

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N. ARONSZAJN

Recherches sur les fonctions harmoniques dans un carré

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 27 (1948), p. 87-175.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1948_9_27__87_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Dédié à la mémoire
de G. H. HARDY.

*Recherches sur les fonctions harmoniques
dans un carré;*

PAR N. ARONSZAJN.

Les fonctions harmoniques dans un cercle ont fait l'objet des recherches très nombreuses et approfondies. On a étudié leur développement en série $\frac{a_0}{2} + \Sigma r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$, leur comportement à la frontière du cercle, leurs relations avec la série trigonométrique $\frac{a_n}{2} + \Sigma (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$ etc.

Les fonctions harmoniques dans un carré $|x| < \pi, |y| < \pi$ n'ont presque pas fait l'objet d'études systématiques.

Il nous semble que la raison principale en soit qu'on ne connaisse aucun système maniable, orthogonal et complet, des fonctions harmoniques dans un carré.

Dans cet état de choses on est amené à considérer dans le carré des systèmes complets (dans un sens à préciser) de fonctions harmoniques, non orthogonaux. Vu la forme particulière du carré, les fonctions harmoniques les plus simples à y étudier sont de la forme $\varphi(x)\psi(y)$. Le système complet le plus simple de telles fonctions, apparenté au système trigonométrique, est le système

$$\begin{aligned} (1) \quad & \cos mx \cosh my, \quad \cos mx \sinh my, \quad \sin mx \cosh my, \quad \sin mx \sinh my; \\ (1') \quad & \cos nx \cosh ny, \quad \cosh nx \sin ny, \quad \sinh nx \cos ny, \quad \sinh nx \sin ny. \end{aligned}$$

Les fonctions (1) sont périodiques de période 2π en x , tandis que les fonctions (1') sont périodiques en y de période 2π . En posant

$z = x + yi$, nous dirons que les fonctions (1) ont une période 2π , tandis que les fonctions (1') ont une période $2\pi i$.

Le développement d'une fonction harmonique $h(z)$ dans R suivant les fonctions (1) et (1') produit une décomposition

$$(2) \quad h(z) = h_1(z) + h_2(z) \quad \text{pour } z \in R,$$

de la fonction h en somme de deux fonctions harmoniques, l'une étant harmonique et périodique de période 2π dans la bande horizontale $|y| < \pi$, l'autre étant harmonique et périodique de période $2\pi i$ dans la bande verticale $|x| < \pi$.

Le but du présent travail est d'étudier les décompositions (2) et les développements en fonctions (1) et (1') qui s'ensuivent.

Le travail est divisé en cinq sections. La section I est consacrée aux diverses propriétés des fonctions harmoniques périodiques et doublement périodiques, utilisées au cours du travail.

Dans la sections II nous nous occupons du problème (P) qui consiste à trouver des décompositions (2) pour un h harmonique dans R , mais d'ailleurs quelconque. Nous y prouvons l'existence d'une telle décomposition (théorème 10) en construisant une décomposition analogue pour la fonction analytique $f(z)$ avec $h = \operatorname{Re} f$. A la fin de cette section (voir paragraphe 13), nous remarquerons que les méthodes y employées permettent de déduire des formules explicites pour les composantes dans le cas de f continu dans le carré fermé \bar{R} . Ces formules permettent d'analyser le comportement des composantes près de la frontière du carré.

Dans la section III nous considérons le problème (P) pour les fonctions h qui sont L dans R ⁽¹⁾. En appliquant un lemme de Zaremba (théorème 15) au développement de h en double série de Fourier nous obtenons une condition nécessaire et suffisante en termes des coefficients de Fourier pour qu'une fonction arbitraire h soit équivalente à une fonction harmonique (théorème 17). Pour h harmonique nous y trouvons un développement en fonctions de (1) et (1') donc une décomposition (2) (corollaire 19). Nous trouvons de plus la

(1) Nous disons qu'une fonction est L^p dans R si elle est de $p^{\text{ième}}$ puissance sommable dans R . Nous écrivons L pour L^1 .

forme des composantes h_1, h_2 qui sont L^p dans R ($p \geq 1$), s'il en existe une paire (théorème 20). Nous obtenons des développements différents suivant le type $\{\mu, \nu\}$ de la fonction h . (La fonction h est dite du type $\{\mu, \nu\}$, si elle est de parité μ en x et ν en y . Nous ne considérons que les types $\{0, 0\}$, $\{0, 1\}$ et $\{1, 1\}$, car le type $\{1, 0\}$ est complètement analogue à $\{0, 1\}$). A la fin de cette section (paragraphe 18) nous appliquons les résultats obtenus pour trouver les décompositions des fonctions h aux premières dérivées bornées dans R et pour analyser le comportement des composantes près de la frontière. Il se montre que ce comportement dépend du type de la fonction. Comme conséquence de cette analyse, on trouve que les composantes sont L^p dans R pour tous $p < \infty$, mais ne sont pas en général continues dans le carré fermé \bar{R} , même, en général, ne sont pas bornées dans R (pour le type $\{0, 0\}$).

La section IV est consacrée aux fonctions h, L^2 dans R , et au problème (P^2) de trouver une décomposition (2) pour une telle fonction h avec h_1 et $h_2 L^2$ dans R . Nous montrons (voir théorème 24) que ce problème est toujours soluble pour les types $\{0, 0\}$ et $\{1, 1\}$, tandis que pour le type $\{0, 1\}$ nous donnons un exemple montrant que pour ce type le problème $\{P^2\}$ n'est pas toujours soluble.

Nous trouvons ensuite des propriétés caractéristiques des coefficients de Fourier d'une fonction h quand le problème (P^2) est soluble (théorème 25 et 25'). Nous étudions des fonctions particulières obtenues par l'intégration de h (voir § 22) et les utilisons pour obtenir une expression de la constante γ figurant dans les coefficients du développement des composantes h_1 et h_2 de h suivant les fonctions (1) et (1') respectivement (voir formules à la fin du paragraphe 16).

La dernière section est formée des paragraphes séparés contenant des compléments au texte et des remarques sur différentes généralisations et extensions de nos considérations.

Le paragraphe 25 donne certaines propriétés des coefficients de Fourier et des composantes des fonctions harmoniques L^2 de type $\{0, 1\}$, pour lesquelles le problème (P^2) n'est pas soluble (quand il est soluble des propriétés plus fortes sont données dans le théorème 25').

Le paragraphe **24** pose le problème (P^p) analogue à (P^2) pour les fonctions harmoniques L^p . Nous y montrons qu'une fonction harmonique h , L^p dans R , $1 \leq p \leq 2$, admet toujours une décomposition à la (2) avec h_1 et h_2 L^q dans R pour tout q avec $0 < q < \frac{2p}{4-p}$, mais ce résultat est loin de donner une solution du problème (P^p) .

Le paragraphe **25** donne une interprétation abstraite des problèmes (P^p) les transformant en des problèmes concernant des sous-espaces linéaires fermés des espaces L^p . Ceci les met en connexion avec un théorème général de H. Kober ⁽¹⁾. Ce théorème permet de donner une explication heuristique de la différence entre le type $\{0, 1\}$ et les types $\{0, 0\}$ et $\{1, 1\}$ à l'égard du problème (P^2) . On est ainsi amené à une méthode permettant de prouver que le problème (P^1) n'est pas toujours soluble pour les types $\{0, 0\}$ et $\{1, 1\}$.

Le paragraphe **26** étend nos considérations aux rectangles et parallélogrammes dans le plan, tandis que le paragraphe **27** les étend aux cubes dans l'espace. Enfin, le paragraphe **28** montre comment traiter par nos méthodes, un genre spécial de développement des fonctions harmoniques dans le carré R , lié avec la solution du problème de Dirichlet dans ce carré.

Le présent Mémoire devait inclure initialement les résultats du travail *Properties of a class of double integrals* (*Annals of Math.*, 46, 1945, p. 220-241) écrit en commun par feu le professeur G.-H. Hardy et l'auteur. Ce travail sera désigné dans la suite par H.-A.

Les résultats de H.-A. étaient à la base des démonstrations primitives de la section IV du présent Mémoire. Mais, avant même que ces résultats en aient été complètement rédigés, l'auteur avait pu trouver des démonstrations plus directes pour les théorèmes de cette section. Il est apparu alors que les résultats de H.-A. seraient beaucoup mieux mis en valeur dans un travail séparé.

Il est pourtant à souligner que, même dans la version actuelle, les considérations de la section IV présentent bien des empreintes de la collaboration avec le professeur Hardy (*voir* les remarques à ce sujet dans le texte).

⁽¹⁾ Voir H. KOBER, *Compositio Mathem.*, 7, 1940.

De plus, le théorème principal de H.-A, (théor. 1) se montre indispensable pour les résultats partiels donnés dans les paragraphes 23 et 24 de la section V.

I. — Fonctions harmoniques périodiques.

1. — Nous commençons par la considération d'une fonction harmonique $h(z) = h(x + iy)$, régulière et périodique de période $2a$ ($a > 0$) dans la bande

$$(1.1) \quad -\infty < x < +\infty, \quad |y| < b.$$

Par des raisonnements classiques, soit en développant $h(x + iy)$ en une série de Fourier pour $y = \text{const.}$, soit en développant la fonction analytique $f(z)$, dont $h(z)$ est la partie réelle, en série des exponentielles $e^{\frac{i\pi nz}{a}}$, on aboutit au théorème suivant

THÉORÈME 1. — *Toute fonction $h(z)$ harmonique et périodique de période $2a$ dans la bande (1, 1) est représentable sous la forme*

$$(1.2) \quad h(z) = \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{\pi nx}{a} \cosh \frac{\pi ny}{a} \right] \\ + \left[\frac{\alpha'_0}{2} y + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n \cos \frac{\pi nx}{a} \sinh \frac{\pi ny}{a} \right] \\ + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{\pi nx}{a} \cosh \frac{\pi ny}{a} \right] + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \beta'_n \sin \frac{\pi nx}{a} \sinh \frac{\pi ny}{a} \right],$$

où chaque série est absolument et uniformément convergente dans toute bande $|y| \leq b' < b$.

2. Afin d'abrégier les énoncés et simplifier l'écriture nous introduisons les notions et notations suivantes. Soit D un domaine admettant pour axes de symétrie les axes des coordonnées (par exemple le rectangle $|x| < a$, $|y| < b$, ou la bande (1, 1), etc.). Nous dirons qu'une fonction $h(z)$ définie dans D est du type $\{\mu, \nu\}$, $\mu = 0, 1$, $\nu = 0, 1$, si $h(z)$ est de parité μ en x et ν en y .

Il est clair que toute fonction $h(z)$ peut être décomposée, et d'une

seule manière, en somme

$$(2.1) \quad h = h_{00} + h_{01} + h_{10} + h_{11},$$

où $h_{\mu\nu}$ est du type $\{\mu, \nu\}$. On a

$$(2.2) \quad h_{\mu\nu}(z) = \frac{1}{4} \sum_{k=0,1} \sum_{l=0,1} (-1)^{\mu k + \nu l} h((-1)^k x + i(-1)^l y).$$

Si $h(z)$ est harmonique, les $h_{\mu\nu}$ le sont également.

Posons

$$(2.3) \quad e_{\mu\nu}(z) = \frac{(-1)^\nu}{4 i^\mu} \sum_{k=0,1} \sum_{l=0,1} (-1)^{\mu k + \nu l} e^{i((-1)^k x + i(-1)^l y)}.$$

On a

$$(2.4) \quad e^{iz} = e_{00}(z) - e_{01}(z) + i e_{10}(z) - i e_{11}(z),$$

$$(2.5) \quad \begin{cases} e_{00}(z) = \cos x \cosh y, & e_{01}(z) = \cos x \sinh y; \\ e_{10}(z) = \sin x \cosh y, & e_{11}(z) = \sin x \sinh y. \end{cases}$$

Posons encore

$$(2.6) \quad c_{00}(z) = 1, \quad c_{01}(z) = y, \quad c_{10}(z) = c_{11}(z) = 0.$$

Le théorème 1 est alors équivalent au suivant :

THÉORÈME 1'. — *Toute fonction $h_{\mu\nu}(z)$ de type $\{\mu, \nu\}$, harmonique et périodique de période $2a$ dans la bande $-\infty < x < +\infty$, $|y| < b$, est développable en série*

$$(2.7) \quad h_{\mu\nu}(z) = \frac{1}{2} \alpha_{\mu\nu}^{(0)} c_{\mu\nu}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\mu\nu}^{(n)} e_{\mu\nu}\left(\frac{\pi n z}{a}\right),$$

cette série étant uniformément et absolument convergente dans toute bande $|y| \leq b' < b$.

Il est clair que les coefficients $\alpha_{\mu\nu}^{(n)}$ remplacent ici les α_n , α'_n , β_n et β'_n du N^o 1 et que pour $\mu = 1$ $\alpha_{1,\nu}^{(0)} = 0$.

3. Les fonctions

$$(3.1) \quad c_{0\nu}(z), \quad e_{\mu\nu}\left(\frac{\pi n z}{a}\right) \quad (\mu = 0, 1; \nu = 0, 1; n = 1, 2, \dots),$$

forment visiblement un *système orthogonal* dans le rectangle $|x| < a$, $|y| < b$ c'est-à-dire que si $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont deux fonctions différentes de ce système, on a

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi(z) \psi(z) dx dy = 0.$$

On a de plus le

THÉORÈME 2. — *Le système (5, 1) est complet dans la classe de toutes les fonctions $h(z)$ harmoniques et périodiques de période $2a$ dans la bande $|y| < b$, qui sont L (c'est-à-dire sommables) dans le rectangle $|x| < a$, $|y| < b$.*

Ceci veut dire que si pour une telle fonction

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b h(z) \varphi(z) dx dy = 0,$$

pour toute fonction $\varphi(z)$ du système (5, 1), $h(z)$ est identiquement nulle.

En décomposant $h(z)$ suivant (2, 1) on trouve des fonctions $h_{\mu\nu}$ de type $\{\mu, \nu\}$ qui clairement satisfont aux conditions du théorème 2 et, en particulier, appartiennent à L. La fonction $h_{\mu\nu}$ étant orthogonale à toute fonction de (5, 1) de type différent, on voit que le théorème 2 est équivalent à

THÉORÈME 2'. — *Le système*

$$(3.2) \quad e_{\mu\nu}(z), \quad e_{\mu\nu}\left(\frac{\pi n z}{a}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

est complet dans la classe de toutes les fonctions $h_{\mu\nu}(z)$ du type $\{\mu, \nu\}$, harmoniques et périodiques de période $2a$ dans la bande $|y| < b$ et qui sont L dans $|x| < a$, $|y| < b$.

La preuve de ce théorème est immédiate. En effet, vu le théorème 1',

on a

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \int_{-b}^b h_{\mu\nu}(z) e_{\mu\nu}\left(\frac{\pi n z}{a}\right) dx dy &= \lim_{b' \rightarrow b} \int_{-b'}^{b'} dy \int_{-a}^a h_{\mu\nu}(z) e_{\mu\nu}\left(\frac{\pi n z}{a}\right) dx \\ &= \alpha_{\mu\nu}^{(n)} \lim_{b' \rightarrow b} \int_{-b'}^{b'} dy \int_{-a}^a \left(e_{\mu\nu}\left(\frac{\pi n z}{a}\right) \right)^2 dx \\ &= \alpha_{\mu\nu}^{(n)} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(e_{\mu\nu}\left(\frac{\pi n z}{a}\right) \right)^2 dx dy. \end{aligned}$$

De même, pour $\mu = 0$,

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b h_{0\nu}(z) c_{0\nu}(z) dx dy = \alpha_{0\nu}^{(0)} \int_{-a}^a \int_{-b}^b (c_{0\nu}(z))^2 dx dy.$$

Donc, si $h_{\mu\nu}$ est orthogonal à toutes les fonctions de (3.2), tous les $\alpha_{\mu\nu}^{(n)}$ sont nuls et suivant le théorème 1', $h_{\mu\nu} = 0$.

4. THÉORÈME 3. — *Pour qu'une fonction $h(z)$ harmonique et périodique de période $2a$ dans la bande $|y| < b$ soit L^2 (c'est-à-dire de carré sommable) dans le rectangle $|x| < a$, $|y| < b$, il faut et il suffit que*

$$(4.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{\mu\nu}^{(n)})^2 \frac{e^{\frac{2\pi n b}{a}}}{n} < \infty \quad \text{pour } \mu = 0, 1, \nu = 0, 1,$$

où $\alpha_{\mu\nu}^{(n)}$ sont les coefficients du développement (2.7) du composant $h_{\mu\nu}(z)$ de $h(z)$.

Premièrement, pour que $h(z)$ soit L^2 , il faut et il suffit que chacun des $h_{\mu\nu}(z)$ le soit comme il vient immédiatement de (2.1) et (2.2).

Ensuite, (2.7) étant un développement suivant le système orthogonal (3.2) dont les fonctions sont L^2 , il s'ensuit des propriétés générales de tels développements que

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \int_{-b}^b (h_{\mu\nu})^2 dx dy &= \frac{1}{4} (\alpha_{\mu\nu}^{(0)})^2 \iint (c_{\mu\nu})^2 dx dy \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{\mu\nu}^{(n)})^2 \iint \left(e_{\mu\nu}\left(\frac{\pi n z}{a}\right) \right)^2 dx dy, \end{aligned}$$

et, vu que l'on a l'égalité asymptotique

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(e_{\mu\nu} \left(\frac{\pi n z}{a} \right) \right)^2 dx dy \sim \frac{a^2}{4\pi n} e^{\frac{2\pi n b}{a}},$$

la nécessité et la suffisance de (4.2) en résulte immédiatement.

On ne connaît pas des conditions nécessaires et suffisantes pour les classes L^p , $p \neq 2$. Ajoutons une condition nécessaire pour la classe L .

THÉORÈME 4. — *Avec les notations du théorème 3, pour que $h(z)$ soit L dans le rectangle $|x| < a$, $|y| < b$, il faut que*

$$(4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{\mu\nu}^{(n)} \frac{e^{\frac{\pi n b}{a}}}{n} = 0.$$

En effet, $h_{\mu\nu}$ étant L dans le rectangle, la fonction

$$\chi_{\mu\nu}(x) = \int_0^b h_{\mu\nu}(z) dy$$

est L dans $-a < x < a$. Ses $n^{\text{ièmes}}$ coefficients de Fourier pour $n \geq 1$ sont, si l'on prend par exemple χ_{01} ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_{-a}^a \chi_{01}(x) \cos \frac{\pi n x}{a} dx &= \frac{1}{a} \int_0^b dy \int_{-a}^a h_{01}(z) \cos \frac{\pi n x}{a} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^b \alpha_{01}^{(n)} a \sinh \frac{\pi n y}{a} dy = a \alpha_{01}^{(n)} \frac{\cosh \frac{\pi n b}{a} - 1}{\pi n}, \end{aligned}$$

et (4.2) en résulte d'après le théorème de Riemann-Lebesgue.

On procède de même pour tous les autres types $\{\mu, \nu\}$.

5. En considérant les fonctions entières

$$(5.1) \quad \begin{cases} 1 = c_{00}(z), & -iz = c_{01}(z) - ix, \\ \cos z = e_{00}(z) - i e_{11}(z), & \sin z = e_{10}(z) + i e_{01}(z); \end{cases}$$

on trouve facilement les propositions suivantes :

1° *La fonction harmonique du type $\{\mu, \nu\}$*

$$h_{\mu\nu}(z) = \frac{1}{2} \alpha_{\mu\nu}^{(0)} e_{\mu\nu}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\mu\nu}^{(n)} e_{\mu\nu} \left(\frac{\pi n z}{a} \right)$$

possède comme fonction conjuguée la fonction du type $\{1 - \mu, 1 - \nu\}$

$$(5.2) \quad g_{1-\mu, 1-\nu}(z) = \frac{1}{2} \alpha_{\mu\nu}^{(0)} d_{1-\mu, 1-\nu}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\mu\nu}^{(n)} (-1)^{1-\mu} e_{1-\mu, 1-\nu} \left(\frac{\pi n z}{a} \right),$$

où

$$(5.3) \quad d_{0,0}(z) = d_{01}(z) = d_{11}(z) = 0, \quad d_{10}(z) = -x.$$

2° La fonction conjuguée (5.2) est harmonique et périodique de période $2a$ dans la même bande $|y| < a$ dans laquelle $h_{\mu\nu}$ l'est, sauf pour $\mu = 0, \nu = 1$ et $\alpha_{01}^{(0)} \neq 0$, quand $g_{10}(z)$ au lieu d'être périodique est quasi périodique dans le sens que

$$(5.4) \quad g_{1,0}(z + 2a) - g_{1,0}(z) = -a\alpha_{01}^{(0)}.$$

3° Une fonction $h(z)$ harmonique et périodique de période $2a$ dans la bande $|y| < b$ possède pour fonction conjuguée une fonction quasi périodique de même période $2a$.

6. Nous passons maintenant aux fonctions harmoniques doublement périodiques.

THÉORÈME 5. — Soit $h(z)$ une fonction harmonique dans les deux bandes

$$(6.1) \quad -\infty < x < +\infty, \quad |y| < b \quad \text{et} \quad |x| < a, \quad -\infty < y < \infty.$$

Soit de plus $h(z)$ périodique de période $2a$ dans la bande horizontale $|y| < b$ et périodique de période $2ib$ dans la bande verticale $|x| < a$. Dans ces conditions : 1° $h(z)$ est prolongeable analytiquement de manière uniforme dans tout le plan à l'exception des points $a(2m+1) + ib(2n+1)$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) et est doublement périodique des périodes $2a$ et $2bi$; 2° $h(z)$ est la partie réelle d'une fonction analytique $f(z)$, uniforme et régulière dans tout le plan à l'exception des points $a(2m+1) + ib(2n+1)$, doublement quasi périodique des périodes $2a$ et $2bi$.

Démonstration. — 1° Les points $a(2m+1) + ib(2n+1)$ sont les sommets d'un réseau de rectangles. On définit $h(z)$ à l'intérieur de

ces rectangles en posant

$$(6.2) \quad \begin{cases} h(z + 2ma + 2nbi) = h(z) & \text{pour } |x| < a, \quad |y| < b \\ (m, n = \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases}$$

L'harmonie et la périodicité de $h(z)$ dans les bandes (6.1) a pour conséquence que h et ses dérivées se raccordent le long des côtés de ces rectangles, à l'exception éventuelle des sommets. Sauf pour $h(z) = \text{const.}$, ces sommets sont des points singuliers, car autrement, vu la double périodicité, $h(z)$ serait régulier et borné dans tout le plan, ce qui est impossible pour h non constant.

2° Considérons d'abord la fonction harmonique $g(z)$ conjuguée de $h(z)$ dans le domaine formé par les deux bandes (6.1). Suivant 3° du n° 5 (qui peut clairement être appliqué à la bande verticale aussi), $g(z)$ est quasi périodique dans chacune de ces bandes aux périodes $2a$ et $2bi$, soit

$$(6.3) \quad \begin{cases} g(z + 2a) - g(z) = \alpha & \text{pour } |y| < b, \\ g(z + 2bi) - g(z) = \beta & \text{» } |x| < a. \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction

$$(6.4) \quad g_1(z) = g(z) - \frac{\alpha x}{2a} - \frac{\beta y}{2b}$$

est harmonique dans les deux bandes et *périodique* des périodes $2a$ et $2bi$. En appliquant la première partie de notre théorème à $g_1(z)$, on trouve que $g(z) = g_1(z) + \frac{\alpha}{2a}x + \frac{\beta}{2b}y$ et

$$(6.5) \quad f(z) = h(z) + ig_1(z)$$

sont prolongeables de manière uniforme dans tout le plan à l'exception des sommets $a(2m+1) + ib(2n+1)$, $f(z)$ est doublement quasi périodique vu les propriétés similaires de $h(z)$ et $g(z)$.

7. THÉORÈME 6. — Soit $h(z)$ une fonction harmonique uniforme et régulière dans tout le plan à l'exception des points

$$(7.1) \quad a(2m+1) + ib(2n+1) \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

et soit de plus $h(z)$ doublement périodique des périodes $2a$ et $2bi$.



1° Si $|z - a - bi|^3 h(z) \rightarrow 0$ avec $|z - a - bi|$, alors

$$h(z) = \operatorname{Re}(c_p(z - a - bi) + c_0 \zeta(z - a - bi) + c_1 z + c_2),$$

où c, c_0, c_1, c_2 , sont des constantes complexes et p et ζ sont les fonctions elliptiques de Weierstrass aux périodes $2a$ et $2bi$.

2° Si $|z - a - bi|^2 h(z) \rightarrow 0$ avec $|z - a - bi|$, alors

$$h(z) = \operatorname{Re}(c_0 \zeta(z - a - bi) + c_1 z + c_2),$$

où c_0, c_1 et c_2 sont des constantes complexes.

3° Si $|z - a - bi| \cdot h(z) \rightarrow 0$ avec $|z - a - bi|$, alors

$$h(z) = \text{const.}$$

Démonstration. — D'après la partie 2° du théorème 5

$$(7.2) \quad h(z) = \operatorname{Re} f(z),$$

où $f(z)$ est analytique, *uniforme* et régulière en dehors des points (7.1), doublement quasi périodique aux périodes $2a$ et $2bi$. Le développement de Laurent de $f(z)$ autour du point singulier isolé $a + bi$ peut être écrit comme suit

$$(7.3) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n\theta + \alpha_n)},$$

où $z - a - bi = r e^{i\theta}$, $a_n \geq 0$, α_n réel.

Si maintenant pour un $\tau = 1, 2, 3$,

$$(7.4) \quad |z - a - bi|^\tau h(z) \rightarrow 0 \quad \text{pour } z \rightarrow a + bi.$$

on trouve, pour $r > 0$ et suffisamment petit,

$$(7.5) \quad r^{2\tau} \int_0^{2\pi} h^2(a + bi + r e^{i\theta}) d\theta \\ = r^{2\tau} \pi \left\{ 2 a_0^2 \cos^2 \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{-n}^2 r^{-2n} + a_n^2 r^{2n} + 2 a_n a_{-n} \cos(\alpha_n + \alpha_{-n})] \right\}.$$

Le membre gauche de (7.5) converge vers 0 avec r et la série du membre droit se compose des termes positifs []. Par conséquent

$$r^{2\tau} [a_{-n}^2 r^{-2n} + a_n^2 r^{2n} + 2 a_n a_{-n} \cos(\alpha_n + \alpha_{-n})] \rightarrow 0 \quad \text{avec } r.$$

Il s'ensuit que

$$(7.6) \quad a_{-n} = 0 \quad \text{pour } n \geq \tau.$$

Cas 1° $\tau = 3$. — De (7.3) et (7.6) résulte que la partie principale de $f(z)$ au point $a + bi$ est

$$a_{-2} e^{i\alpha_{-2}} \frac{1}{(z - a - bi)^2} + a_{-1} e^{i\alpha_{-1}} \frac{1}{(z - a - bi)}.$$

Par conséquent, la fonction

$$(7.7) \quad f(z) - a_{-2} e^{i\alpha_{-2}} p(z - a - bi) - a_{-1} e^{i\alpha_{-1}} \zeta(z - a - bi)$$

est une fonction doublement quasi périodique de périodes $2a$ et $2bi$ et régulière dans tout le plan. Une telle fonction est nécessairement $= c_1 z + c_2$ (sa dérivée étant doublement *périodique*). On trouve ainsi

$$(7.8) \quad f(z) = a_{-2} e^{i\alpha_{-2}} p(z - a - bi) + a_{-1} e^{i\alpha_{-1}} \zeta(z - a - bi) + c_1 z + c_2,$$

ce qui prouve notre thèse dans le cas 1°.

