble des $\hat{u} \in \mathcal{G}(\hat{G})$ tels que $\hat{u}(\hat{x}) - \hat{x} \in G^{(p)}$ pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, est $\mathfrak{Z}(\hat{G}^{(p)})$. $\mathfrak{Z}(\hat{G}^{(p)})$ est isomorphe à $\mathcal{C}(G_{(p)})$ d'après la proposition 7 du paragraphe **1** et, par suite, primaire (associé à p).

Lorsque $\hat{G}$ est de *rang fini*, $\hat{G}^{(p)}$ est un sous-groupe ouvert de $\hat{G}$, d'après la proposition 6 du paragraphe **3** du Chapitre II;

$$\mathfrak{Z}(G^{(p)}) = V(\hat{G}, \hat{G}^{(p)})$$

est donc un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}(\hat{G})$.

Corollaire. — *Si* G *est un p-groupe abélien discret,* $\mathcal{C}(G_{(p)})$ *est un sous-groupe primaire (associé à p) de* $\mathcal{G}(G)$.

Lorsque G est un p-groupe abélien discret convenablement choisi, cette démonstration établit l'existence de groupes complets primaires (associés à p) qui ne sont ni abéliens ni localement compacts et qui ne sont pas des p-groupes.

Proposition 3. — *Si* G *est un groupe abélien localement compact primaire (associé à p) et si $q \in 1 + \mathfrak{p}$, $x \to qx$ est un automorphisme u_q du groupe topologique* G *et l'ensemble des automorphismes u_q de* G *est un sous-groupe* [12] *compact du centre de* G $(\mathcal{G})$, *isomorphe à $\mathbf{Z}_p$ ou cyclique d'ordre p^n.*

En effet, d'après la proposition 4 du paragraphe **2** du Chapitre II, $x \to qx$ est un endomorphisme continu de G sur lui-même, car d'après la proposition 5 du paragraphe **2** du Chapitre II, quel que soit $y \in G$, il existe $x \in G$ tel que $y = qx$. D'autre part, u_q est biunivoque, car s'il existe $x' \in G$ tel que $qx = qx'$, on a $q(x - x') = 0$ et $x = x'$, d'après la proposition 5 déjà citée. Enfin, si $q \in 1 + \mathfrak{p}$, q^{-1} est un entier p-adique appartenant à $1 + \mathfrak{p}$ et $u_{q^{-1}}$ est un endomorphisme continu de G; c'est évidemment l'application réciproque de u_q, qui est ainsi un automorphisme du groupe topologique G. $q \to u_q$ est une représentation du groupe multiplicatif $1 + \mathfrak{p}$ dans le groupe $\mathcal{G}(G)$. En effet, quel que soit $x \in G$ et quels que soient $q \in 1 + \mathfrak{p}$ et $q' \in 1 + \mathfrak{p}$, on a $u_q(u_{q'}(x)) = u_q(q'x) = qq'x = u_{qq'}(x)$. Soit C une partie compacte de G et H un sous-groupe ouvert compact de G; il existe des $x_i \in G$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tels que $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + H)$ et la classe $x_i + H$ est d'ordre fini p^{r_i} dans le p-groupe G/H. Si $r = \max(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, on a $p^{r_i} x_i \in H$ et, si $q \in \mathfrak{p}^r$, $qx \in H$. Si $x \in C$, il existe un x_i et $y \in H$ tels que $x = x_i + y$ et, si $q \in 1 + \mathfrak{p}^r$, on a $q - 1 \in \mathfrak{p}^r$ et $qx - x = (q-1)x = (q-1)x_i + (q-1)y \in H + H = H$, car $(q-1)x_i \in H$; comme $\overset{-1}{q} \in 1 + \mathfrak{p}^r$, on a de même, $q^{-1}x - x \in H$ pour $x \in C$; donc $u_q \in V(C, H)$. Il en résulte que $q \to u_q$ est une représentation continue de $1 + \mathfrak{p}$ dans $\mathcal{G}(G)$ et, comme $1 + \mathfrak{p}$ est compact, c'est un homomorphisme. L'image de $1 + \mathfrak{p}$ par celui-ci est donc un sous-groupe de $\mathcal{G}(G)$ isomorphe à $\mathbf{Z}_p$ ou à $\mathbf{Z}/(p^n)$. Si $u \in \mathcal{G}(G)$,

---

[12] *Voir* R. Baer, *Primary abelian groups and their automorphisms* (*American Journal of Mathematics*, vol. LIX, 1937, p. 99-120). On trouvera dans ce travail d'autres propriétés du groupe d'automorphismes d'un p-groupe abélien discret.

