

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

FÉLIX ALARDIN

**L'autoparallélisme des courbes extrémales dans les espaces  
métriques fondés sur la notion d'aire**

*Journal de mathématiques pures et appliquées* 9<sup>e</sup> série, tome 27 (1948), p. 255-336.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1948\\_9\\_27\\_255\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1948_9_27_255_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

---

*L'Autoparallélisme des courbes extrémales*  
*dans les espaces métriques fondés sur la notion d'aire* <sup>(1)</sup>;

PAR FÉLIX ALARDIN.

---

NOTATIONS.

Le calcul différentiel absolu et le calcul extérieur de Grassman-Cartan sont les principaux instruments de nos recherches. Dans la suite, nous nous servirons des notations suivantes :

$X^i$  désignera la composante ordinaire ou contrevariante suivant l'axe d'indice  $i$  d'un vecteur  $\vec{X}$ ;

$X_i = g_{ik} X^k$ , les composantes covariantes de ce vecteur. Les  $g_{ik}$  sont les coefficients de la métrique  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ ;

$\vec{x} \cdot \vec{y}$ , le produit scalaire des vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$ ;

$\vec{x}^2$ , le carré de la longueur du vecteur  $\vec{X}$ ;

$\gamma_{ijk}$ , le symbole de Christoffel de première espèce;

$\gamma_i^{jk}$ , le symbole de Christoffel de seconde espèce;

$L^i, \frac{\partial L}{\partial u_i}$ ;

$L^{ij}, \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j}$ ;

$T^{ij\alpha}$ , la dérivée contrevariante du tenseur  $T^{ij}$ ;

---

<sup>(1)</sup> Recherches du Séminaire mathématique de l'Université de Louvain, directeur Fernand Simonart. Le mémoire a obtenu le « Prix scientifique inter-facultaire Louis Empain » (1942).

$T^{ij},_{\alpha}$ , sa dérivée covariante ;

$(\omega_k \omega_h)$ , le déterminant  $\begin{vmatrix} \omega_k(\delta) & \omega_k(\delta) \\ \omega_h(\delta) & \omega_h(\delta) \end{vmatrix}$  ;

$\omega'$ , la dérivée extérieure de la forme  $\omega$ .

En vue de simplifier l'écriture nous appellerons *Espaces C*, les espaces métriques fondés sur la notion d'aire; *Connexion euclidienne* (G-E) toute connexion euclidienne qui réalise l'autoparallélisme des courbes extrémales de l'intégrale  $\int ds$ .

### AVANT-PROPOS.

Des recherches sur les principes géométriques, sont nés deux courants distincts d'idées. Le premier se rattache au *concept de Klein*, le groupe principal d'une variété caractérise sa géométrie; le second au *concept de Riemann*, la métrique contient *in abstracto* les propriétés géométriques de l'espace. La remarquable extension donnée par MM. É. Cartan et J. A. Schouten au *Programme d'Erlangen* a, d'une part, fait disparaître l'antinomie apparente entre ces deux principes directeurs et, d'autre part, a donné naissance à une infinité de géométries différentielles généralisées dans lesquelles rentrent, en particulier, les espaces à connexion euclidienne de Riemann, Finsler et Cartan.

C'est en cherchant à généraliser la géométrie élémentaire que Riemann a été amené à introduire *a priori* une métrique  $ds^2$ , ou distance entre deux points infiniment voisins  $x^i, x^i + dx^i$ , sous la forme de la racine carrée d'une forme différentielle quadratique définie positive dont les coefficients  $g_{ij}$  sont des fonctions des  $x^i$ . La géométrie riemannienne a été étendue par Finsler (1918) à partir d'une métrique  $ds = F(x^i, dx^i)$  où  $F$  est une fonction des  $x^i$  et des  $dx^i$ , homogène du premier degré par rapport aux  $dx^i$ . Mais alors que l'espace de Riemann est *ponctuel*, l'espace de Finsler est un lieu d'*éléments linéaires* ( $x^i, dx^i$ ).

L'année 1933 marque un nouveau progrès dans la voie tracée par Riemann. Au lieu de construire l'espace avec des morceaux ponctuels,

M. Cartan (2, p. 7) imagine l'espace comme un lieu d'*éléments de contact*  $(x^i, u_i)$  au voisinage desquels les propriétés de l'espace euclidien sont conservées, espace qui sera doué d'une connexion euclidienne à partir non plus d'une métrique donnée, mais à partir d'un *élément d'aire* donné *a priori*.

Les Mémoires de M. Cartan sur ce sujet, et tout spécialement celui où il traite pour la première fois des espaces métriques fondés sur la notion d'aire, sont à l'origine des recherches qui font l'objet du présent travail. Celui-ci comporte quatre chapitres.

**1.** Le premier dégage l'idée directrice et la méthode de M. F. Cartan. Nous y rappelons, notamment, comment on peut associer, d'une manière intrinsèque, un espace d'éléments de contact doué d'une connexion euclidienne à l'expression

$$dS = F(x^1, x^2, \dots, x^n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) dx^1, \dots, dx^{n-1},$$

qui généralise l'élément d'aire de la géométrie euclidienne. L'assimilation a pour point de départ l'expression, due à M. Th. De Donder, de la variation d'une intégrale  $(n - 1)$ -uple étendue à une portion de surface extrémale limitée par un contour qui se déforme. Une méthode analytico-géométrique donne alors, la métrique et la connexion euclidienne des espaces dérivant de la notion d'aire.

**2.** On connaît le rôle des *droites* ou *géodésiques* dans les espaces riemanniens et ceux de Finsler. L'importance de ces courbes résulte du fait qu'elles peuvent être définies, soit comme lignes auto-parallèles, soit comme lignes qui réalisent l'extremum de l'intégrale  $\int ds$ .

Dans la théorie des espaces métriques fondés sur la notion d'aire à connexion euclidienne de Cartan, ces deux définitions ne sont plus équivalentes. De ce point de vue, *la recherche d'une connexion euclidienne intrinsèque dans laquelle géodésiques et extrémales coïncident*, revêt un intérêt spécial. C'est à ce problème qu'est consacrée la plus grande partie de notre Mémoire. Dès le Chapitre II nous montrons qu'il comporte une solution et une seule.

L'introduction de deux procédés distincts, l'un la *dérivation contre-variante*, l'autre la *dérivation covariante*, donnant à partir des tenseurs

de courbure et des tenseurs  $\frac{L^i}{\sqrt{g}}$ ,  $g^{ij}$ ,  $A^{ikh}$ , toute la gamme des tenseurs intrinsèquement liés à l'espace, nous permet d'écrire *généralement* les équations de courbes extrémales sous la forme

$$(I) \quad K^{ij} \frac{\tilde{\omega}_j}{ds} + A^i_{\ h} \frac{L^h}{\sqrt{g}} - \frac{g}{L^2} u_r u_s (\Gamma^{*rsi} - \Gamma^{*isr}) - \frac{\sqrt{g}}{L} u_r \Lambda_s (\Gamma^{*rsi} - \Gamma^{*isr}) = 0,$$

où  $K^{ij}$  est le tenseur symétrique

$$\Lambda^{ij} + 2\Lambda_k A^{kij} + \frac{L^i}{\sqrt{g}} \Lambda_j + g^{ij}.$$

Moyennant quoi, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les géodésiques soient des extrémales sont

$$(II) \quad \Lambda^i_{\ h} \frac{L^h}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{g}}{L} u_r \left( \frac{\sqrt{g}}{L} u_s - \Lambda_s \right) (\Gamma^{*rsi} - \Gamma^{*isr}).$$

Dans le cas particulier de la connexion de M. É. Cartan, nos formules (I) donnent  $DA^i + \left( H^{ik} + \frac{L^i}{\sqrt{g}} A^k \right) \varpi_k = 0$ . Les équations  $DA^i + H^{ik} \tilde{\omega}_k = 0$  obtenues par M. É. Cartan [2, p. 28], à partir d'une technique toute différente, ne sont pas rigoureuses; il manque au premier membre le terme complémentaire  $\frac{L^i}{\sqrt{g}} A^k \varpi_k$ . Cette lacune a été reconnue par l'illustre géomètre au cours d'une suite de correspondances que nous avons eu le plaisir et le profit d'échanger avec lui. Nous étions sur une bonne voie!

Le problème initialement posé se trouve dès lors subordonné au suivant: Trouver, à partir d'une convention de nature intrinsèque,  $\frac{n^3 - n^2}{2}$  équations telles que

1° jointes aux  $\frac{n^3 + n^2}{2}$  équations

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l} = -\Gamma^{ijl} - \Gamma^{jil},$$

le système obtenu détermine les  $n^3$  quantités  $\Gamma^i_{\ kh}$ ;

2° les  $\Gamma^i_{\ kh}$  vérifient les équations (II);

3° la discussion du système fasse intervenir le discriminant  $|K^{ij}|$ .

Cela entraîne, pour les espaces riemanniens à déplacement parallèle de Levi-Civita, la propriété d'être les seuls espaces métriques fondés sur la notion d'aire admettant une métrique euclidienne de raccordement le long d'une ligne quelconque. On dispose alors d'un procédé particulièrement simple de *discrimination des espaces C*, en espaces à tenseur  $A^{ijk}$  nul (espaces de Riemann) et en espaces à tenseur  $A^{ijk}$  différent de zéro : *Si un observateur à mentalité euclidienne se déplace au voisinage immédiat d'une courbe arbitraire, en effectuant des mesures dont la précision ne dépasse pas le premier ordre, il se trouve dans l'un ou l'autre de ces espaces suivant qu'il s'imagine ou non être dans un espace euclidien.*

En application des propriétés du tenseur symétrique  $K^{ij}$ , nous avons établi que :

a. La condition nécessaire et suffisante de *singularité totale* de l'espace est  $K^{ij} = \frac{L^i L^j}{g}$ .

b. Chaque élément de contact ( $u_i$ ) détermine une extrémale et une seule, tangente au vecteur unitaire normal, sous la condition (nécessaire et suffisante)  $|K^{ij}| \neq 0$ .

La formule (II) apporte occasionnellement une contribution à un théorème de M. É. Cartant relatif à l'équivalence des intégrales multiples et l'on peut dire que : Toute intégrale multiple, pour laquelle un des discriminants  $|H^{ij}|$  ou  $|K^{ij}|$  est différent de zéro, admet un groupe de transformations ponctuelles dépendant au maximum de  $\frac{n(n+1)}{2}$  paramètres.

Nous terminons le second chapitre en démontrant l'*unicité* de la connexion euclidienne intrinsèque, où géodésiques et extrémales coïncident.

5. Du point de vue analytique, l'instrument des recherches géométriques nouvelles a été créé par Riemann et codifié ensuite par Einstein sous la forme d'analyse tensorielle, intimement liée elle-même au calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita. Il en est fait constamment usage au cours des deux premières parties de notre exposé. Cet algorithme conduit, de par sa nature même, à des

complications formelles et introduit souvent des éléments étrangers à la réalité géométrique. La méthode du repère mobile, en plus des motifs déjà indiqués par M. É. Cartan [3, p. 6] qui légitiment son emploi dans les géométries kleinéennes, permet, dans les théories qui nous occupent de substituer au calcul différentiel absolu, le calcul extérieur de Grassmann-Cartan. Du même coup, les deux inconvénients signalés plus haut disparaissent.

Mais comment adapter la méthode du repère mobile aux espaces métriques fondés sur la notion d'aire et retrouver éventuellement les résultats du calcul tensoriel? Tels sont les deux problèmes fondamentaux qui ont retenu notre attention dans la troisième partie de ce travail. La méthode consiste à associer, à chaque élément de contact de l'espace, le trièdre trirectangle le plus général ayant pour origine le centre de l'élément, dont le troisième vecteur unitaire  $\vec{e}_3$  est normal (au sens de la géométrie à créer) à l'élément, les deux autres vecteurs unitaires  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  étant tangents à l'élément.

En application des formules obtenues, nous avons reconnu que les théorèmes de Meusnier et Darboux s'étendent aux surfaces considérées comme lieu de leurs éléments de contact normaux. Contrairement à ce qui a lieu en géométrie euclidienne, pour que les géodésiques d'une surface soient aussi les extrémales de  $\int ds$ , il faut et il suffit que l'espace ait son vecteur  $\vec{A}$  nul.

Nous avons montré par trois applications distinctes, une première à la théorie des courbes, une seconde à la théorie des surfaces et une troisième au système (3.10), (11.1), tout le parti que l'on peut tirer des *équations de structure* du déplacement infinitésimal du trièdre mobile. Elles nous ont permis d'obtenir, sans peine, les principaux éléments fondamentaux des courbes situées sur une surface : la courbure normale, la courbure géodésique, la torsion géodésique; les équations des courbes extrémales de l'espace et les équations caractéristiques des courbes extrémales d'une surface. La discussion du système (3.10), (11.1), qui joue un rôle essentiel dans la théorie des espaces C se fait très simplement à partir de ces équations. On conçoit que de telles équations représentent la structure fondamen-

tales de ces espaces et permettent de construire de vastes régions de cette géométrie.

Les considérations précédentes montrent que la méthode du repère mobile, conditionnée par les équations de structure, s'adapte avec succès à l'étude des principaux problèmes de la géométrie fondée sur la notion d'aire. Elle surpasse, tant par la simplicité des calculs que par la réalité géométrique qu'elle introduit, la méthode du calcul différentiel absolu dont les résultats ne s'acquièrent pas sans quelque longueur. Ce processus exige toutefois la connaissance de la connexion euclidienne; de là, l'emploi du calcul différentiel absolu dans le second chapitre réservé à la recherche d'une connexion spéciale.

4. Au Chapitre IV nous revenons sur un problème général posé par M. É. Cartan [2, p. 37] et résolu par lui dans le cas simple  $n = 2$ . « On pourrait, observe-t-il, étudier l'espace à  $n + 1$  dimensions fondé sur l'intégrale

$$(III) \quad \int (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) dx^1 dx^2 \dots dx^n.$$

Si  $n > 2$ , cet espace n'est pas singulier. Son étude serait sans doute intéressante. » Dans notre Thèse de licence nous étions parvenus aux formules générales faisant connaître la métrique et la connexion euclidienne de ces espaces hyperharmoniques. Contrairement à ce qui a lieu pour  $n = 2$ , les calculs se compliquent ici du fait que, dès la recherche de la hessienne de la forme L et, par la suite, des composantes du tenseur fondamental et du vecteur  $\vec{A}$ , il s'introduit quatre types distincts d'indices qui confèrent aux résultats des formes particulières, mais toujours simples, se réduisant aux formes de M. Cartan dans le cas  $n = 2$ . La propriété pour ces espaces d'être réguliers dans le cas  $n > 2$ , et singulier si  $n = 2$ , résulte directement de l'expression du discriminant  $|K^{ij}|$ .

En étudiant les géodésiques ou courbes auto-parallèles de l'espace hyperharmonique, nous avons observé qu'elles coïncident avec les extrémales de l'intégrale  $\int ds$ . Ainsi nous tenons un exemple, relativement simple, d'espace C à connexion euclidienne intrinsèque (G-E)



servant d'illustration au problème général abordé au début de ce mémoire. On peut multiplier les exemples en considérant plus généralement que (III) des intégrales du type

$$\int F(p_1, p_2, \dots, p_n) dx^1 dx^2 \dots dx^n,$$

où  $|K^{ij}|$  et  $|H^{ij}|$  seraient différents de zéro. Il est remarquable que l'intégrale double

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

rentre dans ce cadre. Il est donc possible de fonder la géométrie différentielle ordinaire de l'espace sur la donnée de l'élément d'aire et l'autoparallélisme des courbes extrémales. Ceci ouvre de nouvelles perspectives sur le champ d'application de nos résultats généraux.

## CHAPITRE I.

### Les notions fondamentales de la Géométrie des espaces C.

Dans ce premier Chapitre nous cherchons à mettre en lumière les fondements de la théorie des espaces C, d'après les travaux récents de MM. Berwald, Cartan, De Donder, ainsi que quelques résultats analytiques dont il sera fait usage par la suite.

**1. ESPACE DE RIEMANN.** — Considérons un système de  $n$  variables indépendantes  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , dont chacune peut prendre toute valeur sur un intervalle déterminé. On appelle *point* toute combinaison particulière  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  de ces variables et *espace ou variété à  $n$  dimensions* l'ensemble des points correspondant à toutes les combinaisons possibles des variables  $x^i$ .

Une variété à  $n$  dimensions dans laquelle la distance de deux points infiniment voisins  $M(x^i), M'(x^i + dx^i)$  se définit par une forme différentielle quadratique

$$(1.1) \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

est un espace de Riemann. On suppose généralement que la forme (1.1) est définie positive et que les  $g_{ij}$  sont des fonctions continues des coordonnées  $x^i$ , dérivables jusqu'aux différents ordres qui interviennent explicitement dans les formules.

La région infinitésimale entourant un point donné  $M(x_0^i)$  de la variété riemannienne (R) a les caractères d'un espace euclidien (E). C'est « l'espace euclidien tangent en M » auquel (R) emprunte ses premières données métriques : scalaires, vecteurs, tenseurs, etc..

Associions à (E) le repère cartésien  $(M, \vec{e}_i)$  constitué par le corps des vecteurs, issus de M, tangents aux  $n$  courbes de coordonnées et qui représentent les vitesses respectives des points parcourant ces diverses courbes lorsque les variables  $x^i$  marquent le temps. Ces axes confèrent au vecteur  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M(x_0^i)M'(x_0^i + dx^i)}$  les composantes  $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$ , et le carré de sa longueur s'exprime par la forme différentielle quadratique

$$\overline{MM'}^2 = g_{ij}(x_0^i) dx^i dx^j.$$

Dans cet ordre d'idées, la métrique  $ds^2$  de l'espace de Riemann assimile le voisinage d'un point quelconque M à une portion d'espace euclidien. Mais cette assimilation *locale* peut être élargie grâce au *déplacement parallèle*.

**2. LE DÉPLACEMENT PARALLÈLE.** — La notion de *transport parallèle* s'introduit dans les espaces de Riemann par le symbole opératoire D du calcul différentiel absolu. Un vecteur défini en chaque point d'une courbe C par ses composantes contrevariantes  $X^i$  se déplace *parallèlement* à lui-même, si au cours de ce déplacement, il satisfait le long de C au système d'équations différentielles

$$(2.1) \quad DX^i = dX^i + X^k \Gamma_{kh}^i dx^h = 0.$$

Imposons à ce déplacement la propriété de conserver la longueur, ce qu'exprime l'égalité

$$g_{ij} X^i X^j = (g_{ij} + dg_{ij})(X^i + dX^i)(X^j + dX^j)$$

ou, compte-tenu de (2.1),

$$dg_{ij} X^i X^j = g_{ij} X^i X^k \omega_k^j + g_{ij} X^i X^k \omega_k^j = (g_{kj} \omega_i^k + g_{ik} \omega_i^k) X^i X^j, \\ (\omega_k^i = \Gamma_{kh}^i dx^h),$$

et de là, en identifiant

$$(2.2) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = g_{ik} \Gamma_j^{kh} + g_{jk} \Gamma_i^{kh}.$$

Cette formule conditionne, d'une manière fondamentale, la géométrie riemannienne; elle crée entre la famille de repères associés aux points de C et une famille déterminée de repères de l'espace euclidien (E) une correspondance continue biunivoque telle que tout opérateur qui géométrise, soit le long de C dans (R), soit le long de sa courbe image  $\bar{C}$  dans (E), a exactement les mêmes conceptions quant à la nature de ces espaces.

Considérons, en effet, dans l'espace euclidien ordinaire, la carte de C, c'est-à-dire une courbe  $\bar{C}$  et une suite de repères cartésiens ayant pour origine les points P de la courbe C et dont les vecteurs unitaires  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  satisfont au système d'équations différentielles.

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \frac{dx^i}{dt} \vec{e}_i, \\ \frac{d\vec{e}_i}{dt} &= \Gamma_i^{jh} \frac{dx^h}{dt} \vec{e}_j \end{aligned}$$

où  $x^i = x^i(t)$  sont les équations de C. On en déduit

$$(2.4) \quad \frac{d(\vec{e}_i \vec{e}_j)}{dt} = \vec{e}_i \frac{d\vec{e}_j}{dt} + \vec{e}_j \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \Gamma_j^{kh} \frac{dx^h}{dt} \vec{e}_k \vec{e}_i + \Gamma_i^{kh} \frac{dx^h}{dt} \vec{e}_k \vec{e}_j.$$

En vertu de (2.2) les quantités  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ ,  $g_{ij}$  vérifient un même système d'équations différentielles. Si le repère initial de C est choisi de manière que

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = g_{ij}(0),$$

la solution de (2.4) est donnée par

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = g_{ij}(t).$$

De plus, si A et A<sub>1</sub> sont deux points infiniment voisins de C,  $\bar{A}$  et  $\bar{A}_1$  les points images de  $\bar{C}$  dans (E), deux vecteurs parallèles d'origines A et A<sub>1</sub> dans (R) ont pour images deux vecteurs parallèles

d'origines  $\bar{A}$  et  $\bar{A}_1$  dans (E). En effet, d'après la relation

$$d(X^i \vec{e}_i) = (dX^i + X^k \Gamma_{k^i}^j dx^k) \vec{e}_i = DX^i \vec{e}_i,$$

les termes extérieurs s'annulent simultanément.

La notion de parallélisme ramène donc l'étude du voisinage de C dans (R) à celle du voisinage de  $\bar{C}$  dans (E). Il subsiste toutefois entre ces deux espaces une différence essentielle : si on joint deux points M et N de C par un autre chemin que C, on n'obtient pas pour le point image de N et le repère qui lui est associé, ni la même position, ni la même orientation.

Il est clair que les voisinages de deux points A et A' infiniment rapprochés peuvent être assimilés à un seul espace euclidien. On dit encore de ces voisinages, qu'ils sont raccordés, intégrés dans un même espace (E) et qu'on a conféré à (R) une connexion euclidienne.

En résumé, un espace ponctuel à connexion euclidienne est défini par :

1° sa métrique

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j;$$

2° les coefficients  $\Gamma_{k^i}^j$  qui définissent la loi du transport parallèle, ces quantités étant uniquement soumises, *a priori*, aux conditions

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{ik} \Gamma_{j^k}^i + g_{jk} \Gamma_{i^k}^j.$$

**5. LES ESPACES MÉTRIQUES FONDÉS SUR LA NOTION D'AIRES.** — Par elle-même et par ses généralisations successives, la formule (2.2) joue un rôle essentiel dans le développement des géométries à connexion euclidienne. Toujours avec les concepts fondamentaux, déjà considérés au paragraphe précédent, on peut réaliser des variétés plus complexes que l'espace riemannien. Ce sont les espaces d'éléments de contact (au sens de Lie) à connexion euclidienne.

Un tel espace est défini analytiquement par la donnée de :

1° La métrique

$$ds^2 = g_j dx^j dx^j,$$

au voisinage d'un élément de contact. Les coefficients  $g_{ij}$  sont fonctions

des coordonnées de l'élément. Ces dernières comprennent les coordonnées  $x^i$  du centre et les coordonnées homogènes  $u_i$  définissant l'orientation de l'élément.

2° La différentielle absolue d'un vecteur quand son élément de contact et ses composantes varient infiniment peu, différentielle de la forme

$$(3.1) \quad DX^i = dX^i + X^k C_k^{ih} du_h + X^k \Gamma_k^{ih} dx^h.$$

*Première condition intrinsèque.*

Le déplacement parallèle conserve les longueurs. On a donc les conditions

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial g^{ij}}{\partial u_h} = -C^{ijh} - C^{jih}, \\ \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -\Gamma^{ijk} - \Gamma^{jik}, \end{cases}$$

que doivent vérifier les coefficients  $C^{kih}$ ,  $\Gamma^{kih}$ , pour que l'espace soit à connexion euclidienne.

On appelle *espace de Cartan* une variété d'éléments de contact à connexion euclidienne dans laquelle l'élément d'aire d'une hypersurface

$$x^n = x^n(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})$$

est donnée, *a priori*, par l'expression.

$$dS = F(x^1, \dots, x^n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) dx^1 dx^2 \dots dx^{n-1},$$

où

$$p_i = \frac{-u_i}{u_n} = \frac{\partial x^n}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Cette condition ne suffit pas pour déterminer entièrement les

$$\frac{n(n+1)}{2} + 2n^2$$

quantités  $g^{ij}$ ,  $C^{kih}$ ,  $\Gamma^{kih}$ . D'où la nécessité d'imposer à l'espace de nouvelles conditions intrinsèques.

*Deuxième condition intrinsèque.*

L'élément d'aire  $dS$  d'un élément d'hypersurface qui admet pour

hyperplan tangent  $(x^i, u_i)$  est égal à

$$\frac{1}{u_n} L(x^i, u_i) dx^1 dx^2 \dots dx^{n-1},$$

avec

$$L(x^i, u_i) = u_n F\left(x^i, \frac{-u_i}{u_n}\right).$$

D'après un théorème dû à M. Th. De Donder (6, p. 212), la variation de l'intégrale  $(n-1)$ -uple

$$\int \frac{1}{u_n} L(x^i, u_i) dx^1 dx^2 \dots dx^{n-1},$$

étendue à une portion d'hypersurface extrémale (S) limitée par un contour (C), lorsque ce dernier se déforme infiniment peu, est égale à

$$\int \frac{\partial L}{\partial u_1} dx^2 dx^3 \dots dx^n - \frac{\partial L}{\partial u_2} dx^1 dx^3 \dots dx^n + \dots$$

Cette intégrale  $(n-1)$ -uple est prise sur l'hypersurface engendrée par le contour (C) lors de sa déformation.

