JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ROBERT FAURE

Correspondance Mécanique classique-Mécanique ondulatoire

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 28 (1949), p. 193-285.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1949_9_28__193_0>

Correspondance Mécanique classique-Mécanique ondulatoire;

PAR ROBERT **FAURE**.

AVANT-PROPOS.

Ce travail comprend deux parties :

La première consiste en l'étude de la correspondance entre la Mécanique classique et la Mécanique ondulatoire, du point de vue des intégrales premières et de certaines méthodes d'intégration, ce qui était le sujet de notre thèse.

Dans la deuxième partie, nous avons étudié le rôle de l'Hermiticité dans la détermination des opérateurs déduits des fonctions des coordonnées et des moments de Poisson de la Mécanique classique.

Dans son ensemble, cette étude est effectuée du point de vue de la Mécanique des systèmes.

CHAPITRE I.

POSITION DU PROBLÈME.

En Mécanique ondulatoire, l'évolution d'un système est étudiée au moyen d'une certaine fonction Ψ, fonction d'onde du système.

On pose

$$\Psi = a\, e^{2\pi i \frac{\varphi}{h}},$$

a et φ fonctions des diverses coordonnées du système et du temps, h étant la constante de Planck.

Détermination de la fonction. — Cette fonction Ψ est, en vertu des principes de la Mécanique ondulatoire, solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\text{(1)} \qquad H(\psi) = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

En outre, Ψ est une fonction de carré sommable et uniforme dans le domaine envisagé de l'espace de configuration. Dans les cas rencontrés en pratique, ces conditions entraînent la continuité de la fonction Ψ partout.

Dans le cas où le domaine envisagé ne s'étendrait pas à l'infini, il faut encore imposer à la fonction Ψ d'être nulle sur la surface paroi.

* * *

Forme de l'hamiltonien quantique H. — *Terme d'origine cinétique.* — Nous envisageons un système mécanique pour lequel les liaisons sont indépendantes du temps.

On a, en Mécanique classique,

$$2T = \Sigma a_{ik} q'_i q'_k, \qquad q'_i = \frac{dq_i}{dt}, \qquad q'_k = \frac{dq_k}{dt},$$

le terme cinétique de l'hamiltonien sera alors, en utilisant les moments de Poisson $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$,

$$T = \frac{1}{2}\Sigma_{ik} g^{ik} p_i p_k,$$

où

$$g^{ik} = \frac{\mu^{ik}}{g},$$

μ^{ik} mineur de a_{ik} dans le déterminant g de la forme quadratique en q'_i, q'_k.

En Mécanique ondulatoire, on admet que le terme correspondant sera le laplacien dans l'espace Riemannien où l'espace de configuration $ds^2 = 2\mathrm{T}\,dt^2 = \Sigma a_{ik}\,dq_i\,dq_k$ au facteur $\frac{h^2}{8\pi^2}$ près, c'est-à-dire

$$-\frac{h^2}{8\pi^2}\Sigma_{ik}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sqrt{g}\,g^{ik}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)$$

qui peut s'écrire

$$-\frac{h^2}{8\pi^2}\left[\Sigma_{ik}g^{ik}\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_k}+\frac{1}{\sqrt{g}}\Sigma_{ik}\frac{\partial}{\partial q_i}(\sqrt{g}\,g^{ik})\frac{\partial}{\partial q_k}\right].$$

Terme provenant de l'existence d'un champ. — Pour que cette étude puisse être utilisée dans le cas d'un système de corpuscules soumis aussi bien à un champ dérivant d'un potentiel qu'à un champ électromagnétique, nous allons admettre que l'hamiltonien est de la forme

$$-\frac{h^2}{8\pi^2}\Sigma_{ik}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g^{ik}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)+\frac{h}{2\pi i}\vec{\mathrm{V}}.\mathrm{grad}\,\vec{\Psi}+\mathrm{U}.$$

$\vec{\mathrm{V}}$ est un vecteur que nous supposons *a priori* quelconque;
L'hamiltonien quantique serait donc

$$-\frac{h^2}{8\pi^2}\Sigma_{ik}g^{ik}\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(\sqrt{g}\,g^{ik})\frac{\partial}{\partial q_k}+\frac{h}{2\pi i}\Sigma_i\mathrm{L}_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\mathrm{U}.$$

potentiel électrique U, potentiel vecteur $\vec{\mathrm{V}}$, L_i fonction des coordonnées q_1, q_2, q_n, τ.

Approximation de l'optique géométrique dans l'équation d'onde. — Remplaçons Ψ par $ae^{2\pi i\frac{\varphi}{h}}$ dans (1).

Nous allons obtenir ainsi deux équations liant les diverses fonctions

$$(2)\quad \frac{1}{2}\Sigma_{ik}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}+\Sigma_i\mathrm{L}_i\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}+\mathrm{U}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{h^2}{8\pi^2 a\sqrt{g}}\Sigma_{ik}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g^{ik}\sqrt{g}\frac{\partial a}{\partial q_k}\right),$$

$$(3)\quad \Sigma_{ik}g^{ik}\frac{\partial a}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}+\Sigma_i\mathrm{L}_i\frac{\partial a}{\partial q_i}+\frac{a}{2\sqrt{g}}\Sigma_{ik}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g^{ik}\sqrt{g}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial a}{\partial t}.$$

Nous obtenons ainsi deux équations (2) et (3).
Envisageons maintenant l'approximation de l'optique géométrique.
Supposons que le nombre h que nous faisons intervenir dans le

calcul soit un paramètre variable. Il est possible d'envisager la correspondance d'un ensemble des deux fonctions a et φ avec un nombre h particulier, l'équation (2) définissant h^2.

Faisons tendre h vers zéro, les fonctions a et φ solutions des équations (2) et (3) tendent vers des fonctions a_l et φ_l limites, solutions des équations limites

$$(2') \qquad \frac{1}{2}\Sigma_{ik} g^{ik} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_l}{\partial q_k} + \Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_i} + \mathrm{U} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial t},$$

$$(3') \qquad \Sigma_{ik} g^{ik} \frac{\partial a_l}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_l}{\partial q_k} + \Sigma_i \mathrm{L}_l \frac{\partial a_l}{\partial q_i} + \frac{a_l}{2\sqrt{g}}\Sigma_{ik}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g^{ik}\sqrt{g}\frac{\partial \varphi_l}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial a_l}{\partial t}.$$

Il y aurait, bien entendu, lieu de fixer des conditions bien précises à a et φ pour les déterminer et pour que l'on puisse parler de limite sans ambiguïté.

L'équation (2′) seule nous intéresse, c'est l'équation de Jacobi du système dans le problème classique associé.

Il est intéressant d'envisager la correspondance entre les fonctions limites φ_l et les fonctions Ψ.

Les fonctions φ_l sont celles que nous rencontrons en Mécanique classique. Les fonctions Ψ fonctions d'ondes du système, sont celles que nous utilisons dans les cas des problèmes de la Mécanique quantique.

Il est naturel d'envisager l'étude de cette correspondance. Il est logique de penser qu'une méthode de résolution d'un problème en Mécanique classique donnera en Mécanique ondulatoire un résultat intéressant. Il est nécessaire, à notre avis, d'indiquer dans quelles limites cette correspondance peut jouer.

Problèmes étudiés. — Nous nous proposons d'envisager l'étude de cette correspondance particulièrement du point de vue intégrale première. Nous signalerons seulement les résultats que donnent certains procédés d'intégration de la Mécanique classique pour les problèmes correspondants en Mécanique ondulatoire, ceci en liaison avec le premier point de vue.

Intégrale première. — *Mécanique classique.* — On désigne ainsi toute fonction du temps des coordonnées, des vitesses ou des moments de Poisson qui demeurent constants durant le mouvement.

Mécanique ondulatoire. — Un opérateur linéaire et hermitique A est dit intégrale première lorsque :

1° Les valeurs propres sont indépendantes du temps ;

2° Il y a auto-prévisibilité, c'est-à-dire que si, à l'instant initial, la valeur de A a été mesurée, on peut affirmer qu'à tout instant la grandeur A a cette valeur (c'est-à-dire conservation du cas pur).

Correspondance entre intégrale première quantique et classique. — Si nous sommes dans un cas pur,

$$A(\Psi) = \alpha\Psi$$

α est constant.

Supposons que l'opérateur A soit un polynome en $\left(+\frac{h}{2\pi i}\right)$

$$A = \Sigma_n \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n \Sigma_{\alpha\beta\lambda} P_{q_1^\alpha q_2^\beta q_r^\lambda} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\lambda}}{\partial q_1^\alpha\, \partial q_2^\beta\, \partial q_r^\lambda},$$

les divers termes de la somme $\Sigma_{\alpha\beta\gamma}$ étant d'un ordre différentiel au plus égal à n.

$P_{q_1^\alpha q_2^\beta q_r^\lambda}$ étant une fonction des diverses coordonnées et du temps.

Puisque

$$\Psi = a\, e^{2\pi i \frac{\varphi}{h}},$$

le terme principal par rapport à h supposé infiniment petit de

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n P_{q_1^\alpha q_2^\beta q_r^\lambda} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\lambda}}{\partial q_1^\alpha\, \partial q_2^\beta\, \partial q_r^\lambda},$$

une fois appliqué à Ψ lorsque

$$\alpha + \beta + \lambda = n,$$

est

$$e^{2\pi i \frac{\varphi}{h}} a\, \Sigma_{\alpha+\beta+\lambda=n} P_{q_1^\alpha q_2^\beta q_r^\lambda} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)^\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)^\beta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_r}\right)^\lambda,$$

h étant supposé infiniment petit, a étant supposé borné ainsi que ses dérivées.

Par suite, le terme principal de ce développement sera

$$a\, e^{2\pi i \frac{\varphi}{h}} \Sigma P_{q_1^\alpha q_2^\beta q_r^\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right)^\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\right)^\beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_r}\right)^\lambda$$

en tenant compte des termes complémentaires $a\,C\,e^{2\pi i \frac{\varphi}{h}}$

$$\Sigma P_{q_1^\alpha q_2^\beta q_r^\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right)^\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\right)^\beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_r}\right)^\lambda + C = \alpha(h), \tag{4}$$

C fonction des dérivées de a et φ.

De deux choses l'une :

1° h est considéré comme un uombre défini physiquement et ayant une valeur bien déterminée. Il y aura lieu de maintenir dans l'égalité (4) le terme en C (cas quantique);

2° h est considéré comme un paramètre arbitraire, l'égalité (4) sera supposée vérifiée, quelque soit h (cas de passage à la limite).

Dans ce cas, mais seulement dans ce cas, la quantité h tendant vers zéro, le terme C tend lui-même vers zéro, et l'on a à la limite

$$\Sigma P_{q_1^\alpha q_2^\beta q_r^\lambda} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial q_1}\right)^\alpha \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial q_2}\right)^\beta \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial q_r}\right)^\lambda = \alpha(0),$$

φ_l étant la fonction limite.

Nous aurons dans ce cas 2° une intégrale première pour la fonction de Jacobi du problème.

Les deux cas que nous avons signalés nous conduisent à envisager les deux points de vue suivants distincts ; ou bien :

A. Nous considérons le terme C comme nul à la limite, et nous obtenons l'intégrale classique, ou bien :

B. C est un nombre fini bien déterminé, parce que h est fixé et déterminé. Il y a lieu dans ce cas d'envisager les deux problèmes suivants :

1° L'intégrale quantique donne-t-elle lieu à une intégrale en Mécanique classique ?

2° L'intégrale en Mécanique classique donne-t-elle lieu à une intégrale en Mécanique ondulatoire ?

L'expression *donne-t-elle lieu* étant envisagée dans le sens d'une correspondance terme à terme, sans passage à la limite obtenue en faisant tendre h vers zéro, la forme de l'intégrale classique et la forme de l'intégrale quantique exprimée avec les opérateurs moments étant comparées.

CHAPITRE II.

Conditions analytiques pour les intégrales indépendantes du temps.

Intégrale en mécanique classique. — Partons d'une fonction F de la Mécanique classique. Pour que cette fonction des coordonnées et des moments soit intégrale première classique, elle doit satisfaire à la condition

$$\frac{dF}{dt} = 0, \tag{1}$$

qui peut s'écrire en utilisant les équations du mouvement, équations relatives aux lignes caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles (équations de Hamilton)

$$H\left(q_i, -\frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t},$$

H obtenu en remplaçant p_i par $-\dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ dans $H(q_i, p_i, t)$, d'où

$$\frac{dF}{dt} = \Sigma_i\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

l'équation (1) sera

$$\Sigma_i\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

ici $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, d'où le crochet de Poisson

$$\Sigma_i \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0.$$

Pour une intégrale d'un type donné, elle devra être une identité pour les p_i.

Nous aurons ainsi toute une série d'identités en q_i en écrivant que les coefficients des monomes en p_i sont nuls.

Intégrale en mécanique quantique. — Ici puisque $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ on montre facilement qu'il faut $AH - HA = 0$, A étant l'opérateur intégrale première, H l'Hamiltonien quantique.

Classification des intégrales premières quantiques dans le cas d'un potentiel scalaire. — Indiquons une propriété simple des intégrales quantiques qui nous permettra d'analyser plus commodément la correspondance.

Envisageons le cas où l'opérateur A est une somme d'opérateurs

$$A_1, \quad A_2. \quad A_{2n}, \quad A_{2n+1}.$$

En désignant par A_{2n} un opérateur de la forme suivante

$$A_{2n} \equiv \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^{2n} \sum_{\alpha+\beta+\gamma \leq 2n} \mathop{\mathrm{S}}_{q_1 q_2 q_3} P_{q_1^\alpha q_2^\beta q_3^\gamma} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial q_1^\alpha \, \partial q_2^\beta \, \partial q_3^\gamma}$$

et pour A_{2n+1}

$$A_{2n+1} \equiv \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^{2n+1} \sum_{\alpha+\beta+\gamma \leq 2n+1} \mathop{\mathrm{S}}_{q_1 q_2 q_3} P_{q_1^\alpha q_2^\beta q_3^\gamma} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial q_1^\alpha \, \partial q_2^\beta \, \partial q_3^\gamma},$$

les P étant des fonctions quelconques des coordonnées $A \equiv \Sigma_i A_i$.

En écrivant que A est intégrale première, on a

$$AH - HA \equiv \Sigma_i A_i H - HA_i \equiv 0,$$

d'où deux classes de A.

1° Ceux pour lesquels les A_i sont pairs, tous les $i = 2p$;

2° Ceux pour lesquels les A_i sont impairs, tous les $i = 2p + 1$.

Nous avons, en effet, deux équations en écrivant que

$$\Sigma_i A_i H - H A_i \equiv 0.$$

On ne précise pas, en effet, *a priori* la nature des fonctions auxquelles sont appliquées les opérateurs.

Nous obtenons donc le résultat suivant :

Les intégrales de la Mécanique ondulatoire indépendante du temps, dans le cas d'un système soumis à un champ scalaire, sont de l'un des types (I) *ou* (II)

$$\text{(I)}\quad \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^{2p+1}\sum_{\alpha\beta\gamma}\underset{q_1 q_2 q_n}{\mathrm{S}} \mathrm{P}_{q_1^\alpha q_2^\beta q_3^\gamma}\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial q_1^\alpha\,\partial q_2^\beta\,\partial q_3^\gamma},\qquad \alpha+\beta+\gamma\leqq 2p+1,$$

$\underset{q_1 q_2 q_3}{\mathrm{S}}$ indique que l'on doit sommer également par rapport aux coordonnées,

$$\text{(II)}\quad \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^{2p}\sum_{\alpha\beta\gamma}\underset{q_1 q_2 q_n}{\mathrm{S}} \mathrm{P}_{q_1^\alpha q_2^\beta q_3^\gamma}\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial q_1^\alpha\,\partial q_2^\beta\,\partial q_3^\gamma},\qquad \alpha+\beta+\gamma\leqq 2p.$$

En vertu de la correspondance que nous envisageons, nous ne pouvons envisager en Mécanique classique que des fonctions F de l'un des types suivants :

$$\text{(I')}\quad \sum_{\alpha\beta\gamma}\underset{q_1 q_2 q_n}{\mathrm{S}} \mathrm{P}_{q_1^\alpha q_2^\beta q_3^\gamma}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_1}\right)^\alpha\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_2}\right)^\beta\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_3}\right)^\gamma,\qquad \alpha+\beta+\gamma=2p+1\leqq 2n+1,$$

$$\text{(II')}\quad \sum_{\alpha\beta\gamma}\underset{q_1 q_2 q_3}{\mathrm{S}} \mathrm{P}_{q_1^\alpha q_2^\beta q_3^\gamma}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_1}\right)^\alpha\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_2}\right)^\beta\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_3}\right)^\gamma,\qquad \alpha+\beta+\gamma=2p\leqq 2n.$$

Nous verifierons plus loin directement, cette propriété pour le système en Mécanique classique pour les cas particuliers du deuxième et du premier ordres.

Nous n'envisageons pour l'instant que le cas où le ds^2 de l'espace de configuration est de la forme

$$ds^2 = \Sigma_i a_i\,dq_i^2,$$
$$2\mathrm{T} = \Sigma_i \mathrm{A}_i p_i^2 \qquad \text{avec}\quad \mathrm{A}_i = \frac{g_i}{g} = \frac{1}{a_i},$$
$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\Sigma_i \mathrm{A}_i p_i^2 + \mathrm{U}.$$

Nous envisageons donc successivement en Mécanique classique les deux types d'intégrales :

1° $\Sigma_i Q_i \frac{\partial S}{\partial q^i}$ intégrale du premier ordre;

2° $\Sigma_i P_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 + R$ intégrale du deuxième ordre.

Conditions pour que le système dont le $H = \frac{1}{2}\Sigma_i A_i p_i^2 + u$ admette l'intégrale $\Sigma P_i p_i^2 + Q_i p_i + R$. — La méthode précédemment indiquée (crochet de Poisson) identité en p_i donne

$$\Sigma_i \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0.$$

On a

$$\Sigma_i \left(2 P_i p_i + Q_i \Sigma_r \frac{1}{2}\frac{\partial A_r}{\partial q_i} p_r^2 + \frac{\partial U}{\partial q_i} - A_i p_i \Sigma_r \frac{\partial P_r}{\partial q_i} p_r^2 + \frac{\partial Q_r}{\partial q_i} p_r + \frac{\partial R}{\partial q_i}\right) = 0.$$

On a ainsi les relations suivantes :

1° Coefficient du terme en $p_k p_r^2$,

$$P_k \frac{\partial A_r}{\partial q_k} - A_k \frac{\partial P_r}{\partial q_k} = 0, \tag{I}$$

relations au nombre de $2 \times C_n^2$.

2° Coefficient de p_i^3,

$$P_i \frac{\partial A_i}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_i}{\partial q_i} = 0, \tag{II}$$

relations au nombre de n.

3° Coefficient de $p_i p_k$,

$$A_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + A_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = 0, \tag{III}$$

relations au nombre de C_n^2.

4° Coefficient de p_i^2,

$$\frac{1}{2}\Sigma_k Q_k \frac{\partial A_i}{\partial q_k} - A_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} = 0, \tag{IV}$$

relations au nombre de n.

5° Coefficient de p_i,

$$(\mathrm{V}) \qquad 2\,\mathrm{P}_i \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i} - \mathrm{A}_i \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q_i} = 0,$$

relations au nombre de n, et le terme indépendant des p_i

$$\Sigma\, \mathrm{Q}_i \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i} = 0.$$

En Mécanique ondulatoire, si la force vive classique est

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \Sigma_i a_i q_i'^2 = \frac{1}{2} \Sigma \mathrm{A}_i p_i^2$$

et le potentiel U, l'Hamiltonien quantique H est alors

$$-\frac{h^2}{8\pi^2}\left(\Sigma_i \mathrm{A}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_i}\right) + \mathrm{U},$$

où $\operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}}$ est le logarithme *népérien* de $\frac{g_i}{\sqrt{g}}$.

Nous remarquons immédiatement que les relations précédentes se décomposent en deux groupes :

Relations (I), (II), (V);
Relations (III), (IV), (VI),

les deux groupes sont indépendants. Nous vérifions bien qu'en Mécanique classique il y a également les deux types d'intégrales indépendantes

$$\Sigma\, \mathrm{P}_i \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i}\right)^2 + \mathrm{R} \qquad (2^{\mathrm{e}} \text{ ordre}),$$

$$\Sigma\, \mathrm{Q}_i \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i} \qquad (1^{\mathrm{er}} \text{ ordre}).$$

Nous pouvons donc poursuivre la recherche des intégrales quantiques qui leur correspondent.

RELATIONS DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE. — Nous obtenons les conditions pour que A soit intégrale première en écrivant que $\mathrm{AH} - \mathrm{HA} = 0$.