Cas 2° $\tau = 2$. — L'hypothèse est plus forte que dans le cas 1°, donc (7.8) a lieu avec $a_{-2} = 0$ [d'après (7.6)], ce qui prouve la thèse dans le cas 2°.

Cas 3° $\tau = 1$. Encore (7.8) est vrai, avec $a_{-2} = a_{-1} = 0$. Si $c_1 = \gamma + i\gamma' \neq 0$, la fonction

$$h(z) = \operatorname{Re} f(z) = \gamma x - \gamma' y + \text{const.}$$

ne pourrait pas être doublement *périodique* avec les périodes $2a$ et $2bi$. Donc $c_1 = 0$, ce qui prouve notre assertion.

Les fonctions considérées dans le théorème 6 sont donc de la forme

$$(7.9) \quad h(z) = \operatorname{Re}[c p(z - a - bi) + c_0 z(z - a - bi) + c_1 z + c_2].$$

Toutes les fonctions de cette forme sont doublement *quasi périodiques*. Comme complément au théorème 6 nous prouvons le

THÉORÈME 6'. — *Pour qu'une fonction de la forme (7.9) soit doublement périodique il faut et il suffit que*

$$(7.10) \quad c_1 = -\frac{\eta_1}{a} c_0 + \frac{\pi}{4ab} (c_0 - \bar{c}_0),$$

où $\bar{c}_0 = \text{conjugué de } c_0$, et η_1 est donné par la quasi-périodicité de ζ :

$$\zeta(z + 2a) - \zeta(z) = 2\eta_1.$$

En effet, $c_1 p(z - a - bi)$ et $c_2 z$ sont doublement périodiques tandis que $c_0 \zeta(z - a - bi)$ et $c_1 z$ sont doublement quasi-périodiques, vu que ⁽¹⁾

$$(7.11) \quad \begin{cases} \zeta(z + 2a) - \zeta(z) = 2\eta_1, & (z + 2a) - z = 2a, \\ \zeta(z + 2bi) - \zeta(z) = 2\eta_2, & (z + 2bi) - z = 2bi. \end{cases}$$

Il s'ensuit que pour que (7.9) soit doublement périodique il faut et il suffit que

$$(7.12) \quad \operatorname{Re}[c_0 2\eta_1 + c_1 2a] = 0, \quad \operatorname{Re}[c_0 2\eta_2 + c_1 2bi] = 0.$$

Dans notre cas des périodes $2a$ et $2bi$, η_1 et η_2 sont donnés par les formules ⁽²⁾

$$(7.13) \quad \eta_1 = -\frac{\pi^2}{2a} \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sinh^2 \frac{\pi bn}{a}} + \frac{\pi^2}{12a} = \text{nombre réel},$$

$$(7.14) \quad \eta_2 = \left(\frac{b}{a} \eta_1 - \frac{\pi}{2a}\right) i = \text{nombre purement imaginaire}.$$

Par conséquent les équations (7.12) sont équivalentes à (7.10).

C. Q. F. D.

8. LEMME. — Soit $h(z)$ une fonction harmonique régulière et L^p ($p \geq 1$) dans un domaine \mathcal{O} , Si $r(z)$ désigne la plus courte distance du point $z \in \mathcal{O}$ à la frontière de \mathcal{O} , on a

$$(8.1) \quad (r(z))^{\frac{2}{p}} h(z) \rightarrow 0 \quad \text{quand } r(z) \rightarrow 0 \quad (3).$$

En effet, de la formule bien connue

$$h(z) = \frac{1}{\pi(r(z))^2} \iint_{c_z} h(z') dx' dy',$$

⁽¹⁾ En prenant les notations de *Modern Analysis*, 4^e Ed. de Whittaker et Watson que nous désignerons en abrégé W-W.

⁽²⁾ Voir W-W. formules sur pages 437 et 471.

⁽³⁾ Ce lemme, dans le cas $p = 2$ est dû essentiellement à S. Zaremba.

où C_z est le cercle de centre z et de rayon $r(z)$ (donc $C_z \subset \mathcal{D}$), on déduit par l'inégalité de Hölder

$$|h(z)| \leq \frac{1}{\pi(r(z))^2} \left[\iint_{C_z} |h|^p dx' dy' \right]^{\frac{1}{p}} [\pi(r(z))^2]^{1-\frac{1}{p}},$$

$$[\pi(r(z))^2]^{\frac{1}{p}} |h(z)| \leq \left[\iint_{C_z} |h|^p dx' dy' \right]^{\frac{1}{p}},$$

et ceci prouve le lemme, vu que h est L^p dans \mathcal{D} .

THÉORÈME 7. — Soit $h(z)$ une fonction satisfaisant aux conditions du théorème 6.

1° Si $h(z)$ est L dans le rectangle $|x| < a, |y| < b$, on a

$$h(z) = \operatorname{Re}(c_0 \zeta(z - a - bi) + c_1 z + c_2).$$

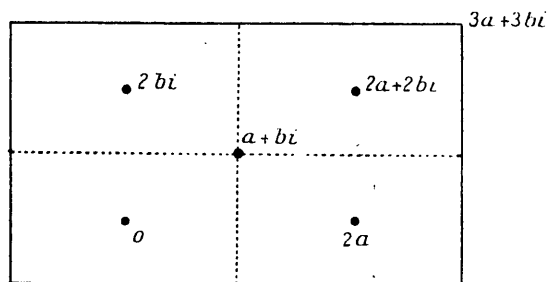
2° Si $h(z)$ est L^2 dans le rectangle $|x| < a, |y| < b$, on a

$$h(z) = \text{const.}$$

Démonstration. — Si $h(z)$ est L^p ($p = 1, 2$) dans le rectangle $|x| < a, |y| < b$, la double périodicité aura pour conséquence que $h(z)$ est L^p également dans les rectangles

$$|x - 2m a| < a, \quad |y - 2n b| < b \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Fig. 1.



Il s'ensuit que $h(z)$ est harmonique et L^p dans le domaine \mathcal{D} formé par le rectangle

$$|x - a| < 2a, \quad |y - b| < 2b,$$

si l'on en enlève le point $a + bi$. En utilisant les notations de

notre lemme, on voit que, pour z dans le voisinage de $a + bi$, $r(z) = |z - a - bi|$ et, d'après le lemme

$$|z - a - bi|^{\frac{2}{p}} h(z) \rightarrow 0 \quad \text{pour } |z - a - bi| \rightarrow 0.$$

Pour $p = 1$ on est dans le cas 2, et pour $p = 2$ on est dans le cas 3 du théorème 6, ce qui prouve le théorème présent.

9. Nous aurons besoin plus tard des développements à la (2, 7) pour les fonctions de chaque type $\{\mu, \nu\}$ figurant parmi les fonctions considérées dans les théorèmes 6 et 6'.

Il s'agit donc des fonctions données par la formule

$$(9.1) \quad h(z) = \operatorname{Re}[c_p(z - a - bi) + c_0 \zeta(z - a - bi) + c_1 z + c_2].$$

avec

$$(9.2) \quad c_1 = -\frac{\eta_1}{a} c_0 + \frac{\pi}{4ab} (c_0 - \bar{c}_0).$$

Notons d'abord deux formules valables dans la bande $-\infty < x < \infty, |y| < b$:

$$(9.3) \quad p(z - a - ib) = -\frac{\eta_1}{a} + \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{\sin h \frac{\pi b n}{a}} \cos \frac{n\pi}{a} z,$$

$$(9.4) \quad \zeta(z - a - ib) = \frac{\eta_1}{a} z - \eta_1 - \eta_2 + \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sin h \frac{\pi b n}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} z.$$

Ces formules s'obtiennent par des transformations faciles de la formule (1)

$$\sigma(z) = \frac{2a}{\pi} e^{\frac{\eta_1 z^2}{2a}} \sin \frac{\pi z}{2a} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - 2e^{-\frac{2\pi b n}{a}} \cos \frac{\pi z}{a} + e^{-\frac{4\pi b n}{a}}}{\left(1 - e^{-\frac{2\pi b n}{a}}\right)^2} \right\},$$

en utilisant les propriétés $\zeta(z) = \frac{d}{dz} \lg \sigma(z)$, $p(z) = -\frac{d}{dz} \zeta(z)$.

(1) Voir W. W. p. 448, exemple 3.

Posons, en nous rappelant des notations du n° 2.

$$(9.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_{00}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{\sinh \frac{\pi b n}{a}} e_{00} \left(\frac{\pi n z}{a} \right), \\ \Phi_{01}(z) &= \frac{-1}{2b} c_{01}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sinh \frac{\pi b n}{a}} e_{01} \left(\frac{\pi n z}{a} \right), \\ \Phi_{10}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sinh \frac{\pi b n}{a}} e_{10} \left(\frac{\pi n z}{a} \right), \\ \Phi_{11}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sinh \frac{\pi b n}{a}} e_{11} \left(\frac{\pi n z}{a} \right). \end{aligned} \right.$$

On vérifie immédiatement que

$$(9.6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_{00}(z) &= \operatorname{Re} \left[\left(\frac{a}{\pi} \right)^2 p(z - a - ib) + \frac{a\eta_1}{\pi^2} \right], \\ \Phi_{01}(z) &= \operatorname{Re} \left[\frac{ai}{\pi} \zeta(z - a - ib) - \frac{a\eta_2}{\pi b} z + \frac{a\eta_2 i}{\pi} \right], \\ \Phi_{10}(z) &= \operatorname{Re} \left[\frac{a}{\pi} \zeta(z - a - ib) - \frac{\eta_1}{\pi} z + \frac{a\eta_1}{\pi} \right], \\ \Phi_{11}(z) &= \operatorname{Re} \left[- \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 i p(z - a - ib) \right]. \end{aligned} \right.$$

Il est clair également que dans (9, 6) les membres droits sont de la forme (9, 1) et se conforment à la condition (9, 2) [pour $\Phi_{01}(z)$ on use (7, 14)]. Il s'ensuit que les $\Phi_{\mu\nu}$ sont doublement périodiques des périodes $2a$ et $2bi$.

On vérifie ensuite, en comparant les formules (9, 1), (9, 2), (9, 5) et (9, 6), le théorème suivant

THÉORÈME 8. — *Parmi les fonctions doublement périodiques de la forme (9, 1), les seules fonctions du type $\{\mu, \nu\}$ sont données par les formules (α et β étant des constantes réelles arbitraires)*

$$(9.10) \quad \begin{cases} \alpha \Phi_{00}(z) + \beta & \text{pour } \{0, 0\}. \\ \alpha \Phi_{\mu\nu}(z) & \text{pour } \{\mu, \nu\} \neq \{0, 0\}. \end{cases}$$

Remarque. — Les fonctions $\alpha\Phi_{00}(z) + \beta$, $\alpha \neq 0$, et $\alpha\Phi_{11}(z)$ appartiennent au cas 1° du théorème 6 sans appartenir au cas 2° et elles ne sont pas L dans R. Les fonctions $\alpha\Phi_{01}(z)$ et $\alpha\Phi_{10}(z)$ appartiennent au cas 2° et sont L^p pour $1 \leq p < 2$, mais ne sont pas L^2 .

10. Le remplacement de x par y et y par x s'écrit en notation complexe comme remplacement de z par $i\bar{z}$.

Convenons de distinguer les fonctions et quantités correspondant aux périodes $2b$ et $2ai$ de celles correspondant aux périodes $2a$ et $2bi$ en les marquant par un accent circonflexe, par exemple $\hat{\zeta}(z)$, $\hat{\eta}_1$, etc.

Considérons la fonction $\Phi_{\mu\nu}(i\bar{z})$. C'est une fonction satisfaisant aux conditions du théorème 6 relatives aux périodes $2b$ et $2ai$ et elle se comporte au voisinage de ses points singuliers $b(2m+1) + ia(2n+1)$ de la même façon que $\Phi_{\mu\nu}(z)$ autour des siens. Par conséquent elle se range dans le cas 1° du théorème 6 et est de la forme (9, 1). Elle est de plus du type $\{\nu, \mu\}$. Par suite du théorème 8, on a

$$(10.1) \quad \begin{cases} \Phi_{00}(i\bar{z}) = \alpha_{00} \hat{\Phi}_{00}(z) + \beta_{00}, \\ \Phi_{\mu\nu}(i\bar{z}) = \alpha_{\mu\nu} \hat{\Phi}_{\mu\nu}(z) \quad \text{pour } \{\mu, \nu\} \neq \{0, 0\}. \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes $\alpha_{\mu\nu}$ et β_{00} , remarquons d'abord que

$$(10.2) \quad \begin{cases} \hat{p}(z) = -p(iz), & \hat{\zeta}(z) = i\zeta(iz), \\ \hat{\eta}_1 = \eta_2 i, & \hat{\eta}_2 = -\eta_1 i \quad (1). \end{cases}$$

(1) Les formules générales

$$p\left(z \left| \frac{\omega_1}{\lambda}, \frac{\omega_2}{\lambda} \right.\right) = \lambda^2 p(\lambda z \mid \omega_1, \omega_2), \quad \zeta\left(z \left| \frac{\omega_1}{\lambda}, \frac{\omega_2}{\lambda} \right.\right) = \lambda \zeta(\lambda z \mid \omega_1, \omega_2),$$

$$\eta_k\left(\frac{\omega_1}{\lambda}, \frac{\omega_2}{\lambda}\right) = \lambda \eta_k(\omega_1, \omega_2),$$

permettent de passer des périodes $2\omega_1 = 2a$, $2\omega_2 = 2bi$, aux périodes $2\omega'_1 = \frac{2a}{i}$, $2\omega'_2 = \frac{2bi}{i}$. Ces périodes sont équivalentes aux périodes $2\hat{\omega}_1 = 2b$, $2\hat{\omega}_2 = 2ai$ par la substitution unitaire $\hat{\omega}_1 = 0.\omega'_1 + 1.\omega'_2$, $\hat{\omega}_2 = -1.\omega'_1 + 0.\omega'_2$.

Le passage des ω'_k à $\hat{\omega}_k$ ne change pas p et ζ tandis que les η_k subissent la même substitution que les ω_k . Ceci prouve les formules (10, 2).

De plus $\Phi_{\mu\nu}(i\bar{z})$ étant du type $\{\nu, \mu\}$, on a

$$(10.3) \quad \Phi_{\mu\nu}(i\bar{z}) = (-1)^\mu \Phi_{\mu\nu}(iz).$$

Par conséquent, vu (9, 6)

$$\begin{aligned} \Phi_{00}(i\bar{z}) &= \Phi_{00}(iz) = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \wp(iz - a - bi) + \frac{a\eta_1}{\pi^2} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \wp(iz + a - bi) + \frac{a\eta_1}{\pi^2} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[- \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \hat{\wp}(z - b - ai) + \frac{a\eta_1}{\pi^2} \right] \\ &= - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \operatorname{Re} \left[\left(\frac{b}{\pi} \right)^2 \hat{\wp}(z - b - ai) + \frac{b\hat{\eta}_1}{\pi^2} - \frac{b\eta_2 i}{\pi^2} - \frac{b^2\eta_1}{a\pi^2} \right] \\ &= - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \hat{\Phi}_{00}(z) + \frac{a}{2\pi b} \quad (1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{01}(i\bar{z}) &= \Phi_{01}(iz) = \operatorname{Re} \left[\frac{ai}{\pi} \zeta(iz - a - bi) - \frac{a\eta_2}{\pi b} iz + \frac{a\eta_2 i}{\pi} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{ai}{\pi} \zeta(iz + a - bi) - \frac{2a\eta_1 i}{\pi} - \frac{a\eta_2}{\pi b} iz + \frac{a\eta_2 i}{\pi} \right] \\ &= \frac{a}{b} \operatorname{Re} \left[\frac{b}{\pi} \hat{\zeta}(z - b - ai) - \dots \right] = \frac{a}{b} \hat{\Phi}_{10}(z). \end{aligned}$$

De même on trouve les constantes α_{10} et α_{11} :

$$\Phi_{10}(i\bar{z}) = \frac{a}{b} \hat{\Phi}_{01}(z), \quad \Phi_{11}(i\bar{z}) = \left(\frac{a}{b} \right)^2 \hat{\Phi}_{11}(z).$$

En remplaçant maintenant x et y dans leurs places, c'est-à-dire en remplaçant de nouveau z par $i\bar{z}$, on trouve de (10, 1)

$$(10.4) \quad \begin{cases} \Phi_{00}(z) = - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \hat{\Phi}_{00}(i\bar{z}) + \frac{a}{2\pi b}, & \Phi_{11}(z) = \left(\frac{a}{b} \right)^2 \hat{\Phi}_{11}(i\bar{z}), \\ \Phi_{01}(z) = \frac{a}{b} \hat{\Phi}_{10}(i\bar{z}), & \Phi_{10}(z) = \frac{a}{b} \hat{\Phi}_{01}(i\bar{z}). \end{cases}$$

Les formules (9, 5) donnaient le développement des $\Phi_{\mu\nu}(z)$ dans la bande horizontale $|y| < b$. Les formules (10, 4), si l'on y développe des $\hat{\Phi}_{\mu\nu}$ par les formules analogues à (9, 5) relatives aux périodes $2b$

(1) Car $a\eta_2 i + b\eta_1 = \frac{\pi}{2}$. voir (7, 14).

et $2ai$, donnent un développement des Φ_μ , dans la bande verticale $|x| < a$.

Remarque. — Dans la plus grande partie de ce travail nous aurons affaire avec $a = b = \pi$. Dans ce cas les coefficients dans les formules des numéros précédents se simplifieront considérablement, en particulier par l'effet des valeurs simples prises dans ce cas par η_1 et η_2 :

$$(10.5) \quad \eta_1 = \frac{1}{4}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{4}i \quad (1).$$

II. — Décomposition des fonctions harmoniques et analytiques quelconques.

11. Nous allons considérer maintenant le

PROBLÈME (P). — *Étant donnée une fonction $h(z)$ harmonique et régulière dans le rectangle R_{ab}*

$$(11.1) \quad |x| < a, \quad |y| < b,$$

trouver une décomposition

$$(11.2) \quad h(z) = h_1(z) + h_2(z), \quad z \in R_{ab},$$

avec des fonctions $h_1(z)$ et $h_2(z)$, harmoniques, régulières et périodiques, la première dans la bande $|y| < b$ avec période $2a$, la seconde dans $|x| < a$ avec période $2bi$.

THÉORÈME 9. — *Si une décomposition (11, 2) du problème (P) existe, il y en a une infinité, toutes données par*

$$(11.3) \quad h_1^g(z) = h_1(z) + g(z), \quad h_2^g(z) = h_2(z) - g(z),$$

avec une fonction arbitraire $g(z)$ harmonique, régulière et doublement périodique des périodes $2a$ et $2bi$ dans tout le plan à l'exception des points

$$(11.4) \quad a(2m+1) + ib(2n+1) \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

(1) Car, dans ce cas, $\hat{\eta}_1 = \eta_1$ et $\hat{\eta}_2 = \eta_2$ et (10, 5) se déduit immédiatement de (7, 14) et (10, 2).

Démonstration. — Il est clair que pour tout $g(z)$ satisfaisant aux conditions du théorème, les fonctions h_1^0 et h_2^0 de (11, 3) donnent une décomposition $h = h_1^0 + h_2^0$ répondant au problème (P). Si, d'autre part, $h = h_1^0 + h_2^0 = h_1 + h_2$ sont deux décompositions solvant le problème (P), on posera

$$g(z) = h_1^0(z) - h_1(z) = h_2(z) - h_2^0(z) \quad \text{pour } z \in R_{ab}.$$

De $g(z) = h_1^0(z) - h_1(z)$ résulte que g est prolongeable et périodique de période $2a$ dans la bande $|y| < b$. De $g = h_2 - h_2^0$ résulte de même que g est prolongeable et périodique de période $2bi$ dans la bande $|x| < a$. D'après le théorème 5, $g(z)$ satisfait aux conditions de notre théorème.

12. Nous allons démontrer maintenant le

THÉORÈME 10. — *Le problème (P) admet toujours une solution.*

Par le passage des fonctions harmoniques $h(z)$ aux fonctions analytiques $f(z)$ avec $h = \operatorname{Re} f$, on déduit immédiatement le théorème 10 du théorème suivant :

THÉORÈME 10'. — *Le problème (P), si l'on y remplace partout le terme « harmonique » par « analytique » admet toujours une solution.*

Démonstration. — Soit $f(z)$ la fonction analytique, régulière dans le rectangle $R = R_{ab}$ pour laquelle l'on cherche la décomposition

$$(12.1) \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

Choisissons une suite croissante

$$(12.2) \quad \frac{1}{2} = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_n < \dots \rightarrow 1.$$

Considérons les rectangles

$$(12.3) \quad R_n : |x| < \rho_n a, \quad |y| < \rho_n b.$$

Posons, pour abrégé,

$$(12.4) \quad p = a + ib, \quad q = -a + ib, \quad r = -a - ib, \quad s = a - ib.$$

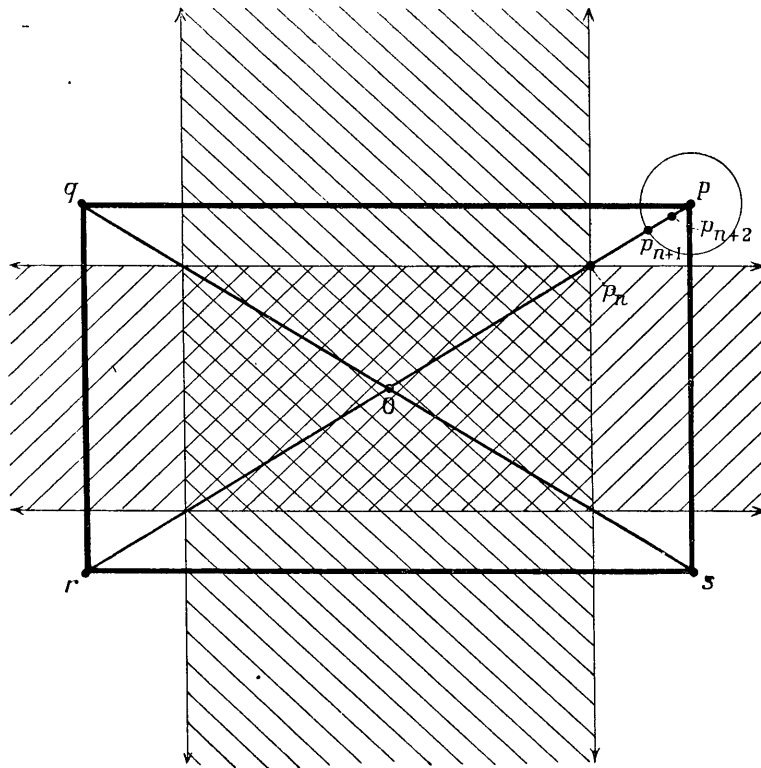
Les sommets des rectangles R_n sont donc

$$(12.4') \quad p_n = \rho_n p, \quad q_n = \rho_n q, \quad r_n = \rho_n r, \quad s_n = \rho_n s.$$

Il est clair que l'on peut choisir les ρ_n de sorte que

(12.5) *le cercle fermé de centre p et de rayon $|p_{n+1} - p|$ n'a de points communs avec aucune des deux bandes fermées $-\infty < x < +\infty$, $|y| \leq \rho_n b$ et $|x| \leq \rho_n a$, $-\infty < y < +\infty$.*

Fig. 2



Convenons d'écrire

$$\int_u^v F(z) dz$$

pour l'intégrale complexe prise le long du segment rectiligne \overline{uv} . Avec

ces conventions, nous pouvons écrire, vu les propriétés fondamentales de la fonction ζ de Weierstrass :

$$(12.6) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left(\int_{\rho_n}^{\eta_n} + \int_{q_n}^{\nu_n} + \int_{r_n}^{\sigma_n} + \int_{s_n}^{\rho_n} \right) \times [\zeta(u-z) - \zeta(p-z)] f(u) du \right\}, \quad \text{pour } z \in R_n.$$

Considérons les fonctions

$$(12.7) \quad \varphi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left(\int_{\rho_n}^{\eta_n} + \int_{r_n}^{\sigma_n} \right) [\zeta(u-z) - \zeta(p-z)] f(u) du \right\},$$

$$(12.8) \quad \psi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left(\int_{q_n}^{\nu_n} + \int_{s_n}^{\rho_n} \right) [\zeta(u-z) - \zeta(p-z)] f(u) du \right\}.$$

On vérifie aisément que $\varphi_n(z)$ est une fonction holomorphe dans la bande horizontale $|y| < \rho_n b$ et qu'elle y est périodique de période $2a$ (car $\zeta(u-z) - \zeta(p-z)$ est une fonction doublement *périodique* de z). De même $\psi_n(z)$ est holomorphe et périodique dans la bande verticale $|x| < \rho_n a$, de période $2bi$.

D'après (12.6) on a

$$(12.9) \quad f(z) = \varphi_n(z) + \psi_n(z) \quad \text{pour } z \in R_n.$$

Ainsi, φ_n et ψ_n donnent en quelque sorte une solution approchée de notre problème. Posons

$$(12.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_n(z) = \varphi_n(z) - \varphi_{n-1}(z) = -[\psi_n(z) - \psi_{n-1}(z)], \quad \text{pour } z \in R_{n-1} \\ (n=1, 2, \dots). \end{array} \right.$$

Il est clair que $\Delta_n(z)$ est prolongeable et holomorphe dans les deux bandes : $-\infty < x < +\infty$, $|y| < \rho_n b$ et $|x| < \rho_n a$, $-\infty < y < +\infty$. De plus $\Delta_n(z)$ est périodique dans la première bande avec période $2a$ et dans la seconde bande avec période $2bi$. Notre problème sera résolu, si nous trouvons des termes correctifs $T_n(z)$, avec

$$(12.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\Delta_{n+1}(z) - T_{n+1}(z)| < \frac{1}{2^n}, \quad \text{pour } |y| \leq \rho_{n-1} b \quad \text{ou} \quad |x| \leq \rho_{n-1} a \\ (n=1, 2, \dots) \quad (1). \end{array} \right.$$

(1) Cette méthode a été appliquée par l'auteur pour d'autres problèmes de décomposition des fonctions analytiques (*Acta Math.*, 1935). Elle est basée

chaque $T_n(z)$ étant une fonction analytique, régulière et uniforme dans tout le plan à l'exception des points (11, 4), doublement périodique des périodes $2a$ et $2bi$.