Dans le cas où le contour (C) se déforme en restant sur l'hypersurface extrémale (S),

$$dS = \frac{\partial L}{\partial u_1} dx^2 dx^3 \dots dx^n - \frac{\partial L}{\partial u_2} dx^1 dx^3 \dots dx^n + \dots$$

C'est l'élément d'aire d'un élément d'hypersurface dont  $(u_i)$  est l'hyperplan tangent.

Si l'on considère cet élément comme un parallépipède construit sur les  $(n-1)$  vecteurs  $d^i x^1, d^i x^2, \dots, d^i x^n$ , ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ),

$$dS = \Delta,$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} L^1 & L^2 & \dots & L^n \\ d^1 x^1 & d^1 x^2 & \dots & d^1 x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^{n-1} x^1 & d^{n-1} x^2 & \dots & d^{n-1} x^n \end{vmatrix}.$$

d'où

$$\vec{X} \vec{D} \vec{Y} = X^k Y_i C_i^k{}^h du_h = \vec{Y} \vec{D} \vec{X} = Y^k X_i C_i^k{}^h du_h.$$

Ce qui donne

$$C^{kih} = C^{ikh},$$

et, en vertu des premières relations (5.2),

$$C^{ijh} = \frac{-1}{2} \frac{\partial g^{ij}}{\partial u_h}.$$

*Cinquième condition intrinsèque.*

*La variation géométrique d'un vecteur normal à son élément d'appui et de composantes contrevariantes fixes est proportionnelle à ce vecteur lorsque l'élément d'appui subit une rotation infinitésimale autour de son centre.*

Les composantes contrevariantes de la différentielle absolue du vecteur normal à l'élément ( $u_i$ ) et de composantes  $\rho L^i$  sont données par

$$DX^i = \rho L^k C_k^{ih} du_h = \lambda L^i,$$

d'où

$$u_k d(gg^{ik}) = 0.$$

D'autre part, les équations (5.3) donnent par différentiation

$$u_k d(gg^{ik}) + gg^{ik} du_k = g g^{ik} du_k = (LL^{ik} + L^i L^k) du_k,$$

$$g g^{ik} = LL^{ik} + L^i L^k = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial u_i \partial u_k}.$$

Le déterminant

$$|g g^{ik}| = g^n |g^{ik}| = g^{n-1} = \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial u_i \partial u_k} \right|.$$

On a donc finalement

$$g^{ij} = \frac{1}{2 \Delta^{\frac{1}{n-1}}} \frac{\partial^2 L^2}{\partial u_i \partial u_j},$$

où  $\Delta$  est la hessienne de la forme  $\frac{1}{2} L^2$ .

La métrique est complètement déterminée.

*Sixième condition intrinsèque.*

*Troisième condition intrinsèque.*

*Le vecteur de composantes contrevariantes  $L^1, L^2, \dots, L^n$ , est normal à son élément d'appui.*

Le produit  $\sqrt{g}\Delta$ , où  $g = |g_{ij}|$ , donne le volume du parallépipède construit sur les  $n - 1$  vecteurs  $(d^i x^h)$  et le vecteur de composantes contrevariantes  $(L^i)$  normal à l'élément  $(u_i)$ . D'autre part si l'on désigne par  $l$  la longueur de ce dernier vecteur, ce volume est encore donné par  $l dS$ . On en déduit

$$l = \sqrt{g}$$

et les composantes contrevariantes du vecteur unitaire normal à l'élément  $(u_i)$  sont données par  $\frac{L^i}{\sqrt{g}}$ .

Le vecteur de composantes covariantes  $u_i$ ,  $(u_i dx^i) = 0$ , est normal à l'élément  $(u_i)$  et sa longueur est donnée par

$$\frac{u_i L^i}{\sqrt{g}} = \frac{L}{\sqrt{g}}$$

Le vecteur unitaire normal à l'élément  $(u_i)$  a donc pour composantes covariantes les quantités  $\frac{\sqrt{g}}{L} u_i$ . Il en résulte immédiatement un premier système d'équations que doit vérifier le tenseur fondamental :

$$\frac{L^i}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{g}}{L} g^{ik} u_k$$

ou

$$(3.3) \quad LL^i = g g^{ik} u_k.$$

*Quatrième condition intrinsèque.*

Le produit scalaire  $\vec{X} \cdot \vec{D}\vec{Y}$ , où  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$  sont deux vecteurs de composantes contrevariantes fixes, est symétrique par rapport à ces deux vecteurs quand leur élément d'appui commun tourne infiniment peu autour de son centre.

On a d'après la définition de  $\vec{D}\vec{Y}$ ,

$$DY_k = Y_i C^i_{k^h} du_h,$$

Les composantes  $\Gamma^*_{k^i h} = \Gamma_{k^i h} + C_k^{ij} u_j \Gamma^i_{h}$  qui entrent dans l'expression de la différentielle absolue d'un vecteur dont l'élément d'appui se déplace parallèlement à lui-même sont symétriques vis-à-vis des indices  $k, h$ .



Les coefficients  $\Gamma_{k^i h}$  vérifient les  $n^3$  relations

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{k^i h} + C_{k^i j} u_l \Gamma_{j^l h} = \Gamma_{h^i k} + C_{h^i j} u_l \Gamma_{j^l k}, \\ \frac{\partial g^{kh}}{\partial x_i} = -\Gamma^{kh}_i - \Gamma^{hk}_i. \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce système, M. É. Cartan introduit les tenseurs

$$\Lambda^i = -L \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial u_i},$$

et

$$\Lambda^{ijk} = \frac{L}{\sqrt{g}} C^{ijk}.$$

Les équations (3.4) ne déterminent complètement la connexion euclidienne que dans le cas où le discriminant  $|g^{ij} + A_k A^{kij}| \neq 0$ . Il existe donc des cas exceptionnels, où il n'est pas possible d'associer à une intégrale  $\int F(x^1, x^2, \dots, x^n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) dx^1 \dots dx^{n-1}$ , un espace à connexion euclidienne dans laquelle  $dS = F(x^i, p_i) dx^1 \dots dx^{n-1}$  représenterait l'élément d'aire euclidien d'une hypersurface. C'est ce qui a lieu pour l'intégrale double  $\iint (p^2 + q^2) dx dy$ . Cet exemple montre qu'il n'est pas toujours possible, en conservant les notions fondamentales de la géométrie différentielle euclidienne, de construire une géométrie à partir de la généralisation de l'expression de l'élément d'aire euclidien.

## CHAPITRE II.

### La connexion euclidienne (G.-E.).

**4. LA THÉORIE DES COURBES.** — La possibilité de fonder d'une manière intrinsèque une géométrie à connexion euclidienne sur la donnée de l'expression analytique de l'aire d'un élément de surface permet d'appliquer aux espaces G les procédés de la géométrie différentielle ordinaire. La conclusion essentielle qui se dégage d'une première étude relativement à la différence entre ces espaces et l'espace euclidien

est la suivante : Les procédés de la géométrie différentielle euclidienne ne peuvent s'appliquer qu'aux figures considérées comme lieu de l'élément générateur. Ce dernier étant l'élément de contact, dans la théorie des courbes on peut se placer à deux points de vue distincts suivant qu'on associe à chaque point  $M$  d'une courbe  $\Gamma$  soit un élément, soit une famille d'éléments ayant  $M$  comme centre.

Dans le cas où l'on fixe au point  $M$  l'élément de contact  $(u_i)$  normal à  $\Gamma$ , le vecteur unitaire tangent qui a pour composantes  $\frac{dx^i}{ds}$  coïncide avec le vecteur unitaire normal à  $(u_i)$ . On a le système d'équations

$$(4.1) \quad \frac{dx^i}{ds} = \frac{L^i}{\sqrt{g}}$$

pour déterminer l'élément d'arc  $ds$  et les quantités  $p_i = -\frac{u_i}{u_{n+1}}$ .

Les géodésiques ou lignes auto-parallèles sont des courbes dont le vecteur unitaire tangent reste équipollent à lui-même. Elles sont donc définies par les équations

$$\tilde{\omega}_i = 0.$$

Les courbes extrémales qui réalisent l'extrémum de l'intégrale  $\int ds$  sont au contraire, dans la connexion de M. É. Cartan, définies par les équations

$$D\Lambda^i + \left( \Pi^{ik} + \frac{L^i}{\sqrt{g}} \Lambda^k \right) \tilde{\omega}_k = 0.$$

Ces courbes ne coïncident pas en général. En vue de déterminer la connexion euclidienne (G-E), nous rechercherons par un calcul direct de la variation de l'intégrale  $\int ds$ , les équations des courbes extrémales dans le cas d'une connexion euclidienne quelconque.

§. LES ÉQUATIONS DES EXTRÊMALES. — Considérons les coordonnées  $x^i$  d'une courbe  $\Gamma$  comme des fonctions du paramètre  $t$ . Posons

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= x'^i, \\ \sqrt{g_{ij}(x^k, u_k)} x'^i x'^j &= F(x^k, x'^k). \end{aligned}$$

L'intégrale à extrémer sera

$$\int dt \sqrt{g_{ij}(x^k, u_k) x'^i x'^j} = \int F(x^k, x'^k) dt$$

en désignant par  $u_k$  les fonctions des  $x^i, x'^i$ , tirées du système (4.1)

$$\frac{x'^i}{\sqrt{g_{rs} x'^r x'^s}} = \frac{L^i}{\sqrt{g}}$$

Les extrémales de  $\int F(x^k, x'^k) dt$  sont (4, p. 310) les solutions du système d'équations différentielles

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial F}{\partial x'^k} \right] = 0.$$

Explicitons les deux dérivées partielles  $\frac{\partial F}{\partial x^k}$  et  $\frac{\partial F}{\partial x'^k}$ ; on aura en vertu de (5.1)

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{1}{2\sqrt{g_{rs} x'^r x'^s}} \left[ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} x'^i x'^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \frac{\partial u_l}{\partial x^k} x'^i x'^j \right],$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial x'^k} = \frac{1}{2\sqrt{g_{rs} x'^r x'^s}} \left[ 2g_{ik} x'^i + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x'^k} x'^i x'^j \right].$$

En tenant compte des relations

$$(5.2) \quad u_j = \frac{\frac{L}{\sqrt{g}} g_{ij} x'^i}{\sqrt{g_{rs} x'^r x'^s}},$$

$$(5.3) \quad \frac{g}{L^2} u_l u_k \Lambda^{ikh} = \Lambda^h,$$

un calcul immédiat donne

$$\frac{\partial F}{\partial x'^k} = \frac{1}{2\sqrt{g_{rs} x'^r x'^s}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} x'^i x'^j + \sqrt{g_{rs} x'^r x'^s} \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda^l \frac{\partial u_l}{\partial x'^k}$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial x'^k} = \frac{\sqrt{g}}{L} u_k + \sqrt{g_{rs} x'^r x'^s} \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda^l \frac{\partial u_l}{\partial x'^k},$$

Dérivons (5.1) par rapport à  $x^k$

$$(5.4) \quad \frac{\partial u_j}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{g_{rs}x'^rx'^s}} \left[ \frac{L}{\sqrt{g}} x'^i \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{L}{\sqrt{g}} x'^i \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x^k} + \frac{g_{ij}x'^i}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial x^k} + \frac{g_{ij}x'^i}{\sqrt{g}} L^j \frac{\partial u_l}{\partial x^k} - \frac{L}{g} g_{ij}x'^i \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} - \frac{L}{2\sqrt{g}} \frac{g_{ij}x'^i}{g_{rs}x'^rx'^s} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} x'^rx'^s - \frac{L}{g} g_{ij}x'^i \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x^k} - \frac{L g_{ij}x'^i}{\sqrt{g} g_{rs}x'^rx'^s} \frac{\partial g_{rs}}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x^k} x'^rx'^s \right].$$

Multiplions par  $A^j$  et sommions; compte tenu de

$$(5.5) \quad \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Lambda^{kh} = \frac{L^h}{\sqrt{g}} \Lambda^h,$$

$$(5.6) \quad \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Lambda^{ijk} = 0,$$

il vient

$$(5.7) \quad \Lambda^j \frac{\partial u_j}{\partial x^k} = \frac{L L^j}{g} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \Lambda^i.$$

De même, en dérivant (5.1) par rapport à  $x^h$ , on a

$$(5.8) \quad \frac{\partial u_j}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{g_{rs}x'^rx'^s}} \left[ \frac{L}{\sqrt{g}} g^{kj} + \frac{L}{\sqrt{g}} x'^i \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x^k} + \frac{g_{ij}x'^i}{\sqrt{g}} L^j \frac{\partial u_l}{\partial x^k} - \frac{L}{g} g_{ij}x'^i \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x^k} \right] - \frac{u_j}{2\sqrt{g_{rs}x'^rx'^s}} \left[ 2g^{hk}x'^h + \frac{\partial g_{rs}}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x^k} x'^rx'^s \right].$$

La multiplication par  $A^j$  et la sommation par rapport à l'indice  $j$ , donnent d'après (5.5), (5.6),

$$(5.9) \quad \Lambda^j \frac{\partial u_j}{\partial x^k} = \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\Lambda_k}{\sqrt{g_{rs}x'^rx'^s}}.$$

Les équations des extrémales sont finalement données par

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{L^i L^j}{g} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{L^i}{\sqrt{g}} \Lambda^j - \frac{d}{ds} [I_k + \Lambda_k] = 0$$

ou en vertu des conditions

$$(5.10) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik},$$

qui assurent que le transport parallèle conserve les longueurs

$$(5.11) \quad \frac{g}{L^2} u_i u_j \Gamma^{ijk} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda^l (\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ki}) - \frac{d}{ds} [l_k + \Lambda_k] = 0.$$

Il est possible de mettre ces équations sous une forme plus condensée, grâce à l'introduction de deux tenseurs, l'un contrevariant  $A^{ik}$ , l'autre mixte  $A^i{}_r$ , obtenus par application au vecteur  $A^i$  de deux procédés distincts de dérivation tensorielle. Cette nouvelle forme des équations (5.11) a l'avantage de mettre en relief les conditions nécessaires et suffisantes qui assurent l'auto-parallélisme des courbes extrémales.

**6. LA DÉRIVATION CONTREVARIANTE.** — Le principe d'extension de la notion de dérivée dans les espaces riemanniens donne lieu, pour les espaces C, à deux nouvelles dérivations généralisées. La première, la dérivation contrevariante, donne naissance à partir d'un tenseur quelconque  $T^{*****}$  dépendant de  $n$  indices contrevariants et de  $m$  indices covariants à un tenseur  $T^{*****}$  à  $n + 1$  indices supérieurs et  $m$  indices inférieurs.

Pour fixer les idées, et aussi pour simplifier quelque peu les notations, considérons un tenseur contrevariant à deux indices  $T^{ij}$ . Sa différentielle absolue est exprimée par

$$DT^{ij} = dT^{ij} + T^{ik} \omega_k^j + T^{kj} \omega_k^i,$$

où

$$\omega_k^j = \Lambda_k^{j'l} \tilde{\omega}_l + \Gamma_k^{jl} dx^l.$$

Les quantités

$$(6.1) \quad \Gamma_k^{jl} = \Gamma_k^{jl} + C_k^{ls} u_r \Gamma_s^{rl}$$

sont les coefficients définissant la variation géométrique d'un vecteur dont l'élément de contact se déplace parallèlement à lui-même.

Laissons fixe l'origine de l'élément d'appui et faisons tourner ce dernier infiniment peu autour de son centre. On a

$$\omega_k^j = \Lambda_k^{j'l} \tilde{\omega}_l$$

et

$$(6.2) \quad \tilde{\omega}_i = \frac{\sqrt{g}}{L} du_i - \frac{\sqrt{g}}{L^2} u_i dL.$$

La différentielle ordinaire  $d\Gamma^{ij}$ , dans le cas où l'élément de contact  $(u_i)$  subit une rotation infinitésimale autour de l'origine, est un tenseur. Pour s'en assurer, il suffit d'observer que, la différentielle absolue  $D\Gamma^{ij}$  se réduit à

$$D\Gamma^{ij} = d\Gamma^{ij} + T^{ik} \Lambda_k{}^i{}^l \tilde{\omega}_l + T^{kj} \Lambda_k{}^i{}^l \tilde{\omega}_l.$$

Si l'on remarque que les composantes  $T^{ij}$  sont des fonctions homogènes de degré zéro par rapport aux  $u_i$ , on a, en appliquant le théorème d'Euler,

$$T^{ij}(x^k, u_k) = T^{ij}\left(x^k, \frac{\sqrt{g}}{L} u_k\right).$$

On peut donc écrire

$$d\Gamma^{ij} = T^{ijk} d\left[\frac{\sqrt{g}}{L} u_k\right].$$

D'autre part de

$$\tilde{\omega}_k = d\left[\frac{\sqrt{g}}{L} u_k\right] - \frac{\sqrt{g}}{L} u_i C_k{}^{ih} du_h,$$

on déduit compte tenu de (6.2), (6.4),

$$\tilde{\omega}_k = d\left[\frac{\sqrt{g}}{L} u_k\right] - \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Lambda^h{}^k \tilde{\omega}_h,$$

d'où il résulte

$$(6.3) \quad d\Gamma^{ij} = \left(T^{ijk} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_l \Lambda^k{}^l T^{ijl}\right) \tilde{\omega}_k.$$

De la comparaison de (6.3) avec la relation

$$d\Gamma^{ij} = \frac{\partial \Gamma^{ij}}{\partial u_k} du_k = \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Gamma^{ij}}{\partial u_k} \tilde{\omega}_k,$$

il vient

$$\frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Gamma^{ij}}{\partial u_k} + \lambda \frac{L^k}{\sqrt{g}} = T^{ijk} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_l \Lambda^k{}^l T^{ijl}.$$

On peut sans altérer la valeur de la différentielle  $d\Gamma^{ij}$  ajouter au

tenseur  $T^{ij,k}$  des termes de la forme  $\varphi^{ij}L^k$ . Cette propriété résulte du fait que les quantités  $\varpi_k$  sont liées par la relation

$$L^k \tilde{\omega}_k = 0.$$

Mais on peut déterminer d'une manière et d'une seule ce coefficient de façon que

$$(6.4) \quad u_k T^{ij,k} = 0.$$

La valeur du tenseur de dérivation covariante

$$(6.5) \quad T^{ij;k} = \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial T^{ij}}{\partial u_k}$$

est précisément celle qui satisfait à cette condition.

La dérivation contrevariante du scalaire  $\sqrt{g}$ , du tenseur fondamental  $g^{ij}$ , fait apparaître très simplement le vecteur  $A^i$  et le tenseur  $A^{ijk}$  introduit par M. E. Cartan à l'aide de procédés ingénieux, mais sans liens étroits.

Cette opération appliquée, en particulier, au vecteur  $A^i$  donne le tenseur

$$(6.6) \quad A^{i;k} = \frac{L^2}{g\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial u_i \partial u_k} + \frac{L^k}{\sqrt{g}} A^i - 2 A^i A^k,$$

appelé à jouer un rôle important par la suite.

Signalons encore la dérivée contrevariante

$$(6.7) \quad T_{ij}{}^{;k} = \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial T_{ij}}{\partial u_k},$$

obtenue à partir du tenseur à deux indices covariants  $T_{ij}$ . En comparant (6.5) à (6.7), on voit que ces deux tenseurs sont liés par la relation

$$g^{ri} g^{sj} T_{ij}{}^{;k} = T^{rs;k} + 2 A^{sjk} T^r{}_j + 2 A^{rik} T^s{}_i,$$

d'où l'identité

$$(6.8) \quad g^{ri} A_i{}^{;k} = A^{r;k} + 2 A_i A^{rik}.$$

## 7. LA DÉRIVATION COVARIANTE. — La seconde dérivation généralisée

permet de déduire d'un tenseur  $T^{* \dots *}$ , à  $n$  indices contrevariants et  $m$  indices covariants, un tenseur  $T^{* \dots *}$ , dépendant de  $n$  indices supérieurs et  $m + 1$  indices inférieurs. Soit, par exemple, le tenseur  $T^{ij}$  dont la variation géométrique est donnée par

$$DT^{ij} = dT^{ij} + T^{ik} \Lambda_k^{j'l} \tilde{\omega}_l + T^{kj} \Lambda_k^{il} \tilde{\omega}_l + T^{ik} \Gamma_k^{j'l} dx^l + T^{kj} \Gamma_k^{il} dx^l.$$

En vertu de (6.3), posons

$$(7.1) \quad dT^{ij} + T^{ik} \Gamma_k^{j'l} dx^l + T^{kj} \Gamma_k^{il} dx^l = T^{i;k} \tilde{\omega}_k + T^{i;h} dx^h,$$

d'où la relation

$$DT^{ij} = (T^{i;j} = T^{ik} \Lambda_k^{jh} + T^{kj} \Lambda_k^{ih}) \tilde{\omega}_h + T^{i;h} dx^h,$$

qui exprime que les symboles  $T^{i;h}$  représentent une fonction tensorielle deux fois contrevariantes et une fois covariante.

Développons le premier terme de (7.1). Remarquons que

$$(7.2) \quad du_h = \frac{L}{\sqrt{g}} \tilde{\omega}_h + u_h \frac{dL}{L} - \left[ \frac{u_h}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} - u_l \Gamma_h^{lk} \right] dx^k.$$

L'équation (7.1) devient donc

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^h} dx^h + \frac{\partial T^{ij}}{\partial u_r} u_l \Gamma_r^{lh} dx^h + T^{ik} \Gamma_k^{j'h} dx^h + T^{kj} \Gamma_k^{i'h} dx^h = T^{i;h} dx^h$$

et l'identification des termes en  $dx^h$  donne

$$(7.3) \quad T^{i;h} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^h} + T^{ijr} \frac{\sqrt{g}}{L} u_l \Gamma_r^{lh} + T^{ik} \Gamma_k^{j'h} + T^{kj} \Gamma_k^{i'h},$$

Un raisonnement en tout point identique conduit au tenseur covariant

$$(7.4) \quad T_{ij,h} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^h} + T_{ijr} \frac{\sqrt{g}}{L} u_l \Gamma_r^{lh} + T_{ik} \Gamma_k^{j'h} + T_{kj} \Gamma_k^{i'h}.$$

On a, en particulier,

$$l_{k,l} = 0, \\ g^{ih}_l = 0,$$



et

$$(7.5) \quad \begin{cases} \Lambda_{i,l} = \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x^l} + \frac{\partial \Lambda_i}{\partial u_r} u_k \Gamma_r^{k,l} - \Lambda_k \Gamma_i^{*k,l}, \\ \Lambda^{i,l} = \frac{\partial \Lambda^i}{\partial x^l} + \frac{\partial \Lambda^i}{\partial u_r} u_k \Gamma_r^{k,l} + \Lambda^k \Gamma_k^{*i,l}, \end{cases}$$

avec la relation

$$\Lambda_{i,l} = g_{ik} \Lambda^{k,l}.$$

La formule (7.5) permet d'établir aisément l'identité

$$u_i \Lambda^{i,l} = 0$$

qui sera d'un emploi fréquent par la suite. Multiplions la, en effet, par  $u_i$  et sommons, il vient

$$u_i \Lambda^{i,l} = u_i \frac{\partial \Lambda^i}{\partial x^l} + u_i \frac{\partial \Lambda^i}{\partial u_r} u_k \Gamma_r^{k,l} + \Lambda^k u_i \Gamma_k^{*i,l}.$$

D'autre part, de (5.4), (6.1), (6.4),

$$u_i \frac{\partial \Lambda^i}{\partial x^l} = \frac{\partial (u_i \Lambda^i)}{\partial x^l} = 0$$

et

$$u_i \frac{\partial \Lambda^i}{\partial u_r} = \frac{\partial (u_i \Lambda^i)}{\partial u_r} - \Lambda^r = -\Lambda^r,$$

on a

$$u_i \Lambda^{i,l} = -\Lambda^r u_k \Gamma_r^{k,l} + \Lambda^k u_i \Gamma_k^{*i,l} = 0.$$

**8. NOUVELLE FORME DES CONDITIONS D'EXTREMUM.** — Le rôle joué par les tenseurs (6.6) et (7.4) ressort nettement au cours de ce paragraphe. Ils nous permettront, en effet, d'intégrer au maximum dans les équations (5.11), la forme différentielle  $\varpi_i$  qui définit les composantes covariantes de la variation géométrique du vecteur unitaire normal à l'élément de contact. Moyennant quoi, les conditions nécessaires et suffisantes qui assurent aux courbes géodésiques la propriété d'extrémer l'intégrale  $\int ds$ , apparaîtront sous une forme directement exploitable pour la recherche de la connexion euclidienne (G-E).