Pour obtenir l'ensemble des résultats relatifs au premier et second ordres, nous prendrons la forme A sous la forme

$$A \equiv -\frac{h^2}{4\pi^2}\Sigma_i P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} - \frac{h}{2\pi i} Q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + R.$$

Calculons les opérateurs AH et AH′ à un facteur près en prenant

$$A \equiv \Sigma_i P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} - \frac{2\pi i}{h}\Sigma_k Q_k \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{4\pi^2}{h^2} R,$$

$$H \equiv \Sigma_r A_r \frac{\partial^2}{\partial q_r^2} + A_r \frac{\partial}{\partial q_r} \operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_r} - \frac{8\pi^2}{h^2} U,$$

$$\begin{aligned}
AH \equiv{} & P_i \frac{\partial^2 A_r}{\partial q_i^2}\frac{\partial^2}{\partial q_r^2} + 2P_i \frac{\partial A_r}{\partial q_i}\frac{\partial^3}{\partial q_r^2\,\partial q_i} + P_i A_r \frac{\partial^4}{\partial q_i^2\,\partial q_r^2} \\
& + P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(A_r \frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\right)\frac{\partial}{\partial q_r} + 2P_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_r \frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\right)\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_r} \\
& + P_i A_r \frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\frac{\partial^3}{\partial q_i^2\,\partial q_r} - \frac{8\pi^2}{h^2}\left(P_i \frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} + 2P_i \frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\right) \\
& - \frac{8\pi^2}{h^2} P_i U \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} - \frac{2\pi i}{h}\Bigg[Q_k \frac{\partial A_r}{\partial q_k}\frac{\partial^2}{\partial q_r^2} + Q_k A_r \frac{\partial^3}{\partial q_k\,\partial q_r^2} \\
& \qquad + Q_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(A_r \frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\right)\frac{\partial}{\partial q_r}\Bigg] \\
& - \frac{2\pi i}{h} Q_k A_r \frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\frac{\partial^2}{\partial q_k\,\partial q_r} + \frac{16\pi^3 i}{h^3}\left(Q_k U \frac{\partial}{\partial q_k} + Q_k \frac{\partial U}{\partial q_k}\right) \\
& - \frac{4\pi^2}{h^2} R\left(A_r \frac{\partial^2}{\partial q_r^2} + A_r \frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_r} - \frac{8\pi^2}{h^2} U\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
HA \equiv{} & A_r\left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial q_r^2}\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + 2\frac{\partial P_i}{\partial q_r}\frac{\partial^3}{\partial q_r\,\partial q_i^2} + P_i \frac{\partial^4}{\partial q_r^2\,\partial q_i^2}\right) \\
& + A_r \frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_r}\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + P_i \frac{\partial^3}{\partial q_i^2\,\partial q_r}\right) \\
& - \frac{8\pi^2}{h^2} U\left(P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + \frac{2\pi i}{h} Q_k \frac{\partial}{\partial q_k} + R\right) \\
& - \frac{2\pi i}{h} A_r\left(\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_r^2}\frac{\partial}{\partial q_k} + 2\frac{\partial Q_k}{\partial q_r}\frac{\partial^2}{\partial q_r\,\partial q_k} + Q_k \frac{\partial^3}{\partial q_k\,\partial q_r^2}\right) \\
& - \frac{2\pi i}{h} A_r \frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_r}\frac{\partial}{\partial q_k} + Q_k \frac{\partial^2}{\partial q_k\,\partial q_r}\right) \\
& - \frac{4\pi^2}{h^2}\left(A_r \frac{\partial^2 R}{\partial q_r^2} + 2A_r \frac{\partial R}{\partial q_r}\frac{\partial}{\partial q_r} + A_r R \frac{\partial^2}{\partial q_r^2}\right) \\
& - \frac{4\pi^2}{h^2} A_r \frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\frac{\partial R}{\partial q_r} + \frac{32\pi^4}{h^4} UR.
\end{aligned}$$

Il suffit de déduire de ce calcul pour la suite de l'étude, les équations pour un opérateur de la forme

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\Sigma_i\left(P_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}+Q_i\frac{\partial}{\partial q_i}+R_1\right)+\frac{h}{2\pi i}L_i\frac{\partial}{\partial q_i}+R.$$

On a

$$AH-HA=0$$

et écrivant que les coefficients des opérateurs monomes sont nuls :

Termes en $\dfrac{\partial^3}{\partial q_i\,\partial q_r^2}$,

$$\text{(I')}\qquad P_i\frac{\partial A_r}{\partial q_i}-A_i\frac{\partial P_r}{\partial q_i}=0.$$

Termes en $\dfrac{\partial^3}{\partial q_i^3}$,

$$\text{(II')}\qquad P_i\frac{\partial A_i}{\partial q_i}-A_i\frac{\partial P_i}{\partial q_i}=0.$$

Les termes en $\dfrac{\partial^2}{\partial q_k\,\partial q_i}$

$$\text{(III')}\quad 2P_i\frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)+2P_k\frac{\partial}{\partial q_k}\left(A_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\right)$$
$$-A_i\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}-A_k\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}-\frac{4\pi i}{h}\left(A_k\frac{\partial L_i}{\partial q_k}+A_i\frac{\partial L_k}{\partial q_i}\right)=0.$$

Les termes en $\dfrac{\partial^2}{\partial q_k^2}$

$$\text{(IV')}\qquad \Sigma_i P_i\frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i^2}-A_i\frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i^2}+2P_k\frac{\partial}{\partial q_k}\left(A_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right),$$
$$-\Sigma_i A_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial P_k}{\partial q_i}-2A_k\frac{\partial Q_k}{\partial q_k}+\Sigma_i Q_i\frac{\partial A_k}{\partial q_i}$$
$$+\frac{2\pi i}{h}\Sigma_i\left(L_i\frac{\partial A_k}{\partial q_i}-2A_k\frac{\partial L_k}{\partial q_k}\right)=0.$$

Les termes en $\dfrac{\partial}{\partial q_k}$

$$\text{(V')}\qquad \Sigma_i P_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(A_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)$$
$$+\Sigma_i Q_i\frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)-\Sigma_i A_i\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i^2}$$
$$+A_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}-\frac{16\pi^2}{h^2}P_k\frac{\partial U}{\partial q_k}+\frac{8\pi^2}{h^2}A_k\frac{\partial R}{\partial q_k}-2A_k\frac{\partial R_1}{\partial q_k}$$
$$-\frac{2\pi i}{h}\Sigma_i L_i\frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g}{\sqrt{g}}\right)-A_i\frac{\partial^2 L_k}{\partial q_i^2}-A_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial L_k}{\partial q_i}=0.$$

Et les termes constants (multiplicateur)

$$(\text{VI}') \quad -\frac{8\pi^2}{h^2}\Sigma_i P_i \frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} - \frac{16\pi^3 i}{h^3}\Sigma L_k \frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{8\pi^2}{h^2}\Sigma Q_k \frac{\partial U}{\partial q_k} - \Sigma A_r \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_r^2} + A_r \frac{\partial}{\partial q_r}\mathrm{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\frac{\partial R_1}{\partial q_r} + \frac{4\pi^2}{h^2}\Sigma A_r \frac{\partial^2 R}{\partial q_r^2} + A_r \frac{\partial}{\partial q_r}\mathrm{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\frac{\partial R}{\partial q_r} = 0.$$

CHAPITRE III.

Intégrale du premier ordre indépendante du temps.

Envisageons tout d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire le cas de l'intégrale du premier ordre.

Les relations fournies par la Mécanique classique sont alors

$$(1) \quad \Sigma_i Q_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} = 2 A_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_k},$$

$$(2) \quad A_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + A_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = 0,$$

$$(3) \quad \Sigma_i Q_i \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0.$$

Les conditions pour que A soit intégrale quantique sont que les expressions Φ_k soient nulles

$$\Phi_k = \Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\mathrm{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) - A_i \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i^2} - A_i \frac{\partial}{\partial q_i}\mathrm{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = 0.$$

Démontrons que $\Phi_k = 0$.

Considérons donc $G_k = \Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\mathrm{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)$.

Nous avons (1)

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\mathrm{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\mathrm{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\Sigma_i Q_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} + A_k \Sigma_i Q_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}\mathrm{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}},$$

puisque nous calculons G pour k constant et que

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\mathrm{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) = \frac{\partial A_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\mathrm{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}} + A_k \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}\mathrm{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}.$$

or nous avons

$$(1) \qquad \Sigma_i Q_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} = 2 A_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_k};$$

pour calculer (1) il nous faut calculer $\Sigma_i Q_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}$.

Nous allons exprimer cette expression en fonction de Q_k; nous utiliserons les relations de la Mécanique classique

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}} = \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} A_k \sqrt{g}, \qquad \text{car} \quad A_k \sqrt{g} = \frac{g_k}{\sqrt{g}}.$$

Nous avons dès lors, en dérivant (1) par rapport à q_k,

$$(1) \qquad \Sigma_i Q_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} = 2 A_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_k},$$

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i \partial q_k} + \Sigma_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial A_k}{\partial q_i} = 2 \frac{\partial A_k}{\partial q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} + 2 A_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_k^2},$$

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i \partial q_k} : A_k = 2 \left(\frac{\partial A_k}{\partial q_k} : A_k \right) \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} + 2 \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_k^2} - \Sigma_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial A_k}{\partial q_i} : A_k,$$

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \frac{\partial A_k}{\partial q_k} : A_k^2 = 2 \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} A_k \left(\frac{\partial A_k}{\partial q_k} : A_k^2 \right) = 2 \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} \frac{\partial A_k}{\partial q_k} : A_k;$$

or

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} A_k \sqrt{g} = \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} A_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} g,$$

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} A_k \sqrt{g} = \Sigma_i Q_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} A_k + \frac{1}{2} \Sigma_i Q_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} g,$$

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} A_k = \Sigma_i Q_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i \partial q_k} : A_k - \left(\frac{\partial A_k}{\partial q_k} : A_k^2 \right) \Sigma_i Q_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i};$$

or

$$\begin{aligned} \Sigma_i Q_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i \partial q_k} : A_k - \Sigma_i Q_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \frac{\partial A_k}{\partial q_k} : A_k^2 & \\ = 2 \frac{\partial A_k}{\partial q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} : A_k + 2 \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_k^2} - \Sigma_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial A_k}{\partial q_i} : A_k - 2 \frac{\partial A_k}{\partial q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} : A_k & \\ = 2 \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_k^2} - \Sigma_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial A_k}{\partial q_i} : A_k. & \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} . g$.

Nous avons $g = \pi(a_i)\, \pi =$ produit avec $A_i = \frac{1}{a_i}$,

$$\pi(a_i) = \frac{1}{\pi(A_i)}.$$

$\operatorname{Log} g = -\Sigma_r \operatorname{Log} A_r$, r indice quelconque variant de 1 à n.

Nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} A_r = \Sigma_r \frac{\partial^2 A_r}{\partial q_i \partial q_k} : A_r - \frac{\partial A_r}{\partial q_i} \frac{\partial A_r}{\partial q_k} : A_r^2.$$

Nous allons calculer les sommes

$$\Sigma_i \Sigma_r Q_i \frac{\partial^2 A_r}{\partial q_i \partial q_k} : A_r, \qquad \Sigma_i \Sigma_r Q_i \frac{\partial A_r}{\partial q_i} \frac{\partial A_r}{\partial q_k} : A_r^2.$$

Pour les calculer, remarquons que nous avons affaire à des sommes en nombre fini de termes.

Par suite

$$\Sigma_i \Sigma_r = \Sigma_r \Sigma_i,$$

$$\Sigma_i \Sigma_r Q_i \frac{\partial^2 A_r}{\partial q_i \partial q_k} : A_r = \Sigma_r \Sigma_i Q_i \frac{\partial^2 A_r}{\partial q_i \partial q_k} : A_r$$

et

$$\Sigma_i \Sigma_r Q_i \left(\frac{\partial A_r}{\partial q_i} : A_r^2 \right) \frac{\partial A_r}{\partial q_k} = \Sigma_r \Sigma_i Q_i \frac{\partial A_r}{\partial q_i} \left(\frac{\partial A_r}{\partial q_k} : A_r^2 \right);$$

pour r fixé nous avons la relation

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial A_r}{\partial q_i} = 2 A_r \frac{\partial Q_r}{\partial q_r},$$

dérivons-là par rapport à q_k

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial^2 A_r}{\partial q_i \partial q_k} + \Sigma_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial A_r}{\partial q_i} = 2 A_r \frac{\partial^2 Q_r}{\partial q_k \partial q_r} + 2 \frac{\partial A_r}{\partial q_k} \frac{\partial Q_r}{\partial q_r},$$

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial^2 A_r}{\partial q_i \partial q_k} = 2 A_r \frac{\partial^2 Q_r}{\partial q_i \partial q_k} + 2 \frac{\partial A_r}{\partial q_k} \frac{\partial Q_r}{\partial q_r} - \Sigma_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial A_r}{\partial q_i},$$

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial^2 A_r}{\partial q_i \partial q_k} : A_r = 2 \frac{\partial^2 Q_r}{\partial q_i \partial q_k} + 2 \left(\frac{\partial A_r}{\partial q_k} : A_r \right) \frac{\partial Q_r}{\partial q_r} - \Sigma_i \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} : A_r \right) \frac{\partial A_r}{\partial q_i};$$

or

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial A_r}{\partial q_i} \frac{\partial A_r}{\partial q_k} : A_r^2 = 2 \frac{\partial Q_r}{\partial q_r} \frac{\partial A_r}{\partial q_k} : A_r,$$

car

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial A_r}{\partial q_i} \frac{\partial A_r}{\partial q_k} : A_r^2 = \left(\frac{\partial A_r}{\partial q_k} : A_r^2 \right) \Sigma_i Q_i \frac{\partial A_r}{\partial q_i} = 2 \frac{\partial Q_r}{\partial q_r} \left(\frac{\partial A_r}{\partial q_k} : A_r \right),$$

car k est constant, r fixe pour l'instant, d'où

$$\Sigma_i Q_i\left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial q_i\,\partial q_k} : A_r - \frac{\partial A_r}{\partial q_i}\,\frac{\partial A_r}{\partial q_k} : A_r^2\right) = 2\,\frac{\partial^2 Q_r}{\partial q_r\,\partial q_k} - \Sigma_i\,\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\,\frac{\partial A_r}{\partial q_i} : A_r.$$

Calculons donc la somme

$$\Sigma_r\Sigma_i Q_i\left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial q_i\,\partial q_k} : A_r - \frac{\partial A_r}{\partial q_i}\,\frac{\partial A_r}{\partial q_k} : A_r^2\right) = 2\,\Sigma_r\,\frac{\partial^2 Q_r}{\partial q_r\,\partial q_k} - \Sigma_r\Sigma_i\,\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\,\frac{\partial A_r}{\partial q_i} : A_r;$$

pour $r \neq k$ on a

$$A_k\,\frac{\partial Q_r}{\partial q_k} + A_r\,\frac{\partial Q_k}{\partial q_r} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial Q_r}{\partial q_k} = -\,\frac{A_r}{A_k}\,\frac{\partial Q_k}{\partial q_r},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 Q_r}{\partial q_r\,\partial q_k} = -\,\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{A_r}{A_k}\,\frac{\partial Q_k}{\partial q_r}\right) = -\left(\frac{\partial A_r}{\partial q_r} : A_k - \frac{\partial A_k}{\partial q_r}\,\frac{A_r}{A_k^2}\right)\frac{\partial Q_k}{\partial q_r} - \frac{A_r}{A_k}\,\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_r^2};$$

par suite

$$\Sigma_{r\neq k}\,\frac{\partial^2 Q_r}{\partial q_r\,\partial q_k} = -\,\Sigma_{r\neq k}\,\frac{A_r}{A_k}\,\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_r^2} - \Sigma_{r\neq k}\left(\frac{\partial A_r}{\partial q_r} : A_k - \frac{\partial A_k}{\partial q_r}\,\frac{A_r}{A_k^2}\right)\frac{\partial Q_k}{\partial q_r}$$

par suite

$$\begin{aligned}
&\Sigma_i Q_i\,\frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k\,\frac{\partial}{\partial q_k}\,\mathrm{Log}\,\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)\\
&\quad = 2\,A_k\,\frac{\partial Q_k}{\partial q_k}\,\frac{\partial}{\partial q_k}\,\mathrm{Log}\,\frac{g_k}{\sqrt{g}} + 2\,A_k\,\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_k^2} - \Sigma_i\,\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\,\frac{\partial A_k}{\partial q_i}\\
&\qquad - \frac{A_k}{2}\,\Sigma_i\Sigma_r Q_i\left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial q_i\,\partial q_k} : A_r - \frac{\partial A_r}{\partial q_i}\,\frac{\partial A_r}{\partial q_k} : A_r^2\right)\\
&\quad = 2\,A_k\,\frac{\partial Q_k}{\partial q_k}\,\frac{\partial}{\partial q_k}\,\mathrm{Log}\,\frac{g_k}{\sqrt{g}} + 2\,A_k\,\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_k^2} - \Sigma_i\,\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\,\frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_k\,\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_k^2}\\
&\qquad + \Sigma_{r\neq k} A_r\,\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_r^2} + \Sigma_{r\neq k}\left(\frac{\partial A_r}{\partial q_r} - \frac{\partial A_k}{\partial q_r}\,\frac{A_r}{A_k}\right)\frac{\partial Q_k}{\partial q_r} + \frac{A_k}{2}\,\Sigma_r\Sigma_i\,\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\,\frac{\partial A_r}{\partial q_i} : A_r\\
&\quad = 2\,A_k\,\frac{\partial Q_k}{\partial q_k}\,\frac{\partial}{\partial q_k}\,\mathrm{Log}\,\frac{g_k}{\sqrt{g}} + \Sigma_r A_r\,\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_r^2} + \Sigma_{r\neq k}\left(\frac{\partial A_r}{\partial q_r} - \frac{\partial A_k}{\partial q_r}\,\frac{A_r}{A_k}\right)\frac{\partial Q_k}{\partial q_r}\\
&\qquad - A_k\,\Sigma_i\,\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\,\frac{\partial}{\partial q_i}\,\mathrm{Log}\sqrt{g} - \Sigma_i\,\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\,\frac{\partial A_k}{\partial q_i},
\end{aligned}$$

les sommes $\Sigma_i \mathrm{A}_i \dfrac{\partial^2 \mathrm{Q}_k}{\partial q_i^2}$, $\Sigma_r \mathrm{A}_r \dfrac{\partial^2 \mathrm{Q}_k}{\partial q_r^2}$ s'annulent dans

$$\begin{aligned}
&\Sigma_i \mathrm{Q}_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\mathrm{A}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) - \Sigma_i \mathrm{A}_i \frac{\partial^2 \mathrm{Q}_k}{\partial q_i^2} + \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i} \\
&\quad = 2\mathrm{A}_k \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}} + \Sigma_{r \neq k}\left(\frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_r} - \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_r} \frac{\mathrm{A}_r}{\mathrm{A}_k}\right) \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_r} \\
&\qquad - \mathrm{A}_k \Sigma_i \frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} - \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i} - \Sigma_i \frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i}.
\end{aligned}$$

Étudions les sommes où figure $\dfrac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k}$

$$- \frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k} \mathrm{A}_k \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} = - \frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k} \mathrm{A}_k \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g},$$

$$\Sigma_i \frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k} \mathrm{A}_k \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g} = \Sigma_{i \neq k} \frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k} \mathrm{A}_k \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g} + \mathrm{A}_k \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g},$$

puisque, pour $i \neq k$,

$$\mathrm{A}_i \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i} + \mathrm{A}_k \frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k} = 0,$$

$$\Sigma_{i \neq k} \frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k} \mathrm{A}_k \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g} = - \Sigma_{i \neq k} \mathrm{A}_i \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g}.$$

La somme envisagée devient

$$\begin{aligned}
&2\mathrm{A}_k \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}} + \Sigma_{r \neq k}\left(\frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_r} - \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_r} \frac{\mathrm{A}_r}{\mathrm{A}_k}\right) \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_r} - \Sigma_i \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i} \\
&\qquad - \mathrm{A}_k \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g} + \Sigma_{i \neq k} \mathrm{A}_i \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g}.
\end{aligned}$$

Les $\mathrm{A}_k \dfrac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_k} \dfrac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g}$ disparaissent si l'on passe des Σ_i aux $\Sigma_{i \neq k}$.

Calculons

$$\Sigma_{i \neq k}\left(\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i} \frac{\mathrm{A}_i}{\mathrm{A}_k} - \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} + \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g}\right) \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i} = \Sigma_{i \neq k} \mathrm{L}_i \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i}$$

$$\frac{g_i}{\sqrt{g}} = \mathrm{A}_i \sqrt{g}, \qquad \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \mathrm{A}_i \sqrt{g} = \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial q_i} : \mathrm{A}_i + \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g},$$

d'où

$$\mathrm{L}_i = \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i} \frac{\mathrm{A}_i}{\mathrm{A}_k} - \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial q_i} - \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} + \frac{\mathrm{A}_i}{\mathrm{A}_k} \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i} + \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} = 0.$$

On voit alors que chaque coefficient des $\dfrac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i}$ est nul.

Φ_k est donc nul, ce qui montre dans ce cas la compatibilité des équations de la Mécanique ondulatoire avec celle de la Mécanique classique, d'où

THÉORÈME. — *Pour un système soumis à un champ scalaire, une intégrale linéaire en Mécaniqne classique donne lieu à une intégrale première en Mécanique quantique et réciproquement.*

Remarque (¹). — Une remarque très importante doit être faite ici, si l'on envisage une intégrale première linéaire; celle-ci provient toujours d'un déplacement virtuel du système et les termes aux q'_i sont ceux qui figurent dans le travail virtuel correspondant de la quantité de mouvement.

CHAPITRE IV.

INTÉGRALES DU DEUXIÈME ORDRE INDÉPENDANTES DU TEMPS.

Étudions maintenant les intégrales du deuxième ordre. Celles-ci se différencient nettement de celles du premier ordre en ce sens qu'elles donnent lieu, ainsi que nous l'avons fait remarquer à une véritable approximation pour les termes différentiels et que des termes qui figurent *a priori* dans l'opérateur A de la Mécanique ondulatoire ne figurent plus en Mécanique classique après l'approximation.

Pour éviter des calculs *a priori* trop chargés, nous allons, pour l'instant, envisager uniquement un opérateur dont les termes de plus haut ordre sont

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\Sigma_i \mathrm{P}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}.$$

Cela revient à dire que nous envisageons la recherche de l'opérateur de la Mécanique ondulatoire dont l'approximation géométrique est l'intégrale première classique

$$\Sigma_i \mathrm{P}_i \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i}\right)^2 + \mathrm{R}.$$

(¹) DELASSUS, *Mécanique des systèmes*.

Avant de poursuivre, faisons un retour sur les intégrations linéaires et homogènes

$$A \equiv \frac{h}{2\pi i} \Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i},$$

A donne lieu à

$$F = \Sigma Q_i \frac{\partial}{\partial q_i},$$

A intégrale première A^2 l'est également.

Envisageons

$$A^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2} \Sigma_{ik} Q_i^2 \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + 2 Q_i Q_k \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} + Q_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

L'intégrale du deuxième ordre que nous envisageons donne lieu au point de vue classique à l'intégrale G

$$G = \Sigma_i Q_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 + 2 Q_i Q_k \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial S}{\partial q_k};$$

pour que G soit de la forme $\Sigma_i P_i \frac{\partial^2}{\partial q^2}$ tout en étant A^2, il faut que $(n-1)Q_i$ soient nuls, car tous les $Q_i Q_k$ doivent être nuls, nous n'avons pas à envisager le cas, car les P_i seraient tous nuls sauf un.

Nous sommes dans le cas d'une intégrale différente des A^2.

Plaçons-nous dans le cas de l'opérateur

$$A \equiv -\frac{h^2}{4\pi^2} \Sigma_i P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + Q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + R_1 + R,$$

l'intégrale F classique étant $\Sigma_i P_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 + R$.

Les équations sont les suivantes en Mécanique classique

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & P_i \frac{\partial A_i}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_i}{\partial q_i} = 0, \\ & P_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0, \\ & 2 P_i \frac{\partial U}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0. \end{aligned} \right.$$

La Mécanique ondulatoire nous donne d'autres équations.