En effet, posons alors

$$(12.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{1,n}(z) = \varphi_n(z) - \sum_{k=1}^n T_k(z) + \sum_{l=n+1}^{\infty} (\Delta_l(z) - T_l(z)), \\ \text{pour } |y| < \rho_{n-1}b \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{array} \right.$$

$$(12.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{2,n}(z) = \psi_n(z) + \sum_{k=1}^n T_k(z) - \sum_{l=n+1}^{\infty} (\Delta_l(z) - T_l(z)), \\ \text{pour } |x| < \rho_{n-1}a \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{array} \right.$$

L'inégalité (12.11) assure la convergence uniforme de la série infinie dans les deux bandes en question. Les fonctions $f_{1,n}$ et $f_{2,n}$ sont clairement périodiques, la première avec période $2a$ et la seconde avec période $2bi$. D'après (12.9) on a

$$(12.14) \quad f(z) = f_{1,n}(z) + f_{2,n}(z) \quad \text{dans } R_{n-1}.$$

D'autre part, il est clair d'après (12.10) que chaque fonction $f_{1,n+1}$ est le prolongement analytique de $f_{1,n}$. Par conséquent elles coïncident avec une seule fonction $f_1(z)$ holomorphe dans toute la bande $|y| < b$. De même toutes les fonctions $f_{2,n}(z)$ coïncident avec une fonction $f_2(z)$ holomorphe dans $|x| < a$. Les fonctions f_1 et f_2 sont périodiques aux périodes $2a$ et $2bi$ respectivement. La formule (12.14) montre

sur une idée de Runge pour l'approximation des fonctions analytiques avec déplacement des singularités.

Remarquons de plus que le problème du théorème 11' peut être traité en transplantant la fonction $f(z)$ sur la surface du tore, obtenue par l'identification des côtés opposés du rectangle R_{ab} . Sur ce tore $f(z)$ présentera deux lignes singulières : l'une, L_1 , provenant de l'identification des côtés horizontaux, l'autre, L_2 , des côtés verticaux. L_1 et L_2 auront un seul point commun, provenant des quatre sommets, p, q, r, s . Le problème sera alors de décomposer $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, la fonction $f_k(z)$ n'étant singulière que sur la ligne L_k . Ce sera donc le genre de problème considéré dans le Mémoire cité dans le cas du plan.

enfin que

$$(12.15) \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z) \quad \text{dans } R,$$

ce qui achève la démonstration.

Il nous reste à définir les $T_n(z)$. Il est clair d'abord d'après (12.7) [ou (12.8)] et (12.10) que

$$(12.16) \quad \begin{aligned} \Delta_{n+1}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\rho_{n+1}}^{q_{n+1}} + \int_{r_{n+1}}^{s_{n+1}} - \int_{\rho_n}^{q_n} - \int_{r_n}^{s_n} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{q_n}^{q_{n+1}} + \int_{\rho_{n+1}}^{\rho_n} + \int_{s_n}^{s_{n+1}} + \int_{r_{n+1}}^{r_n} \right), \end{aligned}$$

pour z dans chacune des bandes $|y| < \rho_n b$ ou $|x| < \rho_n a$.

Considérons une de ces intégrales par exemple

$$(12.17) \quad \int_{r_{n+1}}^{r_n} [\zeta(u-z) - \zeta(p-z)] f(u) du.$$

Développons $\zeta(u-z) - \zeta(p-z)$ comme fonction de u en série de Taylor autour de r

$$(12.18) \quad \begin{aligned} \zeta(u-z) - \zeta(p-z) &= \zeta(r-z) - \zeta(p-z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \zeta^{(k)}(r-z) (u-r)^k \\ &= -2\eta_1 - 2\eta_2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} p^{k-1} (r-z) (u-r)^k \quad (1). \end{aligned}$$

Cette série est absolument et uniformément convergente pour u sur le segment $\overline{r_n r_{n+1}}$ et z avec $|y| \leq \rho_{n-1} b$ ou $|x| \leq \rho_{n-1} a$.

En effet, d'après la condition (12.5), la plus courte distance entre les points z considérés et les points (11.4) qui sont les points singuliers de $p(r-z)$, est

$$> (1 + 2\varepsilon) |p_n - p| = (1 + 2\varepsilon) |r_n - r| \quad \text{pour un } \varepsilon > 0.$$

(1) Vu que

$$\zeta(r-z) - \zeta(p-z) = \zeta(p-z - 2a - 2bi) - \zeta(p-z) = -2\eta_1 - 2\eta_2,$$

$$\frac{d}{dz} \zeta(z) = -p(z).$$

Désignons par M le maximum de la fonction $p(r-z)$ en dehors des cercles de rayon $\varepsilon|r_n-r|$ autour des points (11.4), ses points singuliers [ce maximum est fini par l'effet de la double périodicité de $p(r-z)$]. Il s'ensuit que

$$|p^{(k-1)}(r-z)| < M \frac{(k-1)!}{(1+\varepsilon)^{k-1} |r_n-r|^{k-1}}.$$

D'autre part

$$|u-r| \leq |r_n-r|, \quad \text{pour } u \in \overline{r_n r_{n+1}}.$$

Par conséquent la série (12.18) est majorée par

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M |r_n-r|}{k(1+\varepsilon)^{k-1}},$$

ce qui prouve son absolue et uniforme convergence. Ceci nous permet de trouver une somme partielle de (12.18)

$$(12.19) \quad S_r = - \sum_{k=1}^{N_n} \frac{1}{k!} p^{(k-1)}(r-z) (u-r)^k,$$

telle que

$$(12.20) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{r_{n+1}}^{r_n} f(u) [\zeta(u-z) - \zeta(p-z) + 2\eta_1 + 2\eta_2 - S_r] du \right| < \frac{1}{4 \cdot 2^n},$$

pour tous les z avec $|y| \leq \rho_{n-1} b$ ou $|x| \leq \rho_{n-1} a$.

Nous poserons alors

$$(12.21) \quad T_{n+1}^{(r)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_{n+1}}^{r_n} f(u) [-2\eta_1 - 2\eta_2 + S_r] du.$$

Il est clair d'après (12.19) que $T_{n+1}^{(r)}(z)$ est une fonction elliptique aux périodes $2a$ et $2bi$ ayant pour seuls points singuliers les points (11.4).

De manière analogue on trouvera pour les trois autres intégrales du dernier membre de (12.16) les fonctions $T_{n+1}^{(q)}$, $T_{n+1}^{(p)}$ et $T_{n+1}^{(s)}$. On posera alors

$$T_n = T_n^{(q)} + T_n^{(p)} + T_n^{(s)} + T_n^{(r)},$$

et (12.11) résultera de (12.16) ainsi que de (12.20) et (12.21) et des formules analogues relatives aux $T_n^{(q)}$, $T_n^{(p)}$ et $T_n^{(s)}$. Ceci achève la démonstration de notre théorème.

13. La démonstration du théorème 10' ne donne pas la possibilité d'analyser plus profondément le comportement des composantes f_1 et f_2 de (12.1) dans le cas général. Mais, dans le cas particulier d'une fonction analytique f , régulière dans le rectangle R_{ab} et *continue dans le rectangle fermé* $\overline{R_{ab}}$, on peut passer à la limite $n = \infty$ dans les formules (12.6), (12.7) et (12.8) et obtenir les formules explicites

$$(13.1) \quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left(\int_p^q + \int_r^s \right) [\zeta(u-z) - \zeta(p-z)] f(u) du \right\},$$

$$(13.2) \quad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left(\int_q^r + \int_s^p \right) [\zeta(u-z) - \zeta(p-z)] f(u) du \right\}.$$

Ces formules permettent une analyse assez complète du comportement des composantes $f_1(z)$ et $f_2(z)$. Sans entrer dans les détails, souvent fastidieux, des évaluations nécessaires pour les démonstrations, nous allons énoncer ici les résultats principaux que l'on obtient dans cette recherche. Nous n'aurons à nous servir dans la suite que d'un seul de ces résultats. Nous en donnerons une démonstration au n° 18 par les méthodes du Chapitre III.

Avant de passer aux énoncés en question, rappelons que, $f(z)$ étant continue dans le rectangle fermé $\overline{R_{ab}}$, elle possède un module de continuité $\delta(\varepsilon)$, c'est-à-dire une fonction positive non décroissante pour $\varepsilon > 0$ telle que

$$(13.3) \quad \delta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$(13.4) \quad |f(z_1) - f(z_2)| < \delta(\varepsilon) \quad \text{pour} \quad |z_1 - z_2| < \varepsilon.$$

Le théorème le plus général qu'on obtient est le

THÉORÈME 11. — Soit $f(z)$ une fonction analytique régulière dans R_{ab} et continue dans $\overline{R_{ab}}$. Les fonctions (13.1) et (13.2), décomposant $f(z)$ conformément au problème (P), possèdent les propriétés suivantes : 1° elles sont continues dans le rectangle fermé $\overline{R_{ab}}$, sauf peut-être aux sommets p, q, r et s ; 2° au voisinage d'un sommet, on a

$$(13.5) \quad f_1(z) = \frac{\zeta(z-p)}{2\pi i} \left[\int_p^q f(u) du + \int_r^s f(u) du \right] \\ + \frac{f(q) - f(p) + f(s) - f(r)}{2\pi i} \log \rho + O \left(\int_p^R \frac{\delta(\xi)}{\xi} d\xi \right),$$

$$(13.6) \quad f_2(z) = \frac{\zeta(z-p)}{2\pi i} \left[\int_q^r f(u) du + \int_s^p f(u) du \right] \\ + \frac{f(r) - f(q) + f(p) - f(s)}{2\pi i} \log \rho + O \left(\int_p^R \frac{\delta(\xi)}{\xi} d\xi \right),$$

où ρ est la distance de z au sommet en question, $R = \max(2a, 2b)$ et O est le symbole de Landau ⁽¹⁾.

REMARQUE 1. — Les coefficients de $\zeta(z-p)$ et de $\log \rho$ dans les formules (13.5) et (13.6) ne diffèrent que par le signe. Pour ceux de $\log \rho$, c'est évident, et pour ceux de $\zeta(z-p)$, ceci vient du fait que leur somme est l'intégrale de $f(u)$ étendue sur le contour de R_{ab} .

REMARQUE 2. — Le terme $O\left(\int_{\rho}^R \frac{\delta(\xi)}{\xi} d\xi\right)$ des formules (13.5) et (13.6) croît moins vite que $|\log \rho|$ pour $\rho \rightarrow 0$ (son quotient par $\log \rho$ converge vers zéro avec ρ).

Si le module de continuité $\delta(\varepsilon)$ satisfait à des conditions supplémentaires, ce terme peut devenir borné, ce qui est le cas pour $f(z)$ satisfaisant à une condition de Lipschitz [$\delta(\varepsilon) \leq c\varepsilon$] ou de Hölder [$\delta(\varepsilon) < c\varepsilon^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$].

REMARQUE 3. — Le comportement des fonctions f_1 et f_2 est décrit dans le théorème 11, uniquement dans le rectangle fermé $\overline{R_{ab}}$. Par périodicité, on en déduit le comportement de ces fonctions dans toute la bande $|y| \leq b$ resp. $|x| \leq a$.

REMARQUE 4. — Les fonctions (13.1) et (13.2) donnent, dans un certain sens, la meilleure décomposition possible de $f(z)$, car elles tendent vers l'infini comme $\frac{1}{\rho}$ au plus quand z tend vers un sommet, tandis que toute autre décomposition, si elle ne diffère pas de la précédente par une constante, en diffèrera par une fonction analytique doublement *périodique* n'ayant comme singularités que les points $(2m+1)a + (2n+1)bi$, donc présentant en ces points au moins un pôle double.

Si l'on veut appliquer le théorème 11 aux fonctions $h(z)$ harmoniques réelles dans R_{ab} , il faut considérer à côté de $h(z)$ sa fonction conjuguée $g(z)$ [fixée, par exemple, par la condition $g(0) = 0$] et la fonction analytique

$$f(z) = h(z) + ig(z).$$

L'hypothèse sur $f(z)$ du théorème 11 se traduit en continuité de $h(z)$ et $g(z)$ dans $\overline{R_{ab}}$. $\delta(\varepsilon)$ doit alors être un module de continuité commun de $h(z)$ et $g(z)$.

La décomposition de $h(z)$ en $h_1(z) = \operatorname{Re} f_1(z)$, $h_2(z) = \operatorname{Re} f_2(z)$, où f_1 et f_2 sont données par (13.1) et (13.2), n'est pas la plus avantageuse en général. La

(1) Donc $O[\varphi(\rho)]$ signifie une fonction de ρ dont le quotient par $\varphi(\rho)$ est uniformément borné pour $\rho > 0$.

meilleure décomposition de $h(z)$ est alors

$$(13.7) \quad \begin{cases} h_1(z) = \operatorname{Re} \{ f_1(z) - c_0 \zeta(z-p) - c_1 z \}, \\ h_2(z) = \operatorname{Re} \{ f_2(z) + c_0 \zeta(z-p) + c_1 z \}, \end{cases}$$

où

$$(13.8) \quad \begin{cases} c_0 = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_p^q f(u) du + \int_r^s f(u) du \right], \\ c_1 = -\frac{\eta_1}{a} c_0 + \frac{\pi}{4ab} (c_0 - \bar{c}_0). \end{cases}$$

En effet : 1° les fonctions (13.7), en même temps que les fonctions $\operatorname{Re} f_1(z)$ et $\operatorname{Re} f_2(z)$, donnent une décomposition de $h(z)$ correspondant au problème (P), vu que, d'après le théorème 6', $\operatorname{Re} \{ c_0 \zeta(z-p) + c_1 z \}$ est doublement périodique; 2° d'après le théorème 11, les fonctions (13.7) sont continues dans \overline{R}_{ab} , sauf peut-être aux sommets du rectangle au voisinage desquels elles se comportent suivant les formules

$$(13.9) \quad h_1(z) = \frac{g(q) - g(p) + g(s) - g(r)}{2\pi} \log \rho + O\left(\int_\rho^R \frac{\delta(\xi)}{\xi} d\xi\right),$$

$$(13.10) \quad h_2(z) = \frac{g(r) - g(q) + g(p) - g(s)}{2\pi} \log \rho + O\left(\int_\rho^R \frac{\delta(\xi)}{\xi} d\xi\right),$$

où comme auparavant, ρ est la distance de z au sommet en question; 3° suivant ces dernières formules, les fonctions (13.7) pour z s'approchant vers un sommet, tendent vers ∞ au plus comme $\log \rho$. Pour toute autre décomposition de $h(z)$ [sauf celles qui ne diffèrent de (13.7) que par une constante], les composantes tendront vers ∞ , sur certains chemins d'approximation des sommets, au moins comme $\frac{1}{\rho}$, comme on le prouve par un raisonnement similaire à celui de la *remarque 4*.

On aboutit donc au

THÉORÈME 12. — Soit $h(z)$ une fonction harmonique dans R_{ab} et soient $h(z)$ ainsi que sa conjuguée $g(z)$ continues dans \overline{R}_{ab} . Posons $f(z) = h(z) + ig(z)$ et $\delta(\varepsilon) =$ module de continuité de $h(z)$ et $g(z)$. Dans ces conditions les fonctions (13.7), avec f_1 et f_2 données par (13.1) et (13.2) et c_0, c_1 donnés par (13.8), déterminent une décomposition de $h(z)$ conforme aux conditions du problème (P). Les fonctions (13.7) sont continues dans \overline{R}_{ab} sauf peut-être aux sommets où leur comportement est décrit par les formules (13.9) et (13.10).

Comme les composantes (13.7) de $h(z)$ sont bornées dans R_{ab} sauf peut-être

aux sommets où elles deviennent infinies au plus comme $|\log \rho|$, elles sont intégrables dans R_{ab} avec leur $p^{\text{ième}}$ puissance, pour tout p fini positif. Il s'ensuit

THÉOREME 13. — *Dans les conditions du théorème 12, les composantes (13.7) sont L^p dans R_{ab} pour tout p avec $1 \leq p < \infty$.*

On peut compléter cet énoncé par la remarque que dans toute autre décomposition de $h(z)$ correspondant au problème (P) [sauf quand les composantes ne diffèrent que par une constante des fonctions (13.7)], les composantes ne peuvent pas être L^2 .

Comme cas particulier on en déduit le

COROLLAIRE 14. — *Si $h(z)$ est harmonique et aux premières dérivées bornées dans R_{ab} , les fonctions (13.7) forment une décomposition de $h(z)$ correspondant au problème (P) et ces fonctions sont L^p dans R_{ab} pour $1 \leq p < \infty$.*

En effet, les dérivées de la conjuguée $g(z)$ de $h(z)$ sont aussi bornées (vu que $g'_x = -h'_y$, $g'_y = h'_x$). Par conséquent $g(z)$ et $h(z)$ satisfont à une condition de Lipschitz dans R_{ab} , sont donc prolongeables continûment sur tout $\overline{R_{ab}}$ et les conditions du théorème 12 sont remplies. On trouve de plus, dans le cas présent, que le terme $O(\dots)$ des évaluations (13.9) et (13.10) est borné.

III. — Décompositions des fonctions harmoniques L.

14. Nous allons résoudre le problème (P) pour les fonctions harmoniques de la classe L (dans le rectangle) par une méthode différente de celle du Chapitre II, cette méthode donnant directement le développement des fonctions composantes en séries du genre (2.7).

Afin de simplifier les formules nous allons supposer dans la suite que

$$(14.1) \quad a = b = \pi, \quad R = R_{\pi, \pi},$$

donc R est un carré.

Commençons par le théorème, dû essentiellement à S. Zaremba (dans le cas $p = 2$)⁽¹⁾.

THÉOREME 15 (Lemme de Zaremba). — *Soit $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et soit $u(z)$ une fonction définie dans le carré (ouvert) R, y -continue*

(1) S. ZAREMBA, *Annales Éc. Norm. Sup.*, 26, 1909.

avec ses secondes dérivées et satisfaisant aux conditions

$$(14.2) \left\{ \begin{array}{l} u(z), u'_x(z) \text{ et } u'_y(z), \\ \text{convergent vers zéro uniformément pour } z \text{ tendant vers la} \\ \text{frontière } C \text{ de } R, \end{array} \right.$$

$$(14.3) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ est } L^p \text{ dans } R.$$

Soit de plus $h(z)$ une fonction harmonique, régulière dans R et L^p dans R . Dans ces conditions

$$(14.4) \quad \iint_R \Delta u(z) h(z) dx dy = 0 \quad (1).$$

Démonstration. — Supposons d'abord que $h(z)$ est continu avec ses premières dérivées dans le carré fermé \bar{R} .

En appliquant la formule de Green dans le carré $R_\alpha : |x| < \alpha\pi, |y| < \alpha\pi, 0 < \alpha < 1$, avec la frontière C_α , on a

$$\iint_{R_\alpha} \Delta u h dx dy = - \int_{C_\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial n} h - u \frac{\partial h}{\partial n} \right) ds.$$

Pour $\alpha \rightarrow 1$, h et $\frac{\partial h}{\partial n}$ sur C_α sont uniformément bornés, tandis que u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ convergent uniformément vers zéro d'après (14.2). Il s'ensuit

$$\iint_R \Delta u h dx dy = 0,$$

donc le théorème est prouvé pour tout h continu avec ses premières dérivées dans \bar{R} . Si h est seulement L^p dans R , considérons $h(\alpha z)$,

(1) Ce théorème peut être démontré sous des conditions moins restrictives concernant les dérivées de $u(z)$ et pour une classe bien plus générale de domaines R .

$0 < \alpha < 1$, qui est régulier dans un domaine contenant \bar{R} . On a donc, d'après ce qui précède,

$$(14.5) \quad \iint_R \Delta u(z) h(\alpha z) dx dy = 0.$$

Il ne nous reste qu'à passer à la limite $\alpha \rightarrow 1$ dans la formule (14.5), ce qui, dans le langage de l'espace L^p , revient à prouver que $h(\alpha z)$ converge faiblement vers $h(z)$ pour $\alpha \rightarrow 1$.

Prenons un β , $0 < \beta < 1$, et écrivons

$$\left| \iint_R \Delta u(z) (h(z) - h(\alpha z)) dx dy \right| < \left| \iint_{R_\beta} \right| + \left| \iint_{R-R_\beta} \right| = I_\beta + J_\beta.$$

$I_\beta \rightarrow 0$ pour $\alpha \rightarrow 1$, vu la convergence uniforme de $h(\alpha z)$ vers $h(z)$ dans R_β . Pour la seconde intégrale on a, vu l'inégalité de Hölder,

$$J_\beta \leq \left(\iint_{R-R_\beta} |\Delta u(z)|^{p'} dx dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\iint_{R-R_\beta} |h(z) - h(\alpha z)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} = J'_\beta J''_\beta.$$

J'_β ne dépend pas de α et est une fonction non croissante de β . D'autre part, il devient aussi petit que l'on veut quand β s'approche de 1, sauf peut-être pour $p' = \infty$ (c'est-à-dire $p = 1$) quand $J'_\beta =$ vrai maximum de $|\Delta u(z)|$ dans $R - R_\beta$.

Pour J''_β on a

$$\begin{aligned} J''_\beta &\leq \left(\iint_{R-R_\beta} |h(z)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\iint_{R-R_\beta} |h(\alpha z)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\iint_{R-R_\beta} |h(z)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{p}{2}}} \left(\iint_{R-R_{\alpha\beta}} |h(z)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \limsup_{\alpha \rightarrow 1} J''_\beta &\leq 2 \left(\iint_{R-R_\beta} |h(z)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

La dernière expression ayant des propriétés similaires à J'_β , sauf que le cas exceptionnel est maintenant $p = \infty$, on voit que, pour

tout p , $1 \leq p \leq \infty$,

$$\limsup_{\alpha > 1} J_\beta \leq J_\beta \limsup_{\alpha > 1} J_\beta^{\frac{1}{\alpha}}$$

devient aussi petit que l'on veut quand β s'approche de 1. Il s'ensuit bien

$$\lim_{\alpha > 1} \left| \iint_{\mathbb{R}} \Delta u(z) (h(z) - h(\alpha z)) dx dy \right| = 0,$$

donc suivant la formule (14.5),

$$\iint_{\mathbb{R}} \Delta u(z) h(z) dx dy = \lim \iint_{\mathbb{R}} \Delta u(z) h(\alpha z) dx dy = 0.$$

Du théorème 15 on déduit immédiatement un critère nécessaire pour l'harmonicité d'une fonction h .

COROLLAIRE 16. — Soit $h(z)$ une fonction L^p dans \mathbb{R} . Pour que $h(z)$ soit harmonique dans \mathbb{R} il est nécessaire que $h(z)$ soit orthogonale à $\Delta u(z)$,

$$\iint_{\mathbb{R}} h(z) \Delta u(z) dx dy = 0,$$

pour toute fonction $u(z)$ satisfaisant aux conditions du théorème 15.

Remarque. — Zaremba utilisait le théorème 15 pour établir un critère allant dans la direction opposée, notamment un critère pour qu'une fonction $u(z)$, qui est $= 0$ sur la frontière C et telle que Δu est L^2 , possède des dérivées u'_x et $u'_y = 0$ sur C .

13. Dans l'application du critère du corollaire 16, décomposons $h(z)$ et $u(z)$ en parties du type $\{\mu, \nu\}$, suivant (2.1) et (2.2),

$$(15.1) \quad h(z) = \sum_{\mu, \nu} h_{\mu, \nu}(z),$$

$$(15.2) \quad u(z) = \sum_{\mu, \nu} u_{\mu, \nu}(z).$$

Il est clair que si $u(z)$ satisfait aux conditions du théorème 15, il en

sera de même pour $u_{\mu\nu}(z)$. Ceci est vrai également de $h(z)$ et $h_{\mu\nu}(z)$. De plus, $\Delta u_{\mu\nu}$ est clairement du type $\{\mu, \nu\}$. Étant donné que deux fonctions de types différents sont toujours orthogonales (si leur produit est intégrable), on en déduit

$$(15.3) \quad \iint_{\mathbb{R}} h(z) \Delta u(z) dx dy = \sum_{\mu, \nu} \iint_{\mathbb{R}} h_{\mu, \nu}(z) \Delta u_{\mu, \nu}(z) dx dy.$$

Il en résulte que, dans l'application du critère du corollaire 16, nous pouvons considérer séparément les fonctions $h_{\mu\nu}$ de types différents en leur appliquant le critère avec des fonctions $u_{\mu\nu}$ du même type.

Les types $\{0, 1\}$ et $\{1, 0\}$ se transformant l'un dans l'autre par l'interversion des variables x et y , nous ne considérerons généralement que le type $\{0, 1\}$.

Posons maintenant, pour m et n entiers positifs,

$$(15.4) \quad \begin{cases} u_{0,0}^{(m,n)} = (\cos mx - (-1)^m) (\cos ny - (-1)^n), \\ u_{0,1}^{(m,n)} = (\cos mx - (-1)^m) (\sin ny + (-1)^n n \sin y) \quad (1), \\ u_{1,1}^{(m,n)} = (\sin mx + (-1)^m m \sin x) (\sin ny + (-1)^n n \sin y). \end{cases}$$

Il est clair que ces fonctions satisfont aux conditions du théorème 15 avec $p = 1$, $p' = \infty$. On a

$$(15.5) \quad \begin{cases} \Delta u_{0,0}^{(m,n)} = -(m^2 + n^2) \cos mx \cos ny + (-1)^n m^2 \cos mx \\ \quad + (-1)^m n^2 \cos ny, \\ \Delta u_{0,1}^{(m,n)} = -(m^2 + n^2) \cos mx \sin ny - n(-1)^n (1 + m^2) \cos mx \sin y \\ \quad + (-1)^m n^2 \sin ny + (-1)^{m+n} n \sin y, \\ \Delta u_{1,1}^{(m,n)} = -(m^2 + n^2) \sin mx \sin ny - n(-1)^n (m^2 + 1) \sin mx \sin y \\ \quad - m(-1)^m (1 + n^2) \sin x \sin ny - 2mn(-1)^{m+n} \sin x \sin y. \end{cases}$$

Soit ensuite $h_{\mu\nu}$ une fonction L dans \mathbb{R} , du type $\{\mu, \nu\}$, telle que

$$(15.6) \quad \iint_{\mathbb{R}} h_{\mu\nu}(z) \Delta u_{\mu\nu}^{(m,n)}(z) dx dy = 0 \quad \text{pour tous les } m, n.$$

Considérons le développement de $h_{\mu\nu}$ en double série de Fourier.