Rappelons que (2, p. 8)

$$\omega_k = \frac{d}{ds} \left[ \frac{\sqrt{g} u_k}{L} \right] - \frac{\sqrt{g}}{L} u_r C_k^{r,h} \frac{du_h}{ds} - \frac{g}{L^2} u_r u_h \Gamma_k^{r,h}$$

et

$$\frac{DA_k}{ds} = \frac{dA_k}{ds} - \Lambda_l C_k^{lh} \frac{du_h}{ds} - \frac{\sqrt{g}}{L} u_h \Lambda_l \Gamma_k^{lh},$$

d'où, en se reportant à (5.8)

$$\begin{aligned} \frac{g}{L^2} u_i u_j (\Gamma^{jk} - \Gamma_k^{ji}) + \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda^l (\Gamma_{lk} - \Gamma_{kl}^l) + \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda^l \Gamma_{lk}^l \\ - \frac{\sqrt{g}}{L} u_r C_k^{rh} \frac{du_h}{ds} - \Lambda_l C_k^{lh} \frac{du_h}{ds} - \frac{DA_k}{ds} - \frac{\tilde{\omega}_k}{ds} = 0. \end{aligned}$$

Compte tenu de (7.2), et de la relation

$$\frac{DA_k}{ds} = \Lambda_k^{r'} \frac{\tilde{\omega}_r}{ds} - \Lambda_l \Lambda_k^{lr} \frac{\tilde{\omega}_r}{ds} + \Lambda_{k,h} \frac{dx^h}{ds},$$

les équations différentielles des courbes extrémales s'écrivent

$$\begin{aligned} (8.1) \quad \frac{g}{L^2} u_i u^j (\Gamma^{jk} - \Gamma_k^{ji}) + \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda^l (\Gamma_{lk} - \Gamma_{kl}^l) + \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda^l \Gamma_{lk}^l \\ - \frac{g\sqrt{g}}{L^3} u_k u_s u_l \Lambda^h \Gamma_{h'k}^l - \frac{\sqrt{g}}{L} u_s u_r \Lambda_l C_k^{lh} \Gamma_{h'rs} \\ - \left( \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Lambda^h + \Lambda_k^{jh} + g^{kh} \right) \frac{\tilde{\omega}_h}{ds} - \Lambda_{k,h} \frac{dx^h}{ds} = 0. \end{aligned}$$

Posons, avec M. É. Cartan (2, p. 21),

$$(8.2) \quad \tau^{ijk} = \Gamma^{*ijk} - \Gamma^{*kji} = \Gamma^{ijk} - \Gamma^{kji} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_r (\Lambda^{ijh} \Gamma_k^{rk} - \Lambda^{kjh} \Gamma_r^{ri}).$$

Multiplions (8.2) par  $\frac{g}{L^2} u_i u_j$  et sommons; il vient, d'après (5.3) et (5.4),

$$\frac{g}{L^2} u_i u_j \Gamma^{jk} = \frac{g}{L^2} u_i u_j \tau^{ijk} + \frac{g}{L^2} u_i u_j \Gamma_k^{ji} - \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda^h u_l \Gamma_{h'k}^l + \frac{g\sqrt{g}}{L^3} u_k u_l u_i \Lambda^h \Gamma_{h'li},$$

d'où, compte tenu de (8.1),

$$\begin{aligned} \frac{g}{L^2} u_i u_j \tau^{ijk} + \frac{g}{L^2} u_i u_j \Gamma_k^{ji} - \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda^h u_l \Gamma_{h'k}^l + \frac{g\sqrt{g}}{L^3} u_k u_l u_i \Lambda^h \Gamma_{h'li} \\ + \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda^l (\Gamma_{lk}^l + \Gamma_{lk}^l) - \frac{g}{L^2} u_l u_h \Gamma_k^{lh} - \frac{\sqrt{g}}{L} u_h \Lambda_l \Gamma_k^{lh} \\ - \frac{g\sqrt{g}}{L^3} u_k u_r u_s \Lambda^h \Gamma_{h'rs} - \frac{\sqrt{g}}{L} u_r u_s \Lambda_l C_k^{lh} \Gamma_{h'rs} \\ - \left[ \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Lambda^h + \Lambda_k^{jh} + g^{kh} \right] \frac{\tilde{\omega}_h}{ds} - \Lambda_{k,h} \frac{dx^h}{ds} = 0, \end{aligned}$$

il en résulte que les équations différentielles des courbes extrémales (8.1) sont données par

$$(8.3) \quad \frac{g}{L^2} u_i u_j \Gamma^{ij}_k + \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda^l (\Gamma^{il}_k - \Gamma_{kl}^i) - \frac{g}{L^2} u_r u_s \Lambda_l \Lambda_k{}^{lh} \Gamma_h{}^{rs} \\ - \left[ \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Lambda^h + \Lambda_k{}^h + g^k{}^h \right] \frac{\tilde{\omega}_h}{ds} - \Lambda_{k,h} \frac{dx^h}{ds} = 0.$$

Multiplions (8.2) par  $\frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda_l$  et sommons; on a, d'après (5.4) et (6.4),

$$\frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda_l (\Gamma^{il}_k - \Gamma_{kl}^i) = \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda_l \tau^{il}_k + \frac{g}{L^2} u_i u_r \Lambda_l \Lambda_k{}^{lh} \Gamma_h{}^{ri}.$$

En portant les valeurs obtenues pour  $\frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda_l (\Gamma^{il}_k - \Gamma_{kl}^i)$  dans (8.3), on obtient la formule

$$(8.4) \quad K^{kh} \frac{\tilde{\omega}_h}{ds} = \frac{g}{L^2} u_i u_j (\Gamma^{ijk} - \Gamma^{kji}) + \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda_j (\Gamma^{ijk} - \Gamma^{kji}) - \Lambda_k{}^h \frac{dx^h}{ds}.$$

On a donc le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Pour que dans un espace C toute géodésique soit une courbe extrémale de l'intégrale  $\int ds$ , il faut et il suffit que la connexion euclidienne choisie vérifie le système d'équations*

$$(8.5) \quad \frac{g}{L^2} u_i u_j (\Gamma^{ijk} - \Gamma^{kji}) + \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda_j (\Gamma^{ijk} - \Gamma^{kji}) = \Lambda_k{}^h \frac{dx^h}{ds},$$

**9. LE DÉPLACEMENT ASSOCIÉ A UN CYCLE DANS UN ESPACE RIEMANNIEN A CONNEXION EUCLIDIENNE.** — Considérons dans un espace riemannien (R) à connexion euclidienne deux courbes AEB et AE'B et en chaque point P de celles-ci le repère cartésien  $(P, \vec{e}_i)$  dont les vecteurs unitaires satisfont au système d'équations différentielles

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \Gamma_{jh}^i \frac{dx^h}{dt} \vec{e}_j.$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \vec{e}_i$$

Attachons à tout point P de ces deux courbes un vecteur  $\vec{X}_P$  défini par ses coordonnées cartésiennes  $(X^i)$  rapportées au repère  $(P, \vec{e}_i)$  (fig. 1).

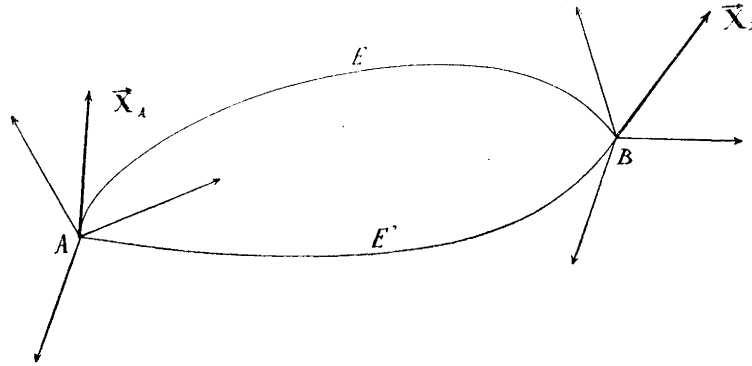


Fig. 1.

Si l'on fait la carte de ces courbes dans l'espace euclidien en partant de conditions initiales identiques, on obtient en général pour image de  $\vec{X}_B$  deux vecteurs différents  $\vec{X}_{\bar{B}}$  et  $\vec{X}_{\bar{B}'}$ , (fig. 2). Il en résulte que si

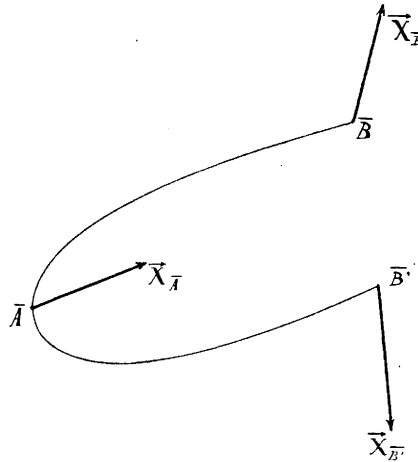


Fig. 2.

l'on développe le contour fermé ou cycle AEBF'A, on obtient après description du cycle un vecteur  $\vec{X}_{\bar{A}}$  différent de  $\vec{X}_A$ . Le déplacement

qu'il faut effectuer, dans l'espace euclidien, pour amener  $\vec{X}_{\bar{A}}$  en coïncidence avec  $\vec{X}_{\bar{A}}$  est dit « associé » au cycle AEBE' A.

Nous allons examiner un cycle infinitésimal dont le déplacement associé joue un rôle important.

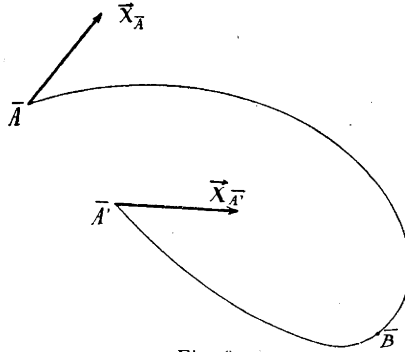


Fig. 3.

Soient  $d$  et  $\delta$  deux symboles de différentiation distincts et échangeables entre eux et  $A, A_1, A_2$ , les points de coordonnées  $x^i, x^i + dx^i, x^i + \delta x^i$ . Si l'on effectue sur  $A$ , le déplacement infinitésimal  $\overline{AA_2}$ , qui permet le passage de  $A$  à  $A_2$ , on obtient un point  $A_3$  de coordonnées

$$x^i + dx^i + \delta(x^i + dx^i) = x^i + dx^i + \delta x^i + \delta dx^i.$$

De même en effectuant sur  $A_2$  le déplacement élémentaire  $\overline{AA_1}$ , on obtient le point de coordonnées

$$x^i + \delta x^i + d(x^i + \delta x^i) = x^i + dx^i + \delta x^i + \delta dx^i,$$

c'est-à-dire le point  $A_3$ .

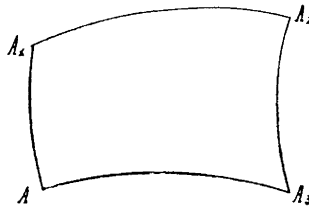


Fig. 4.

Si l'on fait la carte du parallélogramme  $AA_1A_2A_3$ , le déplacement

qui amène  $\vec{X}_{\bar{x}}$  en coïncidence avec  $\vec{X}_{\bar{X}}$  se décompose (5, p. 181) en une translation et une rotation dont les composantes sont données respectivement par

$$\Omega^i = (\Gamma_{k^i h} - \Gamma_{h^i k}) dx^k \delta x^h,$$

$$\Omega_i^j = \delta \omega_i^j(d) - d\omega_i^j(\delta) - \omega_i^h(\delta) \omega_{h^i}(d) - \omega_i^h(d) \omega_{h^i}(\delta)$$

avec

$$\omega_{k^i}(d) = \Gamma_{k^i h} dx^h,$$

et

$$\omega_{k^i}(\delta) = \Gamma_{k^i h} \delta x^h,$$

ou, sous forme encore plus condensée,

$$\Omega^i = [dx^k \omega_{k^i}],$$

$$\Omega_i^j = [\omega_i^k \omega_{k^j}] - (\omega_i^j)'$$

Dans ces dernières formules, les crochets représentent (5, p. 205) des produits extérieurs et  $(\omega_i^j)'$  la dérivée extérieure de la forme  $\omega_i^j$ . La translation est la torsion de l'espace et la rotation sa courbure riemannienne.

**10. COMPOSANTES DE LA TORSION DES ESPACES MÉTRIQUES FONDÉS SUR LA NOTION D'AIRES.** — Dans un espace métrique fondé sur la notion d'aire, à tout cycle infinitésimal d'éléments de contact analogue aux parallélogrammes de la géométrie riemannienne est associé un déplacement euclidien. Ce déplacement se décompose également en une translation et une rotation qui portent respectivement les noms de *torsion* et de *courbure riemannienne de l'espace*.

Les composantes de la torsion et de la courbure de l'espace sont données par les formes différentielles tensorielles

$$\Omega^i = [dx^k \omega_{k^i}],$$

$$\Omega_i^j = [\omega_i^k \omega_{k^j}] - (\omega_i^j)'$$

où

$$\omega_i^j = C_i^{jk} du_k + \Gamma_i^{jh} dx^h.$$

Proposons-nous d'exprimer la torsion au moyen des produits extérieurs.

$$[dx^k \tilde{\omega}_h], \quad [dx^k dx^h].$$

Les composantes covariantes de la différentielle absolue du vecteur

unitaire normal sont :

$$\tilde{\omega}_k = \sqrt{g} d \left[ \frac{u_k}{L} \right] + \left[ \frac{u_k}{L} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^h} - \frac{\sqrt{g}}{L} u_l \Gamma_{k'h}^l \right] dx^h,$$

on en déduit, en tenant compte des relations (B.5),

$$\begin{aligned} \frac{L}{\sqrt{g}} C_i^{jk} \tilde{\omega}_k &= C_i^{jk} du_k - C_i^{jk} u_l \Gamma_{k'h}^l dx^h, \\ \omega_i^j &= \frac{L}{\sqrt{g}} C_i^{jk} \tilde{\omega}_k + \Gamma_{i'h}^* dx^h. \end{aligned}$$

Introduisons le tenseur  $\Lambda^{ijh} = \frac{L}{\sqrt{g}} C^{ijh}$ , symétrique par rapport à ses deux premiers indices. On a

$$\omega_i^j = \Lambda_i^{jk} \tilde{\omega}_k + \Gamma_{i'h}^* dx^h.$$

et

$$(10.1) \quad \Omega^i = \Lambda_{k'h}^i [dx^k \tilde{\omega}^h] + (\Gamma_{k'h}^{*i} - \Gamma_{h'k}^{*i}) dx^k \delta x^h.$$

**11. DÉTERMINATION COMPLÈTE DE LA CONNEXION EUCLIDIENNE (G — E).** — C'est M. Weyl (6, p. 118) qui le premier a défini la connexion de Levi-Civita par l'autoparallélisme des courbes extrémales. Dans ce parallélisme les éléments des lignes qui extrêment l'intégrale  $\int ds$  sont parallèles entre eux (au sens de la géométrie à créer), de même que, dans l'espace ordinaire, tous les éléments d'une droite sont parallèles.

Dans la théorie des espaces de Finsler, M. É. Cartan (1, p. 14) définit le transport parallèle par la condition de priver de torsion toute une catégorie de cycles infinitésimaux. Après avoir montré que les équations différentielles des extrémales sont précisément les équations caractéristiques des géodésiques il fait remarquer : « Il aurait été naturel de s'imposer *a priori* comme condition relative au transport parallèle la propriété des extrémales que leur direction reste toujours parallèle à elle-même. Mais cela n'aurait pas suffi pour déterminer la connexion euclidienne ». Cette propriété donne, en effet,  $n$  conditions alors que la détermination complète des coefficients  $\Gamma_{i'h}^j$  en exige  $\frac{n^3 - n^2}{2}$ .

Le déplacement parallèle qu'attribue M. É. Cartan aux espaces C

est déterminé par un procédé en tout point identique à celui des espaces de Finsler. Mais, contrairement à ce qui a lieu pour ces derniers, une géodésique ne réalise l'extrémum de l'intégrale  $\int ds$  que si, le long de cette ligne, le vecteur  $\vec{A}$  reste équipollent à lui-même.

L'introduction des fonctions tensorielles  $T^{ij}_k$  linéaires en  $\Gamma^{j}_k$  va nous permettre de déterminer complètement une connexion euclidienne (G — E). A cet effet, nous ferons la convention intrinsèque suivante. Considérons une suite linéaire d'éléments de contact, partant d'un élément A et y revenant. Si l'on fait la carte de ce cycle dans l'espace euclidien, la position finale  $\bar{A}$  de A est en général distincte de sa position initiale. Dans le cas où l'on se borne à des cycles infinitésimaux analogues aux parallélogrammes de la géométrie riemannienne, dont les éléments se déduisent de A par transport parallèle, le déplacement à effectuer dans l'espace euclidien pour amener  $\bar{A}$  en coïncidence avec A se décompose en une translation et une rotation qui traduisent respectivement la torsion et la courbure de l'espace. Nous imposerons aux coefficients  $\Gamma^{j}_k$  des conditions telles que les composantes contrevariantes de la torsion de ces cycles soient

$$\Omega^k = -\Lambda_{i,r} l^r l^k l_h [dx^i dx^h].$$

La convention précédente se traduit alors (10.1) par la symétrie des quantités

$$\Lambda_{i,r} l^r l^k l_h + \Gamma^{k}_i l^h$$

vis-à-vis des indices  $i$  et  $h$ , et les coefficients  $\Gamma^{k}_{ih}$  vérifient le système

$$(11.1) \quad \Lambda_{i,r} l^r l^k l_h + \Gamma^{k}_i l^h + C_i^{ks} u_r \Gamma^r_{sh} = \Lambda_{h,r} l^r l^k l_i + \Gamma^{k}_h l^i + C_h^{ks} u_r \Gamma^r_{si},$$

$$(5.10) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}.$$

Il faut exclure de ces équations, parce que identiques,

1° celles obtenues à partir de (11.1) par permutation des indices  $i, h$ , ainsi que celles pour lesquelles  $k = h$ ;

2° les équations tirées de (5.10) par permutation de  $k$  et  $h$ . Il reste ainsi  $n(C_n^2 + n) + nC_n^2 = n^2(n-1) + n^2 = n^3$  équations à  $n^3$  inconnues et la résolution du système (11.1), (5.10) détermine par conséquent, les coefficients  $\Gamma^{j}_k$  de la connexion euclidienne.



Multiplions les équations (11.1) par  $A_k$  et sommons; il vient, d'après (6.4),

$$A_k(\Gamma^{*ikh} - \Gamma^{*hki}) = 0.$$

Multipliant par  $\frac{g}{L^2} u_i u_k$  et sommant, on obtient

$$\frac{g}{L^2} u_i u_k (\Gamma^{*ikh} - \Gamma^{*hki}) = A^{h,r} \frac{I^r}{\sqrt{g}},$$

d'où

$$A^{h,r} \frac{I^r}{\sqrt{g}} = \frac{g}{L^2} u_i u_k (\Gamma^{*ikh} - \Gamma^{*hki}) + \frac{\sqrt{g}}{L} u_i A_k (\Gamma^{*ikh} - \Gamma^{*hki}).$$

Cette relation exprime que les géodésiques de l'espace sont des courbes extrémales de l'intégrale  $\int ds$ .

Ajoutons que dans la connexion euclidienne définie par les équations (11.1) et (3.10)

*Propriété intrinsèque 1* : Le tenseur  $K_{ijk} = \Gamma_{ijk}^* - \Gamma_{kji}^*$  satisfait à la relation

$$(11.2) \quad K_{ijk} + K_{kij} + K_{jki} = 0.$$

*Propriété intrinsèque 2* : La torsion associée à un cycle infinitésimal situé dans l'élément de contact  $(u_i)$  est nulle.

*Propriété intrinsèque 3* : La torsion associée à un cycle non situé dans l'élément  $(u_i)$  est un vecteur normal à l'élément qui sert d'origine au cycle.

**12. RÉSOLUTION ET DISCUSSION DU SYSTÈME (3.10)(11.1).** — La résolution de ce système est intimement liée aux conditions d'existence mêmes des géométries différentielles fondées sur la généralisation de l'expression analytique euclidienne de l'aire. Elle montre que cette généralisation possède des exceptions qui ne se présentent pas pour les espaces fondés en généralisant le  $ds^2$  euclidien. Ce qui n'est pas *sans ouvrir de nouveaux horizons sur les fondements mêmes de la géométrie élémentaire.*

Faisons monter les indices  $i$  et  $h$  des équations (11.1), il vient

$$\Gamma^{ikh} - \Gamma^{hki} + u_r (C^{iks} \Gamma_s^{rh} - C^{hks} \Gamma_s^{ri}) + A^{i,r} l_r l^k l^h - A^{h,r} l^r l^k l^i = 0.$$

ou

$$(11.1) \quad \Gamma^{ikh} - \Gamma^{hki} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_r (\Lambda^{iks} \Gamma_s^{rh} - \Lambda^{hks} \Gamma_s^{ri}) + \Lambda^{i,r} l^r l^k l^h - \Lambda^{h,r} l^r l^k l^i = 0.$$

Posons pour simplifier les calculs :

$$(12.2) \quad \Gamma^{ijl} = \gamma^{ijl} + S^{ijl},$$

où  $\gamma^{ijl}$  est le symbole de Christoffel de première espèce, construit à partir du tenseur fondamental  $g_{ij}$ , en considérant les variables  $u_i$  comme des paramètres.

Les équations (12.1) donnent

$$(12.3) \quad S^{ikh} - S^{hki} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_r (\Lambda^{iks} \Gamma_s^{rh} - \Lambda^{hks} \Gamma_s^{ri}) + \Lambda^{i,r} l^r l^k l^h - \Lambda^{h,r} l^r l^k l^i = 0.$$

Les  $\gamma^{ikh}$  satisfont aux relations

$$\gamma^{ikh} = \gamma^{hki}$$

et

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^h} = -\gamma^{ikh} - \gamma^{khi}.$$

Il en résulte en vertu des relations (3.10),

$$S^{ikh} = -S^{kih}.$$

Remplaçons dans (12.3)  $S^{ikh}$  par  $-S^{kih}$ , effectuons successivement deux permutations circulaires sur les indices  $i, k, h$ . Il vient en ajoutant les trois équations obtenues

$$S^{ikh} + S^{khi} + S^{hik} = 0.$$

et

$$(12.4) \quad S^{hik} = \frac{g}{\sqrt{L}} u_r (\Lambda^{iks} S_s^{rh} - \Lambda^{hks} S_s^{ri}) + \frac{\sqrt{g}}{L} u_r (\Lambda^{iks} \gamma_s^{rh} - \Lambda^{hks} \gamma_s^{ri}) + \Lambda^{i,r} l^r l^k l^h - \Lambda^{h,r} l^r l^k l^i.$$

L'introduction des quantités

$$(12.5) \quad \xi^i = \frac{\sqrt{g}}{L} u_k S^{ki},$$

$$(12.6) \quad \zeta^i = \Lambda_k z^{ki} = \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda_k u_h S^{khi},$$

$$(12.7) \quad \eta^i = \frac{g}{L^2} u_k u_h \Gamma^{ikh} = \frac{\sqrt{g}}{L} u_h \zeta^{ih} + \frac{g}{L^2} u_k u_h \gamma^{ikh},$$

permet de mettre  $s^{ij}$  sous la forme

$$(12.8) \quad S^{ij} = A^{ijh} \zeta_h^i - A^{ljh} \zeta_h^l + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k (\Lambda^{ijh} \gamma_h^{kl} - \Lambda^{ljh} \gamma_h^{ki}) + U l^r (\Lambda^{i,r} l^i - \Lambda^l, l^i).$$

Nous allons déterminer  $\zeta^{ij}$  et  $\zeta^j$  en fonction des paramètres  $\eta^i$ . Au cours de ce calcul, nous nous servirons des relations (3.3), (3.4), (3.5) et (6.4). Remplaçons dans  $\zeta^{ij}$ ,  $S^{ijk}$  par sa valeur tirée de (12.4). On a

$$\begin{aligned} \zeta^{ij} = & \frac{g}{L^2} u_k u_r (\Lambda^{kjh} S_h^{ri} - \Lambda^{ijh} S_h^{rk}) + \frac{g}{L^2} u_k u_r (\Lambda^{kjh} \gamma_h^{ri} - \Lambda^{ijh} \gamma_h^{rk}) \\ & + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k (\Lambda^{k,r} l^r U l^i - \Lambda^{i,r} l^r U l^k), \end{aligned}$$

et en vertu de (3.4), (12.6) et (12.7),

$$(12.9) \quad \zeta^{ij} = \frac{L^j}{\sqrt{g}} \zeta^i - \Lambda^{ijh} \eta_h - U l^r \Lambda^l, r + \frac{L^j}{L} u_k \Lambda_h \gamma^{hkl}.$$

Portons cette valeur de  $\zeta^{ij}$  dans (12.6). On en déduit

$$(12.10) \quad \zeta^i = A_k \zeta^{ki} = \frac{L}{\sqrt{g}} \Lambda_l \zeta^L - \Lambda_l \Lambda^{lih} \eta_h - U l^r \Lambda_l \Lambda^l, r + \frac{L^i}{L} \Lambda_l u_k \Lambda_h \gamma^{hkl}.$$

La multiplication de l'avant-dernière relation par  $A_j$  donne, d'après (6.4),

$$(12.11) \quad A_j \zeta^{ij} + \Lambda_k \Lambda^{ikh} \eta_h = 0$$

et, par conséquent,

$$(12.12) \quad \zeta^i = - \left( \Lambda_k \Lambda^{kih} + \frac{L^i}{\sqrt{g}} \Lambda_k \Lambda_r \Lambda^{krh} \right) \eta_h - U l^r \Lambda_l \Lambda^l, r + \frac{L^i}{L} u_k \Lambda_l \Lambda_h \gamma^{hkl}.$$

De (12.7), il vient, en tenant compte de (12.8),

$$\begin{aligned} (12.13) \quad \eta^i - \frac{g}{L^2} u_i u_j \gamma^{lij} - \zeta^i + \frac{L^i}{L} u_k \zeta^k + l^r \Lambda^l, r \\ = \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Lambda^h \gamma_h^{kl} - \frac{\sqrt{g}}{L^2} L^l u_r \Lambda_h u_k \gamma^{hkr}. \end{aligned}$$

En substituant la valeur de  $l^r \Lambda^l, r$  tirée de (12.13) dans (12.12),

il vient,

$$\xi^i = \frac{-L^i}{\sqrt{g}} \Lambda_l \xi^l - \left( \Lambda_l \Lambda^{lh} + \frac{L^j}{\sqrt{g}} \Lambda_r \Lambda_l \Lambda^{lrh} - \frac{L^j}{\sqrt{g}} \Lambda^h \right) \eta_h - \frac{\sqrt{g}}{L^2} L^i \Lambda_l u_r u_k \gamma^{lrk} = 0.$$

Compte tenu de (12.11), on a finalement

$$(12.14) \quad \xi^i = - \left( \Lambda_l \Lambda^{lh} - \frac{L^j}{\sqrt{g}} \Lambda^h \right) \eta_h - \frac{\sqrt{g}}{L^2} L^i \Lambda_l u_k u_r \gamma^{lkr}.$$

Remplaçons dans la formule (12.9)  $l^r \Lambda^l{}_r$  par sa valeur tirée de (12.13), nous obtenons

$$\xi^{ij} + \Lambda^{ih} \eta_h - \frac{L^j}{\sqrt{g}} \eta^i - \frac{L^j L^i}{L^2} \Lambda_h u_r u_k \gamma^{hkr} + \frac{\sqrt{g}}{L^2} L^j u_r u_k \gamma^{ikr} - \frac{L^i}{\sqrt{g}} \frac{L^j}{L} u_k \xi^k = 0.$$

Multiplions (12.14) par  $u_i$  et sommons, il vient

$$u_i \xi^i - \frac{L}{\sqrt{g}} \Lambda^h \eta_h + \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda_l u_r u_k \gamma^{lrk} = 0$$

et

$$(12.15) \quad \xi^{ij} + \left( \Lambda^{ih} - \frac{L^j L^i}{g} \Lambda^h - \frac{L^j}{\sqrt{g}} g^{ih} \right) \eta_h + \frac{\sqrt{g}}{L^2} L^j u_r u_k \gamma^{irk} = 0.$$

$\xi^i$ ,  $\xi^{ij}$ , ainsi que  $S^{ij}$  s'expriment donc, au moyen des  $n$  paramètres  $\eta_{ih}$  liés par la relation

$$L^h \eta_h = \frac{g^2}{L^3} u_i u_j u_k \gamma^{ijk},$$

obtenue en multipliant (12.7) par  $u_i$  et en sommant.