$u\big(u_q(x)\big) = u(qx) = qu(x) = u_q\big(u(x)\big)$, car u est continu; donc $u \circ u_q = u_q \circ u$ et u_q appartient au centre de $\mathcal{G}(\mathrm{G})$.

Notons qu'il y a identité entre les automorphismes d'un groupe abélien localement compact *primaire* (*associé à* p) G et les automorphismes de G, considéré comme $\mathbf{Z}_p$*-module localement compact*.

En particulier :

Proposition 4. — *Si* G *est un groupe abélien localement compact primaire* (*associé à* p) *dont tous les éléments* $\neq 0$ *sont d'ordre infini et si* $\tilde{\mathrm{G}}$ *est l'espace vectoriel sur* $\mathbf{Q}_p$ *qui lui est associé,* $\mathcal{G}(\mathrm{G})$ *est le sous-groupe fermé* $\mathfrak{N}(\mathrm{G})$ *du groupe* $\mathcal{G}(\tilde{\mathrm{G}})$ *des transformations linéaires de* $\tilde{\mathrm{G}}$.

Cela résulte immédiatement de la proposition 1 du paragraphe 4 du Chapitre II.

3. Mesure de Haar et groupe d'automorphismes d'un groupe localement compact. — Soient G un groupe *localement compact* et $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel sur le corps des nombres complexes formé par les fonctions complexes f définies et continues sur G et telles que $\complement \overset{-1}{f}(0)$ soit relativement compact. Si $f \in \mathcal{L}$ est nulle en dehors de l'ensemble compact C et si $u \in \mathcal{G}(\mathrm{G})$, $f \circ \overset{-1}{u}$ est une fonction définie et continue sur G et nulle en dehors de l'ensemble compact $u(\mathrm{C})$; donc $f \circ \overset{-1}{u} \in \mathcal{L}$. Si $f \in \mathcal{L}$ et $g \in \mathcal{L}$, on a $(f+g) \circ \overset{-1}{u} = f \circ \overset{-1}{u} + g \circ \overset{-1}{u}$ et $\lambda f \circ \overset{-1}{u} = \lambda\big(f \circ \overset{-1}{u}\big)$ pour tout nombre complexe λ. On voit ainsi que $f \to f \circ \overset{-1}{u}$ est une *transformation linéaire* T_u de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$.

Soit $\mathrm{I}(f) = \int f(x)\,dx$ *l'intégrale de Haar* sur $\mathrm{G}\,(f \in \mathcal{L})$ ([13]). Si $u \in \mathcal{G}(\mathrm{G})$, $f \circ \overset{-1}{u} \in \mathcal{L}$; posons $\mathrm{I}_u(f) = \int f\big(\overset{-1}{u}(x)\big)\,dx$. $\mathrm{I}_u = \mathrm{I} \circ \mathrm{T}_u$ est une

([13]) Au sujet de l'intégrale de Haar, on pourra consulter le Mémoire de A. Weil [VII], Chap. II. En particulier les notations utilisées ici sont celles de ce Mémoire.

fonctionnelle linéaire positive définie sur $\mathcal{L}$ et on a, si $s \in G$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_u(f \circ \gamma_s) &= \int f\big(s\overset{-1}{u}(x)\big)\, dx \\
&= \int f\big(\overset{-1}{u}(u(s)\, x)\big)\, dx \\
&= \int f\big(\overset{-1}{u}(x)\big)\, dx \\
&= \mathrm{I}_u(f),
\end{aligned}$$

car I est *invariante à gauche*; I_u est donc aussi invariante à gauche et, par suite, ne diffère de I que par un facteur multiplicatif $\Delta(u) > 0$:

$$\int f\big(\overset{-1}{u}(x)\big)\, dx = \Delta(u) \int f(x)\, dx.$$

DÉFINITION 1. — $\Delta(u)$ *est appelé le module de l'automorphisme* $u \in \mathcal{G}(G)$.

Si G est le groupe additif de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{Q}_p^n$), à tout automorphisme u de G correspond une matrice carrée à n lignes à coefficients réels (resp. p-adiques) dont le déterminant est un nombre réel (resp. p-adique) $\delta(u) \neq 0$ et l'on a

$$\Delta(u) = |\delta(u)| \text{ [14]}.$$

PROPOSITION 1. — $u \to \Delta(u)$ *est une représentation continue du groupe topologique* $\mathcal{G}(G)$ *dans le groupe multiplicatif localement compact* $\mathbf{R}_+^\star$ *des nombres réels* > 0.