(1) Pour $u_{1,0}^{(m,n)}$, on intervertit x avec y et m avec n .

Suivant le type, on aura

$$(15.7) \left\{ \begin{array}{l} h_{0,0}(z) \sim \frac{1}{4} a_{0,0} + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} a_{m0} \cos mx \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} a_{0n} \cos ny + \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} a_{mn} \cos mx \cos ny, \\ h_{0,1}(z) \sim \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} b_{0n} \sin ny + \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} b_{mn} \cos mx \sin ny, \\ h_{1,0}(z) \sim \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} c_{m0} \sin mx + \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} c_{mn} \sin mx \cos ny, \\ h_{1,1}(z) \sim \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} d_{mn} \sin mx \sin ny; \end{array} \right.$$

$$(15.8) \left\{ \begin{array}{l} a_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} h_{00}(z) \cos mx \cos ny \, dx \, dy, \\ b_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} h_{01}(z) \cos mx \sin ny \, dx \, dy, \\ c_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} h_{10}(z) \sin mx \cos ny \, dx \, dy, \\ d_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} h_{11}(z) \sin mx \sin ny \, dx \, dy, \end{array} \right.$$

De (15.5), (15.6) et (15.8), on tire

$$\begin{aligned} & -(m^2 + n^2) a_{mn} + (-1)^n m^2 a_{m0} + (-1)^m n^2 a_{0n} = 0, \\ & -(m^2 + n^2) b_{mn} - n(-1)^n (m^2 + 1) b_{m1} + (-1)^m n^2 b_{0n} + (-1)^{m+n} n b_{01} = 0, \\ & -(m^2 + n^2) d_{mn} - n_1 (-1)^n (m^2 + 1) d_{m1} \\ & \quad - m(-1)^m (1 + n^2) d_{1n} - 2mn(-1)^{m+n} d_{11} = 0, \end{aligned}$$

donc

$$(15.9) \left\{ \begin{array}{l} a_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}}{m^2 + n^2} \left((-1)^m m^2 a_{m0} + (-1)^n n^2 a_{0n} \right), \quad m \geq 1, n \geq 1; \\ b_{mn} = \frac{(-1)^{m+n} n}{m^2 + n^2} \left((-1)^{m+1} (m^2 + 1) b_{m1} + (-1)^n n b_{0n} + b_{01} \right), \\ \quad m \geq 1, n \geq 2; \\ d_{mn} = \frac{(-1)^{m+n+1} mn}{m^2 + n^2} \left((-1)^m \frac{m^2 + 1}{m} d_{m1} + (-1)^n \frac{1 + n^2}{n} d_{1n} + 2 d_{11} \right) \\ \quad m \geq 2, n \geq 2. \end{array} \right.$$

Remarque 1. — Il est clair que, pour une fonction $h_{\mu\nu}(z)$ admettant la double série de Fourier (13.7), les conditions (13.9) sont équivalentes à (13.6)

Mettons les expressions (13.9) dans les développements de (13.7) et groupons les termes contenant les mêmes coefficients a , b et d . Par cette transformation *formelle*, nous obtenons les développements suivants :

$$(15.10) \left\{ \begin{aligned} h_{00}(z) &\sim \frac{1}{4} a_{0,0} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m0} \cos mx \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n m^2}{m^2 + n^2} \cos ny \right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \cos ny \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m n^2}{m^2 + n^2} \cos mx \right], \\ h_{01}(z) &\sim b_{01} \left[\frac{1}{2} \sin y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} n}{m^2 + n^2} \cos mx \sin ny \right] \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m1} \cos mx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n (m^2 + 1)}{m^2 + n^2} \sin ny \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} b_{0n} \sin ny \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m n^2}{m^2 + n^2} \cos mx \right], \\ h_{11}(z) &\sim d_{11} \left[\sin x \sin y + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+1} mn}{m^2 + n^2} \sin mx \sin ny \right] \\ &\quad + \sum_{m=2}^{\infty} d_{m1} \sin mx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n (m^2 + 1)}{m^2 + n^2} \sin ny \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} d_{1n} \sin ny \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} m (1 + n^2)}{m^2 + n^2} \sin mx. \end{aligned} \right.$$

Notons maintenant les séries de Fourier des fonctions $\cosh mx$, $\sinh mx$ et x dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$:

$$(15.11) \left\{ \begin{aligned} \cosh mx &\sim \frac{\sinh m\pi}{m\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2m \sinh m\pi}{\pi(m^2 + n^2)} \cos nx, \\ \sinh mx &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n \sinh m\pi}{\pi(m^2 + n^2)} \sin nx, \\ x &\sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx \end{aligned} \right.$$

Il s'ensuit, en transformant encore *formellement* les développements (15.10),

$$\begin{aligned}
 h_{00}(\bar{z}) &\sim \frac{1}{4} a_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi m}{2 \sinh m \pi} a_{m0} \cos m x \cosh m y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{2 \sinh n \pi} a_{0n} \cosh n x \cos n y, \\
 h_{01}(\bar{z}) &\sim b_{01} \left[\frac{y}{4} + \frac{\pi}{2 \sinh \pi} \cosh x \sin y \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{y}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \pi}{2 \sinh m \pi} \cos m x \sinh m y \right) \right] \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m1} \frac{\pi(1+m^2)}{2 \sinh m \pi} \cos m x \sinh m y + \sum_{n=2}^{\infty} b_{0n} \frac{\pi n}{2 \sinh n \pi} \cosh n x \sin n y, \\
 h_{11}(\bar{z}) &\sim d_{11} \left[\frac{\pi}{\sinh \pi} \sin x \sinh y + \frac{\pi}{\sinh \pi} \sinh x \sin y \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \pi m}{\sinh m \pi} \sin m x \sinh m y \right] \\
 &\quad + \sum_{m=2}^{\infty} d_{m1} \frac{\pi(m^2+1)}{2 \sinh m \pi} \sin m x \sinh m y + \sum_{n=2}^{\infty} d_{1n} \frac{\pi(1+n^2)}{2 \sinh n \pi} \sinh n x \sin n y.
 \end{aligned}$$

En usant les notations de (2.5) et (2.6) et les fonctions $\Phi_{\mu\nu}$ de (9.5) (où l'on se rappellera de mettre $a = b = \pi$), on pourra écrire de manière abrégée, pour tous les types $\{\mu, \nu\}$,

$$(15.12) \quad h_{\mu\nu}(\bar{z}) \sim A_{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu}(\bar{z}) + A'_{\mu\nu} e_{\mu\nu}(\bar{z}) + \sum_{m=1}^{\infty} B_{\mu\nu}^{(m)} e_{\mu\nu}(m\bar{z}) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{\mu\nu}^{(n)} e_{\nu\mu}(in\bar{z}),$$

avec

$$(15.13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_{00} = 0, & A'_{00} = \frac{1}{4} a_{00}, \\ B_{00}^{(m)} = \frac{\pi m}{2 \sinh m \pi} a_{m0}, & C_{00}^{(n)} = \frac{\pi n}{2 \sinh n \pi} a_{0n}, \\ A_{01} = \frac{\pi}{2} b_{01}, & A'_{01} = \frac{1}{4} b_{01}, \\ B_{01}^{(m)} = \frac{\pi(1+m^2)}{2 \sinh m \pi} b_{m1}, & C_{01}^{(n)} = \frac{\pi n}{2 \sinh n \pi} b_{0n}, \\ A_{11} = \pi d_{11}, & A'_{11} = 0, \\ B_{11}^{(m)} = \frac{\pi(m^2+1)}{2 \sinh m \pi} d_{m1}, & C_{11}^{(n)} = \frac{\pi(1+n^2)}{2 \sinh n \pi} d_{1n}. \end{array} \right.$$

Remarque 2. — Rappelons encore que pour le type $\{1,0\}$ les formules analogues s'obtiennent en changeant z en \bar{z} . Vu les formules (10.4), dans lesquelles $\hat{\Phi}_{\mu,\nu} = \Phi_{\mu,\nu}$ à cause de l'égalité des périodes, on peut écrire

$$h_{10}(z) \sim A_{10} \Phi_{10}(z) + A'_{10} x + \sum_{m=1}^{\infty} B_{10}^{(m)} e_{10}(mz) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{10}^{(n)} e_{01}(in\bar{z}),$$

$$A_{10} = \frac{\pi}{2} c_{10}, \quad A'_{10} = \frac{1}{4} c_{10}, \quad B_{10}^{(m)} = \frac{\pi m}{2 \sinh m \pi} c_{m0}, \quad C_{10}^{(n)} = \frac{\pi(1+n^2)}{2 \sinh n \pi} c_{1n}.$$

Remarque 3. — Les équations (13.9) caractérisent le développement en double série de Fourier d'une fonction harmonique $h(z)$, (voir th. 17 au n° 16). On peut vérifier facilement que, même pour $h(z)$ les plus régulières, on ne peut pas déduire ces équations directement par l'application de l'équation de Laplace $\Delta h = 0$, c'est-à-dire en différentiant deux fois la série double de Fourier.

Cependant, on peut obtenir ces équations sans passer par le lemme de Zaremba, mais en utilisant la formule de Green (comme dans la démonstration du lemme de Zaremba). Par exemple, pour le type $\{0,1\}$ on appliquera la formule de Green à la fonction h et la fonction $u(z) = \frac{-1}{m^2 + n^2} \cos mx \sin ny$, $\Delta u = \cos mx \sin ny$. En supposant h suffisamment régulière dans \bar{R} , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{m+n}(m^2 + n^2)}{n} b_{mn} &= \frac{(-1)^{m+n}(m^2 + n^2)}{n \pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(z) \Delta u(z) dx dy \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi^2 n} \int_{-\pi}^{\pi} [h'_x(\pi, y) - h'_x(-\pi, y)] \sin ny dy \\ &= \frac{(-1)^m}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} [h(x, \pi) - h(x, -\pi)] \cos mx dx. \end{aligned}$$

Ces intégrales simples peuvent être éliminées des b_{mn} , b_{0n} , b_{m1} et b_{01} , ce qui donne la formule de (13.9). Du cas de h régulier dans \bar{R} un passage à la limite nous ramène au cas général de h sommable dans R .

Pourtant le lemme de Zaremba présente un intérêt intrinsèque et le critère d'harmonicité qui en découle a eu récemment un regain

d'actualité par les applications qui en ont été données par M. H. Weyl dans le cas de l'espace (*voir* 27).

16. Avant de passer à la justification du développement (15.12), nous allons étudier de plus près son membre droit. On a d'abord

$$(16.1) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m0} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{0n} = \lim_{m \rightarrow \infty} b_{m1} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{0n} = \lim_{m \rightarrow \infty} d_{m1} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{1n} = 0.$$

En effet, prenons par exemple la suite b_{m1} . On a, d'après (15.8),

$$\begin{aligned} b_{m1} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_{01}(z) \cos mx \sin y \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} h_{01}(z) \sin y \, dy \right] \cos mx \, dx, \end{aligned}$$

$h_{01}(z)$ étant L dans le carré R, l'intégrale entre crochets est une fonction L dans $-\pi < x < \pi$ et le théorème de Riemann-Lebesgue donne $\lim b_{m1} = 0$. De même pour les autres suites.

LEMME 1. — *Les séries*

$$(16.2) \quad A'_{\mu\nu} c_{\mu\nu}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} B_{\mu\nu}^{(m)} e_{\mu\nu}(mz) = D_{\mu\nu}(z),$$

$$(16.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_{\mu\nu}^{(n)} e_{\nu\mu}(in\bar{z}) = E_{\mu\nu}(z)$$

sont absolument et uniformément convergentes dans toute bande $|y| < b' < \pi$ ou $|x| < a' < \pi$ respectivement et forment des fonctions harmoniques et périodiques, la première dans la bande $|y| < \pi$, avec période 2π , la seconde dans la bande $|x| < \pi$, avec période $2\pi i$.

LEMME 2. — 1° Pour $|y| \rightarrow \pi$, on a uniformément en x ,

$$(16.4) \quad \begin{cases} D_{00}(z) = o\left(\frac{1}{(\pi - |y|)^2}\right), & D_{01}(z) = o\left(\frac{1}{(\pi - |y|)^3}\right), \\ D_{11}(z) = o\left(\frac{1}{(\pi - |y|)^3}\right) \quad (1). \end{cases}$$

(1) $o(\varphi(|y|))$ signifie ici une fonction dont le quotient par $\varphi(|y|)$ tend vers 0 pour $|y| \rightarrow \pi$.

2° Pour $|x| \rightarrow \pi$, on a uniformément en y ,

$$(16.5) \quad \begin{cases} E_{00}(z) = o\left(\frac{1}{(\pi - |x|)^2}\right), & E_{01}(z) = o\left(\frac{1}{(\pi - |x|)^2}\right), \\ E_{11}(z) = o\left(\frac{1}{(\pi - |x|)^2}\right). \end{cases}$$

Pour prouver ces lemmes remarquons que suivant (15.13) le $m^{\text{ième}}$ (ou $n^{\text{ième}}$) terme de la série de (16.2) [ou (16.3)] est majoré uniformément en x pour $|y| < \pi$ (ou en y pour $|x| < \pi$) comme suit :

$$(16.6) \quad \begin{cases} |B_{00}^{(m)} e_{00}(mz)| < |a_{m0}| 2\pi m e^{m(|y|-\pi)}, \\ |C_{00}^{(n)} e_{00}(in\bar{z})| < |a_{0n}| 2\pi n e^{n(|x|-\pi)}, \\ |B_{01}^{(m)} e_{01}(mz)| < |b_{m1}| 2\pi m^2 e^{m(|y|-\pi)}, \\ |C_{01}^{(n)} e_{10}(in\bar{z})| < |b_{0n}| 2\pi n e^{n(|x|-\pi)}, \\ |B_{11}^{(m)} e_{11}(mz)| < |d_{m1}| 2\pi m^2 e^{m(|y|-\pi)}, \\ |C_{11}^{(n)} e_{11}(in\bar{z})| < |d_{1n}| 2\pi n^2 e^{n(|x|-\pi)}. \end{cases}$$

Vu (16.1), le lemme 1 s'en déduit immédiatement.

Pour le lemme 2, remarquons de plus que

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} m e^{-mt} &= \frac{e^{-t}}{(1 - e^{-t})^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{pour } t \searrow 0, \\ \sum_1^{\infty} m^2 e^{-mt} &= \frac{e^{-t} + e^{-2t}}{(1 - e^{-t})^3} = O\left(\frac{1}{t^3}\right) \quad \text{pour } t \searrow 0; \end{aligned}$$

donc, d'après (16.6) et (16.1), les séries (16.2) et (16.3) satisfont à (16.4) et (16.5) respectivement.

THÉORÈME 17. — Soit $h_{\mu,\nu}(z)$ une fonction L dans R, du type $\{\mu, \nu\}$ et soit (15.2) son développement en double série de Fourier. La condition (15.9) est nécessaire et suffisante pour que la fonction $h_{\mu,\nu}(z)$ soit équivalente à une fonction harmonique dans R. Si cette condition est satisfaite, le développement (15.12) converge uniformément dans tout domaine complètement intérieur à R vers la fonction harmonique équivalente à $h_{\mu,\nu}$.

Démonstration. — La nécessité de (15.9) résulte immédiatement du théorème 15 (lemme de Zaremba), d'après la remarque 1 du paragraphe 15 et la définition des fonctions $u_{\mu,\nu}^{(m,n)}$.

On prouvera d'un seul coup la suffisance de (15.9) et le reste du théorème, si l'on démontre que de (15.9) résulte la convergence uniforme à l'intérieur de R du développement (15.12) vers une fonction harmonique équivalente à $h_{\mu,\nu}$.

A cet effet remarquons d'abord que la convergence du développement (15.12) vers une fonction harmonique régulière dans R, uniforme dans tout carré $|x| < \alpha\pi$, $|y| < \alpha\pi$, $0 < \alpha < 1$ résulte du lemme 1. Pour prouver que cette fonction est équivalente à $h_{\mu,\nu}$, multiplions les deux membres (15.12) par $(1 + \cos x)^2 (1 + \cos y)^2$ ⁽¹⁾. Remarquons que les fonctions

$$(16.7) \quad h_{\mu,\nu}(z) (1 + \cos x)^2 (1 + \cos y)^2,$$

$$(16.8) \quad \Lambda_{\mu,\nu} \Phi_{\mu,\nu}(z) (1 + \cos x)^2 (1 + \cos y)^2,$$

$$(16.9) \quad \Lambda'_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu}(z) (1 + \cos x)^2 (1 + \cos y)^2,$$

$$(16.10) \quad \sum_{m=1}^{\infty} B_{\mu,\nu}^{(m)} e_{\mu,\nu}(mz) (1 + \cos x)^2 (1 + \cos y)^2,$$

$$(16.11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{(n)} e_{\nu\mu}(in\bar{z}) (1 + \cos x)^2 (1 + \cos y)^2,$$

sont toutes L dans R. En effet, (16.7) l'est, car $h_{\mu,\nu}(z)$ l'est. (16.8) l'est, vu (9.6) (avec $a = b = \pi$), les fonctions $p(z - \pi - \pi i)$ et $\zeta(z - \pi - \pi i)$ ayant pour seules singularités des pôles doubles ou simples aux sommets du carré. Il est clair que (16.9) l'est. Que (16.10) et (16.11) le sont résulte du lemme 2.

Nous démontrerons notre théorème, si nous prouvons que les coefficients de Fourier de (16.7) sont égaux à la somme des coefficients correspondants de Fourier de toutes les autres fonctions (16.8) — (16.11). En effet, toutes ces fonctions étant L, il en résultera que (16.7) est équivalente à la somme des (16.8) — (16.11), d'où l'équivalence des deux membres de (15.12).

Il reste donc à prouver notre assertion concernant les coefficients de Fourier des fonctions (16.7) — (16.11). Pour le faire, consi-

(1) Remarquons que pour le type $\{0,0\}$ il aurait suffi de multiplier par $(1 + \cos x)(1 + \cos y)$.

dérons les coefficients de Fourier des fonctions

$$(16.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{\mu\nu}(z), \quad A_{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu}(z), \quad A'_{\mu\nu}c_{\mu\nu}(z), \\ \sum_{m=1}^{\infty} B_{\mu\nu}^{(m)} e_{\mu\nu}(mz) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_{\mu\nu}^{(n)} e_{\nu\mu}(in\bar{z}). \end{array} \right.$$

Pour la deuxième, quatrième et cinquième fonction ces coefficients sont obtenus *formellement*, en intégrant terme à terme les séries les définissant (pour $\Phi_{\mu\nu}$ nous prenons la série (9.5)). Désignons ces coefficients formels par

$$(16.13) \quad p_{\mu\nu}^{mn}, \quad q_{\mu\nu}^{mn}, \quad r_{\mu\nu}^{mn}, \quad s_{\mu\nu}^{mn} \quad \text{et} \quad t_{\mu\nu}^{mn}.$$

On prouve alors premièrement que

$$(16.14) \quad p_{\mu\nu}^{mn} = q_{\mu\nu}^{mn} + r_{\mu\nu}^{mn} + s_{\mu\nu}^{mn} + t_{\mu\nu}^{mn}.$$

Par exemple, pour le type $\{0, 1\}$, on a, vu (15.8), (15.11) et (15.13),

$$\begin{aligned} p_{01}^{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_{01}(z) \cos mx \sin ny \, dx \, dy = b_{mn}, \\ q_{01}^{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \iint A_{01} \Phi_{01}(z) \cos mx \sin ny \, dx \, dy = \frac{(-1)^{m+n} n}{m^2 + n^2} b_{01}, \\ r_{01}^{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \iint A'_{01} c_{01}(z) \cos mx \sin ny \, dx \, dy = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1} n}{n} b_{01} & \text{pour } m=0, \\ 0 & \text{pour } m \geq 1, \end{cases} \\ s_{01}^{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \iint \left(\sum_{m=1}^{\infty} B_{01}^{(m)} \cos mx \sin my \right) \cos mx \sin ny \, dx \, dy \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pour } m=0, \\ \frac{(-1)^{n+1} n(m^2+1)}{m^2+n^2} b_{m1} & \text{pour } m \geq 1, \end{cases} \\ t_{01}^{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \iint \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_{01}^{(n)} \cos hn x \sin ny \right) \cos mx \sin ny \, dx \, dy = \frac{(-1)^m n^2}{m^2+n^2} b_{0n}, \end{aligned}$$

et l'équation (16.14) n'est rien d'autre que (15.9).

On pouvait d'ailleurs s'attendre à cela, car la permission d'intégrer terme à terme dans les composants du membre droit de (15.12) nous ramène aux coefficients des doubles séries de Fourier de (15.10), qui viennent des séries (15.7) par l'application des équations (15.9).

Désignons maintenant par

$$(16.15) \quad P_{\mu\nu}^{mn}, Q_{\mu\nu}^{mn}, R_{\mu\nu}^{mn}, S_{\mu\nu}^{mn} \text{ et } T_{\mu\nu}^{mn}$$

les coefficients de Fourier des fonctions (16.7) — (16.11).

Vu que le produit de $(1 + \cos x)^2 (1 + \cos y)^2$ par $\cos mx \cos ny$ ou $\cos mx \sin ny$ ou $\sin mx \sin ny$ s'exprime comme une combinaison linéaire à coefficients constants d'un nombre fini des $\cos m'x \cos n'y$ ou $\cos m'x \sin n'y$ ou $\sin m'x \sin n'y$ respectivement⁽¹⁾, les coefficients $P_{\mu\nu}^{mn}$, $Q_{\mu\nu}^{mn}$, etc., seraient les mêmes combinaisons linéaires finies des coefficients formels correspondants $p_{\mu\nu}^{m'n'}$, $q_{\mu\nu}^{m'n'}$, etc.

$$(16.16) \quad P_{\mu\nu}^{mn} = \Sigma_{\gamma} p_{\mu\nu}^{m'n'} \gamma^{m'n'}, \quad Q_{\mu\nu}^{mn} = \Sigma_{\gamma} q_{\mu\nu}^{m'n'} \gamma^{m'n'}, \quad \dots,$$

si l'on pouvait, dans les intégrales doubles définissant les coefficients (16.15), intégrer les séries terme à terme. Pour le vérifier remarquons d'abord que l'équation (16.16) est certainement vraie pour $P_{\mu\nu}^{mn}$ et $R_{\mu\nu}^{mn}$ pour lesquels les fonctions correspondantes de (16.12) sont L, donc les $p_{\mu\nu}^{m'n'}$ et $r_{\mu\nu}^{m'n'}$ sont des vrais coefficients de Fourier. Ensuite, vu que les fonctions (16.7) — (16.11) sont L, dans les intégrales doubles définissant $Q_{\mu\nu}^{mn}$, $S_{\mu\nu}^{mn}$ et $T_{\mu\nu}^{mn}$, on peut changer l'ordre d'intégration à volonté. Par conséquent, dans les intégrales pour $Q_{\mu\nu}^{mn}$ et $S_{\mu\nu}^{mn}$, on intégrera d'abord par rapport à x , ce qui, vu l'uniforme convergence des séries correspondantes pour tout y fixe, $|y| < \pi$, peut s'effectuer terme à terme et laissera seulement un nombre fini de termes non nuls. Par conséquent, l'intégration double peut s'effectuer également terme à terme.

Dans les intégrales définissant $T_{\mu\nu}^{mn}$ on intégrera d'abord par rapport à y , avec des résultats similaires. Donc, les équations (16.16) sont

(1) Par exemple,

$$\begin{aligned} & (1 + \cos x)^2 (1 + \cos y)^2 \cos mx \sin ny \\ &= \left[\frac{3}{2} \cos mx + \cos(m+1)x + \cos(m-1)x + \frac{1}{4} \cos(m+2)x + \frac{1}{4} \cos(m-2)x \right] \\ & \times \left[\frac{3}{2} \sin ny + \sin(n+1)y + \sin(n-1)y + \frac{1}{4} \sin(n+2)y + \frac{1}{4} \sin(n-2)y \right]. \end{aligned}$$

vraies. Vu les équations (16.14) on en déduit

$$(16.17) \quad P_{\mu\nu}^{mn} = Q_{\mu\nu}^{mn} + R_{\mu\nu}^{mn} + S_{\mu\nu}^{mn} + T_{\mu\nu}^{mn}, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — On ne peut pas s'attendre à avoir sous les hypothèses du théorème 17 l'égalité partout dans R de deux membres de (15.12), car ces hypothèses, ne différencient pas entre des fonctions $h(z)$ équivalentes. Mais, si l'on suppose que $h(z)$ est continu dans R, on aura l'égalité partout.

Du théorème 17 nous tirons deux corollaires immédiats.

COROLLAIRE 18. — *Le critère nécessaire du corollaire 16 est aussi suffisant pour que $h(z)$ soit équivalent à une fonction harmonique, même si on limite les $u(z)$ aux fonctions $u_{\mu\nu}^{(m,n)}$ de (15.4).*

COROLLAIRE 19. — *Si la fonction $h_{\mu\nu}$ du type $\{\mu, \nu\}$, harmonique et régulière dans R, est L dans R, la décomposition $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}$, avec*

$$(16.18) \quad h_{\mu\nu}^{(1)}(z) = \frac{\pi}{2} \gamma \Phi_{\mu\nu}(z) + \Lambda'_{\mu\nu} c_{\mu\nu}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} B_{\mu\nu}^{(m)} e_{\mu\nu}(mz),$$

$$(16.19) \quad h_{\mu\nu}^{(2)}(z) = \left(\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\pi}{2} \gamma \right) \Phi_{\mu\nu}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{\mu\nu}^{(n)} e_{\nu\mu}(in\bar{z}),$$

répond au problème (P), γ étant un nombre réel quelconque pour les types $\{0, 1\}$ et $\{1, 1\}$ et $\gamma = 0$ pour $\{0, 0\}$.