Il nous reste à déterminer les  $n$  quantités  $\eta_{ih}$ . Explicitons les quantités  $l^r \Lambda^l{}_r$ ; d'après (7.5) et (6.1), on a

$$l^r \Lambda^l{}_r = l^r \left[ \frac{\partial \Lambda^l}{\partial x^r} + \frac{\partial \Lambda^l}{\partial u_s} u_k \Gamma_s^k{}_r + \Lambda^k \Gamma_k^l{}_r \right]$$

ou

$$l^r \Lambda^l{}_r = l^r \frac{\partial \Lambda^l}{\partial x^r} + \frac{\sqrt{g}}{L} \frac{\partial \Lambda^l}{\partial u_s} u_k u_r \Gamma_s^k{}_r + \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda_k u_r \Gamma^{klr} + \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda_k u_r C^{klh} u_s \Gamma_h^{sr},$$

et en vertu de (12.2), (12.5),

$$\begin{aligned} l^r \Lambda^l{}_r &= l^r \frac{\partial \Lambda^l}{\partial x^r} + \frac{\partial \Lambda^l}{\partial u_s} u_r \xi_s^r + \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda_k u_r S^{klr} + \Lambda_k u_r C^{klh} \xi_h^r + \frac{\sqrt{g}}{L} \frac{\partial \Lambda^l}{\partial u_s} u_k u_r \gamma_s^{kr} \\ &\quad + \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda_k u_r \gamma^{klr} + \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda_k u_r C^{klh} u_s \gamma_h^{sr}. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$u_r \zeta^{sr} = \frac{L}{\sqrt{g}} \eta^s - \frac{\sqrt{g}}{L} u_k u_h \gamma^{skh},$$

il en résulte

$$(12.16) \quad l' A^l{}_{,r} = l' \frac{\partial A^l}{\partial x^r} + A^{ls} \eta_s + \Lambda_k \Lambda^{klh} \eta_h + \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda_k u_r \gamma^{klr} + \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda_k u_r S^{klr}.$$

De (12.8), on déduit en multipliant par  $A_l$  et  $u_j$ ,

$$A_l u_j S^{lij} - A_l u_j \Lambda^{ijh} \zeta_h^l - \frac{L}{\sqrt{g}} l' A_l \eta^l + \frac{L}{\sqrt{g}} l' A_l \zeta^l + \frac{\sqrt{g}}{L} l' A_l u_k u_h \gamma^{lkh} = 0,$$

et compte tenu de (12.11), (12.15),

$$A_l u_j S^{lij} - \frac{L}{g} l' \Lambda^l \eta_l + \frac{L}{L} A_l u_k u_h \gamma^{lkh} = 0,$$

d'où

$$(12.17) \quad l' A^l{}_{,r} = l' \frac{\partial A^l}{\partial x^r} + A^{ls} \eta_s + \Lambda_k \Lambda^{klh} \eta_h + \frac{L'}{\sqrt{g}} \Lambda^h \eta_h + \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda_k u_r \gamma^{klr} \\ - \frac{\sqrt{g}}{L^2} L' \Lambda_r u_k u_h \gamma^{rkh}.$$

D'autre part de (12.13), il vient

$$l' A^l{}_{,r} = \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Lambda^h \gamma^{hkl} - \frac{\sqrt{g}}{L^2} L' u_i \Lambda_h u_k \gamma^{hkl} + \frac{g}{L^2} u_i u_j \gamma^{lij} - \eta^l + \zeta^l - \frac{L'}{L} u_k \zeta^k.$$

En se reportant à (12.14), on voit que  $l' A^l{}_{,r}$  peut se mettre sous la forme

$$(12.18) \quad l' A^l{}_{,r} = \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Lambda^h \gamma^{hkl} - \frac{\sqrt{g}}{L^2} L' u_i \Lambda_h u_k \gamma^{hkl} + \frac{g}{L^2} u_i u_j \gamma^{lij} - \Lambda_j \Lambda^{ilh} \eta_h - \eta^l.$$

En rapprochant les expressions obtenues ci-dessus pour les quantités  $l' A^l{}_{,r}$ , nous obtiendrons la relation remarquable

$$(12.19) \quad K^{lh} \eta_h = \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Lambda_h \gamma^{hkl} - \frac{\sqrt{g}}{L} \Lambda_k u_r \gamma^{klr} + \frac{g}{L^2} u_i u_j \gamma^{lij} - \frac{L'}{\sqrt{g}} \frac{\partial A^l}{\partial x^r},$$

avec

$$(12.20) \quad K^{lh} = \Lambda^l{}_{,h} + 2 \Lambda_k \Lambda^{klh} + \frac{L'}{\sqrt{g}} \Lambda^h + g^{lh}.$$

Cette équation entraîne, en plus de ceux qui ont été signalés au

début de ce paragraphe, des développements géométriques (§ 12, 13, 14) étendus et intéressants. Elle conduit notamment (§ 15) à classer les espaces métriques fondés sur la notion d'aire en diverses catégories suivant le rang de la matrice  $|K^{ij}|$ .

Dans le cas général des espaces réguliers (discriminant  $|K^{ij}| \neq 0$ ) les  $n$  quantités  $\eta_h$  sont complètement déterminées par les  $n$  relations (12.19) et le système d'équations (5.10), (11.1) admet une solution unique.

*Le système différentiel*

$$\tilde{\omega}_i = 0$$

caractérise les courbes extrémales et les quantités  $\Gamma_i^j{}_k$  définissent une connexion euclidienne (G-F).

La formule (12.20) a le défaut d'être dissymétrique. Les deux relations

$$\Lambda_k \Lambda^{kjh} = \Lambda^j \Lambda^h - \frac{L}{4g^{\frac{3}{2}}} \Lambda_k \frac{\partial^3 L^2}{\partial u_i \partial u_h \partial u_k}$$

et

$$\Lambda^{i:h} = \frac{L^2}{g\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial u_i \partial u_h} + \frac{L^h}{\sqrt{g}} \Lambda^i - 2\Lambda^i \Lambda^h$$

conduisent à la formule parfaitement symétrique

$$(12.21) \quad K^{jh} = \frac{L^2}{g\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial u_i \partial u_h} + \frac{L^h}{\sqrt{g}} \Lambda^i - \Lambda^i \Lambda^h + \frac{L^i}{\sqrt{g}} \Lambda^h - \frac{L}{4g^{\frac{3}{2}}} \Lambda_k \frac{\partial L^2}{\partial u_i \partial u_h \partial u_k} + H^{jh},$$

où

$$H^{jh} = g^{jh} + \Lambda_k \Lambda^{kjh}$$

est le tenseur symétrique introduit (2, p. 21) par M. É. Cartan.

Les résultats précédents permettent de compléter largement le théorème de M. É. Cartan relatif à l'équivalence des intégrales multiples, par l'introduction de toute une catégorie nouvelle d'intégrales et de l'énoncer sous la forme suivante :

*Toute intégrale multiple, pour laquelle un des discriminants  $|H^{ij}|$  ou  $|K^{ij}|$  est différent de zéro, admet un groupe de transformations ponctuelles dépendant au maximum de  $\frac{n(n+1)}{2}$  paramètres.*

On peut maintenant, dans le cas général, vérifier la relation

$$u_i \tilde{\omega}^i = 0,$$

qui exprime que le vecteur unitaire normal est perpendiculaire à sa différentielle absolue. On a, en effet,

$$u_i \tilde{\omega}^i = u_i \frac{dL^i}{\sqrt{g}} + \left( L \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial x^h} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k u_i \gamma^{ki}_h - u_i \tilde{z}^i_h \right) dx^h.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad u_k u_i \gamma^{ki}_h &= \frac{1}{2} u_k u_i g^{kr} g^{is} \left[ \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{sh}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rh}}{\partial x^s} \right] \\ &= -\frac{1}{2} u_i u_k \frac{\partial g^{ki}}{\partial x^h} - \frac{1}{2} u_k g^{kr} g_{sh} \frac{\partial (g^{is} u_i)}{\partial x^r} + \frac{1}{2} u_i g^{is} g_{rh} \frac{\partial (u_k g^{kr})}{\partial x^s} \\ &= -\frac{1}{2} u_i u_k \frac{\partial g^{ki}}{\partial x^h} = -\frac{L}{g} \frac{\partial L}{\partial x^h} + \frac{L^2}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^h}; \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad u_i \tilde{z}^i_h = \sqrt{g} u_i u_k S^{ik}_h = 0;$$

$$3^\circ \quad \frac{1}{\sqrt{g}} u_i dL^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial x^h} dx^h;$$

par suite,

$$(12.22) \quad u_i \tilde{\omega}^i = 0.$$

**15. LES ESPACES SINGULIERS.** — Les équations (3.10) et (11.1) ne déterminent complètement la connexion euclidienne que dans le cas où le discriminant  $|K^{ij}| \neq 0$ .  $K^{ij}$  étant le tenseur

$$\Lambda^{ij} + 2\Lambda_k \Lambda^{ki} + \frac{L^i}{\sqrt{g}} \Lambda^j + g^{ij}.$$

Dans le cas où  $|K^{ij}| = 0$  l'espace est dit *singulier*. Il est dit *totalelement singulier* si le déterminant  $|K^{ij}|$  est de rang 1. C'est ce qui a lieu pour l'espace harmonique fondé sur l'intégrale double  $\iint (p^2 + q^2) dx dy$ .

Les espaces totalelement singuliers jouent un rôle important dans la théorie où leur caractère analytique résulte du théorème suivant :

*La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace soit totalelement singulier est que  $K^{ij} = \frac{L^i L^j}{g}$ .*

On peut rapprocher ce résultat de celui obtenu par M. É. Cartan dans son Mémoire sur les espaces métriques fondés sur la notion d'aire (p. 21), où il trouve une condition analogue pour la singularité totale dans sa connexion.

Pour établir cette proposition, observons que les quantités  $K^{ij}$  vérifient les relations

$$K^{ih}u_h = g^{ih}u_h + \frac{L^i}{\sqrt{g}}A^h u_h + 2\Lambda_k A^{kih}u_h + A^{i;h}u_h = g^{ih}u_h$$

et

$$\frac{g}{L^2}K^{ij}u_i u_j = \frac{g}{L^2}g^{ij}u_i u_j = \frac{1}{2L^2} \frac{\partial L^2}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j = 1.$$

Considérons alors la forme quadratique  $K^{ij}\alpha_i\alpha_j$ , où les  $\alpha_i$  sont  $n$  variables indépendantes. On sait (7, p. 98) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit décomposable en une somme de  $\mu$  carrés est que son discriminant soit de rang  $\mu$ . Si la matrice  $|K^{ij}|$  est de rang 1,  $K^{ij}\alpha_i\alpha_j$  peut se mettre sous la forme  $(\lambda^i\alpha_i)^2$  et

$$K^{ij} = \lambda^i\lambda^j.$$

Multiplions cette dernière relation par  $\frac{g}{L^2}u_i u_j$ , il vient

$$\frac{g}{L^2}K^{ij}u_i u_j = \left[ \frac{\sqrt{g}}{L}u_i\lambda^i \right]^2 = 1$$

et

$$\lambda^i u_i = \pm \frac{L}{\sqrt{g}}.$$

On en déduit que

$$u_i K^{ij} = (u_i \lambda^i) \lambda^j = \pm \frac{L}{\sqrt{g}} \lambda^j = u_h g^{jh} = \frac{1}{2g} u_h \frac{\partial L^2}{\partial u_j \partial u_h} = \frac{1}{2g} \frac{\partial L^2}{\partial u_j} = \frac{L L^j}{g},$$

d'où il résulte

$$\lambda^j = \pm \frac{L^j}{\sqrt{g}},$$

et de là, ce qu'il fallait démontrer,

$$K^{ij} = \frac{L^i L^j}{g}.$$

La condition est donc nécessaire. Elle est aussi suffisante car, si

$$K^{ij} = \frac{L^i L^j}{g},$$



la matrice  $|K^{ij}|$  est évidemment de rang 1, les quantités  $K^{ij}$  ne pouvant être toutes nulles en vertu de la relation

$$K^{ih} u_h = g^{ih} u_h.$$

La condition pour que l'espace soit *totalelement singulier* a, comme dans la connexion euclidienne de M. É. Cartan, une *signification géométrique* qu'il est aisé de mettre en évidence.

Soit  $\vec{X}$  un vecteur quelconque de composantes contrevariantes fixes et  $\vec{DX}$  sa différentielle absolue lorsque son élément d'appui tourne infiniment peu autour de son centre.

On a, en représentant par  $\vec{\Omega}$  la différentielle absolue du vecteur unitaire normal,

$$\vec{X} \vec{DA} = (\Lambda^{kih} + A_l \Lambda^{lkh}) X_k \tilde{\omega}_h$$

et

$$\vec{\Omega} \vec{X} = g^{kh} X_k \tilde{\omega}_h,$$

ainsi que

$$\vec{A} \vec{DX} = \Lambda_i X_k C^{ikh} du_h.$$

Remplaçons dans cette dernière relation  $du_h$  par sa valeur tirée de

$$\tilde{\omega}_h = \sqrt{g} d \left[ \frac{u_k}{L} \right].$$

Il vient

$$\vec{A} \vec{DX} = A_i X_k A^{ikh} \tilde{\omega}_h.$$

Désignons par  $\vec{\Delta}$  le vecteur normal à l'élément  $u_i$  et de longueur  $\frac{1}{2} \frac{dg}{g}$ .

On a, d'après

$$\frac{1}{2} \frac{dg}{g} = A^i \tilde{\omega}_i,$$

$$\vec{\Delta} \vec{X} = \frac{1}{2} \frac{dg}{g} \frac{L^l}{\sqrt{g}} X_l = \frac{L^l}{\sqrt{g}} \Lambda^h X_l \tilde{\omega}_h$$

et

$$\vec{A} \vec{DX} + \vec{X} (\vec{DA} + \vec{\Omega} + \vec{\Delta}) = K^{lh} X_h \tilde{\omega}_l.$$

Les quantités  $\tilde{\omega}_h$  étant liées (12.22) par la relation

$$L^h \tilde{\omega}_h = 0,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$\vec{\Lambda} \vec{D}\vec{X} + \vec{X}(\vec{D}\vec{\Lambda} + \vec{\Omega} + \vec{\Delta}) = 0,$$

s'exprime par

$$K^{lh} X_l = \rho' L^h.$$

On en déduit

$$(13.1) \quad K^{lh} = \rho' L^h.$$

Multiplions (13.1) par  $u_h$  et sommions

$$K^{lh} u_h = g^{lh} u_h = \frac{1}{g} L L' = \rho' L,$$

d'où

$$\rho' = \frac{L'}{\sqrt{g}} \quad \text{et} \quad K^{lh} = \frac{L' L^h}{g}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace soit totalement singulier est que l'on ait identiquement

$$\vec{\Lambda} \vec{D}\vec{X} + \vec{X}(\vec{D}\vec{\Lambda} + \vec{\Omega} + \vec{\Delta}) = 0.$$

**14. LES EXTRÉMALES DES ESPACES C.** — Bien qu'invariantes par un changement de connexion euclidienne, les équations caractéristiques des courbes extrémales de l'intégrale

$$I = \int ds = \int \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

revêtent des formes analytiques diverses. Nous avons déjà signalé la forme (4.2) de M. É. Cartan

$$(4.2) \quad DA^i + \left( \Pi^{ik} + \frac{L^i}{\sqrt{g}} A^k \right) \tilde{\omega}_k = 0.$$

La connexion euclidienne (G-E) conduit à la nouvelle forme, particulièrement simple, de ces équations :

$$(14.1) \quad K^{ij} \tilde{\omega}_j = 0.$$

Mais ceci n'est pas seulement une question d'abréviation, car (14.1) permet d'étudier très simplement les solutions de (4.2).

Les courbes extrémales sont, dans le cas où la matrice  $|K^{ij}|$  est différente de zéro, définies par

$$\frac{\tilde{\omega}_j}{ds} = 0,$$

avec

$$\frac{\tilde{\omega}_j}{ds} = \frac{\sqrt{g}}{L} \frac{d}{ds} \left[ \frac{u_i}{L} \right] + \left[ \frac{u_i}{L} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^h} - \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Gamma_i^{kh} \right] \frac{dx^h}{ds},$$

où les  $n$  coordonnées homogènes  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , qui définissent l'orientation de l'élément de contact, sont les fonctions

$$u_k = u_k \left( x^i, \frac{dx^i}{ds} \right),$$

tirées du système (A. 1)

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{L^i}{\sqrt{g}}.$$

Les équations des lignes extrémales, étant du second ordre, doivent s'intégrer, au moins théoriquement, avec  $2n$  constantes arbitraires. On doit pouvoir se servir de celles-ci pour faire passer une extrémale par deux points donnés de l'espace ou par un seul point, mais avec une direction donnée en ce point. De là :

*La condition nécessaire et suffisante, pour que chaque élément de contact  $(u_i)$  détermine une extrémale et une seule tangente au vecteur unitaire normal, est que la matrice*

$$|K^{ij}| \neq 0.$$

Si ce discriminant est de rang  $p > 1$ , le système (14.1) admet [7, p. 52] une  $\infty^{n-p}$  solutions, y comprise la solution zéro. Il passe par chaque élément de contact une  $\infty^{n-p}$  courbes extrémales, normales à  $(u_i)$ , qui constituent une variété  $V_{n-p+1}$  dont l'étude peut être intéressante.

**15. ESPACES A TENSEUR  $A^{ijk} = 0$ .** — Un espace d'éléments de contact (au sens de Lie) à connexion euclidienne est défini analytiquement par la donnée de :

## 1° La métrique

$$(15.1) \quad ds^2 = g_{ij}(x^k, u_k) dx^i dx^j$$

au voisinage d'un élément de contact. Les coefficients  $g_{ij}$  sont des fonctions des coordonnées de l'élément. Ces dernières comprennent les coordonnées  $x^i$  du centre et les coordonnées homogènes  $u_i$  définissant l'orientation de l'élément.

2° La différentielle absolue d'un vecteur quand son élément d'appui et ses composantes varient infiniment peu, différentielle de la forme

$$DX^i = dX^i + X^k C_k^{ih} du_h + X^k \Gamma_k^{ih} dx^h.$$

Le déplacement parallèle étant tel qu'il conserve les longueurs, on a les conditions

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_h} = g_{ik} C_j^{kh} + g_{jk} C_i^{kh} = C_{jh}^i + C_{ij}^h$$

et

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = g_{ik} \Gamma_j^{kh} + g_{jk} \Gamma_i^{kh} = \Gamma_{jh}^i + \Gamma_{ij}^h$$

que doivent vérifier les coefficients  $C_k^{ih}$  et  $\Gamma_k^{ih}$ , pour que l'espace soit à connexion euclidienne.

M. E. Cartan a indiqué [2, p. 8] comment les données précédentes permettent d'intégrer dans un seul et même espace euclidien, une suite continue d'éléments de contact. Dans le cas particulier des espaces à tenseur  $A^{ijk} = 0$ , on peut [5, p. 106] préciser davantage cette opération en montrant l'existence d'une *métrique euclidienne de raccordement* le long d'une courbe  $\Gamma$  donnée. La mesure de la longueur d'une courbe  $\bar{\Gamma}$  infiniment voisine de  $\Gamma$ , soit dans la métrique riemannienne, soit dans la métrique euclidienne de raccordement, donne le même résultat aux infiniment petits du second ordre près. De là résulte l'équivalence de la définition des courbes extrémales et de la définition des courbes auto-parallèles.

La coïncidence des géodésiques et des extrémales dans la connexion euclidienne (G-E) entraîne-t-elle l'existence d'une métrique euclidienne de raccordement le long d'une ligne  $\Gamma$  donnée? En d'autres termes, y a-t-il parmi les cartes de  $\Gamma$  dans l'espace ordinaire une

métrique euclidienne, telle que la mesure de la longueur d'une courbe infiniment voisine  $\bar{\Gamma}$ , soit dans la carte, soit dans l'espace de Cartan, conduise à un résultat identique aux infiniment petits du second ordre près?

**THÉOREME.** — *Les espaces riemanniens à connexion euclidienne de Levi-Civita sont les seuls espaces métriques fondés sur la notion d'aire qui admettent une métrique euclidienne de raccordement le long d'une ligne quelconque.*

Pour étudier les variations de la longueur d'une courbe quand on change la métrique, considérons une représentation paramétrique de  $\Gamma$ . Posons

$$x^i = \varphi^i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r),$$

$t$  désignant la nouvelle variable et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  des paramètres variationnels indépendants.