En effet, si $f \in \mathcal{L}$ et si $u \in \mathcal{G}(G)$ et $v \in \mathcal{G}(G)$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta(u \circ v) \int f(x)\, dx &= \int f\big(\overset{-1}{v}(\overset{-1}{u}(x))\big)\, dx \\
&= \Delta(u) \int f\big(\overset{-1}{v}(x)\big)\, dx \\
&= \Delta(u)\, \Delta(v) \int f(x)\, dx,
\end{aligned}$$

---

[14] Pour le groupe $\mathbf{R}^n$, c'est une propriété bien connue de l'intégrale multiple. Pour $\mathbf{Q}_p^n$, cela résulte du raisonnement suivant : supposons d'abord $n = 1$. Si $u \in \mathcal{G}(\mathbf{Q}_p)$, u est de la forme $x \to ax$ (avec $a \in \mathbf{Q}_p^\star$). Si $a \in \mathfrak{p}^r \cap \complement \mathfrak{p}^{r+1}$, $a\mathbf{Z}_p = \mathfrak{p}^r$. Si $r \geq 0$, $\mathfrak{p}^r \subset \mathbf{Z}_p$ et $\mathbf{Z}_p/\mathfrak{p}^r$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/(p^r)$. Donc $m(\mathbf{Z}_p) = p^r m(\mathfrak{p}^r)$ et $m(a\mathbf{Z}_p) = p^{-r} m(\mathbf{Z}_p) = \Delta(u) m(\mathbf{Z}_p)$, d'après la proposition 3 de ce paragraphe. Donc $\Delta(u) = p^{-r} = |a|$, *si l'on pose* $|a| = p^{-r}$, *lorsque* $a \in \mathfrak{p}^r \cap \complement \mathfrak{p}^{r+1}$. Si $r < 0$, $\mathbf{Z}_p \subset \mathfrak{p}^r$ et $\mathfrak{p}^r/\mathbf{Z}_p$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/(p^{-r})$. Donc $m(\mathfrak{p}^r) = p^{-r} m(\mathbf{Z}_p)$ et $m(a\mathbf{Z}_p) = p^{-r} m(\mathbf{Z}_p) = \Delta(u)\, m(\mathbf{Z}_p)$.

Donc $\Delta(u) = p^{-r} = |a|$. On termine la démonstration par récurrence sur n.

donc $\Delta(u \circ v) = \Delta(u)\Delta(v)$ et $u \to \Delta(u)$ est une représentation de $\mathcal{G}(G)$ dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrons qu'elle est *continue*. Soit $f \in \mathcal{L}$ telle que $\int f(x)dx = 1$. f est nulle en dehors d'un ensemble compact C. Soit V un voisinage *compact* de e. f est uniformément continue; donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage compact $U \subset V$ tel que, si $yz^{-1} \in U$, $|f(y) - f(u)| \leq \varepsilon$. UC et VC sont des ensembles compact Δ, *mesurables* et de mesures $m(VC) \geq m(UC) > 0$. Si $x \in UC$ et $u \in V(UC, U)$ on a $u(x)x^{-1} \in U$ et $\left|f\left(\overset{-1}{u}(x)\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$. Donc

$$\begin{aligned}
|\Delta(u) - 1| = |\Delta(u) - 1| \int f(x)\,dx &= \left|\int_{u(C)} f\left(\overset{-1}{u}(x)\right) dx - \int_C f(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_{VC} f\left(\overset{-1}{u}(x)\right) dx - \int_{VC} f(x)\,dx\right| \qquad \text{car} \quad u(C) \subset UC \\
&\leq \int_{VC} \left|f\left(\overset{-1}{u}(x)\right) - f(x)\right| dx \leq \int \sup_{y \in VC} \left|f\left(\overset{-1}{u}(y)\right) - f(y)\right| \varphi_{VC}(x)\,dx \\
&\leq \varepsilon \int \varphi_{VC}(x)\,dx \leq \varepsilon\, m(VC).
\end{aligned}$$