Il sera utile pour la suite d'avoir les développements explicites des fonctions (16.18) et (16.19) pour chaque type séparément. Nous userons pour les $\Phi_{\mu\nu}$, les développements (9.5) et les développements résultant de (10.4) que voici (pour les μ, ν qui entrent en compte et pour $a = b = \pi$) :

$$(16.20) \quad \Phi_{01}(z) = -\frac{1}{2\pi} c_{01}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\sinh m\pi} e_{01}(mz) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sinh n\pi} e_{10}(in\bar{z}),$$

$$(16.21) \quad \Phi_{11}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{\sinh m\pi} e_{11}(mz) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sinh n\pi} e_{11}(in\bar{z}).$$

Il en résulte d'après (15.13), pour les fonctions de (16.18) et

(16.19),

$$(16.22) \left\{ \begin{aligned} h_{00}^{(1)}(z) &= \frac{1}{4} a_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi m}{2 \sinh m \pi} a_{m0} e_{00}(mz), \\ h_{00}^{(2)}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{2 \sinh n \pi} a_{0n} e_{00}(in\bar{z}); \end{aligned} \right.$$

$$(16.23) \left\{ \begin{aligned} h_{01}^{(1)}(z) &= \frac{1}{4} (b_{01} - \gamma) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi}{2 \sinh m \pi} [(m^2 + 1)b_{m1} + (-1)^{m+1}\gamma] e_{01}(mz), \\ h_{01}^{(2)}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2 \sinh n \pi} [nb_{0n} + (-1)^n (b_{01} - \gamma)] e_{10}(in\bar{z}); \end{aligned} \right.$$

$$(16.24) \left\{ \begin{aligned} h_{11}^{(1)}(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi}{2 \sinh m \pi} [(m^2 + 1)d_{m1} + (-1)^m m \gamma] e_{11}(mz), \\ h_{11}^{(2)}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2 \sinh n \pi} [(1 + n^2)d_{1n} + (-1)^n n(2d_{11} - \gamma)] e_{11}(in\bar{z}). \end{aligned} \right.$$

17. Nous allons maintenant donner un théorème concernant l'unicité et la forme de la décomposition du problème (P) sous certaines hypothèses restrictives.

THÉORÈME 20. — Soit $h_{\mu\nu}(z)$ une fonction du type $\{\mu, \nu\}$ harmonique, régulière et L^p dans R , pour un $p \geq 1$. Considérons les décompositions

$$(17.1) \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(1)} + g_{\mu\nu}^{(2)},$$

$g_{\mu\nu}^{(1)}$ et $g_{\mu\nu}^{(2)}$ L^p dans R , répondant au problème (P). Suivant le type :

1° $\{0, 0\}$. — A une constante près, il n'y a qu'une décomposition au plus du genre (17.1) et si elle existe, elle est donnée par (16.22).

2° $\{0, 1\}$. a. $p < 2$. — Il n'y a aucune ou il y a une infinité de décompositions du genre (17.1). Si elles existent, elles sont toutes données par (16.23) avec γ quelconque.

b. $p \geq 2$. — Il n'y a qu'une décomposition au plus du genre (17.1) et, si elle existe, elle est donnée par (16.23), avec un γ satisfai-

sant à

$$(17.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [(m^2 + 1)b_{m1} + (-1)^{m+1}\gamma]^2 < \infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [nb_{0n} + (-1)^n(b_{01} - \gamma)]^2 < \infty. \end{array} \right.$$

3° $\{1, 1\}$. — Il n'y a qu'une décomposition au plus du genre (17.1) et, si elle existe, elle est donnée par (16.24), avec γ satisfaisant à

$$(17.3) \quad \gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{m+1} m d_{m1}, \quad 2d_{11} - \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} n d_{1n}.$$

Démonstration. — D'abord, remarquons que l'on peut se limiter au cas où les $g_{\mu\nu}^{(k)}$ sont du type $\{\mu, \nu\}$, car autrement on peut prendre les parties des $g_{\mu\nu}^{(k)}$ du type $\{\mu, \nu\}$ en place de $g_{\mu\nu}^{(k)}$ et (17.1) aura encore lieu.

Comparons la décomposition (17.1) supposée possible, avec la décomposition du corollaire 19 avec $\gamma = 0$. On posera

$$(17.4) \quad p_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(1)} - h_{\mu\nu}^{(1)} = - (g_{\mu\nu}^{(2)} - h_{\mu\nu}^{(2)}).$$

On sait que $p_{\mu\nu}$ est une fonction harmonique, doublement périodique des périodes 2π et $2\pi i$, n'ayant de singularités qu'éventuellement aux points $\pi(2m+1) + i\pi(2n+1)$. Étudions le comportement de $p_{\mu\nu}$ autour des sommets du carré R.

Supposons seulement que $h_{\mu\nu}$ et les $g_{\mu\nu}^{(k)}$ sont L dans R. D'après le lemme 2 du n° 16 on a uniformément, pour z dans R,

$$(17.5) \quad h_{\mu\nu}^{(1)}(z) = o\left(\frac{1}{(\pi - |y|)^\tau}\right) \quad \text{pour } |y| \rightarrow \pi,$$

$$(17.6) \quad h_{\mu\nu}^{(2)}(z) - A_{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu}(z) = o\left(\frac{1}{(\pi - |x|)^\tau}\right) \quad \text{pour } |x| \rightarrow \pi,$$

avec $\tau = 2$ pour $\{0, 0\}$ et $\tau = 3$ pour $\{0, 1\}$ et $\{1, 1\}$.

Les $g_{\mu\nu}^{(1)}$ et $g_{\mu\nu}^{(2)}$ étant périodiques dans les bandes $|y| < \pi$ ou $|x| < \pi$ respectivement, elles sont harmoniques, régulières et L dans les rectangles ($|x| < 2\pi, |y| < \pi$) ou ($|x| < \pi, |y| < 2\pi$) respectivement. Le lemme du n° 8 donne alors encore uniformément pour z

dans R

$$(17.7) \quad g_{\mu\nu}^{(1)}(z) = o\left(\frac{1}{(\pi - |y|)^2}\right) \quad \text{pour } |y| \rightarrow \pi,$$

$$(17.8) \quad g_{\mu\nu}^{(2)}(z) = o\left(\frac{1}{(\pi - |x|)^2}\right) \quad \text{pour } |x| \rightarrow \pi.$$

D'après (17.4), il en résulte uniformément, pour $z \in R$,

$$(17.9) \quad p_{\mu\nu}(z) = g_{\mu\nu}^{(1)} - h_{\mu\nu}^{(1)} = o\left(\frac{1}{(\pi - |y|)^\tau}\right), \quad |y| \rightarrow \pi,$$

$$(17.10) \quad p_{\mu\nu}(z) = -g_{\mu\nu}^{(2)} + h_{\mu\nu}^{(2)} = A_{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu}(z) + o\left(\frac{1}{(\pi - |x|)^\tau}\right), \quad |x| \rightarrow \pi.$$

Il en résulte immédiatement, quand z s'approche d'un des sommets s du carré R de l'intérieur de R,

$$\frac{1}{2^\tau} |z - s|^\tau |p_{\mu\nu}(z)| \leq |A_{\mu\nu}| (\pi - |x|)^\tau |\Phi_{\mu\nu}(z)| + o(1).$$

Maintenant, vu que, d'après (15.13) et la remarque après le théorème 8, $A_{00} = 0$,

$$\begin{aligned} |\pi - |x||^3 |\Phi_{01}(z)| &\leq |z - s|^3 |\Phi_{01}(z)| = o(1), \\ \pi - |x||^3 |\Phi_{11}(z)| &\leq |z - s|^3 |\Phi_{11}(z)| = o(1). \end{aligned}$$

on en tire

$$(17.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dans le cas } \{0, 0\}: \quad |z - s|^2 p_{\mu\nu}(z) = o(1) \\ \text{Dans les cas } \{0, 1\} \text{ et } \{1, 1\}: \quad |z - s|^3 p_{\mu\nu}(z) = o(1) \end{array} \right\} \quad \text{pour } z \rightarrow s.$$

Ceci étant pour chaque sommet du carré R et pour l'approximation de l'intérieur de R, la double périodicité du $p_{\mu\nu}$ a pour effet que le même comportement se produit dans l'approximation d'un sommet, par exemple $\pi + \pi i$, de tous les côtés. Le théorème 6 donne alors que $p_{\mu\nu}(z)$ est de la forme (9.1) et, plus particulièrement, vu le théorème 8 et la remarque après ce théorème, on aboutit aux formes suivantes :

$$(17.12) \quad p_{00}(z) = \text{const.}, \quad p_{01}(z) = \alpha \Phi_{01}(z), \quad p_{11}(z) = \alpha \Phi_{11}(z).$$

Vu (17.4), la partie 1° de notre théorème s'en trouve démontrée. Pour les cas $\{0, 1\}$ et $\{1, 1\}$, on déduit de (17.12) que les $g_{\mu\nu}^{(k)}$ sont conformes aux formules (16.18) et (16.19) avec $\alpha = \frac{\pi}{2} \gamma$.

Considérons maintenant le cas $\{0, 1\}$ et supposons $p < 2$.

Pour deux valeurs de γ différentes, γ' et γ'' , les fonctions (16.18) diffèrent par $\frac{\pi}{2}(\gamma' - \gamma'')\Phi_{0,1}$, donc une fonction L^p (voir la remarque après le théorème 8). On a de même pour les fonctions (16.19). Il en résulte que s'il existe une décomposition du genre (17.1), les décompositions du corollaire 19 pour tout γ seront de ce genre.

Si $p \geq 2$ et il existe une décomposition du genre (17.1), celle-ci sera donnée par les formules (16.18) et (16.19), donc aussi (16.23) pour un certain γ . Les composantes étant L^p , donc *a fortiori* L^2 , on peut appliquer le théorème 3, ce qui conduit à (17.2). L'unicité résulte aussi bien du fait qu'il ne peut y avoir qu'au plus un seul γ satisfaisant à (17.2), que du fait que la différence des fonctions (16.18) pour $\gamma = \gamma'$ et $\gamma = \gamma'' \neq \gamma'$ est $= \frac{\pi}{2}(\gamma' - \gamma'')\Phi_{0,1}$ qui n'est pas L^2 .

Considérons enfin le cas $\{1, 1\}$ et supposons qu'il existe une décomposition du genre (17.1). Elle est de la forme (16.18) et (16.19) pour un certain γ . Il ne peut pas y en avoir d'autre pour la même raison que plus haut, $\Phi_{1,1}(z)$ n'étant pas L . Maintenant, les composantes étant conformes à (16.18) et (16.19), elles sont données par (16.24) pour un certain γ . Elles sont L^p , donc L et l'on peut appliquer le théorème 4, ce qui donne immédiatement (17.3). Ainsi la démonstration est achevée.

18. Nous allons maintenant supposer :

(18.1) Les dérivées partielles h'_x et h'_y de $h = h_{\mu,\nu}$ sont bornées dans R ,

et analyser la forme des décompositions (16.22), (16.23) et (16.24).

Notons d'abord quelques conséquences immédiates de (18.1).

1° La fonction $h(z)$ est prolongeable de façon continue dans le carré fermé \bar{R} . Ses valeurs sur la frontière de \bar{R} , $h(\pm \pi, y)$ et $h(x, \pm \pi)$ (de même que ses valeurs dans tout \bar{R}) satisfont à une condition de Lipschitz, donc sont absolument continues et possèdent des dérivées bornées p. p.

2° La fonction conjuguée \bar{h} de $h = h_{\mu,\nu}$, fixée par la condition $\bar{h}(0) = 0$, est du type $\{1 - \mu, 1 - \nu\}$ et satisfait à la condition analogue

à (18. 1) (vu que $\bar{h}'_x = -\bar{h}'_y$, $\bar{h}'_y = \bar{h}'_x$). Par conséquent, les propriétés 1° ont lieu pour \bar{h} également.

Nous allons considérer chaque type $\{\mu, \nu\}$ séparément.

Type $\{0, 0\}$. — En appliquant l'intégration par parties, changement d'ordre d'intégration et les égalités $\bar{h}'_x = -\bar{h}'_y$, $\bar{h}'_y = \bar{h}'_x$, on trouve (toutes les intégrales sont de $-\pi$ à π)

$$\begin{aligned} a_{m0} &= \frac{1}{\pi^2} \iint h \cos mx \, dx \, dy = \frac{1}{\pi^2} \int dy \int -h'_x \frac{\sin mx}{m} \, dx \\ &= \frac{-1}{\pi^2 m} \int \sin mx \, dx \int \bar{h}'_y \, dy = \frac{1}{\pi^2 m} \int [\bar{h}(x, -\pi) - \bar{h}(x, \pi)] \sin mx \, dx \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^2 m^2} [\bar{h}(-\pi, \pi) - \bar{h}(\pi, \pi) + \bar{h}(\pi, -\pi) - \bar{h}(-\pi, -\pi)] \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2 m^2} \int (\bar{h}'_x(x, -\pi) - \bar{h}'_x(x, \pi)) \cos mx \, dx \\ &= \frac{(-1)^m 4}{\pi^2 m^2} \bar{h}(\pi, \pi) + \frac{1}{\pi m^2} a'_{m0}, \end{aligned}$$

vu que, \bar{h} étant du type $\{1, 1\}$,

$$\bar{h}(\pi, \pi) = -\bar{h}(-\pi, \pi) = -\bar{h}(\pi, -\pi) = \bar{h}(-\pi, -\pi).$$

a'_{m0} étant les coefficients de Fourier de la fonction

$$\bar{h}'_x(x, -\pi) - \bar{h}'_x(x, \pi),$$

bornée p. p. (voir 1° et 2°), il en résulte

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a'_{m0}|^2 < \infty.$$

D'après (16. 22) on en déduit

$$h_{00}^{(1)} = \left[\frac{1}{4} a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_{n0}}{2n} \frac{\cos nx \cosh ny}{\sinh n\pi} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \bar{h}(\pi, \pi)}{\pi m \sinh m\pi} \cos mx \cosh my.$$

Il est clair que le terme entre crochets est une fonction continue dans la bande fermée $|y| \leq \pi$, tandis que la seconde série est égale, d'après (9. 4) (où l'on aura mis $a = b = \pi$, $\eta_1 = \frac{1}{4}$, $\eta_2 = -\frac{1}{4}i$, intégré

les deux membres et pris leurs parties réelles), à

$$-\frac{2\bar{h}(\pi, \pi)}{\pi} \left[\log |\sigma(z - \pi - \pi i)| + \frac{1}{4}(x + y) - \frac{1}{8\pi}(x^2 - y^2) - c \right].$$

où c est une constante d'intégration, facile à déterminer.

Il en résulte

$$(18.2) \quad h_{00}^{(1)} = \frac{-2\bar{h}(\pi, \pi)}{\pi} \log |\sigma(z - \pi - \pi i)| \\ + [\text{fonction continue dans } |y| \leq \pi].$$

De façon analogue on trouve

$$(18.2') \quad h_{00}^{(2)} = \frac{2\bar{h}(\pi, \pi)}{\pi} \log |\sigma(i\bar{z} - \pi - \pi i)| \\ + [\text{fonction continue dans } |x| \leq \pi].$$

Remarquons que pour les périodes 2π et $2\pi i$

$$\sigma(i\bar{z} - \pi - \pi i) = \overline{\sigma(z - \pi - \pi i)},$$

donc

$$\log |\sigma(i\bar{z} - \pi - \pi i)| = \log |\sigma(z - \pi - \pi i)|.$$

Type $\{0, 1\}$. — Par les mêmes méthodes que dans le cas du type $\{0, 0\}$, on trouve

$$b_{m1} = \frac{1}{\pi^2} \iint h \cos mx \sin y \, dx \, dy = \frac{1}{\pi^2} \int \sin y \, dy \int -h'_x \frac{\sin mx}{m} \, dx \\ = \frac{-1}{\pi^2 m} \int \sin mx \, dx \int \bar{h}'_y \sin y \, dy = \frac{1}{\pi^2 m} \int \cos y \, dy \int \bar{h} \sin mx \, dx \\ = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^2 m^2} \int (\bar{h}(\pi, y) - \bar{h}(-\pi, y)) \cos y \, dy - \frac{1}{\pi^2 m^2} \int \cos mx \, dx \int h'_y \cos y \, dy \\ = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^2 m^2} \int (\bar{h}(\pi, y) - \bar{h}(-\pi, y)) \cos y \, dy \\ + \frac{1}{\pi^2 m^2} \int (h(x, \pi) - h(x, -\pi)) \cos mx \, dx \\ - \frac{1}{\pi^2 m^2} \iint h \cos mx \sin y \, dx \, dy,$$

d'où

$$(m^2 + 1)b_{m1} = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^2} \int (\bar{h}(\pi, y) - \bar{h}(-\pi, y)) \cos y \, dy \\ + \frac{1}{\pi^2} \int (h(x, \pi) - h(x, -\pi)) \cos mx \, dx.$$

De même on a

$$\begin{aligned}
 b_{0,n} &= \frac{1}{\pi^2} \iint h \sin ny \, dx \, dy \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2 n} \int (h(x, \pi) - h(x, -\pi)) \, dx - \frac{1}{\pi^2 n} \int \cos ny \, dy \int \bar{h}'_x \, dx \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2 n} \int (h(x, \pi) - h(x, -\pi)) \, dx \\
 &\quad - \frac{1}{\pi^2 n} \int (\bar{h}(\pi, y) - \bar{h}(-\pi, y)) \cos ny \, dy.
 \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
 \gamma &= -\frac{1}{\pi^2} \int (\bar{h}(\pi, y) - \bar{h}(-\pi, y)) \cos y \, dy, \\
 b_{m,1} &= \frac{1}{\pi} \int (h(x, \pi) - h(x, -\pi)) \cos mx \, dx, \\
 b'_{0,n} &= -\frac{1}{\pi} \int (\bar{h}(\pi, y) - \bar{h}(-\pi, y)) \cos ny \, dy,
 \end{aligned}$$

donc

$$b_{0,1} - \gamma = \frac{1}{\pi^2} \int (h(x, \pi) - h(x, -\pi)) \, dx,$$

on trouve, d'après (16.23),

$$\begin{aligned}
 h_{0,1}^{(1)} &= \frac{1}{4} (b_{0,1} - \gamma) y + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b'_{m,1}}{2} \frac{\cos mx \sinh my}{\sinh m\pi}, \\
 h_{0,1}^{(2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b'_{0,n}}{2} \frac{\cosh nx \sin ny}{\sinh n\pi}.
 \end{aligned}$$

Les $b'_{m,1}$ et $b'_{0,n}$ étant les cosinus-coefficients, de Fourier des fonctions $h(x, \pi) - h(x, -\pi)$ et $\bar{h}(-\pi, y) - \bar{h}(\pi, y)$ satisfaisant à la condition de Lipschitz, on sait que

$$\sum |b'_{m,1}| < \infty \quad \text{et} \quad \sum |b'_{0,n}| < \infty,$$

par conséquent,

(18.3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Les fonctions } h_{0,1}^{(1)} \text{ et } h_{0,1}^{(2)} \text{ sont continues dans les bandes} \\ \text{fermées } |y| \leq \pi \text{ et } |x| \leq \pi \text{ respectivement.} \end{array} \right.$

Type { 1. 1 }. — Par les mêmes méthodes

$$\begin{aligned} d_{m,1} &= \frac{1}{\pi^2} \iint h \sin mx \sin y \, dx \, dy \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^2 m} \int (h(\pi, y) - h(-\pi, y)) \sin y \, dy + \frac{1}{\pi^2 m} \int \cos mx \, dx \int h'_y \sin y \, dy \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^2 m} \int (h(\pi, y) - h(-\pi, y)) \sin y \, dy \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2 m^2} \int (h(x, \pi) - h(x, -\pi)) \sin mx \, dx - \frac{1}{\pi^2 m^2} \iint h \sin mx \sin y \, dx \, dy, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (m^2 + 1) d_{m,1} &= \frac{(-1)^{m+1} m}{\pi^2} \int (h(\pi, y) - h(-\pi, y)) \sin y \, dy + \frac{4(-1)^{m+1}}{\pi^2 m} h(\pi, \pi) \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2 m} \int (h'_x(x, \pi) - h'_x(x, -\pi)) \cos mx \, dx; \end{aligned}$$

de même on aura

$$\begin{aligned} (1 + n^2) d_{1,n} &= \frac{(-1)^{n+1} n}{\pi^2} \int (h(x, \pi) - h(x, -\pi)) \sin x \, dx + \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n} h(\pi, \pi) \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2 n} \int (h'_y(\pi, y) - h'_y(-\pi, y)) \cos ny \, dy. \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\pi^2} \int (h(\pi, y) - h(-\pi, y)) \sin y \, dy, \\ d'_{m,1} &= \frac{1}{\pi} \int (h'_x(x, \pi) - h'_x(x, -\pi)) \cos mx \, dx, \\ d'_{1,n} &= \frac{1}{\pi} \int (h'_y(\pi, y) - h'_y(-\pi, y)) \cos ny \, dy, \end{aligned}$$

et, en remarquant que

$$\begin{aligned} 2 d_{11} &= \frac{1}{\pi^2} \int (h(\pi, y) - h(-\pi, y)) \sin y \, dy \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \int (h(x, \pi) - h(x, -\pi)) \sin x \, dx \\ 2 d_{11} - \gamma &= \frac{1}{\pi^2} \int (h(x, \pi) - h(x, -\pi)) \sin x \, dx, \end{aligned}$$

on trouve, d'après (16.24),

$$h_{11}^{(1)} = h(\pi, \pi) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi m} \frac{\sin mx \sinh my}{\sinh m\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d'_{m,1}}{2m} \frac{\sin mx \sinh my}{\sinh m\pi},$$

$$h_{11}^{(2)} = h(\pi, \pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} \frac{\sinh nx \sin ny}{\sinh n\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d'_{1,n}}{2n} \frac{\sinh nx \sin ny}{\sinh n\pi}.$$

Similairement au cas $\{0,0\}$, nous avons ici

$$\sum \frac{(-1)^m}{m \sinh m\pi} \sin mx \sinh my = \text{Arg} \sigma(z - \pi - \pi i) + \frac{1}{4}(y - x) - \frac{1}{4\pi} xy - c_1,$$

$$|y| < \pi, \quad c_1 = \text{const.},$$

$$\sum d'_{m,1}^2 < \infty, \quad \sum d'_{1,n}^2 < \infty.$$

Par conséquent

$$(18.4) \quad h_{11}^{(1)} = -\frac{2}{\pi} h(\pi, \pi) \text{Arg} \sigma(z - \pi - \pi i) + [\text{fonction continue dans } |y| \leq \pi],$$

$$(18.4') \quad h_{11}^{(2)} = -\frac{2}{\pi} h(\pi, \pi) \text{Arg} \sigma(i\bar{z} - \pi - \pi i) + [\text{fonction continue dans } |x| \leq \pi].$$

Notons ici que

$$\text{Arg} \sigma(i\bar{z} - \pi - \pi i) = \frac{\pi}{2} - \text{Arg} \sigma(z - \pi - \pi i) \quad (z \text{ dans } \mathbb{R}).$$

Les considérations ci-dessus conduisent aux énoncés suivants :

THÉOREME 21. — *Sous l'hypothèse (18.1), il existe une décomposition $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}$ et une seule (sauf pour le type $\{0, 0\}$, où elle l'est à une constante additive près) telle que :*

1° *Pour le type $\{0, 0\}$, $h_{00}^{(1)}$ est continu dans la bande fermée $|y| \leq \pi$, sauf aux points $t = (2m + 1)\pi \pm \pi i$ ($m = 0, \pm 1, \dots$). Dans le voisinage d'un tel point t , $h_{00}^{(1)} + \frac{2}{\pi} \bar{h}(\pi, \pi) \log|z - t|$ est une fonction continue. $h_{00}^{(2)}$ possède des propriétés analogues relatives à la bande $|x| \leq \pi$.*

2° *Pour le type $\{0, 1\}$, $h_{01}^{(1)}$ et $h_{02}^{(2)}$ sont continus dans leurs bandes fermées respectives.*

3° *Pour le type $\{1, 1\}$, $h_{11}^{(1)}$ est uniformément borné dans $|y| < \pi$ et*

continu dans $|\mathcal{Y}| \leq \pi$, sauf aux points $t = (2m \pm 1)\pi \pm \pi i$. En chacun de ces points les valeurs frontières de $h_{11}^{(1)}$ subissent un saut de valeur $\pm 2h(\pi, \pi)$. $h_{11}^{(2)}$ possède des propriétés analogues.

COROLLAIRE 22. — Les composantes $h_{uv}^{(k)}$ du théorème 21 sont L^p dans le carré R pour tout $p < \infty$.

Ces énoncés redonnent l'énoncé de la fin du paragraphe 15 en le précisant.

Remarque 1. — Nous avons obtenu plus haut des formules pour les coefficients $a_{m,0}, \dots, d_{1,n}$ n'utilisant que les valeurs de $h(z)$ et de sa conjuguée $\bar{h}(z)$ sur la frontière de R . Ces formules pourraient être déduites de manière différente, notamment en appliquant aux intégrales doubles définissant ces coefficients la formule de Green convenablement généralisée. Encore une autre manière serait d'appliquer les formules (15.1) et (15.2) en y développant la fonction ζ suivant la formule (9.4). Ajoutons encore que les mêmes formules peuvent être déduites sous des hypothèses bien moins restrictives que (18.1).

Remarque 2. — Notons le fait curieux que pour le type $\{1, 1\}$, les composantes $h_{11}^{(1)}$ et $h_{11}^{(2)}$ dans le théorème 21 peuvent être définies très simplement comme suit : $h_{11}^{(1)}$ est le prolongement dans la bande $|\mathcal{Y}| < \pi$ de la fonction harmonique dans le carré R , égale à zéro sur les côtés verticaux et $= h_{11} = h$ sur les côtés horizontaux du carré. $h_{11}^{(2)}$ se définit de manière analogue. L'explication de cette particularité est que, pour le type $\{1, 1\}$, les développements (16.24) se confondent avec les développements traités au paragraphe 28 qui servent à résoudre le problème de Dirichlet dans le carré.

IV. — Décomposition des fonctions harmoniques L^2 .

19. Nous allons nous occuper maintenant des fonctions harmoniques et L^2 dans le carré R .

PROBLÈME (P^2). — Étant donnée une fonction $h(z)$ harmonique et L^2

dans le carré R , trouver une décomposition

$$(19.1) \quad h(z) = h_1(z) + h_2(z), \quad h_1 \text{ et } h_2 \text{ L}^2 \text{ dans } R.$$

répondant au problème (P).

Comme nous savons déjà, il suffit de considérer le cas où $h(z)$ est d'un type $\{\mu, \nu\}$ et de chercher h_1 et h_2 du même type.

Nous commençons par donner une inégalité correspondant aux types $\{0, 0\}$ et $\{1, 1\}$, qui nous servira à résoudre le problème (P²) pour ces types.

THÉORÈME 23. — Soit $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}$, où $\{\mu, \nu\} = \{0, 0\}$ ou $\{1, 1\}$, la décomposition (16.22) resp. (16.24) avec un γ approprié. Supposons que $h_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu}^{(1)}$ et $h_{\mu\nu}^{(2)}$ sont L² dans R . Alors

$$(19.2) \quad \iint_R |h_{\mu\nu}|^2 dx dy \geq \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) \iint_R |h_{\mu\nu}^{(1)}|^2 dx dy,$$

et de même pour $h_{\mu\nu}^{(2)}$. La constante $\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$ dans (19.2) est la meilleure possible.

Démonstration. — 1° Le cas du type $\{0, 0\}$.