La déformée  $\bar{\Gamma}$  de  $\Gamma$  a pour équations paramétriques

$$\bar{x}^i = \varphi^i(t, \alpha_1 + \delta\alpha_1, \alpha_2 + \delta\alpha_2, \dots, \alpha_r + \delta\alpha_r)$$

et les coordonnées homogènes  $(u_i)$  et  $(\bar{u}_i)$  des éléments de contact de  $\Gamma$  et  $\bar{\Gamma}$  vérifient les deux systèmes d'équations

$$\frac{L^i(x^k, u_k)}{\sqrt{g(x^k, u_k)}} = \frac{x^i}{\sqrt{g_{rs}(x^k, u_k) x^r x^s}}$$

et

$$\frac{L^i(\bar{x}^k, \bar{u}_k)}{\sqrt{g(\bar{x}^k, \bar{u}_k)}} = \frac{\bar{x}^i}{\sqrt{g_{rs}(\bar{x}^k, \bar{u}_k) \bar{x}^r \bar{x}^s}}.$$

Soit,

$$(15.2) \quad ds^2 = \bar{g}_{ij}(x^k) dx^i dx^j$$

la métrique euclidienne de raccordement. La courbe  $\Gamma$  ayant même longueur dans (15.1) et (15.2), on a

$$\bar{g}_{ij} \equiv g_{ij}.$$

Le symbole  $\equiv$  indique que ces deux tenseurs fondamentaux diffèrent

de quantités  $\gamma_{ij}$ , liées par la relation

$$\gamma_{ij}x^i x^j = 0.$$

L'élément linéaire de  $\bar{\Gamma}$  est dans la métrique euclidienne (13.2)

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}(x^k + \delta x^k) \bar{x}^i \bar{x}^j dt^2 = \bar{g}_{ij}x^i x^j dt^2 + \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^k} \bar{x}^i \bar{x}^j \delta x^k dt^2.$$

Remarquons que

$$(15.3) \quad \bar{x}^i = \frac{dx^i}{dt} = x^i + \frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial x^h} \delta x^h,$$

d'où

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}(x^k, u_k) x^i x^j dt^2 + 2\bar{g}_{ij}(x^k, u_k) x^i \frac{\partial^2 x^j}{\partial t \partial x^h} \delta x^h dt^2 + \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^k} x^i x^j \delta x^k dt^2.$$

Dans la métrique de Cartan, l'élément linéaire de  $\bar{\Gamma}$  s'obtient à partir de (13.1), en substituant à  $(x^k)(u_k)$  les grandeurs  $(\bar{x}^k)$  et  $(\bar{u}_k)$ . En effectuant les calculs, il vient

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}(\bar{x}^k, \bar{u}_k) \bar{x}^i \bar{x}^j dt^2 = \bar{g}_{ij}(x^k, u_k) \bar{x}^i \bar{x}^j dt^2 + \frac{\partial \bar{g}_{ij}(x^k, u_k)}{\partial x^k} \delta x^k \bar{x}^i \bar{x}^j dt^2 + \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial u_k} \delta \bar{u}_k \bar{x}^i \bar{x}^j dt^2.$$

Grâce à (13.3), (3.4) et (3.8), on trouve, à des infiniment petits près d'ordre supérieur au premier,

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}(x^k, u_k) x^i x^j dt^2 + 2\bar{g}_{ij}(x^k, u_k) x^i \frac{\partial^2 x^j}{\partial t \partial x^h} \delta x^h dt^2 + \frac{\partial \bar{g}_{ij}(x^k, u_k)}{\partial x^k} x^i x^j \delta x^k dt^2 + 2\Lambda_{ij}^k \frac{L^r}{\sqrt{g}} \frac{\partial \bar{g}_{rk}}{\partial x^h} x^i x^j \delta x^h dt^2 + \frac{2\Lambda_{ijh}}{\sqrt{g_{rs}x^r x^s}} \frac{\partial^2 x^h}{\partial t \partial x^k} x^i x^j \delta x^k dt^2,$$

et les fonctions  $\bar{g}_{ij}(x^k)$  satisfont à la condition

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^k} x^i x^j \delta x^k = \frac{\partial \bar{g}_{ij}(x^k, u_k)}{\partial x^k} x^i x^j \delta x^k + 2\Lambda_{ij}^k \frac{L^r}{\sqrt{g}} \frac{\partial \bar{g}_{rk}}{\partial x^h} x^i x^j \delta x^h + \frac{2\Lambda_{ijh}}{\sqrt{g_{rs}x^r x^s}} \frac{\partial^2 x^h}{\partial t \partial x^k} x^i x^j \delta x^k.$$

La relation précédente ne peut subsister quelles que soient les  $\delta x^i$  que si l'on a, pour chaque valeur des  $x^i$ ,

$$(15.4) \quad \Lambda^{ik} = 0.$$

L'existence de la métrique euclidienne de raccordement (15.2) entraîne la coïncidence des courbes auto-parallèles et des extrémales de l'intégrale  $\int ds$ . La connexion euclidienne des espaces à tenseur  $A^{ijk} = 0$ , qui sont [2, p. 20] les espaces riemanniens, doit vérifier les conditions générales (8.5)

$$A^k{}_h \frac{L^h}{\sqrt{g}} = \frac{g}{L^2} u_i u_j (\Gamma^{*ijk} - \Gamma^{*kji}) + \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \Lambda_j (\Gamma^{*ijk} - \Gamma^{*kji}).$$

Conformément à (15.4), (8.5) se réduit à

$$\Gamma^{ijk} = \Gamma^{kji},$$

d'où : Les espaces riemanniens sont les seuls espaces métriques fondés sur la notion d'aire qui admettent une métrique euclidienne de raccordement le long d'une ligne quelconque.

Il en résulte un procédé particulièrement simple de discrimination des espaces C, en espaces à tenseur  $A^{ijk}$  nul et en espaces à tenseur  $A^{ijk}$  différent de zéro. *Si un observateur à mentalité euclidienne se déplace au voisinage immédiat d'une courbe arbitraire, en effectuant des mesures dont la précision ne dépasse pas le premier ordre, il se trouve dans l'un ou l'autre de ces espaces suivant qu'il s'imagine ou non être dans un espace euclidien.*

## 16. UNICITÉ DE LA CONNEXION EUCLIDIENNE (G-E).

**THÉORÈME.** — *Dans un espace métrique, deux connexions euclidiennes aux mêmes lignes géodésiques sont identiques.*

Nous ferons la démonstration pour un espace d'éléments de contact ; elle s'applique à l'espace ponctuel en négligeant dans nos formules les coefficients  $C_k{}^{ih}$ .

*Démonstration.* — Soient  $\Gamma_{i'k}{}^{j'}$  et  $\bar{\Gamma}_{i'k}{}^{j'}$  les paramètres de deux connexions euclidiennes. Je dis que

$$(16.1) \quad \Gamma_{i'k}{}^{j'} = \bar{\Gamma}_{i'k}{}^{j'}.$$

Pour justifier (16.1), partons de l'expression analytique de la différentielle absolue d'un vecteur de composantes contrevariantes  $X^i$ .

On a, avec les notations habituelles,

$$\begin{aligned}DX^i &= dX^i + X^k C_k^{ih} du_h + X^k \Gamma_k^{ih} dx^h, \\ \bar{D}X^i &= dX^i + X^k \bar{C}_k^{ih} du_h + X^k \bar{\Gamma}_k^{ih} dx^h.\end{aligned}$$

Dès lors, la différence

$$\bar{D}X^i - DX^i = (\bar{\Gamma}_k^{ih} - \Gamma_k^{ih}) X^k dx^h$$

est un vecteur contrevariant quels que soient les vecteurs  $X^h$ ,  $dx^h$ . De là, le caractère tensoriel des grandeurs à trois indices

$$B_{kh}^i = \bar{\Gamma}_k^{ih} - \Gamma_k^{ih}.$$

D'autre part, de la coïncidence des courbes géodésiques

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^i}{dt^2} + C_k^{ih} \frac{du_h}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \Gamma_k^{ih} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^h}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \bar{C}_k^{ih} \frac{du_h}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \bar{\Gamma}_k^{ih} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^h}{dt} &= 0\end{aligned}$$

associées aux systèmes de paramètres  $\Gamma$  et  $\bar{\Gamma}$ , il résulte que

$$(\bar{\Gamma}_k^{ih} - \Gamma_k^{ih}) \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^k}{dt} = B_{kh}^i \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Dans ces conditions [8, p. 59],

$$(16.2) \quad B_{kh}^i + B_{hk}^i = p_k \delta_h^i + p_h \delta_k^i,$$

où  $p_k$  représente un vecteur arbitraire d'élément d'appui  $(x^i, u_i)$ .

En vertu des secondes relations (5.2),

$$\begin{aligned}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} &= -\Gamma^{ij}_k - \Gamma^{ik}_j, \\ \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} &= -\bar{\Gamma}^{ij}_k - \bar{\Gamma}^{ik}_j,\end{aligned}$$

qui assurent la conservation des longueurs par déplacement parallèle, on trouve successivement

$$(16.3) \quad \begin{aligned}(\bar{\Gamma}^{ik} - \Gamma^{ik}) + (\bar{\Gamma}^{ki} - \Gamma^{ki}) &= 0, \\ B^{ik} + B^{ki} &= 0.\end{aligned}$$



Reportons-nous à la formule (16.2); nous aurons

$$p_k = 0.$$

d'où, la relation remarquable,

$$\bar{\Gamma}_{k'h} - \Gamma_{k'h} = B_{kh} = 0,$$

qui exprime l'identité des deux connexions euclidiennes.

En particulier, *dans un espace de Cartan, la connexion (G-E) définie par le système (11.1), (3.10) est unique. Il en est de même dans l'espace de Riemann pour la connexion (G-E) de Levi-Civita, et dans l'espace de Finsler pour la connexion (G-E) de Cartan.*

### CHAPITRE III.

#### La méthode du repère mobile.

Le rôle joué par la méthode du repère mobile, d'une part, dans les géométries différentielles généralisées et, d'autre part, dans la théorie des groupes continus de transformations, marque le contact étroit existant entre ces deux disciplines.

Toute la géométrie différentielle des espaces de Klein est ainsi subordonnée aux propriétés intrinsèques des conditions de compatibilité de Darboux-Maurer-Cartan, auxquelles sont soumises les composantes relatives du déplacement infinitésimal du repère mobile.

La différence entre une géométrie kleinéenne et les géométries non-holonomes adjointes apparaît par le fait que les équations de structure ne sont plus vérifiées. Elles doivent être amendées par l'adjonction dans les premiers membres de termes complémentaires qui traduisent la courbure et la torsion de l'espace.

Ce second chapitre a pour but d'adapter la méthode du repère mobile aux espaces C à connexion (G-E), de déterminer les équations de structure et d'en dégager les propriétés caractéristiques de la géométrie fondée sur la notion d'aire.

**17. LA FAMILLE DES REPÈRES TRIRECTANGLES ADJOINTE A L'ÉLÉMENT GÉNÉRATEUR.** — Considérons au point origine A de chaque élément de

contact  $(x^i, u_i)$  la famille des trièdres trirectangles dextrogyres  $A \overset{\rightarrow}{e}_1 \overset{\rightarrow}{e}_2 \overset{\rightarrow}{e}_3$  qui possède les propriétés suivantes : les vecteurs orthogonaux  $\overset{\rightarrow}{e}_1, \overset{\rightarrow}{e}_2, \overset{\rightarrow}{e}_3$  sont de longueur 1;  $\overset{\rightarrow}{e}_2$  et  $\overset{\rightarrow}{e}_1$  sont tangents à l'élément,  $\overset{\rightarrow}{e}_3$  est le vecteur unitaire normal.

Les composantes relatives du déplacement infinitésimal d'un de ces trièdres introduisent douze formes différentielles  $\omega_i$ . Les trois premières sont les coordonnées par rapport au trièdre  $A \overset{\rightarrow}{e}_1 \overset{\rightarrow}{e}_2 \overset{\rightarrow}{e}_3$  de l'origine du trièdre infiniment voisin. Les autres définissent les différentielles absolues  $D \overset{\rightarrow}{e}_i$  des vecteurs unitaires  $\overset{\rightarrow}{e}_1, \overset{\rightarrow}{e}_2, \overset{\rightarrow}{e}_3$ ,

$$\begin{aligned} D \overset{\rightarrow}{e}_1 &= \omega_4 \overset{\rightarrow}{e}_1 + \omega_5 \overset{\rightarrow}{e}_2 + \omega_6 \overset{\rightarrow}{e}_3, \\ D \overset{\rightarrow}{e}_2 &= \omega_7 \overset{\rightarrow}{e}_1 + \omega_8 \overset{\rightarrow}{e}_2 + \omega_9 \overset{\rightarrow}{e}_3, \\ D \overset{\rightarrow}{e}_3 &= \omega_{10} \overset{\rightarrow}{e}_1 + \omega_{11} \overset{\rightarrow}{e}_2 + \omega_{12} \overset{\rightarrow}{e}_3. \end{aligned}$$

Les vecteurs  $\overset{\rightarrow}{e}_i$  satisfont aux conditions

$$\overset{\rightarrow}{e}_1^2 = \overset{\rightarrow}{e}_2^2 = \overset{\rightarrow}{e}_3^2 = 1, \quad \overset{\rightarrow}{e}_1 \overset{\rightarrow}{e}_2 = \overset{\rightarrow}{e}_1 \overset{\rightarrow}{e}_3 = \overset{\rightarrow}{e}_2 \overset{\rightarrow}{e}_3 = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \omega_4 &= \omega_8 = \omega_{12} = 0, \\ \omega_5 + \omega_7 &= 0, \\ \omega_{10} + \omega_6 &= 0, \\ \omega_{11} + \omega_9 &= 0, \end{aligned}$$

et

$$(17.1) \quad \begin{cases} D \overset{\rightarrow}{e}_1 = \omega_3 \overset{\rightarrow}{e}_2 + \omega_6 \overset{\rightarrow}{e}_3, \\ D \overset{\rightarrow}{e}_2 = -\omega_3 \overset{\rightarrow}{e}_1 + \omega_9 \overset{\rightarrow}{e}_3, \\ D \overset{\rightarrow}{e}_3 = -\omega_6 \overset{\rightarrow}{e}_1 - \omega_9 \overset{\rightarrow}{e}_2. \end{cases}$$

Les formes  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sont linéaires en  $dx, dy, dz$ ; les formes  $\omega_6, \omega_9$ , qui ne sont autres que les formes  $\varpi_1, \varpi_2$ , du mémoire de M. E. Cartan, sont linéaires en  $dx, dy, dz, dp, dq$ ; la forme  $\omega_5$  est, en outre, linéaire en  $d\theta$ .  $d\theta$  représente l'angle dont tourne le trièdre trirectangle autour du troisième axe.

Désignons par  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  les coordonnées d'un vecteur d'origine A par rapport au trièdre mobile et  $X, Y, Z$  ses coordonnées relatives au

repère de M. E. Cartan. On a

$$(17.2) \quad \begin{cases} \bar{X} = \lambda_{11}X + \lambda_{12}Y + \lambda_{13}Z, \\ \bar{Y} = \lambda_{21}X + \lambda_{22}Y + \lambda_{23}Z, \\ \bar{Z} = \lambda_{31}X + \lambda_{32}Y + \lambda_{33}Z. \end{cases}$$

Les symboles  $\lambda_{ik}$ , liés par les relations (17.3), (17.4), jouent un rôle fondamental dans la recherche des équations de structure.

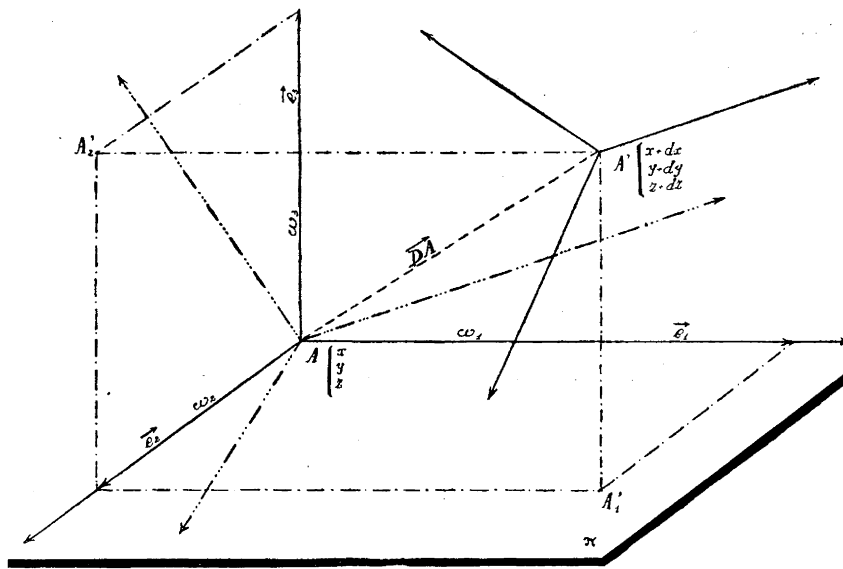


Fig. 5.

1° Soient  $dx, dy, dz, \delta x, \delta y, \delta z$  les coordonnées de deux vecteurs infiniment petits situés dans l'élément de contact  $\pi$  et d'origine A. On aura

$$\begin{aligned} \omega_1(d) &= \lambda_{11} dx + \lambda_{12} dy + \lambda_{13} dz, \\ \omega_2(d) &= \lambda_{21} dx + \lambda_{22} dy + \lambda_{23} dz, \\ \omega_3(d) &= 0, \\ \omega_1(\delta) &= \lambda_{11} \delta x + \lambda_{12} \delta y + \lambda_{13} \delta z, \\ \omega_2(\delta) &= \lambda_{21} \delta x + \lambda_{22} \delta y + \lambda_{23} \delta z, \\ \omega_3(\delta) &= 0. \end{aligned}$$

Rappelons que l'aire  $(\omega_1, \omega_2)$  du parallélogramme construit sur ces

deux vecteurs est définie (2, p. 12) par

$$|\omega_1 \omega_2| = \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right) - \frac{\partial F}{\partial p} [dy dz] - \frac{\partial F}{\partial q} [dz dx].$$

De là, les égalités

$$(17.3) \quad \begin{cases} \lambda_{12} \lambda_{23} - \lambda_{13} \lambda_{22} = -\frac{\partial F}{\partial p}, \\ \lambda_{11} \lambda_{23} - \lambda_{13} \lambda_{21} = \frac{\partial F}{\partial q}, \\ \lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21} = F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q}. \end{cases}$$

2° On déduit de la forme différentielle

$$\omega_3 = \frac{\sqrt{g}}{F} (dz - p dx - q dy),$$

qui exprime la projection sur l'axe  $\vec{e}_3$  d'un vecteur de coordonnées  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ,

$$\lambda_{31} = -\frac{\sqrt{g}}{F} p, \quad \lambda_{32} = -\frac{\sqrt{g}}{F} q, \quad \lambda_{33} = \frac{\sqrt{g}}{F}.$$

D'autre part, du tableau des quantités  $a^{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial \mu_i \partial \mu_j}$

$$\begin{aligned} a^{11} &= F \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + \left[ \frac{\partial F}{\partial p} \right]^2, & a^{12} &= F \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q}, \\ a^{13} &= pF \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + qF \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} & a^{22} &= F \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} + \left[ \frac{\partial F}{\partial q} \right]^2, \\ & - \frac{\partial F}{\partial p} \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right), & & \\ a^{23} &= qF \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} + pF \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} & a^{33} &= p^2 F \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + q^2 F \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \\ & - \frac{\partial F}{\partial q} \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right), & & + \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right)^2 \\ & & & + 2pq \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}, \end{aligned}$$

il vient

$$\Delta = |a^{ij}| = F^4 \left[ \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right]^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \right],$$

d'où

$$\sqrt{g} = F \sqrt{\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right]^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}}$$

et

$$(17.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{31} = -p \sqrt{\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right]^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}}, \\ \lambda_{32} = -q \sqrt{\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right]^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}}, \\ \lambda_{33} = \sqrt{\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right]^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}}. \end{array} \right.$$

Les trois premières composantes relatives du déplacement infinitésimal du repère mobile s'expriment linéairement en  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  par les formes de Pfaff

$$(17.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \lambda_{11} dx + \lambda_{12} dy + \lambda_{13} dz, \\ \omega_2 = \lambda_{21} dx + \lambda_{22} dy + \lambda_{23} dz, \\ \omega_3 = \sqrt{\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right]^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}} (dz - p dx - q dy). \end{array} \right.$$

Un calcul immédiat montre qu'inversement  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  sont des expressions linéaires en  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,

$$(17.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx = \frac{1}{F} (\lambda_{22} + q\lambda_{23})\omega_1 - \frac{1}{F} (\lambda_{12} + q\lambda_{13})\omega_2 \\ \quad - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{1}{\sqrt{\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right]^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}}} \omega_3, \\ dy = -\frac{1}{F} (\lambda_{21} + p\lambda_{23})\omega_1 + \frac{1}{F} (\lambda_{11} + p\lambda_{13})\omega_2 \\ \quad - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{1}{\sqrt{\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right]^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}}} \omega_3, \\ dz = -\frac{1}{F} (q\lambda_{21} + p\lambda_{22})\omega_1 + \frac{1}{F} (q\lambda_{11} - p\lambda_{12})\omega_2 \\ \quad + \frac{F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q}}{\sqrt{\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right]^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}}} \omega_3. \end{array} \right.$$

Posons

$$(17.7) \quad \begin{cases} \omega_6 = \lambda_{41} dx + \lambda_{42} dy + \lambda_{43} dz + \lambda_{44} dp + \lambda_{45} dq, \\ \omega_9 = \lambda_{51} dx + \lambda_{52} dy + \lambda_{53} dz + \lambda_{54} dp + \lambda_{55} dq. \end{cases}$$

Introduisons les composantes contrevariantes, relatives au repère de M. E. Cartan, de la différentielle absolue du vecteur unitaire normal

$$(17.8) \quad \begin{cases} \tilde{\omega}^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} dp - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} dq + \left[ L^1 \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial x^h} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Gamma^{k1}_h \right] dx^h, \\ \tilde{\omega}^2 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} dp - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} dq + \left[ L^2 \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial x^h} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Gamma^{k2}_h \right] dx^h, \\ \tilde{\omega}^3 = -\frac{1}{\sqrt{g}} p \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} dp - \frac{1}{\sqrt{g}} q \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} dp - \frac{1}{\sqrt{g}} p \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} dq - \frac{1}{\sqrt{g}} q \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} dq \\ \quad + \left[ L^3 \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial x^h} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Gamma^{k3}_h \right] dx^h. \end{cases}$$

Avec cette notation les formes  $\omega_6$  et  $\omega_9$  s'écrivent

$$(17.9) \quad \begin{cases} \omega_6 = \lambda_{11} \tilde{\omega}^1 + \lambda_{12} \tilde{\omega}^2 + \lambda_{13} \tilde{\omega}^3, \\ \omega_9 = \lambda_{21} \tilde{\omega}^1 + \lambda_{22} \tilde{\omega}^2 + \lambda_{23} \tilde{\omega}^3. \end{cases}$$

En identifiant (17.7) et (17.9), on trouve

$$(17.10) \quad \begin{cases} \lambda_{44} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{11} \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} - \frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{13} p \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} - \frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{13} q \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}, \\ \lambda_{45} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{11} \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{13} p \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{13} q \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}, \\ \lambda_{54} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{21} \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} - \frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{23} p \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} - \frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{23} q \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}, \\ \lambda_{55} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{21} \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{23} p \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{\sqrt{g}} \lambda_{23} q \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}. \end{cases}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer la théorie du repère mobile à l'étude des surfaces et d'obtenir sans peine, au moyen des formules précédentes, les principaux théorèmes relatifs aux éléments fondamentaux des courbes sur une surface.

**13. APPLICATION A LA THÉORIE DES SURFACES.** — On peut aborder l'étude systématique des surfaces  $S$  en se plaçant, comme on l'a fait pour les courbes, à deux points de vues différents : celui de M. E. Cartan, qui associe à chaque point d'une surface son plan tangent, et celui, plus général, qui consiste à adjoindre à chaque point de  $S$  la famille de ses plans normaux.

C'est le second point de vue que nous allons développer. Il synthétise la théorie des courbes et, dans le cas des espaces à vecteur  $\vec{A}$  nul, il montre le rôle, analogue à celui des droites du plan, que jouent les géodésiques sur une surface.

1° *La courbure normale.* — Soit une surface quelconque  $S$  considérée comme lieu de ses éléments de contact normaux. Détachons de la famille des trièdres trirectangles, associée à chacun de ces éléments de

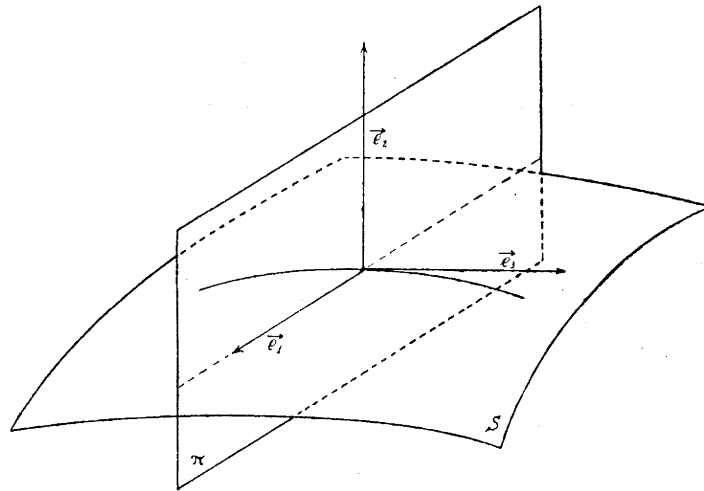


Fig. 6.

contact  $(u_i)$ , le repère dont le vecteur unitaire  $\vec{e}_1$  est tangent à la surface.