Supposons la propriété vraie pour $\mathbf{Q}_p^{n-1}$ $(n > 1)$ et soit G le produit de n groupes G_i isomorphes à $\mathbf{Q}_p$. Soit H_i le sous-groupe des entiers p-adiques de G et $H_i^{(p^r)}$ l'ensemble des $p^r x$, avec $x \in H_i (r \in \mathbf{Z})$. Tout automorphisme u, étant une transformation linéaire de l'espace vectoriel $\mathbf{Q}_p^n$ est composé d'automorphismes laissant invariants les différents sous-espaces $\prod_{i \neq j} G_i$. Un tel automorphisme v, moyennant une permutation des vecteurs de base peut s'exprimer par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

v est composé des trois automorphismes v_1, v_2 et v_3 définis par

$$(v_1) \qquad \begin{cases} x'_i = x_i & (i = 1, \dots, n-1), \\ x'_n = a_{nn} x_n \end{cases}$$

$$(v_2) \qquad \begin{cases} x'_i = x_i & (i = 1, \dots, n-1), \\ x'_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + x_n \end{cases}$$

En particulier

$$\Delta(\overset{-1}{u}) = \Delta(u)^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta(u)\int f\big(u(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Si u_s désigne l'*automorphisme intérieur* $x \to sxs^{-1}$, l'application composée de Δ et de $s \to u_s$ est une représentation de G dans le groupe $\mathbf{R}_+^*$, qu'on appelle le *module* de s et qu'on désigne par $\Delta(s)$, et l'on a

$$\Delta(s)\int f(x)\,dx = \int f\big(\overset{-1}{u}_s(x)\big)\,dx = \int f(s^{-1}xs)\,dx = \int f(xs)\,dx,$$

(les α_i fonctions rationnelles des a_{ij} pour $j \neq n$)

$$(\nu_3)\qquad \begin{cases} x'_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j & (i = 1, \ldots, n-1). \\ x'_n = x_n. \end{cases}$$

On a

$$\nu = \nu_1 \circ \nu_2 \circ \nu_3, \qquad \Delta(\nu) = \Delta(\nu_1)\,\Delta(\nu_2)\,\Delta(\nu_3)$$

et

$$|\delta(\nu)| = |\delta(\nu_1)|\;|\delta(\nu_2)|\;|\delta(\nu_3)|.$$

D'après le théorème de Lebesgue-Fubini, $\Delta(\nu_1) = |\delta(\nu_1)| = |a_{nn}|$; d'autre part $\Delta(\nu_3) = |\delta(\nu_3)|$, car ν_3 induit sur $\prod_{i=1}^{n-1} G_i$ un automorphisme. On a

$$|\delta(\nu_2)| = 1.$$

Montrons que $\Delta(\nu_2) = 1$. Soit p^{-r} le plus grand des nombres $|\alpha_i|$. Si $x_i \in H$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ et si $x_n \in H_n^{(p^r)}$, on a $x'_n = x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \in H_n^{(p^r)}$. Donc si $H = \prod_{i=1}^{n-1} H_i \times H_n^{(p^r)}$, $\nu_2(H) \subset H$. De même $\overset{-1}{\nu}_2$ étant défini par

$$(\overset{-1}{\nu}_2)\qquad \begin{cases} x'_i = x_i & (i = 1, \ldots, n-1), \\ x'_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \end{cases}$$

on a $\overset{-1}{\nu}_2(H) \subset H$. D'où $\nu_2(H) = H$ et $m\big(\nu_2(H)\big) = m(H) = \Delta(\nu_2)\,m(H)$ et $\Delta(\nu_2) = 1$.

car I est invariante à gauche. En vertu de la *continuité uniforme* de f, $s \to \Delta(s)$ est une représentation *continue* de G dans $\mathbf{R}_+^\star$ ([15]).

Soient $f \in \mathcal{L}$, $u \in \mathcal{G}(G)$ et p un nombre réel ≥ 1. On a

$$\left[\int \left|f(\overset{-1}{u}(x))\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} = \Delta(u)^{\frac{1}{p}} \left[\int |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Donc, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\left[\int |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \Delta(u)^{-\frac{1}{p}} \varepsilon \quad \text{entraîne} \quad \left[\int \left|f(\overset{-1}{u}(x))\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

et T_u est une *transformation linéaire bicontinue* de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ ([16]) muni de la topologie déterminée par la norme $\left[\int |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$. Si $\mathcal{L}_p$ désigne le complété de $\mathcal{L}$ muni de la structure uniforme définie à l'aide de cette norme, T_u se prolonge en une transformation linéaire bicontinue de l'espace $\mathcal{L}_p$ ([17]).

De plus, on vérifie facilement que T_u est une transformation linéaire bicontinue de l'espace $\mathcal{L}_\infty$, complété de l'espace $\mathcal{L}$, normé par $\sup\limits_{x \in G} |f(x)|$.