Considérant le développement de h_{00} en double série de Fourier, on a, d'après (15.9),

$$(19.2.1) \quad \frac{1}{\pi^2} \iint_R |h_{00}|^2 dx dy = \frac{1}{4} a_{00}^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\infty a_{m0}^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\infty a_{0n}^2 + \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} [(-1)^m m^2 a_{m0} + (-1)^n n^2 a_{0n}]^2 < \infty.$$

D'après (16.22), on a

$$(19.2.2) \quad \frac{1}{\pi^2} \iint_R |h_{00}^{(1)}|^2 dx dy = \frac{1}{4} a_{00}^2 + \sum_1^\infty \frac{m^2}{4 \sinh^2 m\pi} a_{m0}^2 \iint_R |e_{00}(mz)|^2 dx dy < \infty,$$

$$(19.2.3) \quad \frac{1}{\pi^2} \iint_R |h_{00}^{(2)}|^2 dx dy = \sum_1^\infty \frac{n^2}{4 \sinh^2 n\pi} a_{0n}^2 \iint_R |e_{00}(in\bar{z})|^2 dx dy < \infty.$$

En posant

$$(19.2.3) \quad \begin{aligned} \rho_m &= \frac{m}{4 \sinh^2 m \pi} \iint_{\mathbb{R}} |e_{00}(mz)|^2 dx dy \\ &= \frac{m}{4 \sinh^2 m \pi} \iint_{\mathbb{R}} |e_{00}(im\bar{z})|^2 dx dy, \end{aligned}$$

et, en calculant les intégrales dans (19.2.3) une fois directement et une autre fois à l'aide de la série de Fourier de $\cosh mx$ [voir (15.11)], on trouve

$$(19.2.4) \quad \rho_m = \frac{\pi m}{4 \sinh^2 m \pi} \left(\pi + \frac{\sinh 2m\pi}{2m} \right) = \frac{1}{2m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^3}{(m^2 + n^2)^2}.$$

On vérifie aisément, d'après la première expression de ρ_m , que

$$(19.2.5) \quad \rho_m \text{ converge en décroissant vers } \frac{\pi}{4} \text{ pour } m \rightarrow \infty.$$

Les formules (19.2.2) et (19.2.3) prennent maintenant la forme

$$(19.2.6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} |h_{00}^{(1)}|^2 dx dy &= \frac{1}{4} a_{00}^2 + \sum_1^{\infty} m \rho_m a_{m0}^2 \\ &= \frac{1}{4} a_{00}^2 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} a_{m0}^2 + \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \frac{m^4}{(m^2 + n^2)^2} a_{m0}^2 < \infty, \end{aligned}$$

$$(19.2.7) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} |h_{00}^{(2)}|^2 dx dy \\ = \sum_1^{\infty} n \rho_n a_{0n}^2 = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} a_{0n}^2 + \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \frac{n^4}{(m^2 + n^2)^2} a_{0n}^2 < \infty, \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la double série dans (19.2.1) peut être développée. Ceci fait, on trouve

$$(19.2.8) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} |h_{00}|^2 dx dy &= \frac{1}{4} a_{00}^2 + \sum_1^{\infty} m \rho_m a_{m0}^2 + \sum_1^{\infty} n \rho_n a_{0n}^2 \\ &\quad + 2 \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} m^2 n^2}{(m^2 + n^2)^2} a_{m0} a_{0n}. \end{aligned}$$

Évaluons la série double. On a

$$\begin{aligned}
 (19.2.9) \quad \left| \sum_1^\infty \sum_1^\infty \right| &= \left| \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{(-1)^m m^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}} a_{m0}}{(m^2 + n^2)} \frac{(-1)^n m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}} a_{0n}}{(m^2 + n^2)} \right. \\
 &\leq \left(\sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{m^3 n a_{m0}^2}{(m^2 + n^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{m n^3 a_{0n}^2}{(m^2 + n^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\sum_1^\infty m \sigma_m a_{m0}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_1^\infty n \sigma_n a_{0n}^2 \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$(19.2.10) \quad \sigma_m = \sum_{n=1}^\infty \frac{m^2 n}{(m^2 + n^2)^2}.$$

Or, on a (voir la démonstration à la fin du présent paragraphe)

$$(19.2.11) \quad \sigma_m < \frac{2}{\pi} \rho_m \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Par conséquent, d'après (19.2.9),

$$\left| \sum_1^\infty \sum_1^\infty \right| \leq \frac{2}{\pi} \left(\sum_1^\infty m \rho_m a_{m0}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_1^\infty n \rho_n a_{0n}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

donc, d'après (19.2.8),

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbf{R}} |h_{00}|^2 dx dy &> \frac{1}{4} a_{00}^2 + \left(\sum_1^\infty m \rho_m a_{m0}^2 \right) \\
 &\quad - \frac{1}{\pi} \left(\sum_1^\infty m \rho_m a_{m0}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_1^\infty n \rho_n a_{0n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_1^\infty n \rho_n a_{0n}^2 \right) \\
 &\geq \frac{1}{4} a_{00}^2 + \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \left(\sum_1^\infty m \rho_m a_{m0}^2 \right) \\
 &\geq \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \left(\frac{1}{4} a_{00}^2 + \sum_1^\infty m \rho_m a_{m0}^2 \right),
 \end{aligned}$$

et ce dernier membre est

$$= \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbf{R}} |h_{00}^{(1)}|^2 dx dy,$$

d'après (19.2.6). Ceci prouve (19.2).

2° Le cas du type $\{1, 1\}$. Considérons le développement (16.24).
En posant

$$(19.3.1) \quad v_m = (-1)^m \frac{m^2 + 1}{m} d_{m1} + \gamma, \quad w_n = (-1)^{n+1} \frac{1 + n^2}{n} d_{1n} - (2d_{11} - \gamma),$$

$$(19.3.2) \quad \rho'_m = \frac{m}{4 \sinh^2 m\pi} \iint_{\mathbb{R}} |e_{11}(mz)|^2 dx dy,$$

on trouve, par la même méthode que dans le cas du type $\{0, 0\}$,

$$(19.3.3) \quad \rho'_m = \frac{\pi^2 m}{4 \sinh^2 m\pi} \left(\frac{\sinh 2m\pi}{2m\pi} - 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn^2}{(m^2 + n^2)^2},$$

$$(19.3.4) \quad \rho'_m \text{ converge en croissant vers } \frac{\pi}{4} \text{ pour } m \rightarrow \infty,$$

$$(19.3.5) \quad \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} |h_{11}^{(1)}|^2 dx dy = \sum_{m=1}^{\infty} m \rho'_m v_m^2 = \sum_{1 \atop 1}^{\infty} \sum_{1 \atop 1}^{\infty} \frac{m^2 n^2}{(m^2 + n^2)^2} v_m^2 < \infty,$$

$$(19.3.6) \quad \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} |h_{11}^{(2)}|^2 dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} n \rho'_n w_n^2 = \sum_{1 \atop 1}^{\infty} \sum_{1 \atop 1}^{\infty} \frac{m^2 n^2}{(m^2 + n^2)^2} w_n^2 < \infty,$$

Enfin, en utilisant le développement de $h_{11}(z)$ en double série de Fourier et en usant les quantités σ_m introduites dans (19.2.10) et les inégalités (qui seront démontrées plus loin)

$$(19.3.7) \quad \sigma_m < \frac{2}{\pi} \rho'_m \quad (m = 1, 2, \dots),$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} |h_{11}|^2 dx dy &= \sum_{1 \atop 1}^{\infty} \sum_{1 \atop 1}^{\infty} d_{mn}^2 = \sum_{1 \atop 1}^{\infty} \sum_{1 \atop 1}^{\infty} \frac{m^2 n^2}{(m^2 + n^2)^2} (v_m - w_n)^2 \\ &= \sum_{1 \atop 1}^{\infty} m \rho'_m v_m^2 + \sum_{1 \atop 1}^{\infty} n \rho'_n w_n^2 - 2 \sum_{1 \atop 1}^{\infty} \sum_{1 \atop 1}^{\infty} \frac{m^2 n^2}{(m^2 + n^2)^2} v_m w_n \\ &\leq \sum_{1 \atop 1}^{\infty} m \rho'_m v_m^2 + \sum_{1 \atop 1}^{\infty} n \rho'_n w_n^2 - 2 \left(\sum_{1 \atop 1}^{\infty} m \sigma_m v_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{1 \atop 1}^{\infty} n \sigma_n w_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{1 \atop 1}^{\infty} m \rho'_m v_m^2 + \sum_{1 \atop 1}^{\infty} n \rho'_n w_n^2 - \frac{4}{\pi} \left(\sum_{1 \atop 1}^{\infty} m \rho'_m v_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{1 \atop 1}^{\infty} n \rho'_n w_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \sum_{1 \atop 1}^{\infty} m \rho'_m v_m^2 = \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} |h_{11}^{(1)}|^2 dx dy \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité (19.2) pour le type $\{1, 1\}$.

Prouvons maintenant que la constante $\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$ de (19.2) est la meilleure possible. Pour le type $\{0, 0\}$ on prendra la fonction h_{00} avec les coefficients a_{m0} et a_{0n} suivants :

$$a_{m0} = \frac{(-1)^m}{m} \quad \text{pour } p \leq m \leq p^2, \quad a_{m0} = 0 \quad \text{pour les autres } m,$$

$$a_{0n} = -\frac{2}{\pi} a_{n0},$$

où p est un entier positif. Il est évident ici que $h_{00}^{(1)}$ et $h_{00}^{(2)}$ sont L^2 , donc aussi h_{00} et, suivant les formules (19.2.6) et (19.2.8) on trouve

$$\frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} |h_{00}^{(1)}|^2 dx dy = \sum_p^{\rho^2} \frac{\rho_m}{m} \sim \frac{\pi}{4} \log p \quad \text{pour } p \rightarrow \infty,$$

$$\frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} |h_{00}|^2 dx dy = \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) \sum_p^{\rho^2} \frac{\rho_m}{m} - \frac{4}{\pi} \sum_p^{\rho^2} \sum_p^{\rho^2} \frac{mn}{(m^2 + n^2)^2}.$$

Pour calculer la série double nous allons appliquer la formule de Euler-Maclaurin, arrêtée aux secondes dérivées

$$(19.4) \quad \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{l}{m}} \Psi(x) dx = \frac{1}{m} \sum_{n=k}^{n=l} \Psi\left(\frac{n}{m}\right) - \frac{1}{2m} \left[\Psi\left(\frac{k}{m}\right) + \Psi\left(\frac{l}{m}\right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2m^2} \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{l}{m}} \Phi_2(mt) \Psi''(t) dt,$$

où $\Phi_2(x) = x(x-1)$ est le deuxième polynôme de Bernoulli pour $0 \leq x \leq 1$, et pour les autres valeurs de x , $\Phi_2(x)$ est défini par prolongement périodique de période 1 (4).

En y mettant $\Psi(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$, on en déduit

$$\sum_{n=p}^{\rho^2} \frac{mn}{(m^2 + n^2)^2} = \frac{1}{m^2} \sum_{n=p}^{\rho^2} \frac{\frac{n}{m}}{\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{m} \int_{\frac{p}{m}}^{\frac{\rho^2}{m}} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx + \left[\frac{mp}{2(m^2 + p^2)^2} + \frac{mp^2}{2(m^2 + p^4)^2} \right] + O\left(\frac{1}{m^3}\right)$$

$$= \left[\frac{m}{2(m^2 + p^2)} - \frac{m}{2(m^2 + p^4)} \right] + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

(4) Voir par exemple W.-W., p. 128.

En appliquant encore une fois (19.4) pour $\Psi(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $m=p$ ou $m=p^2$ respectivement, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{m=p}^{p^2} \frac{m}{2(m^2+p^2)} &= \frac{1}{2p} \sum_{m=p}^{p^2} \frac{\frac{m}{p}}{1+\frac{m^2}{p^2}} = \frac{1}{2} \int_1^p \frac{x}{1+x^2} dx + O\left(\frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{1}{4} \log \frac{1+p^2}{2} + O\left(\frac{1}{p}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=p}^{p^2} \frac{m}{2(m^2+p^4)} &= \frac{1}{2p^2} \sum_{m=p}^{p^2} \frac{\frac{m}{p^2}}{1+\frac{m^2}{p^4}} = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{p}}^1 \frac{x}{1+x^2} dx + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \log \frac{2p^2}{1+p^2} + O\left(\frac{1}{p^2}\right), \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \sum_{m=p}^{p^2} \sum_{n=p}^{p^2} \frac{mn}{(m^2+n^2)^2} &= \frac{1}{4} \log \frac{(1+p^2)^2}{4p^2} + O\left(\frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{1}{2} \log p + \frac{1}{2} \log \frac{1+p^2}{p^2} - \frac{1}{2} \log 2 + O\left(\frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{1}{2} \log p + O(1) \quad \text{pour } p \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} |h_{00}|^2 dx dy &= \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) \left[\frac{\pi}{4} \log p + o(\log p)\right] - \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} \log p + O(1)\right] \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right) \log p + o(\log p) \\ &= \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) \frac{\pi}{4} \log p + o(\log p) \\ &\sim \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}} |h_{00}^{(1)}|^2 dx dy \quad \text{pour } p \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que la constante ne peut pas être améliorée.

Pour le type $\{1, 1\}$ on applique le même raisonnement avec une fonction h_{11} définie par

$$\begin{aligned} d_{11} &= 0, \quad \gamma = 0, \\ d_{n1} &= \frac{(-1)^n}{m^2+1} \quad \text{pour } p \leq m \leq p^2, \\ &= 0 \quad \text{pour les autres } m, \\ d_{1n} &= -\frac{2}{\pi} d_{n1}, \end{aligned}$$

ce qui fait, avec les notations (19.3.1),

$$\begin{aligned} \nu_m &= \frac{1}{m} && \text{pour } p \leq m \leq p^2, \\ &= 0 && \text{pour les autres } m, \\ \omega_n &= \frac{2}{\pi} \nu_n. \end{aligned}$$

Il nous reste encore à prouver les inégalités (19.2.11) et (19.3.7) que nous avons utilisées dans la démonstration. D'après (19.2.4) et (19.3.3) $\rho'_m < \rho_m$. Il suffit donc de prouver (19.3.7).

Nous allons appliquer la formule de Euler-Maclaurin arrêtée aux quatrièmes dérivées

$$(19.5) \quad \left\{ \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{l}{m}} \Psi(x) dx = \frac{1}{m} \sum_{n=k}^l \Psi\left(\frac{n}{m}\right) - \frac{1}{2m} \left[\Psi\left(\frac{k}{m}\right) + \Psi\left(\frac{l}{m}\right) \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{12m^2} \left[\Psi'\left(\frac{l}{m}\right) - \Psi'\left(\frac{k}{m}\right) \right] + \frac{1}{24m^4} \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{l}{m}} \Phi_4(mt) \Psi^{(4)}(t) dt, \right.$$

où $\Phi_4(t)$ est périodique de période 1, $\Phi_4(t) = t^2(t-1)^2 =$ le quatrième polynome de Bernoulli pour $0 \leq t \leq 1$.

Pour calculer σ_m nous mettrons $\Psi(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$, $k=0$, $l=\infty$ (on peut mettre $l=\infty$ vu que pour notre fonction Ψ , toutes les intégrales et la série de (19.5) sont absolument convergentes). Ceci nous donne

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^\infty \frac{\frac{n}{m}}{\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right)^2} - \\ + \frac{1}{12m^2} + \frac{1}{24m^4} \int_0^\infty \Phi_4(mx) \frac{120x(x^2-3)(3x^2-1)}{(1+x^2)^6} dx.$$

Le premier membre est $= \frac{1}{2}$, $\frac{1}{m} \sum = \sigma_m$, donc

$$\sigma_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{12m^2} - \frac{1}{24m^4} I_m.$$

Pour évaluer l'intégrale I_m remarquons que $0 \leq \Phi_4(t) \leq \frac{1}{16}$ et que l'autre facteur sous l'intégrale [qui est $= \Psi^{(4)}(x)$] est positif sauf pour $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \sqrt{3}$.

Par conséquent

$$\frac{1}{16} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \Psi^{(4)}(x) dx < I_m < \frac{1}{16} \left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Psi^{(4)} dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\infty} \Psi^{(4)} dx \right],$$

donc, après calcul

$$-\frac{21}{64} < I_m < \frac{69}{64}.$$

Il s'ensuit

$$\sigma_m < \frac{1}{2} - \frac{1}{12m^2} + \frac{7}{512m^4}.$$

D'autre part, d'après (19.3.3),

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \rho'_m &= \frac{\sinh 2m\pi}{4 \sinh^2 m\pi} - \frac{\pi m}{2 \sinh^2 m\pi} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cosh m\pi}{\sinh m\pi} - \frac{\pi m}{\cosh 2m\pi - 1} > \frac{1}{2} - \frac{\pi m}{\cosh 2m\pi - 1} \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de constater le fait évident que

$$\frac{\pi m}{\cosh 2m\pi - 1} < \frac{1}{12m^2} - \frac{7}{512m^4} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

pour en déduire $\sigma_m < \frac{2}{\pi} \rho'_m$.

C. Q. F. D.

20. Nous passons maintenant à la solution du problème (P²).

THÉORÈME 24. — 1° Soit $h_{\mu,\nu}$ une fonction harmonique L^2 dans R de type $\{\mu, \nu\} = \{0, 0\}$ ou $\{1, 1\}$. Il existe une décomposition

$$(20.1) \quad h_{\mu,\nu} = h_{\mu,\nu}^{(1)} + h_{\mu,\nu}^{(2)},$$

solvant le problème (P²).

2° Il existe une fonction $h_{0,1}$ de type $\{0, 1\}$ harmonique et L^2 dans R , pour laquelle le problème (P²) n'a pas de solution (1).

(1) Le théorème 24 peut être transformé en un théorème équivalent concernant les coefficients a_{m0} , a_{0n} ou b_{m1} , b_{0n} ou d_{m1} , d_{0n} de la fonction $h_{\mu,\nu}$ en question. C'est sous cette forme qu'il a été primitivement traité. L'exemple de la partie 2° est dû à G. H. Hardy. La partie 1° était primitivement prouvée par

Démonstration. 1° Considérons les fonctions

$$(20.1.1) \quad h_n(z) = h_{\mu, \nu} \left(\frac{n}{n+1} z \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$h_{\mu, \nu}$ étant L^2 , on prouve par la méthode du théorème 15 que

$$(20.1.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}} |h_{\mu, \nu}(z) - h_n(z)|^2 dx dy = 0,$$

donc

$$(20.1.3) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}} |h_m(z) - h_n(z)|^2 dx dy = 0.$$

Les fonctions $h_n(z)$ satisfont bien entendu à la condition (18.1). D'après le théorème 21 et le corollaire 22 on peut les décomposer en

$$(20.1.4) \quad h_n(z) = h_n^{(1)}(z) + h_n^{(2)}(z),$$

conformément au problème (P^2). D'après le théorème 20 les composantes peuvent être supposées de la forme (16.22) pour le type $\{0, 0\}$ et sont de la forme (16.24) pour le type $\{1, 1\}$. Les mêmes propriétés auront lieu pour les composantes dans

$$(20.1.5) \quad h_m(z) - h_n(z) = [h_m^{(1)}(z) - h_n^{(1)}(z)] + [h_m^{(2)}(z) - h_n^{(2)}(z)].$$

En appliquant le théorème 23, on a, d'après (20.1.3)

$$(20.1.6) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}} |h_m^{(k)} - h_n^{(k)}|^2 dx dy = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Il s'ensuit la convergence des $h_n^{(k)}$ ($k = 1, 2$) vers une fonction $h^{(k)}$ harmonique et L^2 dans \mathbb{R} . De plus, vu la périodicité et la régularité des $h_n^{(k)}$ dans les bandes $|\gamma| < \pi$ et $|x| < \pi$ respectivement, les fonctions $h^{(k)}$ sont également périodiques et régulières dans les bandes respectives.

l'application du théorème 1 de H.-A. (pour plus de détails, voir la remarque à la fin du § 23). La démonstration de 1° dans le texte est analogue à la seconde démonstration du théorème 1 dans H.-A. Le théorème 8 utilisé dans cette dernière démonstration correspond au théorème 23, tandis que le théorème 7 de H.-A. est remplacé ici par l'approximation par les fonctions (20.1.1) du texte et le corollaire 22.

D'après (20.1.2) et (20.1.4), on en déduit

$$(20.1.7) \quad h_{\mu\nu} = h^{(1)} + h^{(2)} \equiv h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)},$$

qui est la décomposition cherchée.

2° Nous définissons la fonction cherchée h_{01} , en donnant ses coefficients de Fourier

$$(20.2.1) \quad \begin{cases} b_{01} = 0, & b_{m1} = \frac{(-1)^{m+1}}{(m^2+1)\sqrt{\log 3 m}} \quad \text{pour } m \geq 1, \\ b_{0n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{\log 3 n}} \quad \text{pour } n \geq 2, \end{cases}$$

les autres coefficients b_{mn} étant donnés par (13.9) :

$$(20.2.2) \quad b_{mn} = \frac{(-1)^{m+n} n}{m^2 + n^2} ((-1)^{m+1} (m^2 + 1) b_{m1} + (-1)^n n b_{0n} + b_{01}).$$

Nous prouverons que ces coefficients sont des coefficients de la double série de Fourier d'une fonction h_{01} L^2 dans R en montrant que

$$(20.2.3) \quad \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} b_{0n}^2 + \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} b_{mn}^2 < \infty.$$

Admettons ceci pour le moment. Le théorème 17 donne alors que cette fonction h_{01} peut être choisie harmonique dans R et qu'elle s'y développe en série (13.12) qui, dans le cas actuel, s'écrit explicitement

$$(20.2.4) \quad \begin{aligned} h_{01} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \pi}{2 \sinh m \pi \sqrt{\log 3 m}} \cos m x \sinh m y \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi}{2 \sinh n \pi \sqrt{\log 3 n}} \cosh n x \sin n y. \end{aligned}$$

D'après le théorème 20, s'il y avait une décomposition de h_{01} répondant au problème (P^2), elle serait de la forme (16.23). D'après le théorème 3 ceci exigerait par exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi n}}{n} \frac{\pi^2}{4 \sin^2 n \pi} [n b_{0n} + (-1)^n (b_{01} - \gamma)]^2 < \infty,$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\sqrt{\log 3n}} + \gamma \right]^2 < \infty,$$

ce qui est impossible pour n'importe quel γ . Ceci montre que le problème (P²) n'a pas de solution pour $h_{0,1}$. Il nous reste à prouver (20.2.3). Il suffit clairement de prouver

$$\sum_1^\infty \sum_2^\infty b_{mn}^2 = \sum_1^\infty \sum_2^\infty \frac{n^2}{(m^2 + n^2)^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\log 3m}} - \frac{1}{\sqrt{\log 3n}} \right]^2 < \infty.$$

Ceci est une conséquence de la convergence de l'intégrale

$$\begin{aligned} I &= \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\log 3x}} - \frac{1}{\sqrt{\log 3y}} \right]^2 dx dy = \iint_{x < y} \dots + \iint_{x > y} \dots \\ &= \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{t^2}{x(1+t^2)^2} \frac{\log^2 t}{\log 3x \log 3xt (\sqrt{\log 3x} + \sqrt{\log 3xt})^2} dx dt \\ &\quad + \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{y(1+t^2)^2} \frac{\log^2 t}{\log 3y \log 3yt (\sqrt{\log 3yt} + \sqrt{\log 3y})^2} dy dt. \end{aligned}$$

Posons

$$(20.2.5) \quad I(t) = \int_1^\infty \frac{dx}{x \log 3x \log 3xt (\sqrt{\log 3x} + \sqrt{\log 3xt})^2},$$

donc

$$I = \int_1^\infty \frac{t^2 \log^2 t}{(1+t^2)^2} I(t) dt + \int_1^\infty \frac{\log^2 t}{(1+t^2)^2} I(t) dt = \int_1^\infty \frac{\log^2 t}{1+t^2} I(t) dt$$

Mais, d'après (20.2.5), il est clair que $I(t)$ est, pour $1 \leq t < \infty$, une fonction positive décroissante et que $I(1) < \infty$.

Il s'ensuit

$$I = \int_1^\infty \frac{\log^2 t}{1+t^2} I(t) dt < I(1) \int_1^\infty \frac{\log^2 t}{1+t^2} dt < \infty.$$

C. Q. F. D.

21. Dans les cas des types $\{0, 0\}$ et $\{1, 1\}$ nous pouvons maintenant prouver des propriétés remarquables des coefficients de Fourier des fonctions harmoniques et L^2 dans R .

THÉOREME 25. — 1° Pour que la fonction harmonique $h_{0,0}$ soit L^2

dans R , il faut et il suffit que

$$(21.1) \quad \sum_1^{\infty} m a_{m0}^2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_1^{\infty} n a_{0n}^2 < \infty.$$

2° Pour que h_{11} soit L^2 dans R , il faut et il suffit qu'il existe un γ tel que

$$(21.2) \quad \begin{cases} d_{m1} = \frac{(-1)^{m+1}}{m} \gamma + \frac{d'_{m1}}{m}, & \text{avec} \quad \sum_1^{\infty} m (d'_{m1})^2 < \infty, \\ d_{1n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} (2d_{11} - \gamma) + \frac{d'_{1n}}{n}, & \text{avec} \quad \sum_1^{\infty} n (d'_{1n})^2 < \infty. \end{cases}$$

Démonstration. — 1. D'après les théorèmes 24 et 20, les formules (16, 22) et le théorème 3, on trouve directement (21, 1).

2. Le même raisonnement que ci-dessus donne que, pour un certain γ ,

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m} [(m^2 + 1) d_{m1} + (-1)^m m \gamma]^2 < \infty, \\ \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} [(1 + n^2) d_{1n} + (-1)^n n (2d_{11} - \gamma)]^2 < \infty, \end{aligned}$$

Mais ceci est clairement équivalent à (21, 2).

Pour le cas du type $\{0, 1\}$ nous pouvons ajouter le

THÉORÈME 25'. — Pour que la fonction harmonique h_{01} soit L^2 dans R et que le problème (P^2) soit soluble pour elle, il faut et il suffit qu'il existe un γ tel que

$$(21.3) \quad \begin{cases} b_{m1} = \frac{(-1)^m}{m^2} \gamma + \frac{1}{m} b'_{m1}, & \text{avec} \quad \sum_1^{\infty} m (b'_{m1})^2 < \infty, \\ b_{0n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} (b_{01} - \gamma) + b'_{0n}, & \text{avec} \quad \sum_1^{\infty} n (b'_{0n})^2 < \infty. \end{cases}$$

En effet, comme dans la démonstration du théorème 25, 2, nous

prouvons d'abord que, pour un γ ,

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{m} [(m^2 + 1)b_{m1} + (-1)^{m+1}\gamma]^2 < \infty,$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} [nb_{0n} + (-1)^n(b_{01} - \gamma)]^2 < \infty,$$

et (21, 3) s'en déduit immédiatement.