Nous avons

$$P_i \frac{\partial A_i}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_i}{\partial q_i} = 0,$$

$$P_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0$$

et les équations (1)

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \Sigma_i P_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i^2} - A_i \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i^2} - \Sigma_i A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} + \Sigma_i Q_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - 2 A_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} + 2 P_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) = 0,$$

$$(\mathrm{E}_2) \qquad P_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) + P_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}}\right) - \left(A_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + A_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_k}\right) = 0,$$

$$(\mathrm{E}_3) \qquad \Sigma_i P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) + \Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) - \Sigma_i\left(A_i \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i^2} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\right) - \frac{16\pi^2}{h^2} P_k \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{8\pi^2}{h^2} A_k \frac{\partial R}{\partial q_k} - 2 A_k \frac{\partial R_1}{\partial q_k} = 0.$$

Nous voyons donc que si nous définissons l'opérateur

$$A = -\frac{h^2}{4\pi^2}\left(\Sigma_i P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + \Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + R_1\right) + R,$$

à partir de $F = \Sigma_i P_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 + R$, c'est-à-dire si nous prenons A et F, les mêmes P_i et le même R, nous satisfaisons d'emblée aux équations (I) de la Mécanique classique et de la Mécanique ondulatoire. Les équations restantes doivent permettre de définir les Q_i et R_1 s'ils existent, sinon elles doivent permettre de démontrer l'impossibilité d'un tel opérateur A.

L'équation (E_1) se simplifie si l'on note que $P_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i^2} - A_i \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i^2}$ est identiquement nul. On a

$$P_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0;$$

dérivons par rapport à q_i

$$P_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i^2} - A_i \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i^2} + \frac{\partial P_i}{\partial q_i}\frac{\partial A_k}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0.$$

Si nous remarquons que

$$P_i \frac{\partial A_i}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_i}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial q_i} = \frac{P_i}{A_i}\frac{\partial A_i}{\partial q_i},$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P_i}{\partial q_i}\frac{\partial A_k}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\partial P_k}{\partial q_i} \\ &\quad = \frac{P_i}{A_i}\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\partial A_k}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\left(P_i\frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\right) = 0, \end{aligned}$$

nous avons

$$\Sigma_i\left(P_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i^2} - A_i \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i}\right) = 0;$$

par suite, les équations (E_1), (E_2) deviennent

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - 2A_k\frac{\partial Q_k}{\partial q_k} + 2P_k\frac{\partial}{\partial q_k}\left(A_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) - \Sigma_i A_i \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0,$$

$$P_i\frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) + P_k\frac{\partial}{\partial q_k}\left(A_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\right) - A_i\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - A_k\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = 0.$$

Ces équations définissent les Q_i

Vérifions que

$$Q_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_i} + P_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}.$$

Nous avons ainsi

$$\Sigma_i Q_i\frac{\partial A_k}{\partial q_i} = \Sigma_i \frac{\partial P_i}{\partial q_i}\frac{\partial A_k}{\partial q_i} + P_i\frac{\partial A_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g},$$

$$\begin{aligned} &\Sigma_i Q_i\frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial P_k}{\partial q_i} \\ &\quad = \Sigma_i\frac{\partial P_i}{\partial q_i}\frac{\partial A_k}{\partial q_i} + P_i\frac{\partial A_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g} - \Sigma_i A_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial P_k}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

d'où, par suite,

$$A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} = \frac{\partial A_i}{\partial q_i} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}.$$

$$\begin{aligned}
&\Sigma_i Q_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \\
&\quad = \Sigma_i \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \frac{\partial A_k}{\partial q_i} + P_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} - \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}.
\end{aligned}$$

Or, ainsi que nous venons de le voir,

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_i} \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0,$$

il reste

$$\Sigma_i \left(P_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g},$$

or

$$P_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0,$$

de même

$$2 P_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}} \right) - 2 A_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} = 0,$$

$$A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}} = \frac{\partial A_k}{\partial q_k} + A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g},$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}} \right) = \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_k^2} + \frac{\partial A_k}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g} + A_k \frac{\partial^2}{\partial q_k^2} \operatorname{Log} \sqrt{g},$$

$$Q_k = \frac{\partial P_k}{\partial q_k} + P_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g},$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_k^2} + \frac{\partial P_k}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g} + P_k \frac{\partial^2}{\partial q_k^2} \operatorname{Log} \sqrt{g};$$

par suite,

$$\begin{aligned}
&P_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}} \right) - A_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} \\
&\quad = P_k \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_k^2} + P_k \frac{\partial A_k}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g} \\
&\qquad + P_k A_k \frac{\partial^2}{\partial q_k^2} \operatorname{Log} \sqrt{g} - A_k \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_k^2} - A_k \frac{\partial P_k}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g} - A_k P_k \frac{\partial^2}{\partial q_k^2} \operatorname{Log} \sqrt{g};
\end{aligned}$$

or

$$P_k \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_k^2} - A_k \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_k^2} = P_k \frac{\partial A_k}{\partial q_k} - A_k \frac{\partial P_k}{\partial q_k} = 0.$$

Par suite l'équation (E_1) est bien vérifiée.

Montrons que $Q_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_i} + P_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log}\sqrt{g}$ vérifie bien l'équation (E_2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_i} + P_i \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right)\\ &= \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_i \partial q_k} + \frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g} + P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial P_k}{\partial q_k} + P_k \frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right)\\ &= \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i \partial q_k} + \frac{\partial P_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g} + P_k \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g},\end{aligned}$$

$$P_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) = P_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i \partial q_k} + P_i \frac{\partial A_k}{\partial q}\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g} + P_i A_k \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g},$$

$$P_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(A_i \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\right) = P_k \frac{\partial^2 A_i}{\partial q_i \partial q_k} + P_k \frac{\partial A_i}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g} + P_k A_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g};$$

par suite,

$$\begin{aligned}&P_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) + P_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(A_i \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\right) - A_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - A_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\\ &= P_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i \partial q_k} + P_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g} + P_i A_k \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g} + P_k \frac{\partial^2 A_i}{\partial q_i \partial q_k}\\ &\quad + P_k \frac{\partial A_i}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g} + P_k A_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g} - A_k \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_i \partial q_k}\\ &\quad - A_k \frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g} - A_k P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g} - A_i \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i \partial q_k}\\ &\quad - A_i \frac{\partial P_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g} - A_i P_k \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}.\end{aligned}$$

Or nous avons

$$P_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0,$$

$$P_k \frac{\partial A_i}{\partial q_k} - A_k \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = 0.$$

Il reste alors à montrer que la quantité

$$P_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i \partial q_k} + P_k \frac{\partial^2 A_i}{\partial q_i \partial q_k} - A_k \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_i \partial q_k} - A_i \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i \partial q_k} = 0.$$

Or nous avons

$$P_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0,$$

d'où, en dérivant par rapport à q_k,

$$(R_1) \qquad P_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i \partial q_k} + \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i \partial q_k} = 0,$$

de même

$$P_k \frac{\partial A_i}{\partial q_k} - A_k \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = 0,$$

en dérivant par rapport à q_i

$$(R_2) \qquad P_k \frac{\partial^2 A_i}{\partial q_i \partial q_k} + \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} - A_k \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_i \partial q_k} = 0,$$

en ajoutant (R_1) et (R_2) on constate que (E_2) est vérifiée.

Nous avons donc bien vérifié que

$$Q_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_i} + P_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}$$

est solution des équations (E_1) et (E_2).

Posons donc

$$Q_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_i} + P_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} + \lambda_i,$$

les équations qui doivent lier les λ_i deviennent alors

$$\Sigma_i \lambda_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} = 2 A_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial q_k}, \qquad A_k \frac{\partial \lambda_i}{\partial q_k} + A_i \frac{\partial \lambda_k}{\partial q_i} = 0.$$

Ces équations sont celles que doivent vérifier les λ_i lorsque A est intégrale première de la forme

$$\frac{h}{2\pi i} \Sigma_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Pour l'instant, supposons l'existence des intégrales premières linéaires, et envisageons l'équation qui doit nous permettre le calcul de R_1

$$\Sigma_i P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) + \Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)$$
$$- \Sigma_i A_i \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i^2} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}$$
$$+ \frac{16\pi^2}{h^2} P_k \frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{8\pi^2}{h^2} A_k \frac{\partial R}{\partial q_k} - 2 A_k \frac{\partial R_1}{\partial q_k} = 0.$$

Nous avons vu dans le calcul de Φ_k (1) que la quantité

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) - A_i \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i^2} - A_i \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}$$

est nulle pour Q_i solution des équations des intégrales premières linéaires.

D'autre part, la Mécanique classique nous donne

$$2 P_k \frac{\partial u}{\partial q_k} - A_k \frac{\partial}{\partial q_k} = 0.$$

Nous avons donc à déterminer $\frac{\partial R_1}{\partial q_k}$ à l'aide de

$$\Sigma_i P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) + \Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)$$
$$- \Sigma_i A_i \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i^2} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}.$$

Nous donnons ici P_i supposé connu. Q_i est connu en fonction des P_i.

Il y a lieu d'étudier maintenant l'existence de R_1.

Calculons donc l'expression

$$\Sigma_i P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) + \Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)$$
$$- \Sigma_i A_i \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i^2} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}.$$

---

(1) Intégrale première du premier ordre indépendante du temps.

Tout d'abord calculons

$$\Sigma_i\left[\mathrm{P}_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(\mathrm{A}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)-\mathrm{A}_i\frac{\partial^2 \mathrm{Q}_k}{\partial q_i^2}\right],$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(\mathrm{A}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) &= \mathrm{P}_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(\frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_k}+\mathrm{A}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right)\\ &= \mathrm{P}_i\frac{\partial^3 \mathrm{A}_k}{\partial q_i^2\,\partial q_k}+\mathrm{P}_i\frac{\partial^2 \mathrm{A}_k}{\partial q_i^2}\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\ &\quad+2\mathrm{P}_i\frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i}\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}+\mathrm{P}_i\mathrm{A}_k\frac{\partial^3}{\partial q_i^2\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_i\frac{\partial^2 \mathrm{Q}_k}{\partial q_i^2} &= \mathrm{A}_i\frac{\partial^3 \mathrm{P}_k}{\partial q_i^2\,\partial q_k}+\mathrm{A}_i\frac{\partial^2 \mathrm{P}_k}{\partial q_i^2}\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\ &\quad+2\mathrm{A}_i\frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial q_i}\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}+\mathrm{A}_i\mathrm{P}_k\frac{\partial^3}{\partial q_i^2\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g},\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}&\Sigma_i\mathrm{P}_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(\mathrm{A}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)-\mathrm{A}_i\frac{\partial^2 \mathrm{Q}_k}{\partial q_i^2}\\ &\quad=\Sigma_i\mathrm{P}_i\frac{\partial^3 \mathrm{A}_k}{\partial q_i^2\,\partial q_k}+\mathrm{P}_i\mathrm{A}_k\frac{\partial^3}{\partial q_k\,\partial q_i^2}\operatorname{Log}\sqrt{g}-\mathrm{A}_i\frac{\partial^3 \mathrm{P}_k}{\partial q_i^2\,\partial q_k}-\mathrm{A}_i\mathrm{P}_k\frac{\partial^3}{\partial q_i^2\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g},\end{aligned}$$

qui donne

$$\mathrm{P}_i\frac{\partial^3 \mathrm{A}_k}{\partial q_i^2\,\partial q_k}-\mathrm{A}_i\frac{\partial^3 \mathrm{P}_k}{\partial q_i^2\,\partial q_k}+\frac{\partial^3}{\partial q_i^2\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\,(\mathrm{P}_i\mathrm{A}_k-\mathrm{A}_i\mathrm{P}_k),$$

de même calculons

$$\Sigma_i\mathrm{Q}_i\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\mathrm{A}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)-\mathrm{A}_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i}.$$

On a

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial q_i}+\mathrm{P}_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right)\left(\frac{\partial^2 \mathrm{A}_k}{\partial q_i\,\partial q_k}+\mathrm{A}_k\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}+\frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right)\\ &\qquad-\left(\mathrm{A}_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}+\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial^2 \mathrm{P}_k}{\partial q_i\,\partial q_k}+\frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}+\mathrm{P}_k\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right)\\ &\quad=\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial q_i}\frac{\partial^2 \mathrm{A}_k}{\partial q_i\,\partial q_k}+\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial q_i}\mathrm{A}_k\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}+\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial q_i}\frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\ &\qquad+\mathrm{P}_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\frac{\partial^2 \mathrm{A}_k}{\partial q_i\,\partial q_k}+\mathrm{P}_i\mathrm{A}_k\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\ &\qquad+\mathrm{P}_i\frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}-\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial q_i}\frac{\partial^2 \mathrm{P}_k}{\partial q_i\,\partial q_k}-\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial q_i}\frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\ &\qquad-\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial q_i}\mathrm{P}_k\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}-\mathrm{A}_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\frac{\partial^2 \mathrm{P}_k}{\partial q_i\,\partial q_k}\\ &\qquad-\mathrm{A}_i\frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}-\mathrm{A}_i\mathrm{P}_k\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}.\end{aligned}$$

cette expression simplifiée en vertu de ce que

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_i}\frac{\partial A_k}{\partial q_i}-\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\partial P_k}{\partial q_i}=0,$$

$$P_i\frac{\partial A_k}{\partial q_i}-A_i\frac{\partial P_k}{\partial q_i}=0$$

devient

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_i}{\partial q_i}\frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i\,\partial q_k}-\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i\,\partial q_k}+\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_i}A_k-P_k\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\right)\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\+\left(P_i\frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i\,\partial q_k}-A_i\frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i\,\partial q_k}\right)\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\+(P_iA_k-A_iP_k)\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\,\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g},\end{aligned}$$

l'expression définitive est alors

$$\begin{aligned}P_i\frac{\partial^3 A_k}{\partial q_i^2\,\partial q_k}+\frac{\partial P_i}{\partial q_i}\frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i\,\partial q_k}-\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i\,\partial q_k}-A_i\frac{\partial^3 P_k}{\partial q_i^2\,\partial q_k}\\+(P_iA_k-A_iP_k)\left(\frac{\partial^3}{\partial q_i^2\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}+\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\,\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right)\\+\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_i}A_k-P_k\frac{\partial A_i}{\partial q_k}\right)\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\+\left(P_i\frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i\,\partial q_k}-A_i\frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i\,\partial q_k}\right)\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}.\end{aligned}$$

Nous avons ainsi la valeur de $2A_k\dfrac{\partial R_1}{\partial q_k}=\mu_k$, il faut évidemment sommer par rapport à l'indice i.

Nous avons alors la fonction R_1 par ses différentes dérivées partielles.

Celles-ci doivent satisfaire à la condition

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_k\,\partial q_r}=\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_r\,\partial q_k}.$$

Nous allons écrire ces conditions; toutefois nous allons pour poser le problème, calculer la grandeur μ_k à l'aide des A_k et de certaines fonctions que nous allons introduire.

Posons

$$\begin{aligned}\lambda_{ik}&=P_iA_k-A_iP_k,\\ \lambda_{ki}&=P_kA_i-P_iA_k,\end{aligned}\qquad \lambda_{ii}=0,$$

$\lambda_{ik}+\lambda_{ki}=0$ nous définissons donc C_n^2 fonctions indépendantes.

Nous calculerons toujours avec λ_{ik}, i, k étant les indices se succédant dans l'ordre ik, dans l'expression de P_k l'indice de la dérivation, i indice de sommation.

On peut calculer les dérivées de λ_{ik} sous la forme de fonction linéaire homogène d'autres λ_{ik}

Calculons

$$\frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial q_r}=\frac{\partial}{\partial q_r}(P_iA_k-A_iP_k)=\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_r}A_k-P_k\frac{\partial A_i}{\partial q_r}\right)+\left(P_i\frac{\partial A_k}{\partial q_r}-A_i\frac{\partial P_k}{\partial q_r}\right)$$

en vertu des relations

$$A_r\frac{\partial P_i}{\partial q_r}-P_r\frac{\partial A_i}{\partial q_r}=0,\qquad \frac{\partial P_i}{\partial q_r}=\frac{P_r}{A_r}\frac{\partial A_i}{\partial q_r},$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_r}A_k-P_k\frac{\partial A_i}{\partial q_r}=\frac{1}{A_r}\frac{\partial A_i}{\partial q_r}(P_rA_k-P_kA_r)=\frac{1}{A_r}\frac{\partial A_i}{\partial q_r}\lambda_{rk}$$

de même

$$P_i\frac{\partial A_r}{\partial q_r}-A_i\frac{\partial P_k}{\partial q_r}=P_i\frac{\partial A_k}{\partial q_r}-A_i\frac{P_r}{A_k}\frac{\partial A_k}{\partial q_r}=\frac{1}{A_r}\frac{\partial A_k}{\partial q_r}(P_iA_r-A_iP_r)=\frac{\partial A_k}{\partial q_r}\frac{\lambda_{ir}}{A_r},$$

d'où

$$\frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial q_r}=\frac{\partial A_i}{\partial q_r}\frac{\lambda_{rk}}{A_r}+\frac{\partial A_k}{\partial q_r}\frac{\lambda_{ir}}{A_r},$$

$$\frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial q_i}=\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\lambda_{ik}}{A_i},\qquad \frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial q_k}=\frac{\partial A_k}{\partial q_k}\frac{\lambda_{ik}}{A_k}.$$

Calculons les diverses grandeurs du développement de $A_k\dfrac{\partial R_1}{\partial q_k}$ en fonction des λ_{ik}

$$\begin{aligned}(P_iA_k-A_iP_k)&\left(\frac{\partial^3}{\partial q_i^2\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}+\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right)\\ &=\left(\frac{\partial^3}{\partial q_i^2\,\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}+\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\,\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right)\lambda_{ik};\end{aligned}$$

pour

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_i}A_k-P_k\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\right)\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}.$$

On a

$$P_i\frac{\partial A_i}{\partial q_i}-A_i\frac{\partial P_i}{\partial q_i}=0,\qquad \frac{\partial P_i}{\partial q_i}=\frac{P_i}{A_i}\frac{\partial A_i}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_i}A_k-P_k\frac{\partial A_i}{\partial q_i}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial A_i}{\partial q_i}(P_iA_k-A_iP_k)=\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\lambda_{ik}}{A_i},$$

d'où

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial q_i} \frac{\lambda_{ik}}{\Lambda_i};$$

pour

$$\left(P_i \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial q_i \partial q_k} - \Lambda_i \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i \partial q_k} \right) \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}.$$

On a

$$P_i \frac{\partial \Lambda_k}{\partial q_i} - \Lambda_i \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0$$

dérivons par rapport à q_k

$$P_i \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial q_i \partial q_k} - \Lambda_i \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i \partial q_k} = \frac{\partial \Lambda_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} - \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial \Lambda_k}{\partial q_i},$$

$$P_k \frac{\partial \Lambda_i}{\partial q_k} - \Lambda_k \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = 0, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \frac{P_k}{\Lambda_k} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial q_k};$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} - \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial \Lambda_k}{\partial q_i} &= \frac{1}{\Lambda_k} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial q_k} \left(\Lambda_k \frac{\partial P_k}{\partial q_i} - P_k \frac{\partial \Lambda_k}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{1}{\Lambda_k} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial q_k} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_i} P_i \frac{\partial \Lambda_k}{\partial q_i} - P_k \frac{\partial \Lambda_k}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{1}{\Lambda_i \Lambda_k} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial q_k} \frac{\partial \Lambda_k}{\partial q_i} (\Lambda_k P_i - \Lambda_i P_k), \end{aligned}$$

ce terme donne

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} \frac{1}{\Lambda_i \Lambda_k} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial q_k} \frac{\partial \Lambda_k}{\partial q_i} \lambda_{ik} = \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \Lambda_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \Lambda_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} \lambda_{ik};$$

pour

$$\begin{aligned} & P_i \frac{\partial^3 \Lambda_k}{\partial q_i^2 \partial q_k} + \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial q_i \partial q_k} - \frac{\partial \Lambda_i}{\partial q_i} \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i \partial q_k} - \Lambda_i \frac{\partial^3 P_k}{\partial q_i^2 \partial q_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(P_i \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial q_i \partial q_k} - \Lambda_i \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i \partial q_k} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} \operatorname{Log} \Lambda_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \Lambda_i + \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \Lambda_k \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \Lambda_i \right) \lambda_{ik} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \Lambda_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \Lambda_i \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_i} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} \operatorname{Log} \Lambda_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \Lambda_i + \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \Lambda_k \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \Lambda_i \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \Lambda_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \Lambda_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \Lambda_i \right) \lambda_{ik}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire l'expression $\frac{\partial R_1}{\partial q_k}$ sous la forme $\Sigma_i a_{ik}\lambda_{ik}$, a_{ik} étant égal à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\Lambda_k}\Big(&\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\operatorname{Log}\Lambda_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\Lambda_i+\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\Lambda_k\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_k}\operatorname{Log}\Lambda_i\\&+\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\Lambda_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\Lambda_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\Lambda_i+\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\Lambda_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\Lambda_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\&+\frac{\partial^2}{\partial q^2\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\Lambda_i+\frac{\partial^3}{\partial q_i^2\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\&\qquad+\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\Big).\end{aligned}$$

On pourra écrire ainsi que nous l'avons dit

$$\frac{\partial^2 R}{\partial q_i\partial q_k}=\frac{\partial^2 R}{\partial q_k\partial q_i}$$

d'où

$$\Sigma_r\frac{\partial a_{rk}}{\partial q_i}\lambda_{rk}+a_{rk}\frac{\partial\lambda_{rk}}{\partial q_i}=\Sigma_r\frac{\partial a_{ri}}{\partial q_k}\lambda_{ri}+a_{ri}\frac{\partial\lambda_{ri}}{\partial q_k}.$$

Utilisons les formules précédemment établies

$$\begin{aligned}\frac{\partial\lambda_{rk}}{\partial q_i}&=\frac{\partial\Lambda_r}{\partial q_i}\frac{\lambda_{ik}}{\Lambda_i}+\frac{\partial\Lambda_k}{\partial q_i}\frac{\lambda_{ri}}{\Lambda_i},\\\frac{\partial\lambda_{ri}}{\partial q_k}&=\frac{\partial\Lambda_r}{\partial q_k}\frac{\lambda_{ki}}{\Lambda_k}+\frac{\partial\Lambda_i}{\partial q_k}\frac{\lambda_{rk}}{\Lambda_k},\end{aligned}$$

l'égalité s'écrit alors

$$\Sigma_r\frac{\partial a_{rk}}{\partial q_i}\lambda_{rk}+a_{rk}\left(\frac{\partial\Lambda_r}{\partial q_i}\frac{\lambda_{ik}}{\Lambda_i}+\frac{\partial\Lambda_k}{\partial q_i}\frac{\lambda_{ri}}{\Lambda_i}\right)=\Sigma_r\frac{\partial a_{ri}}{\partial q_k}\lambda_{ri}+a_{ri}\left(\frac{\partial\Lambda_r}{\partial q_k}\frac{\lambda_{ki}}{\Lambda_k}+\frac{\partial\Lambda_i}{\partial q_k}\frac{\lambda_{rk}}{\Lambda_k}\right)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\Sigma_r\left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial q_i}-\frac{\partial\Lambda_i}{\partial q_k}\frac{a_{ri}}{\Lambda_k}\right)\lambda_{rk}&+\Sigma_r\left(\frac{a_{rk}}{\Lambda_i}\frac{\partial\Lambda_k}{\partial q_i}-\frac{\partial a_{ri}}{\partial q_k}\right)\lambda_{ri}\\&+\Sigma_r\left(\frac{a_{rk}}{\Lambda_i}\frac{\partial\Lambda_r}{\partial q_i}+\frac{a_{ri}}{\Lambda_k}\frac{\partial\Lambda_r}{\partial q_k}\right)\lambda_{ik}=0.\end{aligned}$$

On voit ainsi donc la nécessité d'écrire C_n^2 relations linéaires et homogènes entre les λ_{ik}; nous pouvons en ajouter C_n^2 autres liant les λ_{ik} et λ_{ki}, $\lambda_{ik}+\lambda_{ki}=0$.