Proposition 2. — *Si $f \in \mathcal{L}_p$, $u \to f \circ \overset{-1}{u}$ est une application continue de $\mathcal{G}(G)$ dans $\mathcal{L}_p$.*

En effet, soit $f \in \mathcal{L}_p$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{L}$ tel que

---

([15]) *Voir* A. Weil (VII), Chap. II, § 8.

([16]) *Voir* A. Weil (VII), Chap. II, § 7.

([17]) De plus, si $(f, g) \to f \star g = \int f(y) g(y^{-1}x)\, dy$ est le *produit de composition*, loi multiplicative qui fait de $\mathcal{L}_1$ un anneau *topologique*, on a

$$(f \circ \overset{-1}{u}) \star (g \circ \overset{-1}{u}) = \Delta(u)\,(f \star g) \circ \overset{-1}{u};$$

en effet

$$(f \circ \overset{-1}{u}) \star (g \circ \overset{-1}{u}) = \int f(\overset{-1}{u}(y))\, g(\overset{-1}{u}(y^{-1}x))\, dy = \int f(\overset{-1}{u}(y))\, g\left((\overset{-1}{u}(y))^{-1} \overset{-1}{u}(x)\right) dy$$
$$= \Delta(u) \int f(y)\, g(y^{-1} \overset{-1}{u}(x))\, dy = \Delta(u)\,(f \star g) \circ \overset{-1}{u}.$$

$\left[\int |f(x)-g(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \varepsilon$. g est nulle en dehors d'un ensemble compact C. Soit V un voisinage *compact* de e. g est uniformément continue; donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage compact $U \subset V$ tel que, si $yz^{-1} \in U$, $|g(y)-g(z)| \leqq \varepsilon$. UC et VC sont des ensembles compacts, *mesurables* et de mesures $m(VC) \geqq m(UC) > 0$. Si $x \in UC$ et si $\overset{-1}{u} \circ v \in V(UC, U)$, on a

$$\overset{-1}{u}\big(v(x)\big)x^{-1} \in U \qquad \text{et} \qquad \left|g\Big(\overset{-1}{u}\big(v(x)\big)\Big) - g(x)\right| \leqq \varepsilon.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\Delta(\overset{-1}{v})^{\frac{1}{p}}\left[\int \left|g\big(\overset{-1}{u}(x)\big)-g\big(\overset{-1}{v}(x)\big)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\quad=\left[\int \left|g\Big(\overset{-1}{u}\big(v(x)\big)\Big)-g(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\quad=\left[\int_{UC} \left|g\Big(\overset{-1}{u}\big(v(x)\big)\Big)-g(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{car} \quad \overset{-1}{u}\big(v(C)\big) \subset UC\\
&\quad\leqq\left[\int \left(\sup_{y \in UC}\left|g\Big(\overset{-1}{u}\big(v(y)\big)\Big)-g(y)\right|\right)^p \varphi_{UC}(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\leqq \varepsilon\left[\int \varphi_{UC}(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \varepsilon\, m(VC)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\left[\int \left|f\big(\overset{-1}{u}(x)\big)-g\big(\overset{-1}{u}(x)\big)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \Delta(u)^{\frac{1}{p}}\varepsilon,$$

$$\left[\int \left|f\big(\overset{-1}{v}(x)\big)-g\big(\overset{-1}{v}(x)\big)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \Delta(v)^{\frac{1}{p}}\varepsilon,$$

$$\begin{aligned}
\left[\int \left|f\big(\overset{-1}{u}(x)\big)-f\big(\overset{-1}{v}(x)\big)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqq\ & \left[\int \left|f\big(\overset{-1}{u}(x)\big)-g\big(\overset{-1}{u}(x)\big)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
&+\left[\int \left|f\big(\overset{-1}{v}(x)\big)-g\big(\overset{-1}{v}(x)\big)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
&+\left[\int \left|f\big(\overset{-1}{u}(x)\big)-g\big(\overset{-1}{u}(x)\big)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leqq \Delta(u)^{\frac{1}{p}}\varepsilon+\Delta(v)^{\frac{1}{p}}\varepsilon+m(VC)^{\frac{1}{p}}\Delta(v)^{\frac{1}{p}}\varepsilon\\
&=\Delta(u)^{\frac{1}{p}}\varepsilon+k\,\Delta(v)^{\frac{1}{p}}\varepsilon.
\end{aligned}$$