La courbure normale  $\frac{1}{\rho_n}$  en un point  $A$  d'une courbe de  $S$ , tangente en ce point au vecteur unitaire normal  $\vec{e}_3$ , sera définie comme en géo-

métrie ordinaire par

$$(18.1) \quad \frac{1}{\rho_n} = e_2 \frac{\overset{\rightarrow}{D} e_3}{ds} = -\frac{\omega_4}{ds} = -\frac{\omega_4}{\omega_3}.$$

Nous allons supposer, ce qui ne restreint pas la généralité, que la surface est définie par l'équation

$$(18.2) \quad x^3 = 0.$$

Le vecteur unitaire normal à l'élément d'appui a pour composantes contrevariantes

$$(18.3) \quad \frac{L^1}{\sqrt{g}}, \frac{L^2}{\sqrt{g}}, 0.$$

On a, par suite,

$$\tilde{\omega}^3 = \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Gamma^{k3}_n dx^k;$$

d'autre part, de l'identité

$$\omega_2 = \lambda_{21} dx + \lambda_{22} dy = 0,$$

qui a lieu quelles que soient les différentielles  $dx$ ,  $dy$ , il vient

$$\lambda_{21} = \lambda_{22} = 0.$$

En tenant compte de la seconde relation (17.9), on voit que la courbure normale  $\frac{1}{\rho_n}$  est la même pour deux courbes tangentes; le théorème de Meusnier s'étend donc aux espaces métriques fondés sur la notion d'aire.

2° *La courbure géodésique.* — La courbure géodésique se définit, comme en géométrie euclidienne, riemannienne et finslérienne, par le produit scalaire

$$(18.4) \quad \frac{l}{\rho_g} = e_1 \frac{\overset{\rightarrow}{D} e_3}{ds} = -\frac{\omega_4}{ds} = -\frac{\omega_4}{\omega_3}.$$

La courbure géodésique  $\frac{l}{\rho_g}$  est la composante du vecteur de courbure de la courbe  $\Gamma$  sur l'axe d'indice 1; la courbure normale  $\frac{1}{\rho_n}$  est sa composante sur la normale à la surface.



En effet, en vertu de la relation (12.22),

$$L^i \omega_i = 0,$$

le vecteur de courbure  $\frac{D\vec{e}_3}{ds}$  se trouve dans l'élément de contact  $\pi$ . On peut poser

$$\frac{D\vec{e}_3}{ds} = \mu \vec{e}_1 + \lambda \vec{e}_2.$$

De (18.1) et (18.4), il résulte

$$\vec{e}_1 \frac{D\vec{e}_3}{ds} = \mu \vec{e}_1 = \mu = \frac{1}{\rho_g}$$

et

$$\vec{e}_2 \frac{D\vec{e}_3}{ds} = \lambda \vec{e}_2 = \lambda = \frac{1}{\rho_n}.$$

d'où

$$(18.5) \quad \frac{D\vec{e}_3}{ds} = \frac{\vec{e}_1}{\rho_g} + \frac{\vec{e}_2}{\rho_n}.$$

Cette équation (18.5) fait dépendre la courbure géodésique d'une courbe  $\Gamma$  d'éléments de contact d'ordres supérieurs au premier; elle n'est donc pas la même pour deux courbes tangentes.

3° *La torsion géodésique.* — Le produit scalaire

$$\frac{1}{Y_g} = \vec{e}_2 \frac{D\vec{e}_1}{ds} = \frac{\omega_5}{ds} = \frac{\omega_5}{\omega_3}$$

introduit la torsion géodésique.

Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{e}_1}{ds} &= \frac{\vec{e}_2}{Y_g} - \frac{\vec{e}_3}{\rho_g}, \\ \frac{D\vec{e}_2}{ds} &= \frac{\vec{e}_1}{Y_g} - \frac{\vec{e}_3}{\rho_n}, \\ \frac{D\vec{e}_3}{ds} &= \frac{\vec{e}_1}{\rho_g} + \frac{\vec{e}_2}{\rho_n}. \end{aligned}$$

On peut conclure de là que le mouvement des axes du trièdre  $\vec{A} \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3$  est complètement déterminé par les quantités  $\frac{1}{\rho_n}, \frac{1}{\Gamma_g}, \frac{1}{\rho_g}$ .

4° *Les lignes géodésiques.* — On définit les lignes géodésiques d'une surface comme lignes à courbure géodésique nulle. Le long d'une telle ligne on a, par définition,

$$\frac{1}{\rho_g} = 0$$

et

$$\frac{D \vec{e}_3}{ds} = \frac{\vec{e}_2}{\rho_n}.$$

Si  $\frac{1}{\rho_n}$  est identiquement nul,  $\frac{D \vec{e}_3}{ds} = 0$ , et la courbe est une géodésique d'espace. Si  $\frac{1}{\rho_n}$  est différent de zéro, le long de la courbe, la différentielle absolue du vecteur unitaire  $\vec{e}_3$  est normale à la surface. Ainsi, les géodésiques d'une surface sont, ou bien des géodésiques d'espace, ou bien des courbes le long desquelles la différentielle absolue du vecteur unitaire normal est perpendiculaire à la surface.

Dans l'espace ordinaire, les géodésiques de S sont aussi les extrémales de l'intégrale  $\int ds$ . Nous allons montrer que cette propriété caractérise les espaces C à vecteur  $\vec{\Lambda}$  nul.

Soit  $\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0$  l'équation de la surface. Il faut annuler la même variation qu'au paragraphe §, mais, comme les lignes doivent être tracées sur la surface, les variations  $\delta x^i$  sont liées par la relation

$$(18.6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \delta x^i = 0.$$

En conséquence, l'équation principale

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial x^k} - d \left[ \frac{\partial F}{\partial x^{,k}} \right] \right] \delta x^k = 0$$

ne se décompose plus en  $n$  autres.

Servons-nous de la méthode des multiplicateurs. Il vient, en mul-

multipliant la première équation par  $\lambda$  et en lui ajoutant la seconde.

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial x^k} - d \left[ \frac{\partial F}{\partial x^k} \right] - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \right] \delta x^k = 0.$$

En vertu de (18.6), il n'y a que  $n - 1$  variations indépendantes. Si l'on détermine  $\lambda$  de manière à annuler le coefficient de la variation indépendante, les coefficients des  $n - 1$  variations indépendantes seront nuls aussi. On a donc

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} - d \left[ \frac{\partial F}{\partial x^k} \right] - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} = 0.$$

Cette équation s'écrit, dans la connexion euclidienne (G-E),

$$K^{ik} \tilde{\omega}_k - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = 0,$$

ou en désignant par  $\eta^i$  les composantes contrevariantes du vecteur unitaire normal à S,

$$(18.7) \quad K^{ik} \tilde{\omega}_k - \mu \eta^i = 0.$$

En particulier, si l'espace est à vecteur  $\vec{A}$  nul,

$$K^{ik} = g^{ik}$$

et les équations des extrémales sont

$$(18.8) \quad g^{ik} \tilde{\omega}_k - \mu \eta^i = g^{ik} (\tilde{\omega}_k - \mu \eta_k) = 0.$$

Observons que si l'intégrale de base correspond à un problème régulier du calcul des variations, la matrice

$$|g^{ik}| \neq 0.$$

Le système d'équations (18.8) admet la solution unique

$$(18.9) \quad \tilde{\omega}_k - \mu \eta_k = 0,$$

ou

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\eta_1} = \frac{\tilde{\omega}_2}{\eta_2} = \frac{\tilde{\omega}_3}{\eta_3}.$$

La différentielle absolue du vecteur unitaire normal d'un élément

de contact d'une courbe extrême est perpendiculaire à la surface,

$$\frac{1}{\rho^{\#}} = 0,$$

et, les courbes géodésiques coïncident avec les extrémales de S.

La réciproque de cette proposition est vraie; en d'autres termes, tout espace C donnant lieu à la relation (18.9) pour une surface quelconque est à vecteur  $\vec{A}$  nul.

En effet, tenant compte des équations (18.9),

$$\tilde{\omega}_k - \mu \gamma_k = 0$$

et de la perpendicularité du vecteur

$$K^{ik} \tilde{\omega}_k = \left( A^{i,k} + 2 A_r A^{rik} + \frac{L^i}{\sqrt{g}} A^k \right) \tilde{\omega}_k + g^{ik} \tilde{\omega}_k$$

à la surface, on a

$$(18.10) \quad \left( A^{i,k} + 2 A_r A^{rik} + \frac{L^i}{\sqrt{g}} A^k \right) \tilde{\omega}_k = \mu \gamma^i.$$

Multiplions (18.10) par  $\frac{\sqrt{g}}{L} u_i$  et sommons; il vient

$$A^k \tilde{\omega}_k = 0.$$

Cette relation ne peut être vérifiée pour toute surface S que si le vecteur  $\vec{A}$  est nul.

Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire à vecteur  $\vec{A}$  nul peuvent être regardés (1, p. 32) comme constituant une classe particulière d'espaces de Finsler. Ce sont ceux dont le tenseur contracté  $A_{ik}^k$  est nul.

Le présent théorème est vrai non seulement pour cette classe particulière d'espaces de Finsler, mais aussi pour un espace quelconque.

En effet, rappelons (1, p. 17) que les extrémales d'un espace de Finsler sont caractérisées par le système d'équations

$$\tilde{\omega}_i = 0.$$

Il est évident que les équations des extrémales d'une surface S sont

de la forme

$$\tilde{\omega}_i + \lambda \eta_i = 0,$$

où  $\eta_i$  désigne la composante covariante d'indice  $i$  du vecteur unitaire normal à la surface considérée comme lieu de ces éléments linéaires tangents.

D'où la proposition :

*Les courbes géodésiques et les extrémales d'une surface quelconque d'un espace de Finsler coïncident.*

**19. LES ÉQUATIONS DE STRUCTURE.** — En géométrie euclidienne, les composantes relatives du déplacement infinitésimal d'un repère trirectangle qui dépend de plusieurs paramètres vérifient six relations dites équations de structure Darboux. On les obtient à partir de

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3, \\ d\vec{e}_1 &= \omega_3 \vec{e}_2 + \omega_6 \vec{e}_3, \\ d\vec{e}_2 &= -\omega_5 \vec{e}_1 + \omega_9 \vec{e}_3, \\ d\vec{e}_3 &= -\omega_6 \vec{e}_1 - \omega_9 \vec{e}_2, \end{aligned}$$

en écrivant que

$$\begin{aligned} d\delta M &= \delta dM, \\ d\delta \vec{e}_1 &= \delta d\vec{e}_1, \\ d\delta \vec{e}_2 &= \delta d\vec{e}_2, \\ d\delta \vec{e}_3 &= \delta d\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Ce qui donne les égalités

$$(19.1) \quad \begin{cases} (\omega_1)' = -[\omega_3 \omega_6] - [\omega_2 \omega_5], \\ (\omega_2)' = [\omega_1 \omega_5] - [\omega_3 \omega_9], \\ (\omega_3)' = [\omega_2 \omega_9] + [\omega_1 \omega_6]. \end{cases}$$

Considérons dans l'espace  $C$  un cycle dont on se donne l'élément de contact initial  $(A, \pi)$ . Imaginons une suite d'observateurs à mentalité euclidienne échelonnés le long du cycle; chacun d'eux

adoptera un des repères trirectangles associés à l'élément générateur où il se trouve placé.

Si l'observateur situé en  $(A, \pi)$  veut coordonner les observations de ses collègues, ces derniers devront lui transmettre :

1° La distance de deux points infiniment voisins, autrement dit, la métrique de l'espace;

2° La loi suivant laquelle un vecteur se transporte parallèlement à lui-même de proche en proche.

Quand l'observateur situé en  $(A, \pi)$  aura parcouru le cycle, il remarquera que le repère final diffère du repère origine. Pour amener le premier repère en coïncidence avec le second, il faut effectuer, dans le cas d'un cycle infinitésimal, une translation et une rotation auxquelles on donne respectivement les noms de torsion et de courbure de l'espace  $C$  au point  $(A, \pi)$ .

Moyennant (19.1), les composantes covariantes  $\bar{\Omega}_i$  de la torsion sont :

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_1 &= (\omega_1)' + [\omega_3 \omega_6] + [\omega_2 \omega_5], \\ \bar{\Omega}_2 &= (\omega_2)' - [\omega_1 \omega_5] + [\omega_3 \omega_9], \\ \bar{\Omega}_3 &= (\omega_3)' - [\omega_2 \omega_9] - [\omega_1 \omega_6].\end{aligned}$$

Les formules (17.5) et (19.2) vont nous permettre d'obtenir les expressions effectives de  $(\omega_1)'$ ,  $(\omega_2)'$ ,  $(\omega_3)'$ .

Les formes de Pfaff  $\omega_i$  étant linéairement indépendantes, ces dérivées extérieures peuvent se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$(19.3) \quad \left\{ \begin{aligned} (\omega_1)' &= A [\omega_1 \omega_2] + B [\omega_1 \omega_3] + C [\omega_2 \omega_3] + D [\omega_1 \omega_6] \\ &\quad + E [\omega_1 \omega_9] + F [\omega_2 \omega_6] + G [\omega_2 \omega_9] + H [\omega_3 \omega_6] \\ &\quad + I [\omega_3 \omega_9] + J [\omega_1 \omega_5] + K [\omega_2 \omega_5] + L [\omega_3 \omega_5], \\ (\omega_2)' &= A_1 [\omega_1 \omega_2] + B_1 [\omega_1 \omega_3] + C_1 [\omega_2 \omega_3] + D_1 [\omega_1 \omega_6] \\ &\quad + E_1 [\omega_1 \omega_9] + F_1 [\omega_2 \omega_6] + G_1 [\omega_2 \omega_9] + H_1 [\omega_3 \omega_6] \\ &\quad + I_1 [\omega_3 \omega_9] + J_1 [\omega_1 \omega_5] + K_1 [\omega_2 \omega_5] + L_1 [\omega_3 \omega_5], \\ (\omega_3)' &= A_2 [\omega_1 \omega_2] + B_2 [\omega_1 \omega_3] + C_2 [\omega_2 \omega_3] + D_2 [\omega_1 \omega_6] \\ &\quad + E_2 [\omega_1 \omega_9] + F_2 [\omega_2 \omega_6] + G_2 [\omega_2 \omega_9] + H_2 [\omega_3 \omega_6] \\ &\quad + I_2 [\omega_3 \omega_9] + J_2 [\omega_1 \omega_5] + K_2 [\omega_2 \omega_5] + L_2 [\omega_3 \omega_5]. \end{aligned} \right.$$

Portons notre attention sur les cycles dont les éléments se déduisent de proche en proche de l'élément origine par transport parallèle. D'après les relations (17.1), cette propriété se formule par les deux équations

$$\omega_6 = 0, \quad \omega_7 = 0.$$

Compte tenu de (19.2) et (19.3), les composantes relatives au repère trirectangle du vecteur de torsion de ces cycles sont

$$(19.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = A[\omega_1 \omega_2] + B[\omega_1 \omega_3] + C[\omega_2 \omega_3] \\ \quad + J[\omega_1 \omega_5] + (K + I)[\omega_2 \omega_5] + L[\omega_3 \omega_5], \\ \Omega_2 = A_1[\omega_1 \omega_2] + B_1[\omega_1 \omega_3] + C_1[\omega_2 \omega_3] \\ \quad + (J - I)[\omega_1 \omega_5] + K_1[\omega_2 \omega_5] + L_1[\omega_3 \omega_5], \\ \Omega_3 = A_2[\omega_1 \omega_2] + B_2[\omega_1 \omega_3] + C_2[\omega_2 \omega_3] \\ \quad + J_2[\omega_1 \omega_5] + K_2[\omega_2 \omega_5] + L_2[\omega_3 \omega_5]. \end{array} \right.$$

Revenons à la convention intrinsèque (11, p. 48), qui détermine complètement la connexion euclidienne (G — E). Elle donne, pour composantes contrevariantes de la torsion, les formules

$$\Omega^k = -\Lambda_{i,r} l^r l^k l_i [dx^i dx^r].$$

Remarquons qu'en coordonnées rectangulaires, les composantes covariantes et contrevariantes se confondent; on a

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_1 &= \overline{\Omega}^1 = \lambda_{11} \Omega^1 + \lambda_{12} \Omega^2 + \lambda_{13} \Omega^3, \\ \overline{\Omega}_2 &= \overline{\Omega}^2 = \lambda_{21} \Omega^1 + \lambda_{22} \Omega^2 + \lambda_{23} \Omega^3, \\ \overline{\Omega}_3 &= \overline{\Omega}^3 = \lambda_{31} \Omega^1 + \lambda_{32} \Omega^2 + \lambda_{33} \Omega^3. \end{aligned}$$

En utilisant les relations, géométriquement évidentes,

$$\begin{aligned} \lambda_{11} l^1 + \lambda_{12} l^2 + \lambda_{13} l^3 &= 0, \\ \lambda_{21} l^1 + \lambda_{22} l^2 + \lambda_{23} l^3 &= 0, \\ \lambda_{31} l^1 + \lambda_{32} l^2 + \lambda_{33} l^3 &= 0, \end{aligned}$$

et en écrivant  $\overline{A}_{i,r}$  pour les composantes par rapport au trièdre trirec-

tangle de la dérivée covariante du vecteur  $A_i$ , il vient,

$$(19.5) \quad \begin{cases} \Omega_1 = 0, \\ \Omega_2 = 0, \end{cases}$$

$$\Omega_3 = -\overline{\Lambda}_{1,3}[\omega_1 \omega_3] - \overline{\Lambda}_{2,3}[\omega_2 \omega_3].$$

En rapprochant les deux expressions obtenues ci-dessus (19.4), (19.5), pour la torsion, nous obtiendrons les égalités remarquables

$$\begin{aligned} A = B = C = J = L = 0, \quad K = -1, \\ A_1 = B_1 = C_1 = K_1 = L_1 = 0, \quad J_1 = 1, \\ A_2 = J_2 = K_2 = L_2 = 0, \quad B_2 = -\overline{\Lambda}_{1,3}, \quad C_2 = -\overline{\Lambda}_{2,3}. \end{aligned}$$

D'autre part, on tire de la comparaison de (19.2) et (10.1),

$$(19.6) \quad \begin{cases} \overline{\Lambda}_{112} = E, & \overline{\Lambda}_{111} = D, & \overline{\Lambda}_{211} = F, \\ \overline{\Lambda}_{212} = G, & \overline{\Lambda}_{311} = H + 1, & \overline{\Lambda}_{312} = I, \\ \overline{\Lambda}_{121} = D_1, & \overline{\Lambda}_{122} = E_1, & \overline{\Lambda}_{221} = F_1, \\ \overline{\Lambda}_{222} = G_1, & \overline{\Lambda}_{321} = H_1, & \overline{\Lambda}_{322} = I_1 + 1, \\ \overline{\Lambda}_{131} = D_2 - 1, & \overline{\Lambda}_{132} = E_2, & \overline{\Lambda}_{231} = F_2, \\ \overline{\Lambda}_{232} = G_2 - 1, & \overline{\Lambda}_{331} = H_2, & \overline{\Lambda}_{332} = I_2. \end{cases}$$

Nous allons démontrer que

$$(19.7) \quad \begin{cases} H = -1, & I_1 = -1, & D_2 = 1, & G_2 = 1, \\ E = -G_1, & D = -F_1, & F = D_1, & G = E_1, \\ 1 = 0, & H_1 = 0, & E_2 = 0, & F_2 = 0, & H_2 = \overline{\Lambda}_{1,3}, & I_2 = \overline{\Lambda}_{2,3}. \end{cases}$$

Il en résultera la forme définitive (19.8) des équations de structure des espaces  $C$  à connexion euclidienne ( $G = E$ ),

$$(19.8) \quad \begin{cases} (\omega_1)' = -[\omega_2 \omega_5] - [\omega_3 \omega_6] + \overline{\Lambda}_{111}[\omega_1 \omega_6] \\ \quad + \overline{\Lambda}_{112}[\omega_1 \omega_9] + \overline{\Lambda}_{121}[\omega_2 \omega_6] + \overline{\Lambda}_{122}[\omega_2 \omega_9], \\ (\omega_2)' = [\omega_1 \omega_5] - [\omega_3 \omega_9] + \overline{\Lambda}_{121}[\omega_1 \omega_6] \\ \quad + \overline{\Lambda}_{122}[\omega_1 \omega_9] - \overline{\Lambda}_{111}[\omega_2 \omega_6] - \overline{\Lambda}_{112}[\omega_2 \omega_9], \\ (\omega_3)' = -\overline{\Lambda}_{1,3}[\omega_1 \omega_3] - \overline{\Lambda}_{2,3}[\omega_2 \omega_3] + [\omega_1 \omega_6] \\ \quad + [\omega_2 \omega_9] + \overline{\Lambda}_1[\omega_3 \omega_6] + \overline{\Lambda}_2[\omega_3 \omega_9]. \end{cases}$$



1°  $H = -1$ . — Dérivons extérieurement la première équation (17.5). Il s'ensuit que

$$(19.9) \quad (\omega_1)' = \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial y} [dx dy] + \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial z} [dx dz] + \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial z} [dy dz] \\ + \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial y} [dy dx] + \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial x} [dz dx] + \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial y} [dz dy] \\ + \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial p} [dx dp] + \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial p} [dy dp] + \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial p} [dz dp] \\ + \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial q} [dx dq] + \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial q} [dy dq] + \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial q} [dz dq] \\ + \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial \theta} [dx d\theta] + \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial \theta} [dy d\theta] + \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial \theta} [dz d\theta].$$

Posons

$$(19.10) \quad \omega_6 = \lambda_{61} dx + \lambda_{62} dy + \lambda_{63} dz + \lambda_{64} dp + \lambda_{65} dq + \lambda_{66} d\theta, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta^1 = F \sqrt{\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right]^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}}, \\ \Delta^2 = -\frac{1}{F} \sqrt{\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right]^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}}. \end{array} \right.$$

Le coefficient  $H$  du terme en  $(\omega_3 \omega_6)$  de  $(\omega_1)'$  s'écrit

$$H = \frac{-1}{\Delta^1 \Delta^2 \lambda_{66}} (\lambda_{61} \lambda_{55} - \lambda_{65} \lambda_{51}) \left[ -\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial \theta} \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] \\ + \frac{\lambda_{55}}{\Delta^1 \Delta^2} \left[ -\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial p} \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] \\ + \frac{\lambda_{54}}{\Delta^1 \Delta^2} \left[ -\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial q} \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right].$$

La dérivation des relations (17.3) par rapport à la variable  $\theta$  donne

$$(19.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{25} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial \theta} + \lambda_{11} \frac{\partial \lambda_{25}}{\partial \theta} - \lambda_{15} \frac{\partial \lambda_{21}}{\partial \theta} - \lambda_{21} \frac{\partial \lambda_{15}}{\partial \theta} = 0, \\ \lambda_{25} \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial \theta} + \lambda_{12} \frac{\partial \lambda_{25}}{\partial \theta} - \lambda_{22} \frac{\partial \lambda_{15}}{\partial \theta} - \lambda_{15} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial \theta} = 0, \\ \lambda_{22} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial \theta} + \lambda_{11} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial \theta} - \lambda_{12} \frac{\partial \lambda_{21}}{\partial \theta} - \lambda_{21} \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial \theta} = 0. \end{array} \right.$$

Multiplions ces équations respectivement par  $\lambda_{12}$ ,  $-\lambda_{11}$ ,  $-\lambda_{13}$  et

additionnons; il vient

$$(19.12) \quad -\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial \theta} \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right) = 0.$$

Retournons aux formules fondamentales (17.3). On aura

$$(19.13) \quad \begin{cases} \lambda_{12} \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial p} + \lambda_{23} \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial p} - \lambda_{13} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial p} - \lambda_{22} \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial p} = -\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}, \\ \lambda_{11} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial p} + \lambda_{23} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial p} - \lambda_{13} \frac{\partial \lambda_{21}}{\partial p} - \lambda_{21} \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial p} = \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}, \\ \lambda_{11} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial p} + \lambda_{22} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial p} - \lambda_{12} \frac{\partial \lambda_{21}}{\partial p} - \lambda_{21} \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial p} = -p \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} - q \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \end{cases}$$

et

$$(19.14) \quad \begin{cases} \lambda_{12} \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial q} + \lambda_{23} \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial q} - \lambda_{13} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial q} - \lambda_{22} \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial q} = -\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}, \\ \lambda_{11} \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial q} + \lambda_{23} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial q} - \lambda_{13} \frac{\partial \lambda_{21}}{\partial q} - \lambda_{21} \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial q} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}, \\ \lambda_{11} \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial q} + \lambda_{22} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial q} - \lambda_{12} \frac{\partial \lambda_{21}}{\partial q} - \lambda_{21} \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial q} = -p \frac{\partial^2 p}{\partial p \partial q} - q \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}. \end{cases}$$

Il en résulte que

$$(19.15) \quad \begin{cases} -\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial p} \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \\ = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \lambda_{11} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \lambda_{12} + p \lambda_{13} \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + q \lambda_{13} \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}, \\ -\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial q} \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \\ = \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \lambda_{11} + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \lambda_{12} + p \lambda_{13} \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} + q \lambda_{13} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}. \end{cases}$$

Finalement, grâce à (17.9), (19.10) et (19.13), et en remarquant que

$$\sqrt{g} = F \sqrt{\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right]^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}},$$

on a

$$H = -1.$$

2° Les autres relations (19.7) s'obtiennent d'une manière analogue.