Nous avons alors $2C_n^2=n(n-1)$ équations linéaires et homogènes qui lieront les λ_{ik} au nombre $2C_n^2=n(n-1)$.

Deux cas se présentent : le déterminant H_1 du système des λ_{ik} est différent de zéro et dans ce cas tous les $\lambda_{ik} = P_i A_k - A_i P_k = 0$ c'est-à-dire

$$\frac{P_i}{A_i} = \frac{P_k}{A_k}$$

ou bien il est nul; dans le premier cas $\frac{P_i}{A_i} = K$ est une constante.

On a en effet

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{P_i}{A_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{P_k}{A_k}\right) = 0.$$

Les expresssions $\frac{\partial P_i}{\partial q_i} + P_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log}\sqrt{g}$ sont identiques à un facteur près à $\frac{\partial A_i}{\partial q_t} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log}\sqrt{g}$, R_1 est identiquement nul.

Pour R on à, en utilisant les relations de la mécanique classique,

$$2 P_i \frac{\partial U}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_i} = k \frac{\partial R}{\partial q_i},$$

d'où $R = 2 K u$ à une constante près; par suite l'opérateur envisagé se réduit identiquement à l'opérateur intégrale première de l'énergie.

Nous pouvons remarquer que cette condition n'est pas suffisante; il y a lieu de remarquer que les λ_{ik} sont définies à un facteur près

Considérons par exemple la relation $\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_i \partial q_r} = \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_r \partial q_i}$.

Cette relation s'écrit

$$\Sigma_r \left(\frac{\partial a_{r_2}}{\partial q_1} - \frac{\partial A_1}{\partial q_r} \frac{a_{r_1}}{A_r} \right) \lambda_{r_2} + \Sigma_r \left(\frac{a_{r_2}}{A_1} \frac{\partial A_r}{\partial q_1} - \frac{\partial a_{r_1}}{\partial q_2} \right) \lambda_{r_1}$$
$$+ \Sigma_r \left(\frac{a_{r_2}}{A_1} \frac{\partial A_r}{\partial q_1} + \frac{a_{r_1}}{A_2} \frac{\partial A_r}{\partial q_r} \right) \lambda_{12} = 0.$$

Si nous envisageons les coefficients des λ_{rj} en désignant par Π_{rj} le mineur de λ_{rj} on a pour une même ligne

$$\frac{\lambda_{r_1 j}}{\Pi_{r_1 j}} = \frac{\lambda_{r_2 j}}{\Pi_{r_2 j}}.$$

On voit ainsi donc que pour *obtenir une intégrale quantique à partir d'une intégrale classique autre que celle de l'énergie, le déterminant précédent* H_1 *doit être nul.*

Nous devons envisager la dernière équation, celle-ci donne lieu aux calculs suivants.

Le terme multiplicateur est en effet nul si

$$\frac{4\pi^2}{h^2}\left[\Sigma_i 2 P_i \frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} + 2 Q_i \frac{\partial U}{\partial q_i} - \Sigma_r A_r \frac{\partial^2 R}{\partial q_r^2} + A_r \frac{\partial}{\partial q_r} \operatorname{Log} A_r \sqrt{g} \frac{\partial R}{\partial q_r}\right]$$
$$- \Sigma_r A_r \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_r^2} + A_r \frac{\partial}{\partial q_r} \operatorname{Log} A_r \sqrt{g} \frac{\partial R_1}{\partial q_r} = 0$$

Utilisons les résultats de la mécanique classique pour l'expression

$$\Sigma_i 2\left(P_i \frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} + Q_i \frac{\partial U}{\partial q_i}\right) - \Sigma_r A_r \frac{\partial^2 R}{\partial q_r^2} + A_r \frac{\partial}{\partial q_r} \operatorname{Log} A_r \sqrt{g} \frac{\partial R}{\partial q_r}.$$

On a

$$2 P_i \frac{\partial U}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0.$$

Dérivons par rapport à q_i

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} & 2 P_i \frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} + \frac{2\partial P_i}{\partial q_i} \frac{\partial U}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial^2 R}{\partial q_i^2} - \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \\ & Q_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_i} + P_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}, \\ & A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} A_i \sqrt{g} = \frac{\partial A_i}{\partial q_i} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}. \end{aligned}\right.$$

multiplions (1) par $\frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}$ et ajoutons à (2); on a

$$2 \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \frac{\partial U}{\partial q_i} + 2 P_i \frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} + 2 P_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} \frac{\partial U}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial^2 R}{\partial q_i^2}$$
$$- \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \frac{\partial R}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} \frac{dR}{\partial q_i} = 0,$$

c'est-à-dire

$$2 \Sigma_i P_i \frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} + Q_i \frac{\partial u}{\partial q_i} - \Sigma_i A_i \frac{\partial^2 R}{\partial q_i^2} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0.$$

Il reste donc la condition supplémentaire

$$\Sigma_i A_i \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_i^2} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} A_i \sqrt{g} \frac{\partial R_1}{\partial q_i} = 0,$$

soit

$$\Delta R_1 = 0.$$

Nous avons mis précédemment l'expression $\dfrac{\partial R_1}{\partial q_k}$ sous la forme

$$\frac{\partial R_1}{\partial q_k} = \Sigma_i a_{ik}\lambda_{ik},$$

d'où

$$A_k \frac{\partial R_1}{\partial q_k} = \Sigma_i a_{ik} A_k \lambda_{ik} = \Sigma_i b_{ik}\lambda_{ik},$$

par suite

$$\Delta R_1 = \Sigma_k A_k \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_k^2} + A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} A_k \sqrt{g} \frac{\partial R_1}{\partial q_k}$$
$$= \Sigma_k \Sigma_i \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_k} \lambda_{ik} + b_{ik} \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_k} + b_{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g}\, \lambda_{ik},$$

d'où

$$\Sigma_k \Sigma_i \left(b_{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} A_k \sqrt{g} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_k} \right) \lambda_{ik} = 0,$$
$$\Sigma_{ik} \left(b_{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} A_k \sqrt{g} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_k} \right) \lambda_{ik} = 0\,;$$

la condition supplémentaire s'obtiendra donc en écrivant que cette nouvelle équation est compatible avec les précédentes; *nous aurons un deuxième déterminant* H_2 *qui devra être nul.*

D'où :

THÉORÈME 1. — *Pour qu'une intégrale première du deuxième ordre de la mécanique classique* $\Sigma P_i p_i^2 + R$ *dont l'Hamiltonien est* $\Sigma A_i p_i^2 + U$ *donne lieu à une intégrale quantique dans le problème correspondant, il faut et il suffit que les deux déterminants* H_1, H_2 *soient nuls et que les* λ_{ik} *soient proportionnels aux mineurs correspondants.*

THÉORÈME 2. — *Quand une intégrale première classique* $\Sigma_i P_i \left(\dfrac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 + R$ *donne lieu à l'intégrale première quantique*

$$\frac{-h^2}{4\pi^2} \Sigma_i \left(P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + Q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + R_1 \right) + R,$$

on a

$$Q_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_i} + P_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}$$

le terme R_1 *s'obtient uniquement par des quadratures.*

CHAPITRE V.

ÉTUDE DIRECTE D'INTÉGRALES DU DEUXIÈME ORDRE.

Dans ce Chapitre, nous étudions la correspondance mécanique classique-mécanique ondulatoire pour les systèmes à deux et trois paramètres.

Cette étude est effectuée pour les intégrales provenant de la mécanique classique de la forme $\Sigma P_i p_i^2 + R$.

Nous sommes contraints de préciser la forme des systèmes classiques admettant de telles intégrales. Nous divisons l'étude de chacun des cas en deux : *mécanique analytique, mécanique ondulatoire.*

1. Cas a deux paramètres. — 1° *Mécanique analytique*

$$H = \frac{1}{2}(A_1 p_1^2 + A_2 p_2^2) + U.$$

L'intégrale étant

$$P_1 p_1^2 + P_2 p_2^2 + R,$$

les relations liant P_1, P_2, A_1, A_2 sont ici

$$\text{(I)} \qquad P_1 \frac{\partial A_1}{\partial q_1} - A_1 \frac{\partial P_1}{\partial q_1} = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad P_2 \frac{\partial A_2}{\partial q_2} - A_2 \frac{\partial P_2}{\partial q_2} = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad P_1 \frac{\partial A_2}{\partial q_1} - A_1 \frac{\partial P_2}{\partial q_1} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad P_2 \frac{\partial A_1}{\partial q_2} - A_2 \frac{\partial P_1}{\partial q_2} = 0,$$

les deux équations (I) et (II) donnent

$$P_1 = k_1(q_2)\, A_1(q_1, q_2),$$
$$P_2 = k_2(q_1)\, A_2(q_1, q_2),$$

la relation (III)

$$P_1 \frac{\partial A_2}{\partial q_1} - A_1 \frac{\partial P_2}{\partial q_1} = 0,$$

donne ici

$$k_1(q_2)\,A_1\frac{\partial A_1}{\partial q_1} - A_1\frac{\partial k_2}{\partial q_1}(q_1)\,A_2(q_1,q_2) - A_1 k_2\frac{\partial A_2}{\partial q_1}(q_1,q_2) = 0,$$

$$[k_1(q_2) - k_2(q_1)]\frac{\partial A_2}{\partial q_1} - A_2(q_1,q_2)\frac{\partial k_2}{\partial q_1}(q_1,q_2) = 0,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial q_1} : A_2 = \frac{\partial k_2}{\partial q_1} : [k_1(q_2) - k_2(q_1)],$$

$$A_2 = \frac{B_2(q_2)}{k_1 - k_2}, \qquad A_1 = \frac{B_1(q_1)}{k_1 - k_2},$$

$$P_1 = \frac{k_1 B_1}{k_1 - k_2}, \qquad P_2 = \frac{k_2 B_2}{k_1 - k_2},$$

les équations de la mécanique classique relatives au terme potentiel donnent

$$2P_1\frac{\partial U}{\partial q_1} - A_1\frac{\partial R}{\partial q_1} = 0, \qquad 2P_2\frac{\partial U}{\partial q_2} - A_2\frac{\partial R}{\partial q_2} = 0;$$

$$2k_1(q_2)\frac{\partial U}{\partial q_1} - \frac{\partial R}{\partial q_1} = 0, \qquad 2k_2(q_2)\frac{\partial U}{\partial q_2} - \frac{\partial R}{\partial q_2} = 0,$$

le terme U n'est pas choisi arbitrairement $\dfrac{\partial^2 R}{\partial q_1\,\partial q_2} = \dfrac{\partial^2 R}{\partial q_2\,\partial q_1}$,

$$\frac{\partial k_1}{\partial q_2}\frac{\partial U}{\partial q_1} - \frac{\partial k_2}{\partial q_1}\frac{\partial U}{\partial q_2} + (k_1 - k_2)\frac{\partial^2 U}{\partial q_1\,\partial q_2} = 0.$$

U est solution de cette équation aux dérivées partielles. Celle-ci peut s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1\,\partial q_2}[U(k_1 - k_2)] = 0,$$

par suite $(k_1 - k_2)U = F_1(q_1) + F_2(q_2)$,

$$U = \frac{F_1(q_1) + F_2(q_2)}{k_1 - k_2}.$$

L'hamiltonien est de la forme

$$\frac{1}{2}\left[\frac{B_1 p_1^2}{k_1 - k_2} + \frac{B_2 p_2^2}{k_1 - k_2}\right] + \frac{F_1(q_1) + F_2(q_2)}{k_1 - k_2} = H = E.$$

d'où

$$B_1 p_1^2 + B_2 p_2^2 + 2F_1(q_1) + 2F_2(q_2) = 2E(k_1 - k_2),$$

dans ce cas l'hamiltonien se sépare.

On a

$$\text{(V)} \qquad B_1 p_1^2 + 2F_1(q_1) = -2E k_2 + \alpha,$$
$$\text{(VI)} \qquad B_2 p_2^2 + 2F_2(q_2) = +2E k_1 - \alpha,$$

α est une constante arbitraire, nous pouvons intégrer ces équations par quadratures.

Intégrale première. — Des équations (V) et (VI) nous pouvons déduire l'intégrale première : multiplions (V) par k_1, (VI) par k_2 d'où

$$\frac{1}{2} k_1 B_1 p_1^2 + \frac{1}{2} k_2 B_2 p_2^2 + (F_1 k_1 + F_2 k_2) = \frac{\alpha}{2}(k_1 - k_2),$$

en divisant par $k_1 - k_2$ on trouve

$$\frac{1}{2} \frac{k_1 B_1}{k_1 - k_2} p_1^2 + \frac{1}{2} \frac{k_2 B_2}{k_1 - k_2} p_2^2 + \frac{F_1 k_1 + F_2 k_2}{k_1 - k_2} = \text{const.}$$

intégrale première.

Nous pouvons également déduire R des équations

$$\text{(VII)} \qquad k_1(q_2) \frac{\partial U}{\partial q_1} - \frac{\partial R}{\partial q_1} = 0,$$
$$\text{(VIII)} \qquad k_2(q_1) \frac{\partial U}{\partial q_2} - \frac{\partial R}{\partial q_2} = 0,$$

de (VII), on tire, en intégrant par rapport à q_1,

$$2k_1 U - R + G_1(q_2) = 0,$$

de même de (VIII) on tire, avec (VII),

$$2k_2 U - R + G_2(q_1) = 0,$$
$$2(k_1 - k_2) U + G_1(q_2) - G_2(q_1) = 0,$$

d'où

$$G_1(q_2) = -2F_2, \qquad G_2(q_1) = +2F_1,$$

par suite de (VII) on tire

$$2\left[k_1 \frac{F_1 + F_2}{k_1 - k_2} - F_2\right] - R = 0, \qquad R = 2\frac{k_1 F_1 + k_2 F_2}{k_1 - k_2},$$

d'où l'intégrale cherchée

$$\frac{k_1 B_1}{k_1 - k_2} p_1^2 + \frac{k_2 B_2}{k_1 - k_2} p_2^2 + 2\,\frac{k_1 F_1 + k_2 F_2}{k_1 - k_2} = \alpha.$$

L'intégrale première est liée ici à la séparation des variables; nous sommes dans le cas où cette séparation a lieu puisque $n = 2$.

2° *Mécanique ondulatoire.* — Il y a séparation des variables en mécanique ondulatoire, il y a donc également intégrale première; la démonstration est la même qu'en mécanique classique.

L'intégrale ondulatoire est ici, d'après les résultats généraux obtenus précédemment,

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\left[\frac{k_1 B_1}{k_1 - k_2}\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{k_2 B_2}{k_1 - k_2}\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + \frac{k_1 B_1}{k_1 - k_2}\frac{\partial}{\partial q_1}\operatorname{Log}\sqrt{B_1}\,\frac{\partial}{\partial q_1} \right.$$
$$\left. + \frac{k_2 B_2}{k_1 - k_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\operatorname{Log}\sqrt{B_2}\,\frac{\partial}{\partial q_2}\right] + \frac{k_1 F_1 + k_2 F_2}{k_1 - k_2}.$$

Nous signalons donc ici ce cas d'intégrale première.

Nous étudierons plus loin les questions de la séparation pour les cas classiques de Liouville et Staekel.

Une remarque très importante doit être faite dans le cas des systèmes à deux paramètres.

Envisageons un système mécanique indépendant du temps qui admette outre l'Intégrale de l'Énergie une intégrale quadratique.

Les deux formes quadratiques $2\mathrm{T}$ et F_1 de l'Hamiltonien et de la fonction F sont alors de la forme

$$2\mathrm{T} = \mathrm{A}_1 p_1^2 + 2\,\mathrm{B} p_1 p_2 + \mathrm{A}_2 p_2^2,$$
$$\mathrm{F}_1 = \mathrm{P}_1 p_1^2 + 2\,\mathrm{Q} p_1 p_2 + \mathrm{P}_2 p_2^2.$$

Dans le cas à deux paramètres il existe un changement de variables $x_1(q_1, q_2)$, $x_2(q_1, q_2)$ telles que simultanément les nouvelles formes quadratiques ne possèdent pas de termes rectangles. Dans ce cas le système S peut être intégré par la Méthode de séparation des variables de Liouville. Il y a alors séparation des variables en Mécanique ondulatoire.

Il y a là une propriété inhérente du nombre de dimensions 2 du système. Il y a Intégrale première quantique.

D'où THÉORÈME : *Tout système mécanique à deux paramètres admettant une intégrale quadratique, admet également une intégrale première quantique du deuxième ordre. L'équation d'onde est intégrable par séparation des variables.*

2. CAS A TROIS PARAMÈTRES (¹). — *Mécanique analytique.* — Forme des systèmes à trois paramètres indépendant du temps admettant une intégrale première quadratique.

Cherchons les systèmes à trois paramètres pour lesquels

H est $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} A_i p_i^2 + U$,

F intégrale $F = \sum_{i=1}^{3} P_i p_i^2 + R$.

On a les équations

$$P_i \frac{\partial A_i}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_i}{\partial q_i} = 0, \tag{1}$$

$$P_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0, \tag{2}$$

$$2 P_i \frac{\partial U}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0.$$

Envisageons les équations (1) $i = 1$ par exemple. On a

$$\frac{\partial P_1}{\partial q_1} : P_1 = \frac{\partial A_1}{\partial q_1} : A_1,$$

d'où

$$P_1 = k_1(q_2, q_3) A_1, \qquad P_2 = k_2(q_1, q_3) A_2, \qquad P_3 = k_3(q_1, q_2) A_3.$$

de (2) on déduit

$$P_1 \frac{\partial A_2}{\partial q_1} - A_1 \frac{\partial P_2}{\partial q_1} = 0,$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial q_1} = \frac{\partial k_2}{\partial q_1} A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} k_2;$$

(¹) Cette étude a été effectuée après notre soutenance.

d'où

$$k_1 \frac{\partial A_2}{\partial q_1} - A_2 \frac{\partial k_2}{\partial q_1} - k_2 \frac{\partial A_2}{\partial q_1} = 0,$$

$$(k_1 - k_2) \frac{\partial A_2}{\partial q_1} = A_2 \frac{\partial k_2}{\partial q_1};$$

d'où

$$\frac{\partial k_2}{\partial q_1} : (k_1 - k_2) = \frac{\partial A_2}{\partial q_1} : A_2, \qquad A_2 = \frac{\varphi_{21}(q_2, q_3)}{k_1 - k_2}.$$

De même on aurait

$$A_2 = \frac{\varphi_{23}(q_2, q_1)}{k_3 - k_2},$$

$$\text{(I)} \qquad A_1 = \frac{\varphi_{13}}{k_3 - k_1} = \frac{\varphi_{12}}{k_2 - k_1},$$

$$\text{(II)} \qquad A_2 = \frac{\varphi_{21}}{k_1 - k_2} = \frac{\varphi_{23}}{k_3 - k_2},$$

$$\text{(III)} \qquad A_3 = \frac{\varphi_{31}}{k_1 - k_3} = \frac{\varphi_{32}}{k_2 - k_3}.$$

Soient trois fonctions arbitraires $\alpha_1(q_1)$, $\alpha_2(q_2)$, $\alpha_3(q_3)$ des trois paramètres q_1, q_2, q_3, en prenant

$$k_1 = \frac{1}{\alpha_2 + \alpha_3}, \qquad k_2 = \frac{1}{\alpha_3 + \alpha_1}, \qquad k_3 = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

On a

$$k_3 - k_1 = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2 + \alpha_3} = \frac{(\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3)} = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3)}.$$

De même

$$k_2 - k_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)}.$$

On a donc pour (I)

$$\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3)}{\alpha_3 - \alpha_1} \varphi_{13}(q_1, q_2) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)}{\alpha_2 - \alpha_3} \varphi_{12}(q_1, q_3)$$

et

$$(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\, \varphi_{13}(q_1, q_2) = (\alpha_3^2 - \alpha_1^2)\, \varphi_{12}(q_1, q_3),$$

qui ne peut être que fonction de q_1.