En vertu de la continuité de la représentation Δ, il existe un voisinage $V(C', U')$ de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(G)$ tel que, si $\overset{-1}{u} \circ v \in V(C', U')$, $\Delta(v)^{\frac{1}{p}} \leqq \Delta(u)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon$. Donc, si

$$u \circ \overset{-1}{v} \in V(UC, U) \cap V(C', U'),$$

on a

$$\left[\int \left| f\left(\overset{-1}{u}(x)\right) - f\left(\overset{-1}{v}(x)\right) \right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \Delta(u)^{\frac{1}{p}} \varepsilon + k\varepsilon\left(\Delta(u)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon\right) = k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2.$$

Proposition 3. — *Si* E *est un ensemble mesurable et de mesure* $m(E)$ *et si* $u \in \mathcal{G}(G)$, $u(E)$ *est aussi mesurable et sa mesure est* $\Delta(u)m(E)$.

En effet,

$$m\left(u(E)\right) = \int \varphi_{u(E)}(x)\, dx = \Delta(u) \int \varphi_{u(E)}\left(u(x)\right) dx$$
$$= \Delta(u) \int \varphi_E(x)\, dx = \Delta(u)\, m(E).$$

Proposition 4. — *Si* G *est un groupe topologique ayant un sous-groupe ouvert compact,* Δ *est un homomorphisme du groupe topologique* $\mathcal{G}(G)$ *dans le groupe discret* $\mathbf{Q}_+^*$ *des nombres rationnels* > 0.

En effet, soit H un sous-groupe ouvert compact de G et soit $u \in (G)$. $u(H)$ et $H' = H \cap u(H)$ sont des sous-groupes ouverts compacts de G, H' est donc un sous-groupe d'indice fini n (resp. n') de $u(H)$ (resp. de H) et il existe des $x_i \in G$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) [resp. des $x_j \in G$, ($j = 1, 2, \ldots, n'$)] tels que les classes $x_i H'$ (resp. $x'_j H'$) forment une *partition* de $u(H)$ (resp. de H). H, $u(H)$ et H' étant ouverts et compacts sont *mesurables* et de mesures finies > 0. On a

$$m(H) = m\left(\bigcup_{j=1}^{n'} x'_j H'\right) = \sum_{j=1}^{n'} m(x'_j H') = n' m(H')$$

et

$$m\left(u(H)\right) = m\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i H'\right) = \sum_{i=1}^{n} m(x_i H') = n m(H') = \frac{n}{n'} m(H).$$

D'autre part

$$m\left(u(H)\right) = \Delta(u)\, m(H).$$

Donc

$$\Delta(u) = \frac{n}{n'}$$

et Δ est une représentation de $\mathcal{G}(G)$ dans $Q_+^\star$. $\mathfrak{N}(H)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}(G)$ et, si $u \in \mathfrak{N}(H)$, $u(H) = H$ et $\Delta(u) m(H) = m(u(H)) = m(H)$; donc $\Delta(u) = 1$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{N}(H) \subset \overset{-1}{\Delta}(1).$$

Donc $\overset{-1}{\Delta}(1)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}(G)$ et Δ est une représentation continue de $\mathcal{G}(G)$ dans le groupe discret $Q_+^\star$, donc un homomorphisme.

Corollaire. — *$\overset{-1}{\Delta}(1)$ est un sous-groupe distingué ouvert de $\mathcal{G}(G)$ et $\mathcal{G}(G)/\overset{-1}{\Delta}(1)$ est isomorphe à un sous-groupe de $Q_+^\star$.*

Si G est un groupe *compact* (resp. *discret*), G (resp. $\{0\}$) est un sous-groupe ouvert compact de G et la démonstration précédente montre que, pour tout $u \in \mathcal{G}(G)$ on a $\Delta(u) = 1$.

Si G est un groupe abélien localement compact *primaire* (associé à l'entier premier p), si H est un sous-groupe ouvert compact de G et si $u \in \mathcal{G}(G)$, $H' = H \cap u(H)$ est un sous-groupe d'indice p^r (resp. $p^{r'}$) de $u(H)$ (resp. de H) et un a $\Delta(u) = p^{r-r'}$. Δ est donc un *homomorphisme* de $\mathcal{G}(G)$ dans le groupe (multiplicatif) cyclique discret formé par les puissances de p.