En résumé, voici le tableau complet des coefficients des trois premières équations de structure :

*Première équation.*

$$\begin{aligned} I &= A_{312} = 0, & H &= A_{311} - I = -I, & E &= A_{112} = -G_1 = -A_{222}; \\ D &= A_{111} = -F_1 = -A_{221}, & F &= A_{211} = A_{121} = D_1, & G &= A_{212} = A_{122} = E_1. \end{aligned}$$

*Deuxième équation.*

$$\begin{aligned} H_1 &= \overline{A_{321}} = 0, & I_1 &= \overline{A_{322}} - I = -I, & G_1 &= \overline{A_{222}} = -E = -\overline{A_{112}}; \\ F_1 &= \overline{A_{221}} = -D = -\overline{A_{111}}, & D_1 &= \overline{A_{121}} = \overline{A_{211}} = F, & E_1 &= \overline{A_{122}} = \overline{A_{213}} = G_1. \end{aligned}$$

*Troisième équation.*

$$\begin{aligned} F_2 &= 0, & E_2 &= 0, & D_2 &= 1; \\ G_2 &= 1, & H_2 &= \overline{A_1}, & I_2 &= \overline{A_2}. \end{aligned}$$

**20.** APPLICATION À LA THÉORIE DES COURBES. — On sait que les équations de structure de Darboux-Maurer-Cartan auxquelles obéit tout mouvement à plusieurs paramètres d'un repère mobile contiennent *in abstracto* toutes les propriétés de la géométrie des espaces de groupes.

Le but des paragraphes **20** et **21** est de montrer les développements géométriques étendus et intéressants qu'entraînent les équations de structure (19.8). Tout le parti que l'on peut tirer de ces équations se dégagera nettement des résultats déjà rencontrés aux paragraphes **12**, **15**, et **18**; résultats que les relations (19.8) renferment en elles-mêmes.

Considérons la famille des trièdres trirectangles dextrogyres adjointe à chaque élément de contact d'une courbe  $\Gamma$ . En désignant par  $d$  le symbole de différentiation qui permet de passer d'un point de  $\Gamma$  au point infiniment voisin et par  $\delta$  le symbole de différentiation du passage de  $\Gamma$  à la courbe infiniment voisine  $\Gamma'$  (on passe d'un point de  $\Gamma$  à un point de la déformée  $\Gamma'$  en se déplaçant normalement à la première courbe), on a

$$(20.1) \quad \omega_1(d) = 0, \quad \omega_2(d) = 0, \quad \omega_3(d) = ds, \quad \omega_5(\delta) = 0.$$

Et, des relations (20.1) et (19.8), on déduit la variation subie par l'élément linéaire à la suite de la déformation  $\delta$

$$(20.2) \quad \delta ds = \overline{A_{1,5}} \omega_3(d) \omega_1(\delta) + \overline{A_{2,3}} \omega_3(d) \omega_2(\delta) + \omega_1(\delta) \omega_6(d) \\ + \omega_2(\delta) \omega_9(d) - [\overline{A_1} \omega_6(\delta) + \overline{A_2} \omega_9(\delta)] ds,$$

ainsi que

$$(20.3) \quad \begin{aligned} d\omega_1(\partial) - \omega_2(\partial)\omega_3(d) + \omega_6(\partial)ds \\ + \omega_1(\partial) [\overline{\Lambda_{111}}\omega_6(d) + \overline{\Lambda_{112}}\omega_9(d)] \\ + \omega_2(\partial) [\overline{\Lambda_{121}}\omega_6(d) + \overline{\Lambda_{122}}\omega_9(d)] = 0, \end{aligned}$$

et

$$(20.4) \quad \begin{aligned} d\omega_2(\partial) + \omega_1(\partial)\omega_3(d) + \omega_1(\partial) [\overline{\Lambda_{121}}\omega_6(d) + \overline{\Lambda_{122}}\omega_9(d)] \\ - \omega_2(\partial) [\overline{\Lambda_{111}}\omega_6(d) + \overline{\Lambda_{112}}\omega_9(d)], \end{aligned}$$

d'où

$$(20.5) \quad \begin{aligned} \partial \int ds = \int \omega_6(d)\omega_6(\partial) + \omega_2(\partial)\omega_9(d) - \overline{\Lambda_1}\omega_6(\partial)ds - \overline{\Lambda_2}\omega_9(\partial)ds \\ + \overline{\Lambda_{1,3}}\omega_3(d)\omega_1(\partial) + \overline{\Lambda_{2,3}}\omega_3(d)\omega_2(\partial). \end{aligned}$$

En utilisant (20.3), on a

$$\begin{aligned} \int \overline{\Lambda_1} \{ \omega_6(\partial)ds - \omega_2(\partial)\omega_3(d) + \omega_1(\partial) [\overline{\Lambda_{111}}\omega_6(d) + \overline{\Lambda_{112}}\omega_9(d)] \\ + \omega_2(\partial) [\overline{\Lambda_{121}}\omega_6(d) + \overline{\Lambda_{122}}\omega_9(d)] \} \\ = - \int \overline{\Lambda_1} d\omega_1(\partial) = - [\overline{\Lambda_1}\omega_1(\partial)]_0^1 + \int \omega_1(\partial) d\overline{\Lambda_1}. \end{aligned}$$

On remarquera que  $\omega_1(\partial)$  est nul à l'origine et à l'extrémité de  $\Gamma$ . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} - \int \overline{\Lambda_1}\omega_6(\partial)ds = \int \omega_1(\partial) \{ -d\overline{\Lambda_1} + \overline{\Lambda_1} [\overline{\Lambda_{111}}\omega_6(d) + \overline{\Lambda_{112}}\omega_9(d)] \\ + \overline{\Lambda_1}\omega_2(\partial) [-\omega_3(\partial) + \overline{\Lambda_{121}}\omega_6(d) + \overline{\Lambda_{122}}\omega_9(d)] \}. \end{aligned}$$

D'après la valeur de  $d\omega_2(\partial)$  donnée par (20.4), on conclut également que

$$\begin{aligned} - \int \overline{\Lambda_2}\omega_9(\partial)ds = \int \omega_2(\partial) \{ -d\overline{\Lambda_2} - \overline{\Lambda_2} [\overline{\Lambda_{111}}\omega_6(d) + \overline{\Lambda_{112}}\omega_9(d)] \\ + \overline{\Lambda_2}\omega_1(\partial) [\omega_3(d) + \overline{\Lambda_{121}}\omega_6(d) + \overline{\Lambda_{122}}\omega_9(d)] \}. \end{aligned}$$

L'équation (20.5) devient

$$\begin{aligned} - \partial \int ds = \int \omega_1(\partial) \\ \times [d\overline{\Lambda_1} - \overline{\Lambda_2}\omega_3(d) - \overline{\Lambda_{1,3}}\omega_3(d) \\ - (1 + \overline{\Lambda_1}\overline{\Lambda_{111}} + \overline{\Lambda_2}\overline{\Lambda_{121}})\omega_6(d) - (\overline{\Lambda_1}\overline{\Lambda_{112}} + \overline{\Lambda_2}\overline{\Lambda_{122}})\omega_9(d)] \\ + \omega_2(\partial) [d\overline{\Lambda_2} + \overline{\Lambda_1}\omega_3(d) - \overline{\Lambda_{2,3}}\omega_3(d) - (\overline{\Lambda_1}\overline{\Lambda_{121}} - \overline{\Lambda_2}\overline{\Lambda_{111}})\omega_6(d) \\ - (\overline{\Lambda_1}\overline{\Lambda_{122}} - \overline{\Lambda_2}\overline{\Lambda_{112}})\omega_9(d)]. \end{aligned}$$

Considérant les formules

$$(20.6) \quad \begin{cases} DA^1 = \Lambda^{1h} \tilde{\omega}_h + \Lambda^{1,h} dx^h + \Lambda_k \Lambda^{k1h} \tilde{\omega}_h, \\ DA^2 = \Lambda^{2h} \tilde{\omega}_h + \Lambda^{2,h} dx^h + \Lambda_k \Lambda^{k2h} \tilde{\omega}_h, \end{cases}$$

les conditions d'extrémum peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} K_{1h} \tilde{\omega}^h &= 0, \\ K_{2h} \tilde{\omega}^h &= 0. \end{aligned}$$

Servons-nous de la relation

$$\overline{A^{2,3}} \omega_3 = 0,$$

qui exprime que le vecteur  $\overline{A^{i,h}} \omega_h = \overline{A^{i,3}} \omega_3$  est situé dans l'élément de contact, il vient

$$K_{2h} \tilde{\omega}^h = 0.$$

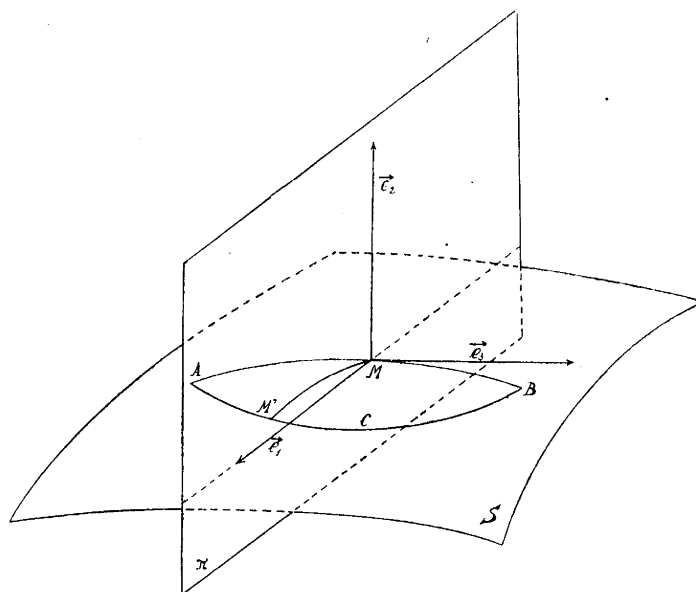


Fig. 7.

Dans ces conditions, les équations des extrémales sont sous forme tensorielle générale

$$K^{ih} \tilde{\omega}_h = 0.$$

C'est l'équation (14. 1) du Chapitre I.

Passons, dans le même ordre d'idées, à la recherche des équations des courbes extrémales d'une surface quelconque S.

Soit M un point d'une courbe AB tracée sur la surface, point auquel nous adjoignons le repère trirectangle dont l'axe  $\vec{e}_1$  est tangent à S. On a pour un déplacement infinitésimal  $d$  le long de la courbe

$$\omega_1(d) = 0, \quad \omega_2(d) = 0, \quad \omega_3(d) = ds.$$

Admettons maintenant, comme plus haut, qu'on passe de AB à la courbe infiniment voisine ACB par un déplacement infiniment petit  $\delta$  du trièdre mobile pour lequel

$$\omega_3(\delta) = 0.$$

Étant donné la nature du trièdre adjoint au point M on peut écrire, de plus,

$$\omega_2(\delta) = 0.$$

Appliquées à ce cas particulier, les relations (19.8) se transforment en les formules

$$\begin{aligned} \delta ds &= \overline{\Lambda}_{1,3} \omega_3(d) \omega_1(\delta) + \omega_1(\delta) \omega_6(d) - [\overline{\Lambda}_1 \omega_6(\delta) + \overline{\Lambda}_2 \omega_9(\delta)] ds, \\ d\omega_1(\delta) + \omega_6(\delta) ds + \omega_1(\delta) [\overline{\Lambda}_{111} \omega_6(d) + \overline{\Lambda}_{112} \omega_9(d)] &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\omega_1(\delta) \omega_3(d) + \omega_3(\delta) ds + \omega_1(\delta) [\overline{\Lambda}_{121} \omega_6(d) + \overline{\Lambda}_{122} \omega_9(d)] = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} - \int \overline{\Lambda}_1 \omega_6(\delta) ds &= \int \omega_1(\delta) \{ \overline{\Lambda}_1 [\overline{\Lambda}_{111} \omega_6(d) + \overline{\Lambda}_{112} \omega_9(d)] - d\overline{\Lambda}_1 \}, \\ - \int \overline{\Lambda}_2 \omega_9(\delta) ds &= \int \omega_1(\delta) \{ \overline{\Lambda}_2 [\overline{\Lambda}_{121} \omega_6(d) + \overline{\Lambda}_{122} \omega_9(d)] + \omega_3(d) \}, \end{aligned}$$

d'où enfin

$$\begin{aligned} \delta \int ds &= \int \omega_1(\delta) \{ - d\overline{\Lambda}_1 + \omega_6(d) + \overline{\Lambda}_{1,3} \omega_3(d) \\ &\quad + \overline{\Lambda}_1 [\overline{\Lambda}_{111} \omega_6(d) + \overline{\Lambda}_{112} \omega_9(d)] \\ &\quad + \overline{\Lambda}_2 [\overline{\Lambda}_{121} \omega_6(d) + \overline{\Lambda}_{122} \omega_9(d) + \omega_3(d)] \}. \end{aligned}$$

D'après (20.6), la relation

$$K_{1h} \tilde{\omega}^h = 0$$

est la condition d'extréma des courbes de S.

Remarquons encore que

$$K_{3h}\tilde{\omega}^h = 0.$$

Dès lors, le vecteur  $K_{ih}\omega^h$  est normal à la surface et les équations des extrémales sont sous forme tensorielle générale

$$K^{ih}\tilde{\omega}_h = \lambda\eta^i.$$

C'est bien l'équation (18.7).

Une troisième application des équations (19.8), dès le début du paragraphe suivant, va mettre en évidence leur liaison intime avec les conditions d'existence de la solution unique du système (5.10), (11.1). On conçoit dès lors qu'elles représentent la structure fondamentale de la théorie des espaces C et permettent de construire de vastes régions de cette géométrie.

**21. LE SYSTÈME (5.10), (11.1).** — La méthode du repère mobile conditionnée par les équations de structure (19.8) s'impose, comme l'indique clairement le paragraphe précédent, dans l'étude des principaux problèmes de la géométrie fondée sur la notion d'aire. Elle surpasse, tant par la simplicité des calculs que par la réalité géométrique qu'elle introduit, la méthode du calcul différentiel absolu dont les résultats ne s'acquièrent pas sans quelque longueur.

La discussion du système (5.10), (11.1) qui joue un grand rôle dans la théorie des espaces C va nous en fournir un nouvel exemple.

Le système linéaire (5.10), (11.1) admet (12, p. 57), soit une solution et une seule, soit une  $\infty^{n-p}$  solutions. Il est clair d'ailleurs que le passage d'une connexion à l'autre adjoint aux composantes contrevariantes  $\varpi^i$  de la différentielle absolue du vecteur unitaire normal des expressions linéaires en  $dx^h$ . Quant aux composantes relatives  $\omega_3, \omega_6$  et  $\omega_9$  du déplacement infinitésimal du trièdre mobile, elles devront être amendées par l'adjonction de combinaisons linéaires en  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

Représentons par  $\omega_i^*$  les nouvelles composantes relatives du déplacement infinitésimal du repère. On posera

$$(21.1) \quad \begin{cases} \omega_6^* = \omega_6 + \alpha_{31}\omega_1 + \alpha_{42}\omega_2 + \alpha_{13}\omega_3, \\ \omega_9^* = \omega_9 + \alpha_{31}\omega_1 + \alpha_{32}\omega_2 + \alpha_{33}\omega_3, \\ \omega_3^* = \omega_3 + \alpha_{61}\omega_1 + \alpha_{62}\omega_2 + \alpha_{63}\omega_3, \end{cases}$$

où les  $\alpha_{ij}$  sont des fonctions de  $x, y, z, p, q, \theta$ .

Grâce à ces notations, les équations de structure (19.8) deviennent

$$\begin{aligned}(\omega_1)' &= -[\omega_2 \omega_3] - [\omega_3 \omega_6] + \overline{A_{111}}[\omega_1 \omega_6] + \overline{A_{112}}[\omega_1 \omega_9] + \overline{A_{121}}[\omega_2 \omega_6] \\ &\quad + \overline{A_{122}}[\omega_2 \omega_9] + (\alpha_{61} + \overline{A_{111}}\alpha_{12} + \overline{A_{112}}\alpha_{32} - \overline{A_{121}}\alpha_{31} - \overline{A_{122}}\alpha_{31})[\omega_1 \omega_2] \\ &\quad + (\alpha_{11} + \overline{A_{111}}\alpha_{13} + \overline{A_{112}}\alpha_{33})[\omega_1 \omega_3] + (\alpha_{12} - \alpha_{63} + \overline{A_{121}}\alpha_{13} + \overline{A_{122}}\alpha_{33})[\omega_2 \omega_3], \\ (\omega_2)' &= -[\omega_1 \omega_3] - [\omega_3 \omega_9] + \overline{A_{121}}[\omega_1 \omega_6] + \overline{A_{122}}[\omega_1 \omega_9] - \overline{A_{111}}[\omega_2 \omega_6] \\ &\quad - \overline{A_{112}}[\omega_2 \omega_9] + (\alpha_{62} + \overline{A_{121}}\alpha_{12} + \overline{A_{122}}\alpha_{32} + \overline{A_{111}}\alpha_{31} + \overline{A_{112}}\alpha_{31})[\omega_1 \omega_2] \\ &\quad + (\alpha_{63} + \alpha_{31} + \overline{A_{121}}\alpha_{13} + \overline{A_{122}}\alpha_{33})[\omega_1 \omega_3] + (\alpha_{32} - \overline{A_{111}}\alpha_{33} - \overline{A_{112}}\alpha_{33})[\omega_2 \omega_3], \\ (\omega_3)' &= -\overline{A_{1,3}^*}[\omega_1 \omega_3] - \overline{A_{2,3}^*}[\omega_2 \omega_3] + [\omega_1 \omega_6] + [\omega_2 \omega_9] + A_1[\omega_3 \omega_6] \\ &\quad + A_2[\omega_3 \omega_9] + (\alpha_{12} - \alpha_{31})[\omega_1 \omega_2] + (\alpha_{33} - \overline{A_1}\alpha_{31} - \overline{A_2}\alpha_{31})[\omega_1 \omega_3] \\ &\quad + (\alpha_{33} - \overline{A_1}\alpha_{12} - \overline{A_2}\alpha_{32})[\omega_2 \omega_3],\end{aligned}$$

où  $\overline{A_{i,j}^*}$  sont les composantes du tenseur  $\overline{A_{i,j}}$  dans la nouvelle connexion euclidienne.

Remarquons qu'en vertu de (17.2),

$$\overline{A^{1,k}}\ell^k = A^{1,k}\ell^k\lambda_{11} + A^{2,k}\ell^k\lambda_{12} + A^{3,k}\ell^k\lambda_{13}.$$

Pour plus de brièveté, désignons par  $\beta_{ij}$  les coefficients de (17.6). On aura

$$\overline{A^{1,k}}\ell^k = \overline{A^{1,3}} = \overline{A_{1,3}} = A^{1,k}\beta_{k3}\lambda_{11} + A^{2,k}\beta_{k3}\lambda_{12} + A^{3,k}\beta_{k3}\lambda_{13}.$$

Nous représenterons par  $\gamma_i^j$  la différence entre les coefficients qui définissent le transport parallèle dans deux connexions euclidiennes satisfaisant au système (3.10), (11.1). Grâce à (3.10) les quantités  $\gamma_i^j$  sont antisymétriques par rapport aux indices  $i, j$ .

Cela étant, écrivons explicitement les composantes du tenseur  $A^i_j$ ; il vient

$$\overline{A_{1,3}^*} = \overline{A_{1,3}} + \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial A}{\partial u_r} \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma_r^k \lambda_{1i} \beta_{i3} + A_s A^{sir} \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma_r^k \lambda_{1i} \beta_{i3} + A_k \gamma^{ki} \lambda_{1i} \beta_{i3}.$$

Calculons à présent  $\frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial A_i}{\partial u_r} \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma_r^k \lambda_{1i} \beta_{i3}$ . On a

$$\begin{aligned}\frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial A_i}{\partial u_r} \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma_r^k \lambda_{1i} \beta_{i3} &= A^{k_r} \beta_{sr} \lambda_{rs} \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma_r^k \lambda_{1i} = (A^{k_j} \beta_{js} \lambda_{si}) \left( \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma^{kj} \lambda_{sj} \beta_{i3} \right) \\ &= -\overline{A^{1,1}}\lambda_{13} - \overline{A^{1,2}}\lambda_{33}.\end{aligned}$$



On aura, de même,

$$\Lambda_s \Lambda^{sir} \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma_r^k \lambda_{li} \beta_{l3} = -\overline{\Lambda_s \Lambda_{s12}} \alpha_{33} - \overline{\Lambda_s \Lambda_{s11}} \alpha_{43}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda_k \gamma^{ki} \lambda_{li} \beta_{l3} &= \beta_{kj} \beta_{s1} \overline{\Lambda^j} \gamma_{ksl} \beta_{l3} = \overline{\Lambda^j} (\beta_{1j} \beta_{21} - \beta_{2j} \beta_{11}) \gamma_{11l} \beta_{l3} + \overline{\Lambda^j} (\beta_{1j} \beta_{31} - \beta_{3j} \beta_{31}) \\ &+ \overline{\Lambda^j} (\beta_{2j} \beta_{31} - \beta_{3j} \beta_{21}) \gamma_{33l} \beta_{l3} = -\overline{\Lambda_2} \alpha_{63}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \omega_6 &= \lambda_{1i} \tilde{\omega}^i, \\ \omega_9 &= \lambda_{2i} \tilde{\omega}^i. \end{aligned}$$

Si l'on tient compte de (17.7), on pourra écrire  $\Delta \omega_6$  et  $\Delta \omega_9$  comme suit

$$\begin{aligned} \omega_6 &= \lambda_{1i} \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma^{ki} \beta_{hl} \omega_l, \\ \omega_9 &= \lambda_{2i} \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma^{ki} \beta_{hl} \omega_l. \end{aligned}$$

Des composantes par rapport au repère de Cartan des vecteurs unitaires  $\vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0, \vec{e}_3^0$  portés par les axes du repère mobile

$$\vec{e}_1^0 \begin{cases} \beta_{11}, \\ \beta_{21}, \\ \beta_{31}, \end{cases} \quad \vec{e}_2^0 \begin{cases} \beta_{12}, \\ \beta_{22}, \\ \beta_{32}, \end{cases} \quad \vec{e}_3^0 \begin{cases} \frac{L^1}{\sqrt{g}} = \beta_{13}, \\ \frac{L^2}{\sqrt{g}} = \beta_{23}, \\ \frac{L^3}{\sqrt{g}} = \beta_{33}, \end{cases}$$

on tire

$$D \vec{e}_1^0 = -\omega_5 \beta_{12} \vec{e}_1 - \omega_5 \beta_{22} \vec{e}_2 - \omega_5 \beta_{32} \vec{e}_3 + \omega_6 \beta_{13} \vec{e}_1 + \omega_6 \beta_{23} \vec{e}_2 + \omega_6 \beta_{33} \vec{e}_3.$$

On a donc

$$\Delta D \vec{e}_1^0 = -\Delta \omega_5 \beta_{i2} \vec{e}_i + \Delta \omega_6 \beta_{i3} \vec{e}_i.$$

D'autre part, un calcul direct de  $\Delta D \vec{e}_1^0$  donne

$$\Delta D \vec{e}_1^0 = \beta_{k1} \gamma_{k^1 h} dx^h \vec{e}_1 + \beta_{k1} \gamma_{k^2 h} dx^h \vec{e}_2 + \beta_{k1} \gamma_{k^3 h} dx^h \vec{e}_3,$$

d'où

$$\begin{aligned} -\Delta\omega_3\beta_{12} &= -\Delta\omega_6\beta_{13} + \beta_{k1}\gamma_k^1 dx^h, \\ -\Delta\omega_3\beta_{22} &= -\Delta\omega_6\beta_{23} + \beta_{k1}\gamma_k^2 dx^h, \\ -\Delta\omega_3\beta_{32} &= \beta_{k1}\gamma_k^3 dx^h - \Delta\omega_6\beta_{33}. \end{aligned}$$

Multiplions ces relations respectivement par  $\lambda_{21}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{23}$  et sommons; en remarquant que

$$\lambda_{ki}\beta_{ij} \begin{cases} = 0 & (k \neq j, \\ = 1 & (k = j, \end{cases}$$

D'où

$$\overline{\Lambda}_{1,3}^* = \overline{\Lambda}_{1,3} - \overline{\Lambda}_{1,1} \alpha_{43} - \overline{\Lambda}_{1,2} \alpha_{53} - \overline{\Lambda}_s \overline{\Lambda}_{s11} \alpha_{43} - \overline{\Lambda}_s \overline{\Lambda}_{s12} \alpha_{53} - \overline{\Lambda}_2 \alpha_{63}.$$

Des calculs analogues donnent

$$\overline{\Lambda}_{2,3}^* = \overline{\Lambda}_{2,3} - \overline{\Lambda}_{2,1} \alpha_{43} - \overline{\Lambda}_{2,2} \alpha_{53} - \overline{\Lambda}_s \overline{\Lambda}_{s21} \alpha_{43} - \overline{\Lambda}_s \overline{\Lambda}_{s22} \alpha_{53} + \overline{\Lambda}_1 \alpha_{63}.$$

Les équations de structure (19.8) ont été obtenues sans faire appel à la nature des solutions du système (5.10), (11.1). Elles ont donc même forme pour toutes les connexions euclidiennes satisfaisant à ces relations. Il en résulte que les  $\alpha_{ik}$  vérifient le système linéaire homogène

$$\begin{aligned} -\overline{\Lambda}_{121} \alpha_{41} + \overline{\Lambda}_{111} \alpha_{42} & & -\overline{\Lambda}_{122} \alpha_{51} + \overline{\Lambda}_{112} \alpha_{52} & & + \alpha_{61} & = 0, \\ \alpha_{41} & & + \overline{\Lambda}_{111} & & \alpha_{43} & + \overline{\Lambda}_{112} & & \alpha_{53} & = 0, \\ & & \alpha_{42} + \overline{\Lambda}_{121} & & \alpha_{43} & + \overline{\Lambda}_{122} & & \alpha_{53} & - \alpha_{63} = 0, \\ \overline{\Lambda}_{111} \alpha_{41} + \overline{\Lambda}_{121} \alpha_{42} & & + \overline{\Lambda}_{112} \alpha_{51} + \overline{\Lambda}_{122} \alpha_{52} & & + \alpha_{62} & = 0, \\ & & -\overline{\Lambda}_{121} & & \alpha_{43} & + \alpha_{51} & & + \overline{\Lambda}_{122} & \alpha_{53} & + \alpha_{63} = 0, \\ & & -\overline{\Lambda}_{111} & & \alpha_{43} & & + \alpha_{52} - \overline{\Lambda}_{112} & \alpha_{53} & = 0, \\ & & \alpha_{42} & & - \alpha_{51} & & & & = 0, \\ -\overline{\Lambda}_1 \alpha_{41} & & + (\overline{\Lambda}_{1,1} + \overline{\Lambda}_s \overline{\Lambda}_{s11} + 1) \alpha_{43} - \overline{\Lambda}_2 \alpha_{51} & & + (\overline{\Lambda}_{1,2} + \overline{\Lambda}_s \overline{\Lambda}_{s12}) \alpha_{53} & & + \overline{\Lambda}_2 \alpha_{63} & = 0, \\ -\overline{\Lambda}_2 \alpha_{42} + (\overline{\Lambda}_{2,1} + \overline{\Lambda}_s \overline{\Lambda}_{s21}) \alpha_{43} & & - \overline{\Lambda}_2 \alpha_{52} + (\overline{\Lambda}_{2,2} + \overline{\Lambda}_s \overline{\Lambda}_{s22} + 1) \alpha_{53} & & - \overline{\Lambda}_1 \alpha_{63} & = 0, \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que le déterminant de ce système est le discriminant  $|K^{ij}|$  introduit au chapitre I, paragraphe 12.