Par suite on a

$$\varphi_{13}(q_1, q_2) = \frac{F_1(q_1)}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}, \qquad \varphi_{12}(q_1, q_3) = \frac{F_1(q_1)}{\alpha_3^2 - \alpha_1^2},$$

et

$$A_1 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3)}{(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(\alpha_3 - \alpha_2)} F_1(q_1) = \frac{(\alpha_2 + \alpha_3) F_1(q_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)},$$

$$P_1 = \frac{F_1(q_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)},$$

$$A_2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_3) F_2(q_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)}, \qquad P_2 = \frac{F_2(q_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)},$$

$$A_3 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) F_3(q_3)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \qquad P_3 = \frac{F_3(q_3)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3)}.$$

Pour les termes potentiels, les équations

$$2 P_i \frac{\partial U}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0$$

donnent par exemple pour $i = 1$ ou $i = 2$

$$2 \frac{\partial U}{\partial q_1} - (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{\partial R}{\partial q_1} = 0, \tag{I'}$$

$$2 \frac{\partial U}{\partial q_2} - (\alpha_1 + \alpha_3) \frac{\partial R}{\partial q_2} = 0. \tag{II'}$$

En dérivant (I') par rapport à q_2, (II') par rapport à q_1. On a

$$2 \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} - (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{\partial^2 R}{\partial q_2 \partial q_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2} \frac{\partial R}{\partial q_1} = 0,$$

$$2 \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} - (\alpha_1 + \alpha_3) \frac{\partial^2 R}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1} \frac{\partial R}{\partial q_2} = 0.$$

Par suite R satisfait à

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1} \frac{\partial R}{\partial q_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2} \frac{\partial R}{\partial q_1} + (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\partial^2 R}{\partial q_1 \partial q_2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} [(\alpha_1 - \alpha_2) R] = 0,$$

d'où

$$R = \frac{G_1(q_1, q_3) + G_2(q_2, q_3)}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

On a par suite R

$$R = \frac{G_1(q_1, q_3) + G_2(q_2, q_3)}{\alpha_1 - \alpha_2}$$
$$= \frac{G_3(q_2, q_3) + G_4(q_3, q_1)}{\alpha_2 - \alpha_3} = \frac{G_5(q_1, q_2) + G_6(q_3, q_2)}{\alpha_3 - \alpha_1}.$$

On satisfait à ces égalités en prenant

$$G_1(q_1, q_3) = \frac{G_1(q_1) - G_3(q_3)}{\alpha_3 - \alpha_1},$$

G_1, G_2, G_3 fonctions quelconques de q_1, q_2, q_3,

$$G_2(q_2, q_3) = \frac{G_3(q_3) - G_2(q_2)}{\alpha_3 - \alpha_2}.$$

On a

$$R = \frac{G_1(q_1)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)} + \frac{G_2(q_2)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)} + \frac{G_3(q_3)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Pour déterminer U, on a, à partir de (I′),

$$2U = (\alpha_2 + \alpha_3) R + \varphi_1(q_2, q_3),$$
$$2U = (\alpha_1 + \alpha_3) R + \varphi_2(q_1, q_3),$$
$$2U = (\alpha_2 + \alpha_1) R + \varphi_3(q_1, q_2),$$
$$\varphi_1(q_2, q_3) - \varphi_2(q_1, q_3) = (\alpha_1 - \alpha_2) R,$$

soit

$$\frac{G_1(q_1)(\alpha_2 - \alpha_3) + G_2(q_2)(\alpha_3 - \alpha_1) + G_3(q_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{G_1(q_1)}{\alpha_3 - \alpha_1} - \frac{G_2(q_2)}{\alpha_3 - \alpha_2} + \frac{G_3(q_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)},$$

et

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_3} + \frac{1}{\alpha_3 - \alpha_2}.$$

Par suite on a

$$\varphi_1(q_2, q_3) - \varphi_2(q_1, q_3) = \frac{G_1(q_1)}{\alpha_3 - \alpha_1} - \frac{G_2(q_2)}{\alpha_3 - \alpha_2} + \frac{G_3(q_3)}{\alpha_1 - \alpha_3} + \frac{G_3(q_3)}{\alpha_3 - \alpha_2}.$$

On peut donc prendre

$$\varphi_1(q_2, q_3) = -\frac{G_2(q_2)}{\alpha_3 - \alpha_2} + \frac{G_3(q_3)}{\alpha_3 - \alpha_2},$$

$$\varphi_2(q_1, q_3) = -\frac{G_1(q_1)}{\alpha_3 - \alpha_1} - \frac{G_3(q_3)}{\alpha_1 - \alpha_3},$$

d'où

$$2U = \frac{(\alpha_2 + \alpha_3)\,G_1(q_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)} + \frac{(\alpha_3 + \alpha_1)\,G_2(q_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\,G_3(q_3)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)},$$

d'où 2 U, et finalement l'hamiltonien H est de la forme

$$\begin{aligned}&\frac{(\alpha_2 + \alpha_3)\,F_1(q_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)}p_1^2 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_3)\,F_2(q_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)}p_2^2 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\,F_3(q_3)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)}p_3^2\\ &+ \frac{(\alpha_2 + \alpha_3)\,G_1(q_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)} + \frac{(\alpha_3 + \alpha_1)\,G_2(q_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\,G_3(q_3)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)},\end{aligned}$$

F étant

$$\Sigma_i \frac{F_1(q_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)}p_1^2 + \frac{G_1(q_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_3)}.$$

Le calcul nous donne ainsi une solution du problème.

Mécanique ondulatoire. — Nous avons vu que l'existence simultanée des opérateurs et des fonctions intégrales premières était liée à l'existence d'une certaine fonction complémentaire R_1 qui jouerait le rôle d'un potentiel quantique. Dans le cas à deux paramètres, R_1 était nulle. Ici nous montrons que R_1 n'existe pas en général.

Remarquons qu'un changement de variable simple ramène l'étude du cas étudié où

$$\Lambda_1 = \frac{(\alpha_2 + \alpha_3)\,F_1(q_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)},$$

au cas où

$$\Lambda_1 = \frac{(\alpha_3 + \alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

Dans le cas présent, nous nous bornerons à utiliser la formule nous donnant la valeur de $\frac{\partial R_1}{\partial q_k}$ en fonction des λ_{ik} de notre thèse. Ce procédé étant le plus commode, nous étudierons directement la compatibilité des diverses valeurs des $\frac{\partial R_1}{\partial q_k}$.

Calculons donc tout d'abord $\frac{\partial R_1}{\partial q_1}$, les autres valeurs $\frac{\partial R_2}{\partial q_2}$, $\frac{\partial R_3}{\partial q_3}$ s'en déduisant par permutation des indices.

Nous avons

$$\frac{\partial R_1}{\partial q_1} = \Sigma_i a_{i_1} \lambda_{i_1},$$

seules ici les valeurs $i = 2$, $i = 3$ interviennent puisque $\lambda_{ii} = 0$.

La valeur de a_{ik} est donnée par la formule

$$\begin{aligned} a_{ik} = \frac{1}{2A_k}\Big[& \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\operatorname{Log} A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log} A_i + \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log} A_k \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}\operatorname{Log} A_i \\ & + \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log} A_k \frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log} A_i \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log} A_i \sqrt{g} \\ & + \frac{\partial_2}{\partial q_i \partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log} A_i\sqrt{g} + \frac{\partial^3}{\partial q_i^2 \partial q_k}\operatorname{Log}\sqrt{g}\Big]. \end{aligned}$$

Nous allons effectuer le calcul pour $i = 2$; on en déduira aisément celui où $i = 3$ en permutant les indices.

Calculons donc α_{21}.

Nous allons successivement en calculer les divers éléments.

Tout d'abord $\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\operatorname{Log} A_1 \frac{\partial}{\partial q_1}\operatorname{Log} A_2$

$$A_1 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\operatorname{Log} A_1 = \operatorname{Log}(\alpha_2 + \alpha_3) - \operatorname{Log}(\alpha_3 - \alpha_1) - \operatorname{Log}(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\operatorname{Log} A_1 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2} : (\alpha_2 + \alpha_3) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2} : (\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\operatorname{Log} A_1 = \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial q_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_2 + \alpha_3} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right) + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\right)^2 \left[\frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} - \frac{1}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2}\right]$$

ou

$$= \frac{\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_1)}\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial q_2^2} + \frac{(\alpha_2 + \alpha_3)^2 - (\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_1)^2}\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\right)^2$$

ou

$$= \frac{\alpha_3 + \alpha_1}{(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial q_2^2} + \frac{(\alpha_3 + \alpha_1)(2\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_1)^2}\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\right)^2,$$

par suite l'élément lui correspondant

$$\left[\frac{(\alpha_3 + \alpha_1)}{(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial q_2^2} + \frac{(\alpha_3 + \alpha_1)(2\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_1)^2}\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial q_1}\operatorname{Log} A_2$$

on a

$$A_2 = \frac{\alpha_1+\alpha_3}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)},$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\operatorname{Log} A_2 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}\left(\frac{1}{\alpha_1+\alpha_3}-\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\right) = -\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}\,\frac{\alpha_2+\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)},$$

d'où la valeur de l'élément

$$-\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}\,\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial q_2^2}\,\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}+\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\right)^2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}\,\frac{2\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)^3}.$$

Calculons maintenant $\dfrac{\partial}{\partial q_2}\operatorname{Log} A_1\,\dfrac{\partial^2}{\partial q_1\,\partial q_2}\operatorname{Log} A_2$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\operatorname{Log} A_1 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\left(\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}-\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\right) = -\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\,\frac{\alpha_1+\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1\,\partial q_2}\operatorname{Log} A_2 = \frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}:(\alpha_1+\alpha_3)-\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}:(\alpha_1-\alpha_2)\right]$$

$$= -\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}\,\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}:(\alpha_1-\alpha_2)^2,$$

d'où le coefficient

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\right)^2\frac{\alpha_1+\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)^3}.$$

Calculons maintenant

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\operatorname{Log} A_1\,\frac{\partial}{\partial q_1}\operatorname{Log} A_2\,\frac{\partial}{\partial q_2}\operatorname{Log} A_2\sqrt{g}$$

$$= \left[-\frac{\alpha_1+\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)}\,\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\right]\left[-\frac{\alpha_2+\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)}\,\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}\right]\frac{\partial}{\partial q_2}\operatorname{Log} A_2\sqrt{g},$$

$$\operatorname{Log} A_2\sqrt{g} = \operatorname{Log}\sqrt{\frac{A_2}{A_1 A_3}} = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{A_2}{A_1 A_3}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3+\alpha_1)}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\operatorname{Log} A_2\sqrt{g} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}:(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}:(\alpha_2+\alpha_3)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\,\frac{(2\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3)}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_2+\alpha_3)}.$$

Ce terme est alors

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\right)^2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}\,\frac{2\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_2+\alpha_3)}\,\frac{(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)}$$

ou

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial q_2}\right)^2\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}\,\frac{2\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)^2}.$$

Calculons maintenant $\dfrac{\partial}{\partial q_2}\operatorname{Log} A_2\sqrt{g}\,\dfrac{\partial^2}{\partial q_1\,\partial q_2}\operatorname{Log}\sqrt{g}$, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1\,\partial q_2}\operatorname{Log}\sqrt{g}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial q_1\,\partial q_2}\operatorname{Log}\left[-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_2)^2}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_3)}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\operatorname{Log}A_2\sqrt{g}=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\alpha_2}{\partial q_2}\,\frac{\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_2+\alpha_3)},$$

d'où le terme

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial q_1\,\partial q_2}\operatorname{Log}\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial q_2}\operatorname{Log}A_2\sqrt{g}\\&=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial q_2}\right)^2\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}\,\frac{\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_2+\alpha_3)}\left[\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\right],\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3}{\partial q_2^2\,\partial q_1}\operatorname{Log}\sqrt{g}={}&\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}\,\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial q_2^2}\left[\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\right]\\&+\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial q_2}\right)^2\left[\frac{2}{(\alpha_1-\alpha_2)^3}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\right].\end{aligned}$$

Nous avons ainsi tous les éléments nécessaires au calcul.

Nous voyons qu'il y a deux groupes de termes, un facteur de $\left(\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial q_2}\right)^2\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}$ et un facteur de $\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}\,\dfrac{\partial^2\alpha_2}{\partial q_2^2}$.

Calculons tout d'abord le facteur de $\left(\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial q_2}\right)^2\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}$

$$\begin{aligned}&\frac{(2\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)^3}+\frac{\alpha_1+\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)^3}+\frac{1}{2}\,\frac{2\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)^2}\\&\qquad-\frac{1}{2}\,\frac{2\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_2+\alpha_3)}\left[\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\right]\\&\qquad+\frac{2}{(\alpha_1-\alpha_2)^3}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}.\end{aligned}$$

On voit ainsi se simplifier les 3e et 4e termes, il demeure alors

$$\begin{aligned}&\frac{2\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)^3}+\frac{\alpha_1+\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)^3}\\&\qquad-\frac{2\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3}{4(\alpha_1+\alpha_2)^3(\alpha_2+\alpha_3)}+\frac{2}{(\alpha_1-\alpha_2)^3}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\end{aligned}$$

et

$$\frac{2(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)^3}-\frac{\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_2}{4(\alpha_1+\alpha_2)^3(\alpha_2+\alpha_3)}+\frac{2}{(\alpha_1-\alpha_2)^3}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}$$

et

$$\frac{2}{(\alpha_2-\alpha_1)^3}+\frac{2}{(\alpha_1-\alpha_2)^3}-\frac{\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_2}{4(\alpha_1+\alpha_2)^3(\alpha_2+\alpha_3)}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}.$$

Les deux premiers termes sont opposés, d'où

$$\begin{aligned}&-\frac{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_2}{4(\alpha_1+\alpha_2)^3(\alpha_2+\alpha_3)}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\\&=-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4(\alpha_1+\alpha_2)^3(\alpha_2+\alpha_3)}-\frac{\alpha_2+\alpha_3}{4(\alpha_1+\alpha_2)^3(\alpha_2+\alpha_3)}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\\&=-\frac{1}{4(\alpha_1+\alpha_2)^3(\alpha_2+\alpha_3)}-\frac{5}{4(\alpha_1+\alpha_2)^3},\end{aligned}$$

le terme a pour coefficient

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3(\alpha_2+\alpha_3)}-\frac{5}{4}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}.$$

Calcul du coefficient de $\dfrac{\partial^2\alpha_2}{\partial q_2^2}\dfrac{\partial\alpha}{\partial q_1}$

$$-\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}+\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}=+\frac{1}{2(\alpha_1+\alpha_3)^2},$$

d'où le terme

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial q_2^2},$$

l'ensemble est donc

$$\begin{aligned}-\Bigg\{\bigg[\frac{1}{4}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_2+\alpha_3)}+\frac{5}{4}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\bigg]\\\times\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial q_2}\right)^2\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial q_2^2}\Bigg\}\frac{1}{2A_1},\end{aligned}$$

pour avoir $\dfrac{\partial R_1}{\partial q_1}$ on doit multiplier α_{12} par λ_{21}

$$\begin{aligned}\lambda_{21}=A_1P_2-A_2P_1&=\frac{\alpha_2+\alpha_3}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)}\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)}\\&-\frac{\alpha_1+\alpha_3}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)}=\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}\end{aligned}$$

et

$$\frac{\lambda_{21}}{2A_1} = \frac{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_3+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)} = \frac{1}{\alpha_2^2-\alpha_3^2},$$

d'où la valeur de $2\frac{\partial R_1}{\partial q_1}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha_3^2-\alpha_2^2}\left\{\left[\frac{1}{4}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_2+\alpha_3)}+\frac{5}{4}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\right]\right.\\
&\qquad\left.\times\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial q_2}\right)^2\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial q_2^2}\right\}\\
&+\frac{1}{\alpha_2^2-\alpha_3^2}\left\{\left[\frac{1}{4}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_2+\alpha_3)}+\frac{5}{4}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\right]\right.\\
&\qquad\left.\times\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial q_2}\right)^2\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_3)^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}\frac{\partial^2\alpha_3}{\partial q_3^2}\right\}
\end{aligned}$$

Si l'on écrit les conditions de compatibilité, le terme $\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}$ n'intervenant que linéairement dans $\frac{\partial R_1}{\partial q_1}$.

Les conditions de compatibilité $\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_1\,\partial q_2} = \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_2\,\partial q_1}$ ne le font intervenir par dérivation de $\frac{\partial R_1}{\partial q_1}$ que sous la forme $\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}$.

Or si l'on envisage le terme $\frac{\partial R_1}{\partial q_2}$ tel qu'il est donné par la formule, $\frac{\partial R_1}{\partial q_2}$ comprend des termes en $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial q_1^2}$ et $\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}\right)^2$ une dérivation par rapport à q_1 fait alors intervenir dans le terme $\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_1\,\partial q_2}$ les fonctions $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial q_1^2}$ et $\frac{\partial^3\alpha_1}{\partial q_1^3}$ qui n'interviennent pas initialement dans $\frac{\partial_2 R_1}{\partial q_2\,\partial q_1}$.

Autrement dit, la relation $\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_1\,\partial q_2} = \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_2\,\partial q_1}$ n'est pas vérifiée pour les valeurs de $\frac{\partial R_1}{\partial q_1}$ donné par les formules précédentes, autrement dit R_1 n'existe pas.

La condition XH — HX ne peut être vérifiée et la correspondance entre la mécanique classique et la mécanique ondulatoire ne se poursuit pas, en général, pour les intégrales du deuxième ordre.

CHAPITRE VI.

CORRESPONDANCE ENTRE FONCTIONS ET OPÉRATEURS.

Nous nous proposons dans ce Chapitre de fournir des indications sur la nature des opérateurs correspondant à une fonction des coordonnées et des vitesses de la mécanique classique pour un système donné.

Envisageons dans ce cas l'hamiltonien classique, l'espace de configuration ayant un $ds^2 = \Sigma_{ik}\, dq_i\, dq_k$,

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

L'hamiltonien est

$$H \equiv -\frac{h^2}{8\pi^2}\Sigma_{ik}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g^{ik}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial q_k}\right) - U,$$

gg^{ik} mineur de l'élément a_{ik} dans le déterminant de la forme quadratique $ds^2 = \alpha_{ik}\, dq_i\, dq_k$, nous nous proposons de vérifier tout d'abord deux propriétés des opérateurs :

1° *si une fonction linéaire et homogène des vitesses indépendante du temps est intégrale classique, elle est intégrale quantique* $+\frac{h}{2\pi i}\Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}$, *correspond à* $\Sigma_i Q_i \frac{\partial S}{\partial q_i}$;

2° *à l'intégrale première classique* $\Sigma_{ik} P_{ik}\frac{\partial S}{\partial q_i}\frac{\partial S}{\partial q_k} + R$ *ne peut correspondre que l'intégrale quantique*

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\left[\Sigma_{ik}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(P_{ik}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial q_k}\right) + R_1\right] + R.$$

Cette proposition est amenée par la considération du fait suivant, à l'intégrale classique

$$\Sigma_i P_i\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 + R = \Sigma_i P_i p_i^2 + R$$

nous avons pu faire correspondre pour les termes en p_i l'expression

$$\mathrm{P}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + \left(\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial q_i} + \mathrm{P}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}\right) \frac{\partial}{\partial q_i},$$

soit pour $\Sigma_i \mathrm{P}_i \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i}\right)^2 + \mathrm{R}$ à

$$\Sigma_i \mathrm{P}_i \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i}\right)^2 + \mathrm{R},$$

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\left[\mathrm{P}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + \left(\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial q_i} + \mathrm{P}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}\right) \frac{\partial}{\partial q_i} + \mathrm{R}_1\right] + \mathrm{R}$$

qui donne pour une valeur propre

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\left[\mathrm{P}_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i^2} + \left(\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial q_i} + \mathrm{P}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}\right) \frac{\partial \psi}{\partial q_i} + \mathrm{R}_1 \psi\right] + (\mathrm{R} - \alpha)\psi$$

ce qui signifie que l'intégrale I appliquée à ψ

$$\mathrm{I} = \iiint_{\mathrm{D}} \left[-\frac{h^2}{4\pi^2} \Sigma_i \mathrm{P}_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{h^2}{4\pi^2} \mathrm{R}_1 - \mathrm{R} + \alpha\right)\psi\right] d\tau$$

est extremum avec $d\tau = \sqrt{g}\, dq_1\, dq_2\, dq_n$, la propriété est intrinsèque.

Il y a lieu de penser que la propriété se généralise quelle que soit la forme de la forme quadratique en $p_i p_k$, autrement dit que l'on déduit de

$$\int \left[-\frac{h^2}{4\pi^2} \Sigma_{ik} \mathrm{P}_{ik} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_k} + \left(\frac{h^2}{4\pi^2} \mathrm{R}_1 - \mathrm{R} + \alpha\right) \mathrm{F}\right] d\tau$$

pour un principe d'extremum l'opérateur correspondant à H, c'est-à-dire que A est de la forme

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\left[\Sigma_{ik} \mathrm{P}_{ik} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} + \Sigma_{ik} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_i}(\mathrm{P}_{ik}\sqrt{g}) \frac{\partial}{\partial q_k} + \mathrm{R}_1\right] + \mathrm{R}.$$

Nous n'effectuerons que les calculs sur les termes de plus haut ordre.

Posons

$$\mathrm{F}_1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \Sigma_k \frac{\partial}{\partial q_k}(\mathrm{P}_{ik}\sqrt{g}), \qquad \mathrm{G}_m = \frac{1}{\sqrt{g}} \Sigma_l \frac{\partial}{\partial q_l}(g^{lm}\sqrt{g}).$$

Les calculs de compatibilité sont alors les suivants : nous calculons AH — HA ; nous obtenons les équations suivantes pour les termes de plus haut ordre AH — HA.

Le terme en $\frac{\partial^3}{\partial q_i \partial q_l \partial q_m}$ a pour coefficient (1)

$$c = \Sigma_k\left(P_{ik}\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_k} + P_{lk}\frac{\partial g^{im}}{\partial q_k} + P_{mk}\frac{\partial g^{il}}{\partial q_k}\right) - \Sigma_k\left(g^{ik}\frac{\partial P_{lm}}{\partial q_k} + g^{lk}\frac{\partial P_{lm}}{\partial q_k} + g^{mk}\frac{\partial P_{im}}{\partial q_k}\right),$$

d'où la relation $c = 0$, en $\frac{\partial^3}{\partial q_i q \partial^2_m}$

$$c' \equiv \Sigma_k\left(P_{ik}\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_k} + P_{mk}\frac{\partial g^{im}}{\partial q_k} - g^{ik}\frac{\partial P_{mm}}{\partial q_k} + g^{mk}\frac{\partial P_{im}}{\partial q_k}\right),$$

d'où $c' = 0$, en $\frac{\partial^3}{\partial q^3_m}$

$$\Sigma_k P_{mk}\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_k} - g^{mk}\frac{\partial P_{mm}}{\partial q_k} = c'',$$

d'où la relation $c'' = 0$.

Nous nous proposons de vérifier que les coefficients du deuxième ordre sont identiquement nuls en vertu des relations précédentes, les termes en $\frac{\partial^2}{\partial q_l \partial q_m}$ sont

$$P_{ik}\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial q_l \partial q_m} + P_{il}\frac{\partial G_m}{\partial q_i} + F_i\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i} + P_{im}\frac{\partial G_l}{\partial q_i} - g^{ik}\frac{\partial^2 P_{lm}}{\partial q_i \partial q_k} - g^{im}\frac{\partial F^l}{\partial q_i} - g^{il}\frac{\partial F_m}{\partial q_i} - G_i\frac{\partial P_{lm}}{\partial q_i},$$

$P_{ik}\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial q_i \partial q_k} - g^{ik}\frac{\partial^2 P_{lm}}{\partial q_i \partial q_k}$ ne fait pas intervenir les F_i et les G_i précédemment définis.