Définition 2. — *On dit qu'un groupe localement compact est unimodulaire si, pour tout $s \in G$, $\Delta(s) = 1$.*

Proposition 5. — *Tout groupe localement compact dont les deux structures uniformes sont identiques est unimodulaire.*

Soient G un groupe localement compact dont les deux structures uniformes sont identiques et V un voisinage compact de e; il existe un voisinage U de e tel que, pour tout $s \in G$, $sUs^{-1} \subset V$; l'adhérence U' de $\bigcup_{s \in G} sUs^{-1} \subset V$ est donc un voisinage compact de e tel que, pour tout $s \in G$, $sU's^{-1} = U'$. U' est donc mesurable et de mesure finie $m(U') > 0$ et l'on a

$$m(U') = m(sU's^{-1}) = \Delta(s)\, m(U'),$$

c'est-à-dire $\Delta(s) = 1$.

Soit H un sous-groupe *distingué fermé* d'un groupe localement compact G. Désignons par $\dot{x}$ la classe de $x \in G$ dans le groupe quotient localement compact G/H et par $\int g(y)\,dy$ et $\int h(\dot{x})\,d\dot{x}$ les *intégrales de Haar* respectives des groupes H et G/H. Soit $f \in \mathcal{L}$, nulle en dehors d'un ensemble compact C. $y \to f(xy)$ est une fonction définie et continue sur H, nulle en dehors de la partie compacte $x^{-1}C \cap H$ de H; $\int f(xy)\,dy$ est constant sur la classe $\dot{x}$ de x et $\dot{x} \to \int f(xy)\,dy$ est une fonction définie et continue sur G/H, nulle en dehors de la partie compacte CH de G/H. On a, en choisissant convenablement les facteurs multiplicatifs qui restent indéterminés dans la mesure de Haar sur H et G/H

$$\int\left(\int f(xy)\,dy\right)d\dot{x} = \int f(x)\,dx \quad (18).$$

Soient $u \in \mathfrak{N}(H)$, u_H la restriction de u à H et $\dot{u}$ l'automorphisme de G/H, $xH \to u(x)H$. On a $u_H \in \mathcal{G}(H)$ et $\dot{u} \in \mathcal{G}(G/H)$ et

$$\begin{aligned}
\Delta(u)\int f(x)\,dx &= \int f(\overset{-1}{u}(x))\,dx \\
&= \int\left(\int f(\overset{-1}{u}(xy)\,dy)\,d\dot{x}\right) = \int\left(\int f(\overset{-1}{u}(x)\,\overset{-1}{u}(y))\,dy\right)d\dot{x} \\
&= \Delta(u_H)\int\left(\int f(\overset{-1}{u}(x)y)\,dy\right)d\dot{x} \\
&= \Delta(\dot{u})\,\Delta(u_H)\int\left(\int f(xy)\,dy\right)d\dot{x} \\
&= \Delta(\dot{u})\,\Delta(u_H)\int f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Donc $\Delta(u) = \Delta(\dot{u})\,\Delta(u_H)$.

---

(18) *Voir* A. Weil (VII), Chap. II, § 9.

Proposition 6. — *Si* H *est un sous-groupe distingué fermé d'un groupe localement compact* G *et si* $u \in \mathcal{N}(\mathrm{H})$, *on a*

$$\Delta(u) = \Delta(\dot{u})\Delta(u_{\mathrm{H}}).$$

Soit G un groupe localement compact, produit d'une famille $(\mathrm{G}_\iota)_{\iota\in}$ de sous-groupes *caractéristiques fermés*. Il existe une partie finie J de I telle que, si $\iota \notin \mathrm{J}$, G_ι est compact.

Proposition 7. — *Si* $u \in \mathcal{G}(\mathrm{G})$, *la restriction de* u *à* G_ι *est un automorphisme* $u_\iota \in \mathcal{G}(\mathrm{G}_\iota)$ *et l'on a* $\Delta(u) = \prod_{\iota\in \mathrm{J}} \Delta(u_\iota)$, $\Delta(u_\iota)$ *désignant le module de* $u_\iota \in \mathcal{G}(\mathrm{G}_\iota)$.

G est produit du groupe compact $\prod_{\iota\in \complement \mathrm{J}} \mathrm{G}_\iota$ et du groupe localement compact $\prod_{\iota\in \mathrm{J}} \mathrm{G}_\iota$. Le module de la restriction de u à $\prod_{\iota\in \complement \mathrm{J}} \mathrm{G}_\iota$ étant 1, il suffit donc de démontrer la proposition pour une suite finie $(\mathrm{G}_i)_{i=1,\ldots,n}$ de sous-groupes caractéristiques de G telle que $\mathrm{G} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{G}_i$. Pour cela, il suffit de démontrer la proposition pour $n=2$ et de raisonner par récurrence sur n. Soit donc G un groupe localement compact, produit de deux sous-groupes caractéristiques G_1 et G_2 et soit $u \in \mathcal{G}(\mathrm{G})$. La restriction de u à G_1 (resp. G_2) est un automorphisme u_1 de G_1 (resp. u_2 de G_2). G_2 est isomorphe à G/G_1 et l'on a, d'après la proposition précédente, $\Delta(u) = \Delta(u_1)\Delta(u_2)$.