22. Le théorème 25 a pour conséquence des propriétés bien particulières des fonctions harmoniques L^2 dans R . Pour les mettre en évidence, introduisons les notations suivantes :

DÉFINITION. — Une fonction intégrable $f(t)$, $-\pi < t < \pi$, appartient à la classe J , ou brièvement est J , si les coefficients de son développement de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

satisfont à

$$\sum n(a_n^2 + b_n^2) < \infty.$$

Avec la notion de l'intégrale d'ordre fractionnaire on peut dire qu'une fonction est de classe J si, et seulement si, elle est l'intégrale d'ordre $1/2$ d'une fonction de carré sommable ⁽¹⁾.

Donnons d'abord deux lemmes sur les fonctions J pour mettre en évidence certaines de leurs particularités. Ces lemmes sont des conséquences des théorèmes généraux de Hardy et Littlewood ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Pour l'intégration d'ordre fractionnaire au sens de Liouville-Riemann-Weyl voir par exemple le livre de A. ZYGMUND, *Trigonometrical Series*, Warszawa-Lwów 1935, § 9, 8.

⁽²⁾ HARDY and LITTLEWOOD, *Math. Zeit.*, 27, 1928, p. 565 et 34, 1932, p. 403. Voir aussi A. ZYGMUND, *loc. cit.* p. 227.

La classe J a été considérée — sous le nom de classe S — par A BEURLING

Les démonstrations de ces lemmes étant très simples, nous les indiquons dans notre texte.

LEMME 1. — Une fonction J est L^p dans $-\pi < t < \pi$ pour tout p fini.

Ceci résulte, d'après le théorème de Hausdorff-Young, du fait, que pour tout q , $1 < q < 2$.

$$\sum_n |a_n|^q = \sum_n \left(n^{\frac{1}{2}} |a_n| \right)^q n^{-\frac{q}{2}} \leq \left(\sum_n n |a_n|^2 \right)^{\frac{q}{2}} \left(\sum_n n^{-\frac{rq}{2}} \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

où
$$\frac{q}{2} + \frac{1}{r} = 1,$$

donc

$$r = \frac{2}{2-q} \quad \text{et} \quad \frac{rq}{2} = \frac{q}{2-q} > q > 1.$$

De même pour les coefficients b_n .

LEMME 2. — Si l'on prolonge périodiquement (de période 2π) une fonction J au delà de l'intervalle $-\pi < t < \pi$, cette fonction n'aura nulle part de discontinuité simple (un saut). Plus précisément

$$\frac{1}{\delta} \left| \int_0^{\delta} [f(x+t) - f(x-t)] dt \right| \rightarrow 0,$$

uniformément en x pour $\delta \downarrow 0$.

Vu que l'on peut intégrer la série de Fourier de $f(t)$ terme à terme, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} [f(x+t) - f(x-t)] dt \\ &= \frac{2}{\delta} \sum_1^{\infty} [-a_n \sin nx + b_n \cos nx] \frac{1 - \cos n\delta}{n} = \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^m + \frac{2}{\delta} \sum_{n=m+1}^{\infty} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

(*Acta Math.* 72, 1939), qui a trouvé des propriétés importantes des fonctions de J , spécialement en rapport avec les fonctions harmoniques dans le cercle admettant une intégrale de Dirichlet finie.

En posant $\varepsilon(m) = \sum_{n=m}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2)$, donc $\varepsilon(m) \searrow 0$ pour $m \nearrow \infty$, et en choisissant m de sorte que

$$\frac{m}{(\varepsilon(m))^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{1}{\delta} < \frac{m+1}{(\varepsilon(m+1))^{\frac{1}{3}}},$$

ce qui est toujours possible pour $\delta \leq [\varepsilon(1)]^{\frac{4}{3}}$, on évalue facilement

$$|I_1| < \sqrt{\varepsilon(1)} (\varepsilon(m))^{\frac{1}{3}}, \quad |I_2| < 4 (\varepsilon(m+1))^{\frac{1}{6}},$$

ce qui prouve le lemme.

Comme exemples notons que $\frac{t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nt$ n'est pas J (voir lemme 2), $|\log |t||$ n'est pas J et il en est de même de $\log^\alpha \left| \frac{2\pi}{t} \right|$ pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$, tandis que pour $\alpha < \frac{1}{2}$, $\log^\alpha \left| \frac{2\pi}{t} \right|$ est J.

Toute fonction périodique de période 2π , absolument continue sur tout segment fini avec une dérivée L^2 dans $\pi \leq x \leq \pi$ est J.

Posons maintenant, pour une fonction $h(z) = h(x, y)$ harmonique et L dans R ,

$$(22.1) \quad \begin{cases} \mathfrak{u}_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) dy, & \mathfrak{u}_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) \sin y dy, \\ \mathfrak{v}_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) dx, & \mathfrak{v}_1(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) \sin x dx \quad (1). \end{cases}$$

(1) Les fonctions $\mathfrak{u}_\nu(x)$ et $\mathfrak{v}_\mu(y)$ ont été introduites par G. H. Hardy dans le but d'obtenir des formules pour la constante γ du théorème 23 (voir théorème 27 et la remarque 2 du présent paragraphe).

Il est clair que

(22.2) Si $h = h_{\mu, \nu}$ est du type $\{\mu, \nu\}$, les seules fonctions de (22.1) qui ne s'annulent pas identiquement sont $\mathcal{U}_\nu(x)$ et $\mathcal{V}_\mu(y)$.

$$(22.3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } h = h_{00}, \text{ on a } \mathcal{U}_0(x) \sim \frac{a_{00}}{2} + \sum_1^{\infty} a_{m0} \cos mx, \\ \mathcal{V}_0(y) \sim \frac{a_{00}}{2} + \sum_1^{\infty} a_{0n} \cos ny. \\ \text{Pour } h = h_{01}, \text{ on a } \mathcal{U}_1(x) \sim \frac{b_{01}}{2} + \sum_1^{\infty} b_{m1} \cos mx, \\ \mathcal{V}_0(y) \sim \sum_1^{\infty} b_{0n} \sin ny. \\ \text{Pour } h = h_{11}, \text{ on a } \mathcal{U}_1(x) \sim \sum_1^{\infty} d_{m1} \sin mx, \\ \mathcal{V}_1(y) \sim \sum_1^{\infty} d_{1n} \sin ny. \end{array} \right.$$

Les théorèmes 25 et 25' s'énoncent maintenant

THÉORÈME 26. — Soit $h_{\mu, \nu}$ une fonction harmonique L et du type $\{\mu, \nu\}$ dans R .

1° Pour que h_{00} soit L^2 , il faut et il suffit que $\mathcal{U}_0(x)$ et $\mathcal{V}_0(y)$ soient J .

2° Pour que h_{11} soit L^2 , il faut et il suffit qu'il existe un $\gamma = \text{const.}$ tel que

$$\left[\mathcal{U}_1(x) - \gamma \frac{x}{2} \right] \quad \text{et} \quad \left[\mathcal{V}_1(y) - (2d_{11} - \gamma) \frac{y}{2} \right],$$

soient absolument continus quand prolongés périodiquement un peu au delà de l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et que leurs dérivées soient J .

d_{11} est égal ici à

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{U}_1(x) \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{V}_1(y) \sin y \, dy,$$

3° Pour que h_{01} soit L^2 et le problème (P^2) soit soluble, il faut et il suffit que $\mathcal{U}_1(x)$ soit absolument continu et qu'il existe une constante γ telle que

$$\left[\mathcal{U}'_1(x) - \gamma \frac{x}{2} \right] \quad \text{et} \quad \left[\mathcal{V}_0(y) - (b_{01} - \gamma) \frac{y}{2} \right],$$

soient J, où

$$b_{01} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{U}_1(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{V}_0(y) \sin y dy.$$

Remarque 1. — Il est intéressant de remarquer que les fonctions J s'introduisent également quand on considère des fonctions harmoniques et L^2 dans un cercle. Soit en effet $h(z)$ une fonction harmonique dans le cercle $|z| < 1$. Posons

$$\omega(r e^{i\varphi}) = \int_0^r h(\rho e^{i\varphi}) d\rho.$$

Par un calcul immédiat on vérifie que le fait pour h d'être L^2 dans $|z| < 1$ est équivalent au fait que ω existe pour $r = 1$ et que $\omega(e^{i\varphi})$ est J (comme fonction de φ).

Le théorème 26 permet d'exprimer les constantes γ dans les cas $\{1, 1\}$ et $\{0, 1\}$ par des formules qui mettent ces constantes en relation plus directe avec la fonction h que ne le faisaient les formules (17.3) et (17.2) du théorème 20.

THEORÈME 27. — *a. La constante γ du cas 2° du théorème 26, est donnée par chacune des deux formules*

$$(22.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{1}{\pi} [\mathcal{U}_1(\pi - 0) - \mathcal{U}_1(-\pi + 0)], \\ 2d_{11} - \gamma = \frac{1}{\pi} [\mathcal{V}_1(\pi - 0) - \mathcal{V}_1(-\pi + 0)] \quad (1). \end{array} \right.$$

b. La constante γ du cas 3° du théorème 26, quand elle existe, est

(1) La partie a du théorème 27 est due à G. H. Hardy.

donnée par chacune des deux formules

$$(22.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{\pi \delta} \int_0^\delta [\mathfrak{U}_1(\pi - t) - \mathfrak{U}_1(-\pi + t)] dt, \\ b_{01} - \gamma = \lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{\pi \delta} \int_0^\delta [\mathfrak{V}_0(\pi - t) - \mathfrak{V}_0(-\pi + t)] dt. \end{array} \right.$$

Démonstration. — *a.* Il est clair, d'après le cas 2° du théorème 26, que $\mathfrak{U}_1(\pi - 0)$, $\mathfrak{U}_1(-\pi + 0)$, $\mathfrak{V}_1(\pi - 0)$ et $\mathfrak{V}_1(-\pi + 0)$ existent et que

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_1(\pi - 0) - \gamma \frac{\pi}{2} &= \mathfrak{U}_1(-\pi + 0) + \gamma \frac{\pi}{2}, \\ \mathfrak{V}_1(\pi - 0) - (2d_{11} - \gamma) \frac{\pi}{2} &= \mathfrak{V}_1(-\pi + 0) + (2d_{11} - \gamma) \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

d'où (22.4).

b. Les formules (22.5) résultent immédiatement du cas 3° du théorème 26 et du lemme 2.

Remarque 2. — La compatibilité des formules dans (22.4) donne

$$(22.6) \quad 2d_{11} = \frac{1}{\pi} [\mathfrak{U}_1(\pi - 0) - \mathfrak{U}_1(-\pi + 0) + \mathfrak{V}_1(\pi - 0) - \mathfrak{V}_1(-\pi + 0)].$$

Si l'on suppose que h est suffisamment régulier, ce n'est rien d'autre que la formule de Green

$$\iint_{\omega} (f \Delta g - \Delta f g) dx dy = - \int_c \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds,$$

avec $f = h(x, y)$ et $g = -\frac{2}{\pi^2} \sin x \sin y$, vu que

$$d_{11} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) \sin x \sin y dx dy.$$

Si h est supposé seulement L^2 dans R , (22.6) peut être considéré comme une généralisation de la formule de Green. La compatibilité des deux formules dans (22.5) conduit à une formule de Green similaire avec les fonctions $f = h(x, y)$ et $g = \sin y$.

Remarque 3 ⁽¹⁾. — Dans le cas où h est suffisamment régulier les fonctions \mathcal{U} et \mathcal{V} satisfont à des équations différentielles permettant de mettre sous une autre forme leur relation avec la fonction h . Il est clair qu'il suffit de considérer les fonctions \mathcal{U} . En désignant par \bar{h} la fonction conjuguée de h , nous aurons

$$(22.7) \quad \begin{aligned} \mathcal{U}'_0(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h'_x(x, y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}'_y(x, y) dy = \frac{1}{\pi} [\bar{h}(x, \pi) - \bar{h}(x, -\pi)]. \end{aligned}$$

$$(22.8) \quad \mathcal{U}''_0(x) = \frac{1}{\pi} [\bar{h}'_x(x, \pi) - \bar{h}'_x(x, -\pi)] = \frac{-1}{\pi} [h'_y(x, \pi) - h'_y(x, -\pi)],$$

$$(22.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{U}''_1(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h''_x(x, y) \sin y dy \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h''_y(x, y) \sin y dy = \mathcal{U}_1(x) - \frac{1}{\pi} [h(x, \pi) - h(x, -\pi)]. \end{aligned}$$

Si h est d'un type déterminé $\{\mu, \nu\}$, $\mathcal{U}_\nu(x)$ seul entrera en compte. Donc, si $\nu = 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}'_0(x) &= \frac{2}{\pi} \bar{h}(x, \pi), \quad \text{vu que } \bar{h} \text{ est du type } \{1 - \mu, 1\}, \\ \mathcal{U}''_0(x) &= -\frac{2}{\pi} h'_y(x, \pi), \quad \text{» } h'_y \text{ » } \{\mu, 1\}. \end{aligned}$$

Si $\nu = 1$,

$$\mathcal{U}''_1(x) = \mathcal{U}_1(x) - \frac{2}{\pi} h(x, \pi).$$

On en tire facilement, vu que $\mathcal{U}_1(x)$ a la parité μ ,

$$\mathcal{U}_1(x) = c(e^x + (-1)^\mu e^{-x}) - \frac{1}{\pi} e^x \int_0^x e^{-t} h(t, \pi) dt + \frac{1}{\pi} e^{-x} \int_0^x e^t h(t, \pi) dt,$$

où $c = \frac{1}{2} \mathcal{U}_1(0)$ ou $\frac{1}{2} \mathcal{U}'_1(0)$ suivant que $\mu = 0$ ou 1 .

On en tire des formules curieuses pour les constantes γ du théo-

⁽¹⁾ Cette remarque est due essentiellement à G. H. Hardy.

rème 27, notamment : dans le cas $\{1, 1\}$,

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\pi} [\mathfrak{U}_1(\pi) - \mathfrak{U}_1(-\pi)] \\ &= \frac{2}{\pi} \mathfrak{U}_1(\pi) = \frac{2}{\pi} \mathfrak{U}'_1(0) \sinh \pi - \frac{4}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh(\pi - t) h(t, \pi) dt,\end{aligned}$$

dans le cas $\{0, 1\}$,

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\pi} [\mathfrak{U}'_1(\pi) - \mathfrak{U}'_1(-\pi)] \\ &= \frac{2}{\pi} \mathfrak{U}'_1(\pi) = \frac{2}{\pi} \mathfrak{U}_1(0) \sinh \pi - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \cosh(\pi - t) h(t, \pi) dt.\end{aligned}$$

Remarque 4. — Signalons que les dérivées des fonctions \mathfrak{U}_1 et \mathfrak{V}_1 qui figurent dans l'énoncé du théorème 26, s'expriment p. p. à l'aide des dérivées correspondantes de h , par exemple

$$\mathfrak{U}'_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h'_x(x, y) \sin y dy,$$

la fonction sous l'intégrale étant intégrable pour presque tous les x . On arrive à ce résultat par un raffinement du lemme du n° 8, raffinement que l'on obtient en appliquant un raisonnement similaire à celui qui conduit au théorème de Vitali dans la théorie de la mesure.

V. — Remarques finales.

23. LES FONCTIONS h_{01} HARMONIQUES ET L^2 DANS R EN GÉNÉRAL. — Dans la section IV nous avons laissé ouverte la question de savoir quelles sont les propriétés des composantes $h_{01}^{(1)}$ et $h_{01}^{(2)}$ et des coefficients de Fourier b_{m1} et b_{0n} de h_{01} quand le problème (P²) n'est pas soluble pour h_{01} . Nous allons donner ici quelques propriétés de ce genre.

THÉORÈME 28. — *Pour une fonction h_{01} harmonique et L^2 dans R , les coefficients b_{m1} et b_{0n} satisfont à*

$$(23.1) \quad \sum_1^{\infty} m^{3-\varepsilon} |b_{m1}|^2 < \infty, \quad \sum_1^{\infty} n^{1-\varepsilon} |b_{0n}|^2 < \infty,$$

pour tout $\varepsilon < 0$. Les composantes $h_{01}^{(1)}$ et $h_{01}^{(2)}$ de (16.23) sont L^p dans R pour tout $p < 2$.

Démonstration. — Nous commençons en traduisant le fait que h_{01} est L^2 en termes des coefficients b_{mn} :

$$\sum \sum |b_{mn}|^2 < \infty,$$

donc, vu le théorème 17 et (15.9),

$$(23.2) \quad \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{n^2}{(m^2 + n^2)^2} |(-1)^{m+1}(m^2 + 1)b_{m1} + (-1)^n n b_{0n} + b_{01}|^2 < \infty.$$

On a, *a fortiori*, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(23.2') \quad \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{n^2}{(m^2 + n^2)^{2+\frac{\varepsilon}{2}}} |(-1)^{m+1}(m^2 + 1)b_{m1} + (-1)^n n b_{0n} + b_{01}|^2 < \infty.$$

Nous allons nous appuyer maintenant sur le théorème suivant :

I. Soit $K(\xi, \eta) = \frac{\xi^\alpha \eta^\beta}{(\xi^2 + \eta^2)^\sigma}$, $\xi > 0$, $\eta > 0$. Nous supposons que

$$(1.1) \quad 2\sigma > \alpha + 1 > 0, \quad 2\sigma > \beta + 1 > 0 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta - 2\sigma \neq -2.$$

Considérons deux suites de nombres $\{u_m\}$ et $\{v_n\}$ telles que

$$(1.2) \quad \sum_1^\infty \sum_1^\infty K(m, n) |u_m - v_n|^2 < \infty.$$

Dans ces conditions il existe au moins une constante γ telle que

$$(1.3) \quad \sum_1^\infty m^{\alpha+\beta-2\sigma+1} |u_m - \gamma|^2 < \infty, \quad \sum_1^\infty n^{\alpha+\beta-2\sigma+1} |v_n - \gamma|^2 < \infty.$$

Ces inégalités sont vraies pour tout γ , si $\alpha + \beta - 2\sigma < -2$ et elles ne le sont que pour un seul γ , si $\alpha + \beta - 2\sigma > -2$.

Nous appliquons ce théorème en posant dans (25.2')

$$(23.3) \quad u_m = (-1)^m (m^2 + 1)b_{m1}, \quad v_n = (-1)^n n b_{0n} + b_{01} \quad (1).$$

(1) Il est clair qu'on ne peut pas appliquer I à (23.2), car pour le noyau $K(\xi, \eta)$ qui y figure on a

$$\alpha + \beta - 2\sigma = -2.$$

On en tire, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout γ ,

$$(23.4) \quad \begin{cases} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^{1+\varepsilon}} |(-1)^m (m^2 + 1) b_{m1} - \gamma|^2 < \infty, \\ \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} |(-1)^n n b_{0n} + b_{01} - \gamma|^2 < \infty. \end{cases}$$

Ceci donne immédiatement (25.1).

Nous appliquons ensuite le théorème

II. Soit

$$(II.1) \quad g_{\mu\nu}(z) = \sum_1^{\infty} \frac{K_m}{\sinh m\pi} e_{\mu\nu}(mz), \quad \text{pour } |y| < \pi.$$

Pour que $(\pi^2 - y^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} g_{\mu\nu}(z)$ soit L^2 dans R , il faut et il suffit que

$$(II.2) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^{1+\varepsilon}} K_m^2 < \infty.$$

Il en résulte d'après (23.4) et (16.23) (puisque un théorème similaire à II s'applique dans la bande verticale $|x| < \pi$ également) que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(23.5) \quad (\pi^2 - y^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} h_{01}^{(1)}(z) \quad \text{et} \quad (\pi^2 - x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} h_{01}^{(2)}(z)$$

sont L^2 dans R .

Nous appliquons enfin le théorème.

III. Si pour une fonction $g(z)$ dans R , $(\pi^2 - y^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} g(z)$ est L^2 dans R , $g(z)$ est L^p dans R pour tout p avec $0 < p < \frac{2}{1+\varepsilon}$.

Il en résulte d'après (23.5) (ε pouvant être arbitrairement petit), que $h_{01}^{(1)}$ et $h_{01}^{(2)}$ sont L^p dans R pour tout p , $0 < p < 2$. C. Q. F. D.

Il reste à prouver les théorèmes I, II et III.

Démonstration de I. — Nous allons nous appuyer sur le théorème suivant prouvé ailleurs (1).

(1) Voir H.-A., Introduction p. 220.

THÉORÈME A. — Soit $K(\xi, \eta)$ une fonction positive, mesurable et homogène de degré $\tau \neq -2$, pour ξ et η positifs. Soit de plus

$$(A.1) \quad \rho_1 = \int_0^\infty K(1, t) dt < \infty, \quad \rho_2 = \int_0^\infty K(t, 1) dt < \infty.$$

Considérons deux fonctions $u(\xi)$ et $v(\eta)$ telles que

$$(A.2) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty K(\xi, \eta) |u(\xi) - v(\eta)|^2 d\xi d\eta < \infty.$$

Dans ces conditions il existe une (et une seule) constante γ telle que

$$(A.3) \quad \begin{cases} \int_0^\infty \int_0^\infty K(\xi, \eta) |u(\xi) - \gamma|^2 d\xi d\eta = \rho_2 \int_0^\infty \xi^{\tau+1} |u(\xi) - \gamma|^2 d\xi < \infty, \\ \int_0^\infty \int_0^\infty K(\xi, \eta) |v(\eta) - \gamma|^2 d\xi d\eta = \rho_1 \int_0^\infty \eta^{\tau+1} |v(\eta) - \gamma|^2 d\eta < \infty, \end{cases}$$

Le noyau $K(\xi, \eta) = \frac{\xi^\alpha \eta^\beta}{(\xi^2 + \eta^2)^\sigma}$ du théorème I satisfait à (A.1) à cause des premières deux inégalités de (I, 1), et son degré d'homogénéité $\tau = \alpha + \beta - 2\sigma \neq -2$. Définissons

$$(I.4) \quad \begin{cases} u(\xi) = 0 & \text{pour } 0 < \xi \leq 1, \\ u(\xi) = u_m & \text{pour } m < \xi \leq m+1, \quad (m = 1, 2, \dots), \\ v(\eta) = 0 & \text{pour } 0 < \eta \leq 1, \\ v(\eta) = v_n & \text{pour } n < \eta \leq n+1, \quad (n = 1, 2, \dots), \end{cases}$$

Il est clair que

$$(I.5) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty K(\xi, \eta) |u(\xi) - v(\eta)|^2 d\xi d\eta \\ = \int_1^\infty \int_1^\infty + \int_0^1 \int_1^\infty + \int_1^\infty \int_0^1 = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Vu la forme spéciale du noyau $K(\xi, \eta)$ dans I, on voit immédiatement que $I_1 < \infty$ est équivalent à (I, 2) et que

$$(I.6) \quad I_2 = \int_0^1 d\xi \int_1^\infty \frac{\xi^\alpha \eta^\beta}{(\xi^2 + \eta^2)^\sigma} |v(\eta)|^2 d\eta = \int_1^\infty \eta^{\tau+1} |v(\eta)|^2 d\eta \int_0^{\frac{1}{\eta}} \frac{t^\alpha}{(t^2 + 1)^\sigma} dt.$$

La convergence de cette intégrale est clairement équivalente à la

convergence de la somme

$$(I.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\tau+1} |\nu_n|^2 \frac{1}{n^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-2\sigma} |\nu_n|^2.$$

Mais, d'après (I.2), on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{\alpha} n^{\beta}}{(m^2 + n^2)^{\sigma}} |u_m - \nu_n|^2 < \infty \quad \text{pour tout } m \text{ fixe.}$$

Il s'ensuit, vu que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{\alpha} n^{\beta}}{(m^2 + n^2)^{\sigma}} < \infty$ d'après (I.1),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{\alpha} n^{\beta}}{(m^2 + n^2)^{\sigma}} |\nu_n|^2 < \infty \quad \text{pour tout } m \text{ fixe.}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-2\sigma} |\nu_n|^2 < \infty.$$

Ainsi, la convergence de (I.7) et, par suite, de (I.6) est prouvée. De la même manière, on prouve $I_3 < \infty$. Toutes les intégrales dans (I.5) étant finies, on trouve (A.2). D'après le théorème A on a, pour une constante γ ,

$$\int_0^{\infty} \xi^{\tau+1} |u(\xi) - \gamma|^2 d\xi < \infty, \quad \int_0^{\infty} \eta^{\tau+1} |\nu(\eta) - \gamma|^2 d\eta < \infty,$$

donc, *a fortiori*, les intégrales $\int_1^{\infty} < \infty$. La convergence de ces dernières intégrales est équivalente à

$$(I.8) \quad \sum_{m=1}^{\infty} m^{\tau+1} |u_m - \gamma|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\tau+1} |\nu_n - \gamma|^2 < \infty.$$

Vu que $\tau = \alpha + \beta - 2\sigma$, ceci donne (I.3). Si $\tau < -2$, $\sum_{m=1}^{\infty} m^{\tau+1} < \infty$ et les inégalités (I.8) pour un γ entraînent leur validité pour tout γ . D'autre part, si $\tau > -2$, $\sum_{m=1}^{\infty} m^{\tau+1} = \infty$, et la validité de (I.8) pour

deux constantes $\gamma_1 \neq \gamma_2$ entraînerait

$$\sum_1^\infty m^{\tau+1} |\gamma_1 - \gamma_2|^2 \leq 2 \left[\sum m^{\tau+1} |u_m - \gamma_1|^2 + \sum m^{\tau+1} |u_m - \gamma_2|^2 \right],$$

ce qui est impossible. Ceci prouve I complètement.

Démonstration de II. — (II. 1) est équivalent à

$$(II.3) \quad g_{\mu\nu}(z) (\pi^2 - y^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} = \sum_1^\infty \frac{K_m}{\sin hm\pi} e_{\mu\nu}(mz) (\pi^2 - y^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Les fonctions $e_{\mu\nu}(mz) (\pi^2 - y^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}$ formant un système orthogonal dans R (à cause des facteurs $\cos mx$ ou $\sin mx$), la propriété

$g_{\mu\nu}(z) (\pi^2 - y^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \in L^2$ est équivalente à

$$(II.4) \quad \sum_1^\infty \frac{K_m^2}{\sin h^2 m\pi} \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi |e_{\mu\nu}(mz)|^2 (\pi^2 - y^2)^\varepsilon dx dy < \infty.$$

Vu que, pour $m \rightarrow \infty$, on a les équivalences asymptotiques

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi |e_{\mu\nu}(mz)|^2 (\pi^2 - y^2)^\varepsilon dx dy &\sim \frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^\pi e^{2m|y|} (\pi^2 - y^2)^\varepsilon dy \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi e^{2my} (\pi^2 - y^2)^\varepsilon dy \sim \frac{\pi}{2} (2\pi)^\varepsilon e^{2m\pi} \int_0^\pi e^{-2my} y^\varepsilon dy \\ &= \frac{\pi^{1+\varepsilon}}{4} \frac{e^{2m\pi}}{m^{1+\varepsilon}} \int_0^{2m\pi} e^{-t} t^\varepsilon dt \sim \frac{\pi^{1+\varepsilon}}{4} \Gamma(1 + \varepsilon) \frac{e^{2m\pi}}{m^{1+\varepsilon}} \sim \pi^{1+\varepsilon} \Gamma(1 + \varepsilon) \frac{\sin h^2 m\pi}{m^{1+\varepsilon}}, \end{aligned}$$

(II. 4) est équivalent à (II. 2), ce qui achève la démonstration.