Calculons $\frac{\partial G_m}{\partial q_i}$

$$G_m = \Sigma_r\left(\frac{\partial g^{mr}}{\partial q_r} + g^{mr}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right),$$

$$\frac{\partial G_m}{\partial q_i} = \Sigma_r\left(\frac{\partial^2 g^{mr}}{\partial q_i \partial q_r} + \frac{\partial g^{mr}}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g} + g^{mr}\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right);$$

d'où

$$\mathrm{P}_{il}\frac{\partial \mathrm{G}_m}{\partial q_i} = \Sigma_r\left(\mathrm{P}_{il}\frac{\partial^2 g^{mr}}{\partial q_i\,\partial q_r} + \mathrm{P}_{il}\frac{\partial g^{mr}}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g} + \mathrm{P}_{il}\,g^{mr}\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right),$$

$$\mathrm{P}_{im}\frac{\partial \mathrm{G}_l}{\partial q_i} = \Sigma_r\left(\mathrm{P}_{im}\frac{\partial^2 g^{lr}}{\partial q_i\,\partial q_r} + \mathrm{P}_{im}\frac{\partial g^{lr}}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g} + \mathrm{P}_{im}g^{lr}\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\Sigma_i\left(\mathrm{P}_{il}\frac{\partial \mathrm{G}_m}{\partial q_i} + \mathrm{P}_{im}\frac{\partial \mathrm{G}_l}{\partial q_i} + \mathrm{F}_i\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i}\right)\\
&\quad = \Sigma_i\left(\mathrm{P}_{il}\frac{\partial^2 g^{mr}}{\partial q_i\,\partial q_r} + \mathrm{P}_{im}\frac{\partial^2 g^{lr}}{\partial q_i\,\partial q_r} + \frac{\partial \mathrm{P}_{ir}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i}\right)\\
&\qquad + \Sigma_i\left(\mathrm{P}_{ir}\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i} + \mathrm{P}_{il}\frac{\partial g^{mr}}{\partial q_i} + \mathrm{P}_{im}\frac{\partial g^{lr}}{\partial q_i}\right)\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\
&\qquad + \Sigma_i(\mathrm{P}_{il}g^{mr} + \mathrm{P}_{im}g^{lr})\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g},
\end{aligned}$$

de même pour $g^{im}\dfrac{\partial \mathrm{F}_l}{\partial q_i} + g^{il}\dfrac{\partial \mathrm{F}_m}{\partial q_i} + \mathrm{G}_i\dfrac{\partial \mathrm{P}_{lm}}{\partial q_i}$

$$\mathrm{F}_{il} = \Sigma\frac{\partial \mathrm{P}_{lr}}{\partial q_r} + \mathrm{P}_{lr}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g},$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}_l}{\partial q_i} = \Sigma\frac{\partial^2 \mathrm{P}_{lr}}{\partial q_i\,\partial q_r} + \frac{\partial \mathrm{P}_{lr}}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g} + \mathrm{P}_{lr}\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g},$$

$$\Sigma_i g^{im}\frac{\partial \mathrm{F}_l}{\partial q_i} = \Sigma_{ir}\left(g^{im}\frac{\partial^2 \mathrm{P}_{lr}}{\partial q_i\partial q_r} + g^{im}\frac{\partial \mathrm{P}_{lr}}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g} + g^{im}\mathrm{P}_{lr}\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right),$$

$$\Sigma_i g^{il}\frac{\partial \mathrm{F}_m}{\partial q_i} = \Sigma_{ir}\left(g^{il}\frac{\partial^2 \mathrm{P}_{mr}}{\partial q_i\partial q_r} + g^{il}\frac{\partial \mathrm{P}_{mr}}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g} + g^{il}\mathrm{P}_{mr}\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right),$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}_{lm}}{\partial q_i}\mathrm{G}_i = \frac{\partial \mathrm{P}_{lm}}{\partial q_i}\Sigma_r\left(\frac{\partial g^{ir}}{\partial q_r} + g^{ir}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right),$$

d'où ce groupement est alors égal à

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{ir}g^{im}\frac{\partial^2 \mathrm{P}_{lr}}{\partial q_i\partial q_r} + g^{il}\frac{\partial^2 \mathrm{P}_{mr}}{\partial q_i\partial q_r} + \frac{\partial \mathrm{P}_{lm}}{\partial q_i}\frac{\partial g^{ir}}{\partial q_r}\\
&\qquad + \left(g^{il}\frac{\partial \mathrm{P}_{mr}}{\partial q_i} + g^{ir}\frac{\partial \mathrm{P}_{lm}}{\partial q_i} + g^{im}\frac{\partial \mathrm{P}_{lr}}{\partial q_i}\right)\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\
&\qquad + (g^{im}\mathrm{P}_{lr} + g^{il}\mathrm{P}_{mr})\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g},
\end{aligned}$$

d'où la valeur de la différence

$$
\begin{aligned}
&P_{il}\frac{\partial G_m}{\partial q_i}+P_{im}\frac{\partial G_l}{\partial q_i}+F_i\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i}-g^{im}\frac{\partial F_l}{\partial q_i}-g^{il}\frac{\partial F_m}{\partial q_i}-G_i\frac{\partial P_{lm}}{\partial q_i}\\
&\quad=\Sigma_{ir}P_{il}\frac{\partial^2 g^{mr}}{\partial q_i\partial q_r}+P_{im}\frac{\partial^2 g^{lr}}{\partial q_i\partial q_r}+\frac{\partial P_{ir}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i}-g^{im}\frac{\partial^2 P_{lr}}{\partial q_i\partial q_r}\\
&\qquad-g^{il}\frac{\partial^2 P_{mr}}{\partial q_i\partial q_r}-\frac{\partial P_{lm}}{\partial q_i}\frac{\partial g^{ir}}{\partial q_r}+\Sigma_{ir}P_{ir}\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial q_i\partial q_r}-g^{ir}\frac{\partial^2 P_{lm}}{\partial q_i\partial q_r}\\
&\qquad+\Sigma_{ir}\Big(P_{ir}\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i}+P_{il}\frac{\partial g^{mr}}{\partial q_r}+P_{im}\frac{\partial g^{lr}}{\partial q_i}\\
&\qquad\qquad-g^{il}\frac{\partial P_{mr}}{\partial q_i}-g^{ir}\frac{\partial P_{lm}}{\partial q_i}-g^{im}\frac{\partial P_{lr}}{\partial q_i}\Big)\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\
&\qquad+\Sigma_{ir}(P_{il}g^{mr}+P_{im}g^{lr}-g^{im}P_{lr}-g^{il}P_{mr})\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}.
\end{aligned}
$$

Cette expression doit se simplifier.

Tout d'abord le coefficient de $\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}$

$$P_{il}g^{mr}+P_{im}g^{lr}-g^{im}P_{lr}-g^{il}P_{mr},$$

qui est identiquement nul du fait de sa structure (on doit y ajouter des termes obtenus en permutant i et r) ensuite le coefficient des $\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}$

$$P_{ir}\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i}+P_{il}\frac{\partial g^{mr}}{\partial q_r}+P_{im}\frac{\partial g^{lr}}{\partial q_i}-g^{il}\frac{\partial P_{mr}}{\partial q_i}-g^{ir}\frac{\partial P_{lm}}{\partial q_i}-g^{im}\frac{\partial P_{lr}}{\partial q_i}.$$

Les relations que l'on obtient pour la mécanique classique montrent que cette somme est nulle. Maintenant envisageons la somme

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{ir}P_{il}\frac{\partial^2 g^{mr}}{\partial q_i\partial q_r}+P_{im}\frac{\partial^2 g^{lr}}{\partial q_i\partial q_r}+\frac{\partial P_{ir}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i}-g^{im}\frac{\partial^2 P_{lr}}{\partial q_i\partial q_r}\\
&\qquad-g^{il}\frac{\partial^2 P_{mr}}{\partial q_i\partial q_r}-\frac{\partial P_{lm}}{\partial q_i}\frac{\partial g^{ir}}{\partial q_r}+\Sigma_{ir}P_{ir}\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial q_i\partial q_r}-g^{ir}\frac{\partial^2 P_{lm}}{\partial q_i\partial q_r}.
\end{aligned}
$$

Montrons qu'elle est nulle. La mécanique classique nous donne

$$\Sigma_i P_{il}\frac{\partial g^{mr}}{\partial q_i}+P_{im}\frac{\partial g^{lr}}{\partial q_i}+P_{ir}\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i}-\Sigma_i g^{il}\frac{\partial P_{mr}}{\partial q_i}+g^{im}\frac{\partial P_{lr}}{\partial q_i}+g^{ir}\frac{\partial P_{lm}}{\partial q_i}=0.$$

r restant fixe, dérivons cette relation par rapport à q_r

$$\begin{aligned}\Sigma_i \frac{\partial P_{il}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{mr}}{\partial q_i} + \frac{\partial P_{im}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{lr}}{\partial q_i} + \frac{\partial P_{ir}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i} \\ - \frac{\partial g^{il}}{\partial q_r}\frac{\partial P_{mr}}{\partial q_i} - \frac{\partial g^{im}}{\partial q_r}\frac{\partial P_{lr}}{\partial q_i} - \frac{\partial g^{ir}}{\partial q_r}\frac{\partial P_{lm}}{\partial q_i} \\ + \Sigma_i P_{il}\frac{\partial^2 g^{mr}}{\partial q_i \partial q_r} + P_{im}\frac{\partial^2 g^{lr}}{\partial q_i \partial q_r} + P_{ir}\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial q_i \partial q_r} \\ - g^{il}\frac{\partial^2 P_{mr}}{\partial q_i \partial q_r} - g^{im}\frac{\partial^2 P_{lr}}{\partial q_i \partial q_r} - g^{ir}\frac{\partial^2 P_{lm}}{\partial q_i \partial q_r} = 0,\end{aligned}$$

d'où la somme envisagée sera nulle si nous avons

$$\begin{aligned}\Sigma_{ir} \frac{\partial P_{il}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{mr}}{\partial q_i} + \frac{\partial P_{im}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{lr}}{\partial q_i} + \frac{\partial P_{ir}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i} \\ - \Sigma_{ir}\frac{\partial g^{il}}{\partial q_r}\frac{\partial P_{mr}}{\partial q_i} + \frac{\partial g^{im}}{\partial q_r}\frac{\partial P_{lr}}{\partial q_i} + \frac{\partial g^{ir}}{\partial q_r}\frac{\partial P_{lm}}{\partial q_i} = 0,\end{aligned}$$

cette somme est évidemment nulle du fait de sa structure.

Dans le cas où le terme du deuxième ordre est alors $\frac{\partial^2}{\partial q_m^2}$, nous avons

$$\Sigma_{ik} P_{ik}\frac{\partial^2 g^{mm}}{\partial q_i \partial q_k} + P_{im}\frac{\partial G_m}{\partial q_i} + F_i\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i} - \Sigma_{ik} g^{ik}\frac{\partial^2 P_{mm}}{\partial q_i \partial q_k} + g^{im}\frac{\partial F_m}{\partial q_i} + G_i\frac{\partial P_{mm}}{\partial q_i}.$$

Comme tout à l'heure on décompose le calcul en deux

$$\Sigma_{ik} P_{ik}\frac{\partial^2 g^{mm}}{\partial q_i \partial q_k} - g^{ik}\frac{\partial^2 P_{mm}}{\partial q_i \partial q_k} \quad \text{et} \quad \Sigma_i P_{im}\frac{\partial G_m}{\partial q_i} + F_i\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i} - g^{im}\frac{\partial F_m}{\partial q_i} - G_i\frac{\partial P_{mm}}{\partial q_i},$$

$$F_i = \Sigma_r \frac{\partial P_{ir}}{\partial q_r} + P_{ir}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g},$$

$$F_i\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i} = \Sigma_r \frac{\partial P_{ir}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i} + P_{ir}\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g},$$

$$P_{im}\frac{\partial G_m}{\partial q_i} = \Sigma_r P_{im}\frac{\partial^2 g^{mr}}{\partial q_i \partial q_r} + P_{im}\frac{\partial g^{mr}}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g} + P_{im}g^{mr}\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g},$$

d'où

$$\begin{aligned}P_{im}\frac{\partial G_m}{\partial q_i} + F_i\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i} \\ = \Sigma_r P_{im}\frac{\partial^2 g^{mr}}{\partial q_i \partial q_r} + P_{im}\frac{\partial g^{mr}}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g} + P_{im}g^{mr}\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g} \\ + \frac{\partial P_{ir}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i} + P_{ir}\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}.\end{aligned}$$

De même pour les termes soustractifs $g^{im}\dfrac{\partial F_m}{\partial q_i} + G_i \dfrac{\partial P_{mm}}{\partial q_i}$, on a

$$g^{im}\frac{\partial^2 P_{rm}}{\partial q_i \partial q_r} + g^{im}\frac{\partial P_{rm}}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g} + g^{im} P_{rm}\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}$$
$$+ g^{ir}\frac{\partial P_{mm}}{\partial q_i} + g^{ir}\frac{\partial P_{mm}}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g} + g^{ir} P_{mm}\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}.$$

Le résultat définitif est alors

$$\Sigma_{ir} P_{im}\frac{\partial^2 g^{mr}}{\partial q_i \partial q_r} + \frac{\partial P_{ir}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i} + P_{ir}\frac{\partial^2 g^{mm}}{\partial q_i \partial q_r} - g^{ir}\frac{\partial^2 P_{rm}}{\partial q_i \partial q_r} - \frac{\partial g^{ir}}{\partial q_r}\frac{\partial P_{mm}}{\partial q_i} - g^{im}\frac{\partial^2 P_{rm}}{\partial q_i \partial q_r}$$
$$+ \left(P_{im}\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i} + P_{ir}\frac{\partial g^{mr}}{\partial q_i} - g^{im}\frac{\partial P_{rm}}{\partial q_i} - g^{ir}\frac{\partial P_{mm}}{\partial q_i}\right)\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}$$
$$+ (P_{im} g^{mr} - P_{rm} g^{im})\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g},$$

le coefficient de $\dfrac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}$ est nul dans la sommation du fait de sa structure.

Le coefficient de $\dfrac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}$

$$\Sigma_i P_{im}\frac{\partial g^{mr}}{\partial q_i} + P_{ir}\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i} - g^{im}\frac{\partial P_{rm}}{\partial q_i} - g^{ir}\frac{\partial P_{mm}}{\partial q_i} = 0,$$

d'après les relations obtenues en mécanique classique cette somme est nulle.

Envisageons les termes de plus haut ordre

$$\Sigma_{ir} P_{im}\frac{\partial^2 g^{mr}}{\partial q_i \partial q_r} + P_{ir}\frac{\partial^2 g^{mm}}{\partial q_i \partial q_r} + \frac{\partial P_{ir}}{\partial q_r}\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i}$$
$$- g^{ir}\frac{\partial^2 P_{mm}}{\partial q_i \partial q_r} - \frac{\partial g^{ir}}{\partial q_i}\frac{\partial P_{mm}}{\partial q_i} - g^{im}\frac{\partial^2 P_{mr}}{\partial q_i \partial q_r}.$$

La relation écrite précédemment donne dérivée par rapport à q_r

$$\Sigma_i P_{im}\frac{\partial^2 g^{mr}}{\partial q_i \partial q_r} + P_{ir}\frac{\partial^2 g^{mm}}{\partial q_i \partial q_r} + \frac{\partial P_{ir}}{\partial q_i}\frac{\partial g^{mm}}{\partial q_i} - \Sigma_i g^{ir}\frac{\partial^2 P_{rm}}{\partial q_i \partial q_r}$$
$$+ \frac{\partial g^{ir}}{\partial q_i}\frac{\partial P_{mm}}{\partial q_r} + g^{im}\frac{\partial^2 P_{rm}}{\partial q_i \partial q_r} = \Sigma_i \frac{\partial g^{im}}{\partial q_r}\frac{\partial P_{mr}}{\partial q_i} - \frac{\partial g^{mr}}{\partial q_i}\frac{\partial P_{im}}{\partial q_r},$$

somme précédente, par rapport à r

$$\Sigma_{ir}\frac{\partial g^{im}}{\partial q_r}\frac{\partial P_{mr}}{\partial q_i} - \frac{\partial g^{mr}}{\partial q_i}\frac{\partial P_{im}}{\partial q_r}$$

est nulle d'après sa structure.

Envisageons un changement de coordonnées, le ds^2 initial prenant la forme $ds^2 = \Sigma a_i \, dq_i^2$

$$q_i = f_i(w_1, w_2, w_n), \qquad dq_i = \Sigma_k \frac{\partial f_i}{\partial w_k} dw_k;$$

$$dq_i^2 = \Sigma_{kl} \frac{\partial f_i}{\partial w_k} \frac{\partial f_i}{\partial w_l} dw_k dw_l,$$

le ds^2 devient alors

$$\Sigma_i a_i \Sigma_{kl} \frac{\partial f_i}{\partial w_k} \frac{\partial f_i}{\partial w_l} dw_k dw_l,$$

en remplaçant les q_i par les fonctions de w_k envisagées, on obtient

$$ds^2 = \Sigma \mu_{kj} dw_k dw_j.$$

Soit la fonction de Jacobi, solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{2} \Sigma A_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 - U = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

La fonction de Jacobi est invariante dans ce changement de coordonnées, l'intégrale $\Sigma Q_i \frac{\partial S}{\partial q_i}$ devient

$$\Sigma_{ik} Q_i \frac{\partial S}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial q_i},$$

puisque

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \Sigma_k \frac{\partial S}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial q_i},$$

en posant

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial w_k}{\partial q_i} = F_k,$$

$$\Sigma_{ik} Q_i \frac{\partial S}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial q_i} = \Sigma_k F_k \frac{\partial S}{\partial w_k}.$$

On a ainsi en mécanique classique la nouvelle forme de l'intégrale dans le nouveau système de coordonnées. $\Sigma_k F_k \frac{\partial s}{\partial w_k}$ cette forme est la même que la précédente du point analytique S solution de la nouvelle équation de Jacobi

$$\frac{1}{2} \Sigma g_{ik} \frac{\partial S}{\partial w_i} \frac{\partial S}{\partial w_k} - U = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Autrement dit la forme de l'intégrale n'a pas changé de même en mécanique ondulatoire l'intégrale

$$\frac{h}{2\pi i}\Sigma Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

donne lieu à l'intégrale

$$\frac{h}{2\pi i}\Sigma_{ik} Q_i \frac{\partial w_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial w_k} = \frac{h}{2\pi i}\Sigma_k F_k \frac{\partial}{\partial w_k},$$

la propriété est générale. Nous vérifions alors formellement que dans le cas où le ds^2 provient de la force vive $2T = \Sigma a_{ik} q'_i q'_k$ d'un système de corpuscules, les intégrales linéaires et homogènes classiques se conservent en mécanique ondulatoire autrement dit les opérateurs commutent.

Fluide de probabilité. — Dans le cas d'une intégrale première quantique on a pour

$$\psi = a e^{\frac{2\pi i \varphi}{h}}, \qquad \Lambda(\psi) = \alpha\psi, \qquad \Lambda = \frac{h}{2\pi i}\Sigma Q_i \frac{\partial}{\partial q_i},$$

$$\Sigma Q_i \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = \alpha, \qquad \Sigma Q_i \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0,$$

α étant une valeur propre.

Arrivons à un cas particulier très intéressant celui de mouvement de probabilité pour lequel on a défini les équations

$$\frac{1}{2}\Sigma_{ik} g^{ik}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} - U = \frac{h^2}{8\pi^2 a}\frac{1}{\sqrt{g}}\Sigma_{ik}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g^{ik}\sqrt{g}\frac{\partial a}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (^1),$$

$$\Sigma_{ik} g^{ik}\frac{\partial a}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} + \frac{a}{2\sqrt{g}}\Sigma_{ik}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g^{ik}\sqrt{g}\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial a}{\partial t} \quad (^2).$$

Toute intégrale première linéaire donne pour le mouvement de fluide de probabilité une intégrale première dans le cas d'une valeur propre de l'énergie. Si en mécanique classique il y a conservation de

(1) Le ds^2 ne peut toujours être amené à la forme $\Sigma'_i a_i dq_i^2$.

(2) La même propriété est valable lorsque la fonction g figurant dans l'hamiltonien et l'intégrale première est quelconque.

la quantité de mouvement, cette propriété a lieu pour le fluide de probabilité. Il y a là une nouvelle analogie.

THÉORÈME. — *Le fluide de probabilité admet les intégrales linéaires du problème de la mécanique classique pour les valeurs propres de l'opérateur énergie.*

THÉORÈME. — *A une intégrale* $\Sigma \mathrm{P}ik \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q} \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_k} + \mathrm{R}$ *dans un système où le* ds^2 *de l'espace de configuration associé est*

$$ds^2 = \Sigma a_{ik} dq_i dq_k$$

g déterminant du ds^2. *Il ne peut correspondre en mécanique comme opérateur intégrale première que*

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\left(\Sigma_{ik}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\mathrm{P}_{ik}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)+\mathrm{R}_1\right)+\mathrm{R}.$$

THÉORÈME. — *Une intégrale première linéaire classique* $\Sigma \mathrm{Q}_i \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i}$ *donne lieu en mécanique quantique à l'intégrale première* $\frac{h}{2\pi_i} \Sigma \mathrm{Q}_i \frac{\partial}{\partial q_1}$.

CHAPITRE VII.

CAS GÉNÉRAL DE L'EXISTENCE SIMULTANÉE D'UN CHAMP DÉRIVANT D'UN POTENTIEL SCALAIRE ET D'UN CHAMP ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE.

Nous avons montré qu'il était en général impossible d'affirmer d'emblée l'existence d'intégrales premières communes à deux problèmes correspondants quantiques et classiques.

Nous avons vu que seul le cas du premier ordre pour le cas d'un potentiel scalaire indépendant ou non du temps donnait lieu à une telle correspondance.

Nous allons donc étudier cette correspondance pour le cas du premier ordre dans le cas d'un champ magnétique.

L'hamiltonien classique étant

$$\mathrm{H} = \Sigma_i \frac{1}{2} \mathrm{A}_i p_i^2 + \mathrm{L}_i p_i + \mathrm{U},$$

l'hamiltonien quantique est alors

$$-\frac{h^2}{8\pi^2}\Sigma_i\left(\mathrm{A}_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}+\mathrm{A}_i\frac{\partial}{\partial q_i}\mathrm{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\right)+\frac{h}{2\pi i}\Sigma_i\mathrm{L}_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\mathrm{U}.$$

Envisageons une intégrale du premier ordre.