THÉORÈME. — *Le système (5.10), (11.1) admet une solution et une seule sous la condition nécessaire et suffisante*

$$(21.3) \quad |K^{ij}| \neq 0.$$

En effet, posons

$$\begin{aligned}\Delta\omega_6 &= \omega_6^* - \omega_6, \\ \Delta\omega_9 &= \omega_9^* - \omega_9, \\ \Delta\omega_5 &= \omega_5^* - \omega_5.\end{aligned}$$

Rappelons que

$$\tilde{\omega}^i = \frac{dL^i}{\sqrt{g}} + \left( L^i \frac{\partial}{\partial x^h} \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \Gamma_{ih}^{kl} \right) dx^h$$

il vient

$$-\Delta\omega_5 = \beta_{kl} \lambda_{2i} \gamma_{kl}^i \beta_{hl} \omega_l.$$

Finalement, grâce à (21.1) et (21.3), on a le système linéaire homogène en  $\beta_{rl} \gamma_{ksr}$

$$\begin{aligned}\alpha_{4l} &= \beta_{k3} \beta_{s1} \beta_{rl} \gamma_{ksr} = 0, \\ \alpha_{5l} &= \beta_{k3} \beta_{s2} \beta_{rl} \gamma_{ksr} = 0, \\ \alpha_{6l} &= \beta_{k1} \beta_{s2} \beta_{rl} \gamma_{ksr} = 0,\end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}(\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{21} \beta_{12}) \beta_{rl} \gamma_{12r} + (\beta_{11} \beta_{.2} - \beta_{.31} \beta_{12}) \beta_{rl} \gamma_{13r} + (\beta_{21} \beta_{.32} - \beta_{.31} \beta_{22}) \beta_{rl} \gamma_{23r} &= 0; \\ (\beta_{12} \beta_{21} - \beta_{23} \beta_{11}) \beta_{rl} \gamma_{12r} + (\beta_{12} \beta_{.31} - \beta_{.33} \beta_{11}) \beta_{rl} \gamma_{13r} + (\beta_{23} \beta_{.31} - \beta_{.33} \beta_{21}) \beta_{rl} \gamma_{23r} &= 0; \\ (\beta_{13} \beta_{22} - \beta_{23} \beta_{12}) \beta_{rl} \gamma_{12r} + (\beta_{13} \beta_{.32} - \beta_{.33} \beta_{12}) \beta_{rl} \gamma_{13r} + (\beta_{23} \beta_{.32} - \beta_{.33} \beta_{22}) \beta_{rl} \gamma_{23r} &= 0.\end{aligned}$$

Le déterminant  $\frac{1}{g}$  de ce système est différent de zéro, on en déduit

$$\gamma_{12r} \beta_{rl} = \gamma_{13r} \beta_{rl} = \gamma_{23r} \beta_{rl} = 0.$$

C'est là, un système linéaire homogène en  $\gamma_{12r}$ ,  $\gamma_{13r}$ ,  $\gamma_{23r}$  dont le déterminant  $\frac{1}{g}$  est différent de zéro. Il en résulte que

$$\gamma_{ijl} = 0.$$

Par suite, le système (3.10), (11.1) admet une solution et une seule.

## CHAPITRE IV.

### L'espace hyperharmonique.

**22. L'ESPACE HARMONIQUE DE M. E. CARTAN.** — Nous avons indiqué (Chap. II, § 15) un exemple d'intégrale à laquelle il n'est pas possible d'associer, suivant une loi intrinsèque, une connexion euclidienne. Il s'agit de l'intégrale double  $\iint (p^2 + q^2) dx dy$  qui intervient dans la

démonstration de Riemann du principe de Dirichlet. L'espace fondé sur cette intégrale, appelé *espace harmonique* a été étudié spécialement par M. E. Cartan. Nous dressons plus loin le tableau des résultats obtenus par cet auteur et tout récemment encore par M. J. A. Schouten [8], tableau qu'il sera intéressant de comparer avec celui de nos résultats personnels relativement à l'espace hyperharmonique, c'est-à-dire l'espace à  $n + 1$  dimensions fondé sur l'intégrale

$$\int (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) dx^1 dx^2 \dots dx^n.$$

$l^i, l_i$  désigneront les composantes contrevariantes et covariantes du vecteur unitaire normal;

$\omega^i$ , les composantes contrevariantes de la différentielle absolue du vecteur unitaire normal;

$d\varphi$ , l'angle de deux éléments de contact infiniment voisins de même centre;

$u, v, w$ , les coordonnées homogènes du plan de l'élément  $(x, y, z; p, q)$ .

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{4(u^2 + v^2)^4}{w^8}, & g &= \frac{2(u^2 + v^2)^2}{w^4}, & \sqrt{g} &= \sqrt{2} \frac{(u^2 + v^2)}{w^2}; \\ l^1 &= -\sqrt{2} \frac{p}{p^2 + q^2}, & l^2 &= -\sqrt{2} \frac{p}{p^2 + q^2}, & l^3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\ l_1 &= -\sqrt{2} p, & l_2 &= -\sqrt{2} p, & l_3 &= \sqrt{2}; \\ g^{11} &= \frac{3p^2 + q^2}{(p^2 + q^2)^2}, & g^{12} &= \frac{2pq}{(p^2 + q^2)^2}, & g^{22} &= \frac{p^2 + 3q^2}{(p^2 + q^2)^2}; \\ g^{13} &= \frac{2p}{p^2 + q^2}, & g^{23} &= \frac{2q}{p^2 + q^2}, & g^{33} &= \frac{3}{2}; \\ g_{11} &= 3p^2 + q^2, & g_{12} &= 2pq, & g_{22} &= p^2 + 3q^2; \\ g_{13} &= -4p, & g_{23} &= -4q, & g_{33} &= 6; \\ \Lambda^1 &= \frac{-\sqrt{2}p}{p^2 + q^2}, & \Lambda^2 &= \frac{-\sqrt{2}q}{p^2 + q^2}, & \Lambda^3 &= -\sqrt{2}; \\ \Lambda_1 &= \sqrt{2}p, & \Lambda_2 &= \sqrt{2}p, & \Lambda_3 &= -2\sqrt{2}; \\ \omega^1 &= -\sqrt{2} \frac{dp}{p^2 + q^2}, & \omega^2 &= -\sqrt{2} \frac{dp}{p^2 + q^2}, & \omega^3 &= -\sqrt{2} \frac{pdp + qdq}{p^2 + q^2}; \\ \Pi^{11} &= \frac{2p^2}{(p^2 + q^2)^2}, & \Pi^{23} &= \frac{q}{p^2 + q^2}, & \Pi^{33} &= \frac{1}{2}; \\ \Pi^{12} &= \frac{2pq}{(p^2 + q^2)^2}, & \Pi^{22} &= \frac{2q}{(p^2 + q^2)^2}, & \Pi^{13} &= \frac{p}{p^2 + q^2}; \\ & & d\varphi^2 &= 2 \frac{dp^2 + dq^2}{p^2 + q^2}. \end{aligned}$$

**25.** LES ÉLÉMENTS FONDAMENTAUX DE L'ESPACE HYPERHARMONIQUE. — Prenons pour définir l'orientation de l'hyperplan  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , les coordonnées homogènes  $(u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1})$  définies par les relations

$$p_1 = -\frac{u_1}{u_{n+1}}, \quad p_2 = -\frac{u_2}{u_{n+1}}, \quad \dots, \quad p_n = -\frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

La fonction  $L = u_{n+1} F$  est donnée par

$$L = \frac{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}{u_{n+1}}$$

et l'on a :

1°  $i \neq j \neq n+1$

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{4 u_i u_j}{u_{n+1}^2};$$

2°  $i = j \neq n+1$

$$a_{ii} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial u_i^2} = \frac{2(u_1^2 + u_2^2 + \dots + 3u_i^2 + \dots + u_n^2)}{u_{n+1}^2};$$

3°  $i \neq n+1, j = n+1$

$$a_{ij} = -\frac{4 u_i (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)}{u_{n+1}^2};$$

4°  $i = j = n+1$

$$a_{n+1, n+1} = 3(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2).$$

La simple application des formules générales (Ch. I, § 5) déterminant la métrique et la connexion euclidienne des espaces C, au cas particulier de l'espace hyperharmonique, conduit aux éléments fondamentaux définis par le tableau

$$\Delta = \frac{2^n (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{n+2}}{u_{n+1}^{2n+4}}, \quad g = \frac{2(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{1+\frac{2}{n}}}{u_{n+1}^{\frac{2}{n}}};$$

$$h = \frac{-\sqrt{2} p_i}{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}}, \quad h^{n+1} = \frac{-1}{\sqrt{2} (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}},$$

$(i \neq n+1),$

$$\begin{aligned}
l_i &= \sqrt{2} p_i (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}} & l_{n+1} &= \sqrt{2} (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}}; \\
g^{ii} &= \frac{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + 3p_i^2 + \dots + p_n^2)}{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{1 + \frac{2}{n}}} & g^{ij} &= \frac{2p_i p_j}{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{1 + \frac{2}{n}}} \\
& \quad (i \neq j \neq n+1), & & \quad (i \neq j \neq n+1); \\
g^{i,n+1} &= \frac{2p_i}{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{\frac{2}{n} - 1}} & g^{n+1,n+1} &= \frac{3}{2} \frac{1}{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{\frac{2}{n} - 1}}; \\
& \quad (i \neq n+1), & & \\
g^{ii} &= \frac{(p_1^2 + \dots + 3p_i^2 + \dots + p_n^2)}{\times (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)} & g^{ij} &= \frac{2p_i p_j (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{\frac{2}{n} - 1}}{(i \neq j \neq n+1); \\
& \quad (i \neq j \neq n+1), & & \\
g_{i,n+1} &= -4p_i (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{\frac{2}{n} - 1}, & g_{n+1,n+1} &= 6(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{\frac{2}{n} - 1}; \\
\Lambda^i &= -\sqrt{2} p_i (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} & \Lambda^{n+1} &= -\frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right) (p_1^2 + \dots + p_n^2)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}}{\sqrt{2}} \\
& \quad (i \neq n+1), & & \\
\Lambda_i &= -\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) p_i & \Lambda_{n+1} &= \sqrt{2} \left(1 - \frac{6}{n}\right) \\
& \quad \times (p_1^2 + \dots + p_n^2)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} & & \times (p_1^2 + \dots + p_n^2)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}; \\
& \quad (i \neq n+1), & & \\
\omega^i &= \frac{-\sqrt{2} dp_i}{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}} & \omega^{n+1} &= \frac{-\sqrt{2} (p_1 dp_1 + \dots + p_n dp_n)}{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)}; \\
& \quad (i \neq n+1), & & \\
\Pi^{ij} &= 2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n} + \frac{11}{4} \right) p_i p_j & \Pi^{ii} &= 2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n} + \frac{11}{4} \right) p_i^2 \\
& \quad \times (p_1^2 + \dots + p_n^2)^{-1 - \frac{2}{n}} & & \times (p_1^2 + \dots + p_n^2)^{-1 - \frac{2}{n}} \\
& \quad (i \neq j \neq n+1), & & + 3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \\
& & & \times (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{-\frac{2}{n}} \\
& & & \quad (i \neq n+1); \\
\Pi^{i,n+1} &= \left( \frac{9}{2} - \frac{8}{n} + \frac{2}{n^2} \right) p_i & \Pi^{n+1,n+1} &= \left( \frac{7}{2} - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2} \right) \\
& \quad \times (p_1^2 + \dots + p_n^2)^{-\frac{2}{n}}, & & \times (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{1 - \frac{2}{n}}; \\
d\varphi^2 &= 2 \frac{dp_1^2 + dp_2^2 + \dots + dp_n^2}{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)}.
\end{aligned}$$

**24. LE TENSEUR  $K^{ij}$  ET LA RÉGULARITÉ DE L'ESPACE.** — Revenons à la formule symétrique (12.21)

$$K^{ij} = \frac{L}{g\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{L^j}{\sqrt{g}} \Lambda_j - \Lambda^i \Lambda^j + \frac{L^j}{\sqrt{g}} \Lambda^i - \frac{L}{4g^{\frac{3}{2}}} \Lambda_k \frac{\partial^3 L^2}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} + W^j.$$

En s'appuyant sur le fait que  $\frac{\partial^2 L^2}{\partial u_i \partial u_j}$  est homogène et de degré zéro en  $u_k$ , on a

$$\frac{L}{4g^{\frac{3}{2}}} \Lambda_k \frac{\partial^3 L^2}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} = \frac{L(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}}{\sqrt{2ng^{\frac{3}{2}}}} \frac{\partial^3 L^2}{\partial u_i \partial u_j \partial u_{n+1}},$$

et

1°  $i \neq j \neq n+1$

$$K^{ij} = 2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{11}{4} \right) p_i p_j (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{-1 - \frac{2}{n}};$$

2°  $i = j \neq n+1$

$$K^{ii} = 2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{11}{4} \right) p_i^2 (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{-1 - \frac{2}{n}} 3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \\ \times (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{-\frac{2}{n}};$$

3°  $i \neq n+1, j = n+1$

$$K^{i,n+1} = \left( \frac{9}{2} - \frac{8}{n} + \frac{2}{n^2} \right) p_i (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{-\frac{2}{n}};$$

4°  $i = j = n+1$

$$K^{n+1,n+1} = \left( \frac{7}{2} - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2} \right) (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)^{1 - \frac{2}{n}}.$$

Le calcul du déterminant  $\Delta = |K^{ij}|$  révèle la régularité de l'espace hyperharmonique dans la connexion euclidienne (G — E). En effet,

complètement explicité, il se met sous la forme

$$\left| \begin{array}{cccc} 2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{4}{n} + \frac{11}{4}\right)p_1^2 \alpha^{-1-\frac{2}{n}} + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\alpha^{-\frac{2}{n}} & \dots & 2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{4}{n} + \frac{11}{4}\right)p_1 p_j \alpha^{-1-\frac{2}{n}} & \dots \left(\frac{9}{2} - \frac{8}{n} + \frac{2}{n^2}\right)p_1 \alpha^{-\frac{2}{n}} \\ 2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{4}{n} + \frac{11}{4}\right)p_1 p_2 \alpha^{-1-\frac{2}{n}} & \dots & 2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{4}{n} + \frac{11}{4}\right)p_2 p_j \alpha^{-1-\frac{2}{n}} & \dots \left(\frac{9}{2} - \frac{8}{n} + \frac{2}{n^2}\right)p_2 \alpha^{-\frac{2}{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{4}{n} + \frac{11}{4}\right)p_1 p_j \alpha^{-1-\frac{2}{n}} & \dots & 2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{4}{n} + \frac{11}{4}\right)p_j^2 \alpha^{-1-\frac{2}{n}} & \dots \left(\frac{9}{2} - \frac{8}{n} + \frac{2}{n^2}\right)p_j \alpha^{-\frac{2}{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{9}{2} - \frac{8}{n} + \frac{2}{n^2}\right)p_1 \alpha^{-\frac{2}{n}} & \dots & \left(\frac{9}{2} - \frac{8}{n} + \frac{2}{n^2}\right)p_j \alpha^{-\frac{2}{n}} & \dots \left(\frac{7}{2} - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}\right)\alpha^{-1-\frac{2}{n}} \end{array} \right|$$

avec  $\alpha = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2$ .

Multiplions la 1<sup>re</sup> ligne par  $p_2$ , la 2<sup>ième</sup> par  $p_1$  et ajoutons-les termes à termes. Il vient

$$\Delta = \frac{1}{p_2} \Delta^1,$$

où  $\Delta^1$  est le déterminant obtenu en substituant à la première ligne de  $\Delta$  les éléments

$$3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)p_2 \alpha^{-\frac{2}{n}}, \quad -3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)p_1 \alpha^{-\frac{2}{n}}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \dots, \quad 0.$$

Additionnons aux éléments de la 1<sup>re</sup> colonne de  $\Delta^1$ , les éléments des 2<sup>ième</sup>, 3<sup>ième</sup>, ...,  $n$ <sup>ième</sup> colonnes respectivement multipliés par  $p_2, p_3, \dots, p_n$ . On obtient

$$\Delta = \frac{3}{p_2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \alpha^{-\frac{4}{n}} \Delta^2.$$

Pour résoudre le déterminant  $\Delta^2$ , procédons de la manière suivante :

Des éléments de la 1<sup>re</sup> ligne multipliés par  $p_3$  soustrayons les éléments correspondants de  $L_2$  multipliés par  $p_2$ . On a

$$\Delta = \frac{3^2}{p_3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 \alpha^{-\frac{6}{n}} \Delta^3.$$

Opérant de même sur les déterminants successifs  $\Delta^i$  ainsi obtenus, on



trouve

$$\Delta = \frac{-3^{n-1}}{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) x^{1-\frac{1}{n}} \left( \frac{16}{n^3} - \frac{64}{n^2} + \frac{126}{n} - 17 \right),$$

d'où  $\Delta \neq 0$  pour  $n > 2$ .

De là, la nullité des coefficients  $\Gamma_{i,k}^j$  qui déterminent la connexion euclidienne (G—E). La connexion de M. É. Cartan réalise donc, dans le cas particulier de l'espace hyperharmonique, l'autoparallélisme des courbes extrémales. Ainsi nous tenons un exemple concret d'espace C à connexion euclidienne (G—E) tiré de la généralisation de l'intégrale double  $\iint (p^2 + q^2) dx dy$  qui intervient dans la démonstration du principe de Dirichlet. Il faut y voir un schème relativement simplifié qui souligne l'opportunité du problème que nous nous sommes posé initialement.

D'autre part, la coïncidence de la connexion de M. É. Cartan et de la connexion euclidienne (G—E) subsiste pour les espaces plus généraux basés sur des intégrales du type

$$\int F(p_1, p_2, \dots, p_n) dx^1 dx^2 \dots dx^n,$$

dont les matrices  $|K^{ij}|$  et  $|H^{ij}|$  sont différentes de zéro.

Il est très remarquable que l'intégrale double

$$\iint \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy$$

rentre dans ce cadre; ce qui établit la possibilité de fonder la géométrie différentielle ordinaire de l'espace sur la donnée de l'élément d'aire et l'autoparallélisme des courbes extrémales.

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

BERWALD (L.) et FUNK (P.). — *Flächeninhalt und Winkel in der Variationsrechnung.* (Lotos, Prag, 67, 1920).

BERWALD (L.). — *Parallelübertragung in allgemeinen Räumen* (Atti Congresso intern. Matem. Bologna, 1928, 4).

- *Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus* (*Math. Zeitschrift*, **25**, 1926).
  - — *Über Finslersche und Cartansche Géométrie. I.*  
*Geometrische Erklärungen der Krümmung und des Hauptskalars eines zweidimensionalen Finslerschen Raumes* (*Mathematica, Cluj*, **16**, 1940).
  - *Über Finslersche und Cartansche Géométrie. II. Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale und Parallelhyperflächen in Cartanschen Räumen* (*Compositio Mathematica*, vol. **7**, 1939).
- BIANCHI (L.). — *Lezioni di geometria differenziale*. (Vol. II, 1923).
- CARTAN (É.). — *La Géométrie des espaces de Riemann* (*Mémoires des sciences math.*, Fasc. IX, 1925).
- *Sur les espaces de Finsler* (*Comptes rendus*, 196, 1933).
  - [1] *Les espaces de Finsler* (*Actualités scientifiques*, **72**).
  - [2] *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire* (*Actualités scientifiques*, **79**).
  - [5] *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (*Cahiers scientifiques* Fasc. II, 1928).
  - [3] *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés*. *Actualités scientifiques*, **194**, 1935).
  - *Leçons sur les invariants intégraux* (*Paris, Hermann*, 1922).
  - *Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces généralisés* (*Mathematica*, **4**, 1930).
  - *La théorie des groupes et les recherches récentes de la géométrie différentielle* (*L'enseignement math.*, 1925).
  - *La théorie des groupes et la géométrie* (*L'enseignement math.*, 1927).
  - *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*. (*Ann. Ec. Norm.*, t. **40**, **41**, **42**).
  - *Le parallélisme absolu et la théorie unitaire du champ* (*Actualités scientifiques*, **44**, 1932).
  - *La Théorie des Groupes finis et continus et la Géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile* (*Cahiers scientifiques*, XVIII, 1937).
  - *Leçons sur la Théorie des Espaces à connexion projective* (*Cahiers scientifiques*, XVII, 1937).
- DONDER (TH. DE). — *Théorie invariante du Calcul des Variations*. (*Bull. Acad. de Belgique*, 1929).
- *Théorie des Invariants Intégraux* (Paris Gauthier-Villars. 1927).

- FINSLER (P.). — *Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen* (Dissert. Göttingen, 1918).
- KOSCHMIEDER (M. L.). — *Über zwei bei der Variation der Doppelintegrale auftretende Invarianten.*  
(*Math. Ann.*, 94, 1925; *Math. Zeitsch.*, 24, 1925; *Math. Zeitsch.*, 24, 1926; *Proc. Akad.*, 31, 1928).
- LEPAGE (TH.). — *Interprétation géométrique de certains résultats de la théorie des formes symboliques différentielles* (*Bull. de la classe des Sciences*, XVI, 1931).
- LEVI-CIVITA (T.). — *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* (*Rendiconti Circ. mat. Palermo*, 42, 1927).
- RIEMANN (B.). — *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Gesammelte Werke*, 1892).
- SCHOUTEN (J. A.). — [8] *Der Ricci-Kalkül* (Julius Springer, Berlin, 1924).
- SCHOUTEN (J. A.) et HAANTJES (J.). — [9] *Über die Festlegung von allgemeinen Masbestimmungen und Übertragungen in bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten* (*Monatsh. für Mathematik und Physik*, 43, Band.).
- SCHOUTEN (J. A.) et STRUIK (D. J.). — *Einführung in die neueren methoden der differential-geometrie.* (P. Y. Groningen-Noordhoff N. Batavia, 1935).
- SIMONART (F.). — [7] *Leçons d'algèbre.* (Gauthier-Villars, 1934).  
— *Cours de Géométrie Infinitésimale* (Librairie Universitaire, Louvain, 1938).
- SYNGE (S. L.). — *A generalization of the Riemannian Line Element* (*Trans. Am. Math. Soc.* 27, 1925).
- TAYLOR (J. H.). — *A generalization of Levi-Civita's parallelism and the Frenet formulas* (*Trans. Am. Math. Soc.*, 27, 1925).
- VALLÉE POUSSIN (CH.-J.) DE LA. — [4] *Cours d'Analyse Infinitésimale* (Gauthier-Villars, II, 1928).
- WEYL (H.). — [6] *Temps, Espace, Matière.* (Trad. P. Juvet et R. Leroy, Paris, Blanchard, 1922).