Proposition 8. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact,* $\hat{\mathrm{G}}$ *son dual,* $u \in \mathcal{G}(\mathrm{G})$ *et* $\hat{u} \in \mathcal{G}(\hat{\mathrm{G}})$ *le transposé de* u*; alors le module de* u *et le module de* $\hat{u}$ *sont égaux*.

En effet, soit $f \in \mathcal{L}$. On a, en choisissant convenablement les facteurs qui restent indéterminés dans les mesures de Haar de G et $\hat{\mathrm{G}}$

$$\Delta(u)\int |f(x)|^2\,dx = \Delta(u)^2 \int \left|f\big(u(x)\big)\right|^2 dx$$
$$= \Delta(u)^2 \int \left| \int f\big(u(x)\big)\, e^{2\pi i \langle x, \hat{x}\rangle}\, dx \right|^2 d\hat{x},$$

d'après le *théorème de Plancherel-Weil* [19]; donc

$$\begin{aligned}\Delta(u)\int|f(x)|^2\,dx &= \int\left|\Delta(u)\int f\big(u(x)\big)\,e^{2\pi i\langle x,\hat{x}\rangle}\,dx\right|^2 d\hat{x}\\ &= \int\left|\int f(x)\,e^{2\pi i\langle \overset{-1}{u}(x),\hat{x}\rangle}\,dx\right|^2 d\hat{x}\\ &= \int\left|\int f(x)\,e^{2\pi i\langle x,\overset{-1}{\hat{u}}(\hat{x})\rangle}\,dx\right|^2 d\hat{x}\\ &= \Delta(\hat{u})\int\left|\int f(x)\,e^{2\pi i\langle x,\hat{x}\rangle}\,dx\right|^2 d\hat{x}\\ &= \Delta(\hat{u})\int|f(x)|^2\,dy,\end{aligned}$$

d'après le même théorème. Donc $\Delta(u)=\Delta(\hat{u})$.

---

(19) *Voir* A. Weil [VII], Chap. VI, § 30. Cette propriété des modules de u et $\hat{u}$ a lieu même si les facteurs multiplicatifs qui restent indéterminés dans la mesure de Haar sur G et $\hat{G}$ ne sont pas choisis de telle sorte que l'égalité

$$\int|f(x)|^2\,dx=\int\left|\int f(x)\,e^{2\pi i\langle x,\hat{x}\rangle}\,dx\right|^2 d\hat{x},$$

qui constitue le *théorème de Plancherel-Weil*, ait lieu, car $\Delta(u)$ et $\Delta(u)$ sont indépendants de ce choix.

BIBLIOGRAPHIE.

I. H. Prüfer, *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen* (*Mathematische Zeitschrift*, vol. **17**, Berlin, 1923, p. 35-61).

II. L. Zippin, *Countable torsion groups* (*Annals of Mathematics*, 2e série, t. **36**, Princeton, 1935, p. 86-99).

III. E. R. van Kampen, *Locally bicompact Abelian groups and their character groups* (*Annals of Mathematics*, 2e série, t. **36**, Princeton, 1935, p. 448-463).

IV. R. Baer, *The subgroups of the elements of finite order of an Abelian group* (*Annals of Mathematics*, 2e série, t. 37, Princeton, 1936, p. 766-781).

V. L. Pontrjagin, *Topological groups* (*Princeton mathematical series*, vol. 2, Princeton University Press, Princeton, 1939).

VI. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Livres I, II, III (*Actualités Scientifiques et Industrielles*, nos 848, 856, 916, 934, Hermann, Paris, 1940-1942).

VII. A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (*Actualités Scientifiques et Industrielles*, n° 869, Hermann, Paris, 1940).

VIII. L. Kulikoff, *Zur Theorie der Gruppen von beliebiger Mächtigkeit* (*Recueil Mathématique de Moscou*, N. S., vol. 9, Moscou, 1941, p. 165-181).

IX. W. Krull, *Ueber separable, insbesondere kompakte separable Gruppen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 184, Berlin, 1942, p. 19-48).