Les équations de la mécanique classique nous donnent, pour le crochet de Poisson :

terme en $p_i p_k$:

$$\mathrm{A}_i\frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i}+\mathrm{A}_k\frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k}=0\,;$$

terme en p_i^2 :

$$\Sigma_i \mathrm{Q}_k\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial q_k}-2\mathrm{A}_i\frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_i}=0\,;$$

terme en p_i :

$$\Sigma_r \mathrm{Q}_r\frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial q_r}-\mathrm{L}_r\frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_r}-\mathrm{A}_i\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q_i}=0\,;$$

terme indépendant des p_i :

$$\Sigma_i \mathrm{Q}_i\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i}-\mathrm{L}_i\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q_i}=0.$$

L'opérateur AH — HA nous fournit ici avec

$$\mathrm{H}\equiv\frac{-h^2}{8\pi^2}\Sigma_i\left(\mathrm{A}_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}+\mathrm{A}_i\frac{\partial}{\partial q_i}\mathrm{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\right)+\frac{h}{2\pi i}\Sigma_i\mathrm{L}_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\mathrm{U},$$

$$\mathrm{A}\equiv\frac{h}{2\pi i}\Sigma_i\left(\mathrm{Q}_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\mathrm{R}\right)+\mathrm{R}.$$

Les relations suivantes :

Termes en $\dfrac{\partial^2}{\partial q_i^2}$:

$$\Sigma_k \mathrm{Q}_k\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial q_i}-2\mathrm{A}_i\frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_i}=0\,;$$

Termes en $\dfrac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}$:

$$\mathrm{A}_i\frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i}+\mathrm{A}_k\frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k}=0,$$

Termes en $\frac{\partial}{\partial q_i}$:

$$\Sigma_k Q_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\Lambda_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}}\right) - \Lambda_k \frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_k^2} - \Lambda_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}$$
$$+ \frac{4\pi i}{h} \Sigma_k Q_k \frac{\partial L_i}{\partial q_k} - L_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} - \Lambda_i \frac{\partial R}{\partial q_i} + 2\Lambda_i \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0,$$

Terme constant :

$$\Sigma_i \Lambda_i \frac{\partial^2 R}{\partial q_i^2} + \Lambda_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0,$$

$$\Sigma_i Q_i \frac{\partial U}{\partial q_i} - L_i \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0.$$

Les équations précédemment écrites sont vérifiées, en fonction des études que nous avons déjà faites et des équations de la Mécanique classique. Il reste à vérifier que

$$\Sigma_i \Lambda_i \frac{\partial^2 R}{\partial q_i^2} + \Lambda_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0.$$

Or, on a

$$\Lambda_i \frac{\partial R}{\partial q_i} = \Sigma_r\left(L_r \frac{\partial Q_i}{\partial q_r} - Q_r \frac{\partial L_i}{\partial q_r}\right) \tag{1}$$

en dérivant par rapport à q_i et en ajoutant (1) multiplié par $\frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log}\sqrt{g}$.

On a, en sommant par rapport à q_i la condition

$$\Sigma_{ir} \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\left(L_r \frac{\partial Q_i}{\partial q_r} - Q_r \frac{\partial L_i}{\partial q_r}\right)\sqrt{g}\right] = 0,$$

qui est une condition supplémentaire, condition supplémentaire liant Q_r, L_i et $\sqrt{g}$.

Nous venons de voir qu'il est nécessaire d'imposer une condition supplémentaire pour qu'une intégrale linéaire classique donne en Mécanique ondulatoire une intégrale première; c'est là une différence nette avec le problème du champ dérivant d'un potentiel scalaire. Notons que pour le cas de l'intégrale classique où $R = 0$ la condition est vérifiée d'emblée. D'où

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale première* $Q_i \frac{\partial S}{\partial q_i} + R$ *donne lieu à une intégrale quantique est*

$$\Sigma_{ir} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\left(L_r \frac{\partial Q_i}{\partial q_r} - Q_r \frac{\partial L_i}{\partial q_r} \right) \sqrt{g} \right] = 0,$$

L_i *étant les composantes du potentiel vecteur du champ magnétique et* $\sqrt{g}$ *la capacité tensorielle de l'espace de configuration.*

CHAPITRE VIII.

INTÉGRALES PREMIÈRES DÉPENDANT DU TEMPS.

Nous allons généraliser les résultats obtenus précédemment au cas où les intégrales du premier et du second ordre dépendent du temps. Nous noterons que les cas particuliers étudiés le sont particulièrement en vue de l'intégration des équations de la Mécanique ondulatoire.

Nous pouvons en effet noter qu'il est possible de définir une infinité d'intégrales premières. Il est possible de leur imposer de se réduire à un opérateur différentiel donné X_0 pour $t = 0$.

Il suffit pour cela de développer l'opérateur X en série entière par rapport au temps et de l'astreindre à vérifier l'équation

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h}(XH - HX) = 0.$$

Cette méthode fournit l'opérateur X à partir de X_0 et donne sa loi d'évolution.

Cette question a été étudiée par M. J.-Louis Destouches (¹); cet opérateur X est défini à partir de l'hamiltonien H par intégration, autrement dit il ne nous fournit pas d'aide pour l'intégration des équations de la mécanique ondulatoire, sauf dans des cas particuliers où la forme de l'opérateur X peut être déterminée autrement qu'en fonction de l'opérateur d'évolutions.

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, t. **193**, 1931, p. 518; t. **194**, 1932, p. 589 (***Principes fontamentaux de Physique***).

En effet,

$$X = UX_0U^{-1}, \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h}HU, \qquad U(t, t_0).$$

Il y a donc lieu d'envisager des intégrales dépendant du temps et d'une forme particulièrement simple, celles-ci provenant d'une structure particulière du système. Celui-ci n'étant pas envisagé dans son ensemble comme cela est en partant uniquement de l'hamiltonien, nous pouvons appuyer cette opinion sur le fait qu'une intégrale première linéaire correspond toujours à un déplacement virtuel du système (1).

Envisageons donc les intégrales de ce type.

Conditions issues de la Mécanique classique. — La condition pour qu'une intégrale dépendant du temps soit intégrale classique est, nous l'avons déjà vu,

$$\Sigma_{ir}\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\left(L_r\frac{\partial Q_i}{\partial q_r} - Q_r\frac{\partial L_i}{\partial q_r}\right)\sqrt{g}\right] = 0.$$

Nous avons des égalités en p_i.

Les résultats sont les suivants :

Termes en $p_ip_k^2$:

$$\text{(I)} \qquad P_i\frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i\frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0;$$

Termes en p_i^3 :

$$\text{(II)} \qquad P_i\frac{\partial A_i}{\partial q_i} - A_i\frac{\partial P_i}{\partial q_i} = 0;$$

Termes en p_ip_k :

$$\text{(III)} \qquad A_i\frac{\partial L_k}{\partial q_i} + A_k\frac{\partial L_i}{\partial q_k} = 0;$$

Termes en p_k^2 :

$$\text{(IV)} \qquad \frac{1}{2}\Sigma_i L_i\frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_k\frac{\partial L_k}{\partial q_k} - \frac{\partial P_k}{\partial t} = 0;$$

Les termes en p_i :

$$\text{(V)} \qquad 2P_i\frac{\partial U}{\partial q_i} - A_i\frac{\partial R}{\partial q_i} + \frac{\partial L_i}{\partial t} = 0,$$

et les termes

$$\text{(VI)} \qquad \Sigma_i L_i\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0.$$

En mécanique ondulatoire, nous allons également obtenir la condition en tenant compte de $\frac{\partial A}{\partial t}$.

Nous obtenons les résultats suivants en écrivant que les coefficients des différents termes sont nuls.

Les termes en $\frac{\partial^3}{\partial q_i \partial q_k^2}$,

$$P_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 0; \tag{I}$$

Les termes en $\frac{\partial^3}{\partial q_i^3}$:

$$P_i \frac{\partial A_i}{\partial q_i} - A_i \frac{\partial P_i}{\partial q_i} = 0; \tag{II}$$

Les termes en $\frac{\partial^3}{\partial q_k^3}$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{III})\quad & \Sigma_i P_i \frac{\partial^2 A_k}{\partial q_i^2} - A_i \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_i^2} + 2 P_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) - A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \\ & - 2 A_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} + \Sigma_i Q_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - \frac{2\pi i}{h} \Sigma_i L_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} - 2 A_k \frac{\partial L_k}{\partial q_k} - 2 \frac{\partial P_k}{\partial t} = 0;\end{aligned}$$

Les termes en $\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{IV})\quad & 2 P_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) + 2 P_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}}\right) \\ & - 2\left(A_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + A_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\right) + \frac{4\pi i}{h}\left(A_k \frac{\partial L_i}{\partial q_k} + A_i \frac{\partial L_k}{\partial q_i}\right) = 0;\end{aligned}$$

Les termes en $\frac{\partial}{\partial q_k}$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{V})\quad & \Sigma_i P_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) \\ & + \Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) - \Sigma_i A \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i^2} \\ & + A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - \frac{16\pi^2}{h^2} P_k \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{8\pi^2}{h^2} A_k \frac{\partial R}{\partial q_k} \\ & - 2 A_k \frac{\partial R_1}{\partial q_k} + \frac{4\pi i}{h} A_k \frac{\partial R_2}{\partial q_k} - \frac{2\pi i}{h} \Sigma_i L_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) \\ & - A_i \frac{\partial^2 L_k}{\partial q_i^2} - A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial L_k}{\partial q_i} + \frac{8\pi^2}{h^2} \frac{\partial L_k}{\partial t} + \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial Q_k}{\partial t} = 0\end{aligned}$$

et le terme multiplicateur

$$\text{(VI)}\quad -\frac{8\pi^2}{h^2}\Sigma_i P_i\frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2}+\frac{16\pi^3 i}{h^3}\Sigma_k L_k\frac{\partial U}{\partial q_k}-\frac{8\pi^2}{h^2}\Sigma_k Q_k\frac{\partial U}{\partial q_k}$$
$$-\Sigma_r A_r\frac{\partial^2 R}{\partial q_r^2}+A_r\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\frac{\partial R}{\partial q_r}+\frac{2\pi i}{h}\Sigma A_r\frac{\partial^2 R_2}{\partial q_r^2}$$
$$+A_r\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\frac{\partial R_2}{\partial q_2}+\frac{4\pi i}{h}\frac{\partial R_1}{\partial t}+\frac{8\pi^2}{h^2}\frac{\partial R_2}{\partial t}$$
$$+\frac{16\pi^3 i}{h^3}\frac{\partial R}{\partial t}+\frac{4\pi^2}{h^2}\Sigma_r A_r\frac{\partial^2 R}{\partial q_r^2}+A_r\frac{\partial}{\partial q_r}\operatorname{Log}\frac{g_r}{\sqrt{g}}\frac{\partial R}{\partial q_r}=0.$$

Envisageons tout d'abord le cas des intégrales du premier ordre. La Mécanique classique nous donne une intégrale du type

$$\Sigma L_i\frac{\partial S}{\partial q_i}+R,\qquad P_i\equiv Q_i\equiv R_1\equiv R_2\equiv 0.$$

Il suffit de remarquer que les équations (III), (IV), (VI), de la Mécanique ondulatoire sont obligatoirement vérifiées du fait des équations (III), (IV), (VI) de la Mécanique classique, à l'exception du terme

$$\Phi_k=\Sigma_i L_i\frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)-\Sigma_i\left(A_i\frac{\partial^2 L_k}{\partial q_i^2}+A_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial L_k}{\partial q_i}\right).$$

Ce terme est lui aussi nul. Si nous remarquons que les A_i étant indépendants du temps, toutes solutions dépendant du temps des équations (III), (IV) de la Mécanique est de la forme

$$\Sigma_\alpha\alpha(t)\,L(q_1,\,q_2,\,q_n)$$

[α fonction uniquement du temps; L étant une solution des équations (III), (IV); l'expression Φ_k lui correspondant est nulle], d'où

THÉORÈME. — *Une intégrale première linéaire dépendant ou non du temps, donne en Mécanique ondulatoire une intégrale première ;*

$$\Sigma_i Q_i\frac{\partial S}{\partial q_i}+R$$

est l'intégrale classique :

$$\frac{h}{2\pi i}\Sigma_i Q_i\frac{\partial}{\partial q_i}+R$$

est l'intégrale quantique.

Intégrale du deuxième ordre. — Dans ce cas, l'intégrale classique peut être de la forme

$$\Sigma_i \mathrm{P}_i\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i}\right)^2 + \mathrm{L}_i \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i} + \mathrm{R};$$

en Mécanique ondulatoire, elle est de la forme

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\Sigma_i\left(\mathrm{P}_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + \mathrm{Q}_i\frac{\partial}{\partial q_i} + \mathrm{R}_1\right) + \frac{h}{2\pi i}\Sigma_i\left(\mathrm{L}_i\frac{\partial}{\partial q_i} + \mathrm{R}_2\right) + \mathrm{R}.$$

Les équations (I) et (II) de la Mécanique ondulatoire sont les mêmes pour les P_k que celles de la Mécanique classique.

Les équations (III) et (IV) de la Mécanique ondulatoire, sont obligatoirement satisfaites pour leur partie imaginaire, du fait des équations de la Mécanique classique.

Les parties réelles des équations (III) et (IV) nous montrent, comme pour les intégrales indépendantes, que les Q_i sont obligatoirement de la forme $\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial q_i} + \mathrm{P}_i\frac{\partial}{\partial q_i}\mathrm{Log}\sqrt{g} + \lambda_i$, λ_i vérifiant les équations

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\lambda_i\frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i} - 2\mathrm{A}_k\frac{\partial\lambda_k}{\partial q_k} = 0,\\ &\Sigma\mathrm{A}_i\frac{\partial\lambda_k}{\partial q_i} + \mathrm{A}_k\frac{\partial\lambda_i}{\partial q_k} = 0.\end{aligned}\right.$$

Seules restent à étudier les équations (V) et (VI).

Nous avons à noter que dans l'équation (V), λ_i qui devrait intervenir *a priori* par

$$\Sigma_i\lambda_i\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\mathrm{A}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\mathrm{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) - \Sigma_i\mathrm{A}_i\frac{\partial^2\lambda_k}{\partial q_i^2} + \mathrm{A}_i\frac{\partial}{\partial q_i}\mathrm{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial\lambda_k}{\partial q_i},$$

n'intervient pas en fait, cette expression étant nulle, les λ_i vérifiant le système (E); par suite envisageons dans (V) uniquement

$$\mathrm{Q}_i = \frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial q_i} + \mathrm{P}_i\frac{\partial}{\partial q_i}\mathrm{Log}\sqrt{g}.$$

Nous avons pour cette équation (V) deux équations

$$(\alpha)\quad \Sigma \mathrm{P}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(\mathrm{A}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) + \Sigma_i \mathrm{Q}_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\mathrm{A}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) - \mathrm{A}_i \frac{\partial^2 \mathrm{Q}_k}{\partial q_i^2} - \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial q_i} - 2\mathrm{A}_k \frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial q_k} = 0.$$

$$(\beta)\quad \mathrm{L}_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\mathrm{A}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) - \mathrm{A}_i \frac{\partial^2 \mathrm{L}_k}{\partial q_i^2} - \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial \mathrm{L}_k}{\partial q_i} - 2\mathrm{A}_k \frac{\partial \mathrm{R}_2}{\partial q_k} - 2\frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial t} = 0.$$

Pour α nous savons ici qu'en général pour que cette condition soit satisfaite, nous devons annuler un déterminant (cf. *Étude intégrale indépendante du temps*) et réaliser des conditions linéaires relatives aux λ_{ik}.

Pour β les équations (III) étant les mêmes que pour le cas de l'intégrale linéaire indépendante du temps, la différence entre l'équation (IV) pour l'intégrale dépendant du temps et celles qui en sont indépendantes, portent uniquement sur le terme en $2\frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial t}$.

Tenons-en compte dans le calcul de $\frac{\partial \mathrm{R}_2}{\partial q_k}$

$$\Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\mathrm{A}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) - \mathrm{A}_i \frac{\partial^2 \mathrm{L}_k}{\partial q_i^2} - \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial \mathrm{L}_k}{\partial q_i}.$$

Elle n'interviendra que dans

$$\Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\mathrm{A}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right),$$

Posons

$$\lambda_k = \Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i} = 2\mathrm{A}_k \frac{\partial \mathrm{L}_k}{\partial q_k} + 2\frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial t},$$

$$\Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\mathrm{A}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \frac{g_k}{\sqrt{g}}\right) = \mathrm{A}_k \Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g} + \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g}\, \Sigma \mathrm{L}_i \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i},$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g}\, \lambda_k + \mathrm{A}_k \Sigma_{ik} \mathrm{L}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g},$$

or

$$\Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g} = \Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k - \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_r \mathrm{L}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \mathrm{A}_r,$$

ce qui donne

$$\Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k = \Sigma_i \mathrm{L}_i \left(\frac{\partial^2 \mathrm{A}_k}{\partial q_i \partial q_k} : \mathrm{A}_k - \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_k} : \mathrm{A}_k^2 \right),$$

$$\Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i} = \lambda_k,$$

$$\Sigma \frac{\mathrm{L}_i}{\mathrm{A}_k} \frac{\partial^2 \mathrm{A}_k}{\partial q_i \partial q_k} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial q_k} : \mathrm{A}_k - \Sigma_i \frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i} : \mathrm{A}_k,$$

$$\Sigma_i \mathrm{L}_i \left(\frac{\partial^2 \mathrm{A}_k}{\partial q_i \partial q_k} : \mathrm{A}_k - \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_k} : \mathrm{A}_k^2 \right) = \frac{\partial \lambda_k}{\partial q_k} : \mathrm{A}_k - \frac{\lambda_k}{\mathrm{A}_k^2} \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_k} - \Sigma_i \frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_i} : \mathrm{A}_k,$$

$$\Sigma_{ir} \mathrm{L}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_r} \operatorname{Log} \mathrm{A}_r = \Sigma_{ir} \mathrm{L}_i \left(\frac{\partial^2 \mathrm{A}_r}{\partial q_i \partial q_k} : \mathrm{A}_r - \frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_i} \frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_k} : \mathrm{A}_r^2 \right)$$
$$= \frac{\partial \lambda_r}{\partial q_k} : \mathrm{A}_r - \frac{\lambda_r}{\mathrm{A}_r^2} \frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_r} - \Sigma_{ir} \frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_i} : \mathrm{A}_r,$$

car

$$\Sigma_{ir} = \Sigma_{ri},$$

$$\Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_r} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial q_k} : \mathrm{A}_k - \frac{\lambda_k}{\mathrm{A}_k} \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial q_k} : \mathrm{A}_r - \frac{\lambda_r}{\mathrm{A}_r^2} \frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_k} \right) + \mathrm{B},$$

ce terme B ne nous intéresse pas, nous savons qu'il disparaît quand on retranche

$$\Sigma_i \mathrm{A}_i \frac{\partial^2 \mathrm{L}_k}{\partial q_i^2} + \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial \mathrm{L}_k}{\partial q_i}.$$

Si on ne laisse dans λ_k que $2 \frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial t}$, par suite

$$\lambda_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g} + \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_k} \frac{\mathrm{A}_k}{\lambda_k} \right) - \frac{\mathrm{A}_k}{2} \Sigma_r \left(\frac{\partial \lambda_r}{\partial q_k} : \mathrm{A}_r - \frac{\lambda_r}{\mathrm{A}_r^2} \frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_k} \right),$$

ici $\lambda_k = 2 \frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial t}$

$$\mathrm{A}_k \frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial q_k} - \mathrm{P}_k \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_k} = 0, \qquad \mathrm{A}_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial q_k} - \lambda_k \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_k} = 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathrm{A}_k \frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial q_k} - \mathrm{P}_k \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_k} \right) = 0,$$

la somme à étudier devient

$$\lambda_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \mathrm{A}_k \sqrt{g} - \frac{\mathrm{A}_k}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} \Sigma \frac{\lambda_r}{\mathrm{A}_r}.$$

La formule donnant $\frac{\partial R_2}{\partial q_k}$ étant

$$-\lambda_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} A_k \sqrt{g} - \frac{A_k}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} \Sigma_r \frac{\lambda_r}{A_r} + 2 A_k \frac{\partial R_2}{\partial q_k} + 2 \frac{\partial Q_k}{\partial t} = 0,$$

$$Q_k = \frac{\partial P_k}{\partial q_k} + P_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g},$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_k \partial t} + \frac{\partial P_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g},$$

d'où

$$-2 \frac{\partial P_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} A_k \sqrt{g} - \frac{A_k}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} \Sigma_r \frac{\lambda_r}{A_r} + 2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_k \partial t} + 2 \frac{\partial P_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g}$$
$$-2 \frac{\partial P_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} A_k \sqrt{g} + 2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_k \partial t} - \frac{A_k}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} \Sigma_r \frac{\lambda_r}{A_r}.$$

Or

$$-2 \frac{\partial P_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} A_k + 2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial q_k \partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial P_k}{\partial q_k} - \frac{P_k}{A_k} \frac{\partial A_k}{\partial q_k} \right) = 0,$$

par suite on a

$$-\frac{A_k}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} \Sigma_r \frac{\lambda_r}{A_r} + 2 \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = 0,$$

avec

$$\lambda_r = 2 \frac{\partial P_r}{\partial t}, \qquad -\frac{A_k}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} \Sigma_r 2 \frac{\partial P_r}{\partial t} : A_r + 2 A_k \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial R_2}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} \Sigma_r \frac{\partial P_r}{\partial t} : A_r,$$

d'où

$$\frac{\partial R_2}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial t} \Sigma_r \frac{P_r}{A_r};$$

par conséquent, cette formule étant vérifiée quel que soit k, on peut prendre

$$R_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma_r \frac{P_r}{A_r} + \Phi(t).$$

Il reste maintenant à étudier la dernière équation, celle qui provient des termes multiplicateurs

$$2 \Sigma_i P_i \frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} + Q_i \frac{\partial U}{\partial q_i} - \Sigma_i A_i \frac{\partial^2 R}{\partial q_i^2} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial R}{\partial q_i} = 2 \frac{\partial R_2}{\partial t}.$$

La Mécanique classique nous fournit (VI)

$$\text{(VI)} \qquad 2\mathrm{P}_i \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i} - \mathrm{A}_i \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial t}.$$

Dérivons (VI) par rapport à q_i, d'où

$$\text{(VII)} \qquad 2\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial q_i}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i} + 2\mathrm{P}_i \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial q_i^2} - \mathrm{A}_i \frac{\partial^2 \mathrm{R}}{\partial q_i^2} - \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial q_i}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q_i} = -\frac{\partial^2 \mathrm{L}_i}{\partial q_i \partial t}.$$

Ajoutons à (VII), (VI), multipliée par $\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}$ et sommons par rapport à i, d'où

$$\begin{aligned} 2\Sigma_i \mathrm{P}_i \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial q_i^2} + \mathrm{Q}_i \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i} - \Sigma_i \mathrm{A}_i \frac{\partial^2 \mathrm{R}}{\partial q_i^2} \\ + \mathrm{A}_i \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q_i} = -\Sigma\frac{\partial^2 \mathrm{L}_i}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}. \end{aligned}$$

Or

$$\Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g} = -\frac{1}{2}\Sigma_{ir}\frac{\mathrm{L}_i}{\mathrm{A}_r}\frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_i},$$

on a

$$\Sigma_{ir}\frac{\mathrm{L}_i}{\mathrm{A}_r}\frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_i} = \Sigma_{ri}\frac{\mathrm{L}_i}{\mathrm{A}_r}\frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_i}.$$

Or

$$\Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_i} = 2\mathrm{A}_r \frac{\partial \mathrm{L}_r}{\partial q_r} + 2\frac{\partial \mathrm{P}_r}{\partial t},$$

$$\Sigma_{ri}\frac{\mathrm{L}_i}{\mathrm{A}_r}\frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial q_i} = 2\Sigma_r \frac{\partial \mathrm{L}_r}{\partial q_r} + 2\Sigma_r \frac{\partial \mathrm{P}_r}{\partial t} : \mathrm{A}_r,$$

$$\Sigma_i \mathrm{L}_i \frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g} = -\Sigma\frac{\partial \mathrm{L}_r}{\partial q_r} - \Sigma\frac{\partial \mathrm{P}_r}{\partial t} : \mathrm{A}_r,$$

d'où

$$\begin{aligned} \Sigma\frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g} + \frac{\partial^2 \mathrm{L}_i}{\partial q_i \partial t} = -\Sigma_r \frac{\partial^2 \mathrm{L}_r}{\partial q_r \partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Sigma_r \frac{\mathrm{P}_r}{\mathrm{A}_r} \\ + \Sigma_r \frac{\partial^2 \mathrm{L}_r}{\partial q_r \partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Sigma_r \frac{\mathrm{P}_r}{\mathrm{A}_r} = -2\frac{\partial \mathrm{R}_2}{\partial t}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathrm{R}_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_r \frac{\mathrm{P}_r}{\mathrm{A}_r};$$

les diverses équations fournissant R_2 sont compatibles.