Démonstration de III. — On a, en effet,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi |g(z)|^p dx dy &= \iint \left[|g(z)|^p (\pi^2 - y^2)^{\frac{\varepsilon p}{2}} \right] (\pi^2 - y^2)^{-\frac{\varepsilon p}{2}} dx dy \\ &\leq \left\{ \iint \left[|g(z)|^p (\pi^2 - y^2)^{\frac{\varepsilon p}{2}} \right]^{\frac{p}{2}} dx dy \right\}^{\frac{p}{2}} \\ &\quad \times \left\{ \iint (\pi^2 - y^2)^{-\frac{\varepsilon p q}{2}} dx dy \right\}^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

où $p < 2$ et $\frac{1}{q} + \frac{p}{2} = 1$, donc $q = \frac{2}{2-p}$. La première intégrale du dernier membre est $\iint |g(z)|^2 (\pi^2 - y^2)^\varepsilon dx dy$, donc $< \infty$, d'après l'hypothèse. La seconde intégrale est finie, si $\frac{\varepsilon pq}{2} < 1$, donc $\frac{\varepsilon p}{2-p} < 1$, d'où $p < \frac{2}{1+\varepsilon}$. C. Q. F. D.

Remarque. — Le théorème I permet de démontrer facilement la partie 1° du théorème 24 qui résout le problème (P²) pour les types {0, 0} et {1, 1}. Comme dans la démonstration du théorème 28, on trouve, pour h_{00} et h_{11} appartenant à L², des inégalités à la (25.2).

Les noyaux $K(m, n)$ qui y figurent sont de la forme

$$K(m, n) = \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \quad \text{pour } \{0, 0\} \quad \text{et} \quad = \frac{m^2 n^2}{(m^2 + n^2)^2} \quad \text{pour } \{1, 1\}.$$

Leurs degrés d'homogénéité sont -4 et zéro, donc $\neq -2$.

Le théorème 1 s'applique, et l'on trouve des inégalités à la (25.4) avec $\varepsilon = 0$. Le théorème II (qui est, pour $\varepsilon = 0$, essentiellement le théorème 3) donne alors directement le résultat cherché.

24. REMARQUES SUR LES PROBLÈMES (P^p), ($p \neq 2$). — De manière analogue au problème (P²), on peut poser le

PROBLÈME (P^p). — *Étant donnée une fonction $h_{\mu\nu}$ harmonique et L^p dans R, $p \geq 1$, trouver une décomposition*

$$(24.1) \quad h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)},$$

répondant au problème (P) avec $h_{\mu\nu}^{(1)}$ et $h_{\mu\nu}^{(2)}$ appartenant à L^p.

Nous n'avons pas pu résoudre ce problème pour aucun $p \neq 2$ (avec un $h_{\mu\nu} \in L^p$ arbitraire), mais il semble très probable qu'il soit toujours soluble, sauf pour quelques valeurs exceptionnelles de p .

Comme nous savons, la décomposition (24.1) est donnée (si elle existe) par les formules (16.22), (16.23) et (16.24) suivant le type $\{\mu, \nu\}$. On peut donc essayer de rechercher les propriétés des décompositions données par ces formules pour une fonction $h_{\mu\nu} \in L^p$. On peut le faire, en étendant la méthode du paragraphe précédent.

A cet effet, *dans le cas* $p < 2$, nous appliquons au développement de $h_{\mu\nu}$ en série double de Fourier la généralisation du théorème de Hausdorff-Young, trouvée par F. Riesz. Ceci donne pour les coefficients une inégalité qui se transforme, à cause des équations (15.9), en une inégalité de la forme (I.2) du paragraphe précédent, où l'on aura remplacé $|u_m - v_n|^2$ par $|u_m - v_n|^{p'}$, avec $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Le théorème 1 est encore valable dans le cas où l'on remplace dans (I.2) et (I.3) les carrés par les p' -ièmes puissances, car le théorème A cité au paragraphe précédent, admet une généralisation correspondante ⁽¹⁾. Ceci donne des inégalités à la (I.3) avec $|u_m - \gamma|^{p'}$ et $|v_n - \gamma|^{p'}$ remplaçant $|u_m - \gamma|^2$ et $|v_n - \gamma|^2$.

Mais les $(u_m - \gamma)$ et $(v_n - \gamma)$ sont, à des facteurs près, les coefficients dans les développements de $h_{\mu\nu}^{(1)}$ et $h_{\mu\nu}^{(2)}$.

En écrivant le développement de $h_{\mu\nu}^{(1)}$ sous la forme (II.1), [avec éventuellement un terme supplémentaire $\frac{1}{4}a_{00}$ ou $\frac{1}{4}(b_{00} - \gamma)\gamma$], on trouve, d'après l'inégalité mentionnée pour les $|u_m - \gamma|^{p'}$, l'inégalité suivante pour les coefficients K_m de $h_{\mu\nu}^{(1)}$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{m^{p'-1}} |K_m|^{p'} < \infty, \quad \text{pour tous les types } \{\mu, \nu\}.$$

On en tire

$$\sum \frac{1}{m^\omega} K_m^2 < \infty, \quad \text{pour } \omega > 3 - \frac{4}{p'} = \frac{4-p}{p}.$$

D'après les théorèmes II et III du paragraphe précédent nous en déduisons que $h_{\mu\nu}^{(1)}$ est L^q pour tout q avec $0 < q < \frac{2p}{4-p}$.

Ce résultat n'est pas bien satisfaisant, puisque la limite supérieure des q (pour $p < 2$) est toujours $< p$ et devient même < 1 pour $p < \frac{4}{3}$.

Nos considérations ci-dessus ne s'appliquent pas au cas $p > 2$. Dans ce cas, les seules propriétés des composantes $h_{\mu\nu}^{(k)}$ que nous avons pu trouver proviennent du fait que $h_{\mu\nu}$ est alors L^2 .

⁽¹⁾ Voir H.-A., p. 240.

Pourtant, dans le cas $p = \infty$, nous pouvons démontrer par les méthodes du paragraphe 13, que les composantes $h_{\mu\nu}^{(k)}$ sont L^q pour tout $q < \infty$, sans être nécessairement L^∞ .

25. L'ASPECT DES PROBLÈMES (P^p) DANS LES ESPACES L^p . — On définit pour la classe L^p dans R la norme $\|f\|_p$ par l'équation

$$(25.1) \quad \|f\|_p = \left[\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^\rho dx dy \right]^{\frac{1}{\rho}}.$$

De cette manière L^p devient un espace vectoriel normé et complet, un espace de Banach.

Si $p < q$, il est bien connu que

$$(25.2) \quad L^p \supset L^q \quad \text{en tant que classes de fonctions,}$$

$$(25.3) \quad \|f\|_p \leq \|f\|_q, \quad \text{si } f \in L^q.$$

Considérons maintenant les sous-ensembles $H_{\mu\nu}^p$, $X_{\mu\nu}^p$ et $Y_{\mu\nu}^p$ de L^p formés par les fonctions de L^p du type $\{\mu, \nu\}$ qui sont : 1° harmoniques dans R ; 2° harmoniques dans R et prolongeables analytiquement et périodiquement (de période 2π) dans la bande $|\gamma| < \pi$ et 3° harmoniques dans R et prolongeables analytiquement et périodiquement (de période $2\pi i$) dans la bande $|x| < \pi$. Il est clair que

$$(25.4) \quad H_{\mu\nu}^p \supset H_{\mu\nu}^q, \quad X_{\mu\nu}^p \supset X_{\mu\nu}^q, \quad Y_{\mu\nu}^p \supset Y_{\mu\nu}^q, \quad \text{pour } p < q,$$

$$(25.5) \quad X_{\mu\nu}^p \subset H_{\mu\nu}^p, \quad Y_{\mu\nu}^p \subset H_{\mu\nu}^p.$$

La norme $\|f\|_p$ permet de définir la convergence (forte) d'une suite $\{f_n\} \subset L^p$ vers une fonction $f \in L^p$ par l'équation $\lim \|f_n - f\|_p = 0$. On définit ensuite les notions d'un sous-ensemble fermé, ouvert etc. dans L^p . On prouve alors facilement :

I. $H_{\mu\nu}^p$, $X_{\mu\nu}^p$ et $Y_{\mu\nu}^p$ sont des sous-ensembles linéaires et fermés de L^p .

II. Les fonctions $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}$ avec $h_{\mu\nu}^{(1)} \in X_{\mu\nu}^p$, $h_{\mu\nu}^{(2)} \in Y_{\mu\nu}^p$, appartiennent à $H_{\mu\nu}^p$, et tout $h_{\mu\nu} \in H_{\mu\nu}^p$ est une limite forte de telles fonctions $g_{\mu\nu}$, si $1 \leq p < \infty$ (1).

(1) Ce dernier fait se prouve en approchant $h_{\mu\nu}$ par des fonctions aux dérivées bornées et en appliquant le corollaire 22 (voir la démonstration du théorème 24).

La solution du problème (P^p) est clairement équivalente au fait suivant :

III. Toute fonction $h_{\mu\nu} \in H_{\mu\nu}^p$, est de la forme

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}, \quad \text{ave. } h_{\mu\nu}^{(1)} \in X_{\mu\nu}^p, \quad h_{\mu\nu}^{(2)} \in Y_{\mu\nu}^p.$$

Il nous sera commode d'imposer aux fonctions $h_{00}^{(2)} \in Y_{00}^p$, pour tout $p \geq 1$, la condition

$$(25.6) \quad \int_{\mathbb{R}} \int h_{00}^{(2)} dx dy = 0.$$

Cette condition peut être réalisée par la soustraction d'une constante convenable d'une fonction $h_{00}^{(2)}$ quelconque; elle rendra $h_{00}^{(2)}$ conforme à la forme (16.22). Pour ne pas alourdir les notations nous désignerons dès maintenant par la même lettre Y_{00}^p la classe restreinte par la condition (25.6). Ce changement n'affecte aucunement les propriétés énumérées plus haut (par exemple dans II et III on peut, dans la somme $h_{00}^{(1)} + h_{00}^{(2)}$, déplacer une constante convenable de $h_{00}^{(2)}$ à $h_{00}^{(1)}$).

Ce changement, d'après le théorème 17, donne

IV. Les ensembles $X_{\mu\nu}^p$ et $Y_{\mu\nu}^p$, pour $\{\mu, \nu\} = \{0, 0\}$ ou $\{1, 1\}$ et tout $p \geq 1$ ou bien $\{\mu, \nu\} = \{0, 1\}$ et $p \geq 2$, n'ont aucune fonction en commun en dehors de la fonction nulle.

Les propriétés I, II et IV permettent d'appliquer un théorème général de H. Kober (1) qui donne ici :

V. La proposition III est équivalente à l'existence d'une constante $B \geq 1$ telle que

$$(25.7) \quad \|h_{\mu\nu}^{(1)}\|_p \leq B \|h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}\|_p,$$

pour tous $h_{\mu\nu}^{(1)} \in X_{\mu\nu}^p$, $h_{\mu\nu}^{(2)} \in Y_{\mu\nu}^p$.

L'inégalité (19.2) du théorème 23 est du genre de (25.7) et c'est pourquoi le problème (P^2) est toujours soluble pour les types $\{0, 0\}$

(1) Voir H. KOBER, *loc. cit.*

et $\{1, 1\}$. Mais ce problème n'étant pas en général soluble pour $\{0, 1\}$, il s'ensuit qu'une constante B n'existe pas pour $\{0, 1\}$ et $p = 2$.

Il est curieux d'analyser d'où vient cette différence de comportement. Une certaine lumière est jetée sur cette question par les considérations suivantes.

Si l'on remplace dans (25.7) $h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}$ par $h_{\mu\nu}^{(1)} - h_{\mu\nu}^{(2)}$, on s'aperçoit que l'inégalité (25.7) exprime le fait intuitif que les sous-espaces $X_{\mu\nu}^p$ et $Y_{\mu\nu}^p$ sont *bien séparés* dans le sens que, si $h_{\mu\nu}^{(1)}$ et $h_{\mu\nu}^{(2)}$ sont *grands* leur différence ne peut pas être *petite* ⁽¹⁾.

La *bonne séparation* de $X_{\mu\nu}^2$ et $Y_{\mu\nu}^2$ pour $\{\mu, \nu\} = \{0, 0\}$ ou $\{1, 1\}$ est marquée par le fait que les $X_{\mu\nu}^p$ et $Y_{\mu\nu}^p$ pour aucun p avec $1 \leq p < 2$ n'ont d'éléments en commun (sauf 0).

Pour $\{\mu, \nu\} = \{0, 1\}$, X_{01}^2 et Y_{01}^2 n'ont pas d'éléments communs, mais les X_{01}^p et Y_{01}^p , pour tout $p < 2$, ont en commun la fonction Φ_{01} du paragraphe 9, de sorte que X_{01}^2 et Y_{01}^2 deviennent *mal séparés*.

Cette explication heuristique prend du poids du fait que l'on peut prouver l'impossibilité de l'inégalité (25.7) à l'aide de la fonction Φ_{01} . En effet, considérons les développements de $\Phi_{01}(z)$ dans les bandes $|y| < \pi$ et $|x| < \pi$, (voir les formules (16.20)). Désignons par $S_k^{(1)}(z)$ et $S_k^{(2)}(z)$ leurs sommes partielles, donc

$$(25.8) \quad \begin{cases} S_k^{(1)}(z) = -\frac{1}{2\pi}y + \sum_1^k \frac{(-1)^{m+1}}{\sin h m \pi} \cos mx \sin h my, \\ S_k^{(2)}(z) = \sum_1^k \frac{(-1)^n}{\sin h n \pi} \cosh nx \sin ny. \end{cases}$$

On vérifie alors aisément que pour $k \rightarrow \infty$,

$$(25.9) \quad \|S_k^{(1)}\|_2 \rightarrow \infty, \quad \|S_k^{(2)}\|_2 \rightarrow \infty,$$

tandis que $\|S_k^{(1)} - S_k^{(2)}\|$ est borné.

⁽¹⁾ Dans le cas d'un espace de Hilbert on peut introduire la notion d'angle minimal θ entre $X_{\mu\nu}^2$ et $Y_{\mu\nu}^2$ et la *bonne séparation* s'exprime alors par $\theta > 0$. La meilleure constante B_0 dans (25.7) est alors

$$B_0 = \frac{1}{\sin \theta}$$

Un raisonnement analogue permet de conclure que (25.7) est impossible pour $p=1$ et $\{\mu, \nu\} = \{0, 0\}$ ou $\{1, 1\}$, donc que (P¹) n'est pas en général soluble pour ces types.

En effet, $X_{\mu\nu}^1, Y_{\mu\nu}^1 = (0)$ tandis que $\Phi_{\mu\nu} \in X_{\mu\nu}^p, Y_{\mu\nu}^p$ pour tout $p < 1$. Φ_{00} et Φ_{11} sont à une constante près, la partie réelle et imaginaire de

$$\begin{aligned} p(z - \pi - \pi i) &= -\frac{1}{4\pi} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} m}{\sin h m \pi} \cos mz \\ &= \frac{1}{4\pi} - \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{\sin h n \pi} \cos i nz. \end{aligned}$$

En désignant comme plus haut par $S_k^{(1)}$ et $S_k^{(2)}$ les sommes partielles des développements de $\Phi_{\mu\nu}$ dans les bandes $|y| < \pi$ et $|x| < \pi$, on trouve immédiatement

$$\|S_k^{(1)}\|_{1 \rightarrow \infty} \quad \text{et} \quad \|S_k^{(2)}\|_{1 \rightarrow \infty} \quad \text{pour} \quad k \rightarrow \infty$$

et, un peu moins aisément,

$$\|S_k^{(1)} - S_k^{(2)}\|_1 \quad \text{est borné pour} \quad k \rightarrow \infty.$$

26. EXTENSION DE NOS CONSIDÉRATIONS AUX RECTANGLES ET PARALLÉLOGRAMMES. — Dans les sections I et II, nous avons étudié les fonctions harmoniques dans un rectangle quelconque R_{ab} . Dans les sections suivantes nous nous sommes limités au cas du carré uniquement pour éviter des formules plus compliquées. Mais il est clair que tous nos résultats peuvent être étendus au cas d'un rectangle.

De même, au prix de formules encore plus compliquées, on aurait pu étendre nos considérations au cas d'un parallélogramme des côtés $2\omega_1$ et $2\omega_2$. Il s'agirait alors de décompositions d'une fonction h harmonique dans un tel parallélogramme (avec l'origine pour centre) en somme $h_1 + h_2$ des fonctions harmoniques dans les bandes parallèles à $2\omega_1$ ou $2\omega_2$ déterminées par le parallélogramme, chacune de ces fonctions étant périodique avec la période $2\omega_1$ ou $2\omega_2$ respectivement. Cette extension s'effectue sans aucune difficulté essentielle.

27. EXTENSION DU PROBLÈME (P²) DANS L'ESPACE. — Considérons dans

l'espace le cube $R: |x| < \pi, |y| < \pi, |z| < \pi$ ou, plus généralement, le domaine $R_{abc}: |x| < a, |y| < b, |z| < c$.

L'extension du problème (P) dans l'espace se formule comme suit :

Étant donnée une fonction $h(x, y, z)$ harmonique dans R_{abc} , trouver une décomposition

$$(27.1) \quad h = h_1 + h_2 + h_3 \quad \text{pour } (x, y, z) \in R_{abc},$$

où h_1 est harmonique et périodique en y et z des périodes $2b$ et $2c$ respectivement dans le domaine $|x| < a, y$ et z quelconques, h_2 a des propriétés analogues relativement à $x, z, 2a, 2c$ et le domaine $|y| < b, x$ et z quelconques et h_3 a des propriétés similaires relativement à $x, y, 2a, 2b$.

Si l'on essaye d'étendre à ce problème les méthodes du présent travail on tombera sur des difficultés dès les préliminaires, car il n'y a dans l'espace rien d'analogue aux fonctions analytiques d'une variable complexe et, *a fortiori*, il n'y a pas de généralisation possible des fonctions elliptiques. Il s'ensuit que la section II ne pourra pas être transposée dans le cas de l'espace. Pourtant, il est à noter qu'il est possible d'obtenir la plupart des résultats de la section II, en ce qui concerne les fonctions harmoniques réelles de deux variables sans quitter le domaine réel. On n'a qu'à développer, à cet effet, la théorie des fonctions harmoniques doublement périodiques, et des solutions élémentaires doublement périodiques de l'équation de Laplace, une théorie qui pourrait être développée indépendamment de la théorie des fonctions elliptiques, si l'on s'en donnait la peine.

Dans l'espace il s'agit des fonctions harmoniques triplement périodiques. L'étude de ces fonctions a été développée il y a longtemps par P. Appell ⁽¹⁾ et il paraît fort probable que cette étude permettra d'étendre les résultats de la section II au cas de l'espace.

Les considérations de la section III se transmettent facilement dans le cas de l'espace. On étend le lemme de Zaremba (théorème 15), donc aussi le critère d'harmonicité du corollaire 16, d'abord comme condition nécessaire. Il est facile de voir quelles fonctions prennent

(1) P. APPELL, *Acta Mathematica*, 4, 1884, p. 313.

la place des fonctions (15.4). L'extension des développements du paragraphe 15 se fait alors automatiquement.

Il est important de remarquer que les fonctions triplement périodiques qui ont à y figurer se forment d'elles-mêmes, au cours des transformations formelles. La justification de ces transformations se fera de manière analogue comme au paragraphe 16 et l'on aboutira à un théorème analogue au théorème 17, donc aussi à un analogue au corollaire 18 disant que le critère du corollaire 16 est aussi suffisant (¹). Les considérations du paragraphe 17 nécessitent l'étude préliminaire des fonctions harmoniques triplement périodiques, mais celles du paragraphe 18 se généralisent facilement.

Remarquons enfin qu'il est bien probable que les développements de la section IV, qui sont intimement liés à ceux de la section III, se généralisent également au cas de l'espace.

28. UN PROBLÈME LIÉ AU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LE CARRÉ. — Les méthodes de ce travail peuvent être appliquées pour résoudre un problème de décomposition un peu différent de celui considéré par nous. Ce problème provient du développement d'une fonction harmonique dans le carré $R : |x| < \pi, |y| < \pi$ suivant les fonctions

$$(28.1) \quad \begin{cases} \cos \frac{2m+1}{2} x \cosh \frac{2m+1}{2} y, & \cos \frac{2m+1}{2} x \sinh \frac{2m+1}{2} y, \\ \sin mx \cosh my, & \sin mx \sinh my, \end{cases}$$

$$(28.2) \quad \begin{cases} \cosh \frac{2n+1}{2} x \cos \frac{2n+1}{2} y, & \sinh \frac{2n+1}{2} x \cos \frac{2n+1}{2} y, \\ \cosh nx \sin ny, & \sinh nx \sin ny. \end{cases}$$

Les fonctions (28.1) sont périodiques de période 4π (donc en x) et s'annulent sur les côtés verticaux du carré, tandis que les fonctions (28.2) sont périodiques de période $4\pi i$ (donc en y) et s'annulent sur les côtés horizontaux du carré. Ces fonctions ont été

(¹) La suffisance de ce critère (pour $p = 2$) est essentiellement la thèse d'un lemme de H. Weyl (voir *Duke Math. Journ.*, vol. 7 1940, p. 411-444). Une autre démonstration de ce lemme a été donnée par A. Weinstein (voir *Amer. Journ. of Math.* vol. LXIII, 1941, p. 615-618).

employées pour la solution de divers problèmes aux limites, par exemple le problème de Dirichlet dans le carré.

Ce problème consiste à trouver une fonction harmonique dans le carré prenant sur les côtés du carré des valeurs données. On utilise le fait que les fonctions $\cos \frac{2n+1}{2}x$ et $\sin nx$ ($n=1,2,\dots$), forment un système orthogonal et complet pour la classe L dans $-\pi < x < \pi$ et l'on suppose que les valeurs de la fonction cherchée sont données sur chacun des côtés par un développement

$$\begin{aligned} \sum \left(a_n^{(1)} \cos \frac{2n+1}{2}x + b_n^{(1)} \sin nx \right), & \quad \text{sur } y = \pi, \quad -\pi < x < \pi, \\ \sum \left(a_n^{(2)} \cos \frac{2n+1}{2}x + b_n^{(2)} \sin nx \right), & \quad \text{sur } y = -\pi, \quad -\pi < x < \pi, \\ \sum \left(a_n^{(3)} \cos \frac{2n+1}{2}y + b_n^{(3)} \sin ny \right), & \quad \text{sur } x = \pi, \quad -\pi < y < \pi, \\ \sum \left(a_n^{(4)} \cos \frac{2n+1}{2}y + b_n^{(4)} \sin ny \right), & \quad \text{sur } x = -\pi, \quad -\pi < y < \pi. \end{aligned}$$

La fonction harmonique h est alors donnée par le développement

$$\begin{aligned} h(z) = & \sum \left(\alpha_n \cosh \frac{2n+1}{2}y + \alpha'_n \sinh \frac{2n+1}{2}y \right) \cos \frac{2n+1}{2}x \\ & + \sum (\beta_n \cosh ny + \beta'_n \sinh ny) \sin nx \\ & + \sum \left(\gamma_n \cosh \frac{2n+1}{2}x + \gamma'_n \sinh \frac{2n+1}{2}x \right) \cos \frac{2n+1}{2}y \\ & + \sum (\delta_n \cosh nx + \delta'_n \sinh nx) \sin ny, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{a_n^{(1)} + a_n^{(2)}}{2 \cosh \frac{2n+1}{2}\pi}, & \alpha'_n &= \frac{a_n^{(1)} - a_n^{(2)}}{2 \sinh \frac{2n+1}{2}\pi}; \\ \beta_n &= \frac{b_n^{(1)} + b_n^{(2)}}{2 \cosh n\pi}, & \beta'_n &= \frac{b_n^{(1)} - b_n^{(2)}}{2 \sinh n\pi}; \\ \gamma_n &= \frac{a_n^{(3)} + a_n^{(4)}}{2 \cosh \frac{2n+1}{2}\pi}, & \gamma'_n &= \frac{a_n^{(3)} - a_n^{(4)}}{2 \sinh \frac{2n+1}{2}\pi}; \\ \delta_n &= \frac{b_n^{(3)} + b_n^{(4)}}{2 \cosh n\pi}, & \delta'_n &= \frac{b_n^{(3)} - b_n^{(4)}}{2 \sinh n\pi}; \end{aligned}$$

Les développements en séries de ces fonctions conduisent au problème suivant :

Étant donnée une fonction h harmonique dans le carré R , trouver une décomposition

$$(28.3) \quad h = h_1 + h_2.$$

avec h_1 et h_2 harmoniques dans R , h_1 prolongeable et $= 0$ sur les côtés verticaux et h_2 prolongeable et $= 0$ sur les côtés horizontaux de R .

La fonction h_1 est nécessairement prolongeable harmoniquement et périodique de période 4π dans la bande $|y| < \pi$, tandis que h_2 est prolongeable et périodique de période $4\pi i$ dans la bande $|x| < \pi$.

Il n'est pas clair comment trouver une décomposition (28.3) pour toute fonction harmonique dans R (donc, les considérations de la section II ne s'étendent pas immédiatement ici). Mais, si h est L dans R on lui appliquera le lemme de Zaremba, en remplaçant les fonctions $u_{\mu\nu}^{(m,n)}$, par les fonctions

$$(28.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\cos \frac{2m+1}{2} x - (-1)^m (2m+1) \cos \frac{1}{2} x \right] \\ \times \left[\cos \frac{2n+1}{2} y - (-1)^n (2n+1) \cos \frac{1}{2} y \right], \\ \left[\cos \frac{2m+1}{2} x - (-1)^m (2m+1) \cos \frac{1}{2} x \right] \\ \times [\sin ny + (-1)^n n \sin y], \\ [\sin mx + (-1)^m m \sin x] \\ \times \left[\cos \frac{2n+1}{2} y - (-1)^n (2n+1) \cos \frac{1}{2} y \right], \\ [\sin mx + (-1)^m m \sin x] \\ \times [\sin ny + (-1)^n n \sin y]. \end{array} \right.$$

A partir de ce moment on peut procéder comme dans le reste des sections III et IV.

On trouvera des résultats analogues à la plupart des résultats de ces sections.