Par conséquent, l'intervention effective du temps dans les intégrales du deuxième ordre ne fait pas intervenir de conditions supplémentaires.

On a donc les théorèmes I et II suivants :

THÉORÈME I. — *Pour qu'une intégrale première du deuxième ordre de la Mécanique classique* $\Sigma P_i p_i^2 + R_i p_i + R$ *dépendant du temps donne lieu à une intégrale quantique, il faut et il suffit que les deux déterminants* H_1 *et* H_2 *soient nuls et que* λ_{ik} *soient proportionnels aux mineurs correspondants.*

THÉORÈME II. — *Quand une intégrale première classique dépendante du temps* $\Sigma P_i p_i^2 + R_i p_i + R$ *donne lieu à une intégrale première quantique, l'hamiltonien étant* $\Sigma \frac{1}{2} A_i p_i^2 + U$, *l'intégrale première quantique*

$$A = -\frac{h^2}{4\pi^2}\Sigma\left(P_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + Q_i\frac{\partial}{\partial q_i} + R_1\right) + \frac{h}{2\pi i}\Sigma(L_i p_i + R_r + R)$$

est telle que

$$Q_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_i} + P_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g},$$

$$R_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Sigma\frac{P_r}{A_r},$$

CHAPITRE IX.

SÉPARATION DES VARIABLES. CAS DE LIOUVILLE ET DE STAECKEL.

Nous étudions ici la transposition en Mécanique ondulatoire de deux cas d'intégration de la Mécanique classique.

Tout d'abord le cas de Liouville (1).

1° On sait qu'en Mécanique classique, on appelle *cas de Liouville* celui où la force vive 2T et la fonction de force se réduisent à

$$2T = \Sigma_i A_i \Sigma_j B_j q_j'^2, \qquad U = \frac{\Sigma U_i}{\Sigma A_i},$$

(1) *C. R. Acad. Sc.*, **222**, 1940, p. 1032-1033.

où A_i, B_i, U_i sont fonction uniquement de la variable q_i, ce cas se ramenant par le changement de variable

$$Q_i = \int_0^{q_i} \sqrt{B_i}\, dq_i,$$

au cas plus simple

$$2T = \Sigma_i A_i \Sigma_i Q_i'^2, \qquad U = \frac{\Sigma U_i}{\Sigma A_i}.$$

On peut intégrer complètement le problème, l'équation de Jacobi réduite

$$H = E = \frac{1}{\Sigma_i A_i}\left[\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 - \Sigma U\right]$$

se décomposant en n équations

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 - U(q_i) - EA_i = 0.$$

Mécanique ondulatoire. — L'équation de Schrödinger dans le problème correspondant de la Mécanique ondulatoire va donner l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{\Sigma_j A_j}\Sigma_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j^2} + \frac{\Sigma_j\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{(\Sigma_j A_j)^2}\frac{\partial A_j}{\partial q_j}\frac{\partial \psi}{\partial q_j} + \frac{8\pi^2}{h_2}\left[\frac{\Sigma U_i}{\Sigma A_i} + E\right]\psi = 0,$$

en dehors du cas où $n = 2$, où l'équation devient

$$\sum_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i^2} + \frac{8\pi^2}{h^2}\Sigma(U_i + EA_i)\psi = 0,$$

et donne lieu à la séparation des variables, l'équation (1) n'admet pas de solution sous la forme d'un produit de fonction de chacune des variables, ce résultat tient à la présence dans (1) du terme $\left(\frac{n}{2} - 1\right)\Sigma_i\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right) : (\Sigma_i A_i)^2$ à l'exception du cas où $n = 2$.

D'ailleurs, en posant

$$X = (\Sigma A_i)^{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}}\psi,$$

on retrouve l'équation

$$\Delta\psi - \left[\Sigma \mathrm{U}_i + \mathrm{E}\Sigma \mathrm{A}_i - \frac{\Delta(\Sigma \mathrm{A}_i)^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}{(\Sigma \mathrm{A}_i)^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}\right]\chi = 0,$$

on retrouve aussi cette impossibilité.

Cas de Staeckel. — Nous pouvons d'ailleurs généraliser cette étude au cas de Staeckel qui se présente de la manière suivante en Mécanique classique, on envisage un système mécanique dont la force vive est de la forme

$$2\mathrm{T} = \frac{\Sigma\,\Delta_i'^2}{\Phi_i} = \Delta q_i'^2 : \Phi_i,$$

Δ étant un déterminant dont les éléments sont des fonctions $\varphi(q_i)$.

φ étant la même pour une même ligne, Φ étant le mineur de celui de φ_i.

Le potentiel U est de la forme $\Sigma f_i(q_i)\Phi_i : \Delta$.

On peut intégrer complètement le système avec

$$\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i}\right)^2 2f_i + \mathrm{E}\varphi_i + a_1\psi_i + a_2\chi_i,$$

a_1, a_2 et a_2 étant des constantes (cas à trois paramètres), *en Mécanique ondulatoire.*

L'équation de Schrödinger nous donne

$$\Sigma_i \varphi_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + \Sigma_i \left[\varphi_i\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{\partial \Delta}{\partial q_i} : \Delta - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}[\Pi(\varphi_i)] : \Pi(\varphi_i)\right]\frac{\partial \psi}{\partial q_i} + \frac{8\pi^2}{h^2}(\mathrm{E}\Delta + \Sigma f_i \varphi_i)\,\psi = 0.$$

On voit que, comme précédemment, la présence du terme

$$\Sigma_i \left[\varphi_i\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{\partial \Delta}{\partial q_i} : \Delta - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}[\Pi(\varphi_i)] : \Pi(\varphi_i)\right]\frac{\partial \psi}{\partial q_i}$$

interdit toute séparation des variables à l'exception du cas où $n = 2$; d'ailleurs, en posant

$$\chi = \frac{\Delta^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}{[\Pi(\varphi_i)]^{\frac{1}{4}}}\psi,$$

on a

$$\Sigma \Phi_i \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_i^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} \left\{ E\Delta + \Sigma f_i \Phi_i + \frac{h^2}{8\pi^2} \Phi_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} \left[\frac{\Delta^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}{[\Pi(\varphi_i)]^{\frac{1}{4}}} \right] : \frac{\Delta^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}{[\Pi(\varphi_i)]^{\frac{1}{4}}} \right\} \chi = 0,$$

ce qui montre bien que la séparation ne peut avoir lieu,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} \frac{\Delta^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}{[\pi(\varphi_i)]^{\frac{1}{4}}} \right) : \frac{\Delta^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}{[\pi(\varphi_i)]^{\frac{1}{4}}}$$

n'étant nullement une fonction de q_i seulement.

Dans cette étude nous voyons que la correspondance Mécanique classique-Mécanique ondulatoire ne joue pas pour les cas de séparation de variables, qu'une méthode d'intégration valable en Mécanique classique ne peut être utilisée en Mécanique ondulatoire (nous pouvons noter que nous retrouvons dans cette étude le cas que nous avons signalé pour les intégrales premières du système dépendant de deux paramètres).

Il y a lieu toutefois de signaler que la correspondance entre la Mécanique classique et la Mécanique ondulatoire peut être poursuivie si on ne l'envisage qu'au point de vue formel; autrement dit étant donné un système classique dans le cas de Staeckel, on pourrait envisager de résoudre le problème de la manière suivante.

On envisagerait *a priori* des solutions de la forme

$$\Sigma \Phi_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} \Sigma (f_i \Phi_i + EA) \psi = 0;$$

ces solutions admettront des solutions produit des solutions de

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} (f_i + a_1 \chi_1 + E\varphi_1) \psi = 0,$$

mais ce problème n'est pas un des problèmes correspondants en Mécanique ondulatoire, à ceux que nous avons signalés en Mécanique classique.

CHAPITRE X.

CORRESPONDANCE ENTRE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE ET LA MÉCANIQUE CLASSIQUE.

Nous avons jusqu'ici étudié la correspondance dans le sens Mécanique classique-Mécanique ondulatoire, en précisant dans le premier chapitre le chapitre de cette correspondance.

Nous allons donner brièvement quelques indications sur le problème inverse pour le premier et le deuxième ordre en utilisant les études analytiques déjà effectuées. Pour le cas du premier ordre, le problème ne pose pas de difficultés [1]. Pour le cas du second ordre, il y a lieu de donner quelques précisions. Supposons l'existence pour un système dont l'hamiltonien est

$$-\frac{h^2}{8\pi^2}\Sigma_i\left(A_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}+A_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\right)+U,$$

d'une intégrale première indépendante du temps

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\Sigma_i\left(P_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}+Q_i\frac{\partial}{\partial q_i}+R_1\right)+R.$$

On sait que l'on a

$$Q_i=\frac{\partial P_i}{\partial q_i}+P_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g},$$

et que, de ce fait, les équations qui restent à vérifier sont celles relatives aux termes en $\frac{\partial}{\partial q_k}$ et multiplicateurs de l'équation $AH-HA=0$.

En particulier, pour les termes en $\frac{\partial}{\partial q_k}$, on a l'équation

$$\begin{aligned}\Sigma_i P_i\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\left(A_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)+\Sigma_i Q_i\frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_k\frac{\partial}{\partial q_k}\operatorname{Log}\frac{g_k}{\sqrt{g}}\right)&\\ -\Sigma_i A_i\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i^2}+A_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\frac{g_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}&\\ +\frac{16\pi^2}{h^2}P_k\frac{\partial U}{\partial q_k}-\frac{8\pi^2}{h^2}A_k\frac{\partial R}{\partial q_k}-2A_k\frac{\partial R_1}{\partial q_k}&=0,\end{aligned}$$

---

[1] Cas du potentiel scalaire.

ou

$$E - \frac{8\pi^2}{h^2} A_k \frac{\partial R}{\partial q_k} - 2 A_k \frac{\partial R_1}{\partial q_k} + \frac{16\pi^2}{h^2} P_k \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0.$$

L'intégrale classique serait de la forme

$$\Sigma_i P_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 + R_2,$$

et R'_2 devrait satisfaire aux équations

$$2 P_k \frac{\partial U}{\partial q_k} - A_k \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = 0.$$

Nous aurons donc

$$E - \frac{8\pi^2}{h^2} A_k \frac{\partial R}{\partial q_k} - 2 A_k \frac{\partial R_1}{\partial q_k} + \frac{8\pi^2}{h^2} A_k \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = 0,$$

$$E - 2 A_k \frac{\partial R_3}{\partial q_k} = 0, \qquad R_3 = R_1 + \frac{4\pi^2}{h^2}(R - R_2).$$

Par suite, et P_i et A_k devront satisfaire aux conditions déjà étudiées pour que $\frac{\partial R_3}{\partial q_k}$ soit bien la dérivée partielle d'une fonction.

Par ailleurs, des considérations de physique théorique nous conduisent à poser $R = R_2$ pour éviter la présence de la constante de Planck, dans l'expression E où elle n'intervient pas initialement.

On est alors conduit à imposer la condition complémentaire

$$2 P_k \frac{\partial U}{\partial q_k} - A_k \frac{\partial R}{\partial q_k} = 0.$$

Autrement dit, il n'est possible de parler de correspondance Mécanique ondulatoire et Mécanique classique qu'en ajoutant explicitement des équations à celles de la Mécanique ondulatoire. Pour ce qui est du terme multiplicateur, il n'y a aucune difficulté. Dans ce cas, on peut donc affirmer qu'à une intégrale quantique correspond une intégrale classique.

Par contre, si l'on envisage le problème du point de vue purement mathématique en n'imposant à P et A, U, R aucune restriction relative à des ordres de grandeur, on ne peut affirmer l'existence simultanée des intégrales quantiques et classiques.

CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Dans cette première Partie nous avons vu, en dehors des considérations purement mathématiques, un certain nombre de résultats intéressants du point de vue de la Physique théorique. C'est ainsi que nous avons vu que, dans le cas d'un potentiel scalaire, une intégrale linéaire F donnait lieu à une intégrale quantique A [1]. Dans le cas où l'intégrale ne dépend pas du temps, la commutativité des opérateurs énergie et A montrait la possibilité de la mesure de A simultanément avec celle de H. La liaison de F et des déplacements virtuels du système éclaire d'une manière toute particulière ce phénomène. Nous avons vu également que pour les intégrales du second ordre, l'existence d'une intégrale en Mécanique classique ne permet pas de conclure à une intégrale quantique, si ce n'est le cas d'un système séparable de Liouville à deux paramètres.

Nous avons pu mettre en évidence l'existence d'un principe d'extremum relatif à la formation des opérateurs d'intégrales du deuxième ordre.

Devant la généralité de ce principe, nous proposions, lors de notre thèse, de l'admettre comme procédé de formation des opérateurs, même si ceux-ci n'étaient pas intégrales premières.

CHAPITRE XI.

HERMITICITE DES OPÉRATEURS [2].

I. L'étude, à partir de la Mécanique ondulatoire, des phénomènes physiques et des grandeurs mécaniques associées, nécessite la connaissance d'opérateurs, en fonction de ceux-ci et à partir des deux prin-

---

[1] Nous verrons, dans la deuxième Partie, la signification de la condition supplémentaire composée par la Mécanique ondulatoire et que la connaissance de l'hamiltonien quantique correcte permet d'affirmer également la correspondance dans le cas d'un champ magnétique.

[2] Cette étude a été faite après notre soutenance.

cipes fondamentaux, il est possible de déterminer les valeurs de chacune des grandeurs mécaniques associées et la probabilité de l'état à laquelle elle correspond.

Nous allons voir dans l'étude suivante que cette condition est fondamentale pour la détermination des opérateurs à partir des fonctions de la Mécanique classique.

Position du problème. — Le système mécanique envisagé est défini par l'Hamiltonien classique, c'est-à-dire par son énergie et la fonction potentielle. Ce système est bien entendu supposé holonome. Nous définissons comme on le fait traditionnellement par g le déterminant de la forme quadratique

$$ds^2 = 2\mathrm{T}\,dt^2 = \Sigma a_{ik}\,dq_i\,dq_k, \qquad a_{ik} = a_{ki},$$

T étant l'énergie cinétique du système.

Précédemment, nous avions conclu qu'aux fonctions

$$\Sigma_i \mathrm{Q}_i p_i \quad \text{et} \quad \Sigma_{ik} \mathrm{P}_{ik} p_i p_k$$

ne pouvaient correspondre en Mécanique ondulatoire que les opérateurs, du fait de la simultanéité des équations de Poisson et de Dirac

$$\frac{h}{2\pi i}\Sigma_i \mathrm{Q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \quad \text{et} \quad -\frac{h^2}{4\pi^2}\Sigma_{ik}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\mathrm{P}_{ik}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial q_k}\right) + \mathrm{R}_1,$$

l'existence de R_1 entraînant toute une série de conditions et n'étant possible que pour certains systèmes particuliers; nous avions proposé d'étendre le résultat relatif aux termes du deuxième ordre sous forme de principe à tous les opérateurs déduits de la fonction, indépendamment de toutes conditions d'intégrales premières.

Toutefois, la détermination des opérateurs du premier ordre et du deuxième ordre, à partir des fonctions correspondantes n'apparaît pas comme provenant d'un principe unique, ce qui est contraire à l'esprit de la physique théorique.

Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de retrouver les résultats précédents en les généralisant et en imposant des conditions moins restrictives que les précédentes.

Nous allons montrer qu'il est possible de déterminer la forme des opérateurs à partir des fonctions de la Mécanique classique et en leur imposant l'hermiticité.

Nous imposerons comme conditions aux opérateurs d'être hermitiques dans un domaine que nous supposerons variable arbitrairement, la forme de l'opérateur est bien entendu indépendante de cette variation.

Opérateurs du premier ordre. — Soit une fonction $F = \Sigma_i Q_i p_i$. Si l'on admet qu'elle dérive de l'opérateur A cherché, par l'approximation de l'optique géométrique, celui-ci ne pourra être que de la forme

$$\frac{h}{2\pi i} \Sigma Q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + R,$$

cet opérateur doit être hermitique dans le domaine D.

Écrivons cette condition, on a

$$\int_D f A(e)\, d\tau = \int_D e\, A^*(f)\, d\tau,$$

$$\frac{h}{2\pi i} \int_D f\left(\Sigma_i Q_i \frac{\partial e}{\partial q_i} + Re\right) d\tau = -\frac{h}{2\pi i} \int_D e\left(\Sigma_i Q_i \frac{\partial f}{\partial q_i} + Rf\right) d\tau,$$

d'où

$$\int_D \left[\Sigma_i Q_i \left(\frac{\partial e}{\partial q_i} f + e \frac{\partial f}{\partial q_i}\right) + 2Rfe\right] \sqrt{g}\, dq_1\, dq_2\, dq_n;$$

si l'on prend

$$2R\sqrt{g} = \Sigma_i \frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i \sqrt{g}),$$

l'intégrale peut s'écrire

$$\int_D \Sigma_i \frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i \sqrt{g} ef)\, dq_1\, dq_2\, dq_n,$$

et en appliquant la formule d'Ostrogradsky (à l'espace cartésien $q_1 q_2 q_n$)

$$\int_D \Sigma_i Q_i \sqrt{g} ef \alpha_i\, d\sigma = \int_D \Sigma_i \frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i \sqrt{g} ef)\, dq_1\, dq_2\, dq_n,$$

or, f et e sont nulles sur les surfaces (définition des opérations hermitiques).

La fonction R est unique; en effet, soit deux fonctions R_1 et R_2 satisfaisant à la condition d'hermiticité

$$\int_D (R_1 - R_2) ef\, d\tau, \qquad R_1 - R_2 = R,$$

ce qui est impossible si l'on prend f et e quelconques; R n'est en effet que supposé fonction des q_i indépendants des f et e. Il suffit de prendre f et e égales et d'imposer l'hermiticité dans un domaine suffisamment petit pour que R garde un signe constant, fe sera toujours positif $ef = e^2$.

Remarque. — Dans notre thèse nous avions vu que l'opérateur intégrale première déduit de la fonction $\Sigma Q_i p_i$ était $\frac{h}{2\pi i}\Sigma_i Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}$. R étant nul, la question de non contradiction avec le résultat précédent se pose.

Pour simplifier, revenons au cas où le ds^2 a été ramené à la forme $\Sigma a_i\, dq_i^2$, ce qui est toujours possible (même pour un ds^2 Riemanien), nous obtenons deux types de relations, F étant intégrale première.

$$\text{(I)} \qquad \Sigma_i Q_i \frac{\partial A_k}{\partial q_i} = 2 A_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_k},$$

$$\text{(II)} \qquad A_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + A_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = 0,$$

nécessaires pour montrer que $AH - HA = 0$, de (I), on tire

$$\Sigma Q \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{A_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_k};$$

en sommant par rapport à k on a

$$\Sigma Q_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \Pi \sqrt{A_k} = \Sigma_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_k}.$$

Or

$$\Pi \sqrt{A_k} = \frac{1}{\sqrt{g}}, \qquad \text{d'où} \qquad \Sigma_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} + \Sigma_k Q_k \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g} = 0,$$

on retrouve bien la formule donnée par l'hermiticité.

On peut également envisager la recherche de R_2 dans le cas du terme complémentaire de l'opérateur

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\Sigma_i\left(P_i^2\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}+Q_i\frac{\partial}{\partial q_i}+R_1\right)+\frac{h}{2\pi i}\Sigma_i\left(L_i\frac{\partial}{\partial q_i}+R_2\right)+R_1,$$

l'opérateur envisagé est alors la somme de trois opérateurs qui sont tous hermitiques, d'où

$$R_2=\frac{1}{2}\Sigma_i\frac{\partial L_i}{\partial q_i}+L_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}.$$

Les équations de compatibilité provenant de la Mécanique classique sont :

$$\frac{1}{2}\left[\Sigma_i L_i\frac{\partial A_k}{\partial q_i}\right]-A_k\frac{\partial L_k}{\partial q_k}=\frac{\partial P_k}{\partial t},$$

d'où

$$\Sigma_{ik}\frac{L_i}{2A_k}\frac{\partial A_k}{\partial q_i}-\Sigma_k\frac{\partial L_k}{\partial q_k}=\Sigma_k\frac{\partial P_k}{\partial t}:A_k$$

et

$$\frac{1}{2}\Sigma_{ik}\frac{L_i}{A_k}\frac{\partial A_k}{\partial q_i}-\Sigma_k\frac{\partial L_k}{\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_k\frac{P_k}{A_k}$$

ou

$$\Sigma_i\left(L_i\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}+\frac{\partial L_i}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_k\frac{P_k}{A_k},$$

par suite la formule R_2, on retrouve bien la formule donnée par les équations de commutativité des opérateurs.

Elle concorde d'ailleurs avec la précédente.

Dans ce cas $P_k=0$ et $R_2=0$.

Une remarque très importante doit être faite au sujet des intégrales premières du premier ordre pour un champ électromagnétique.

Champ électromagnétique. — Nous avions vu qu'on devait ajouter aux conditions issues de la Mécanique classique la condition

$$(1)\qquad \Sigma_{ir}\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\left(L_r\frac{\partial Q_i}{\partial q_r}-Q_r\frac{\partial L_i}{\partial q_r}\right)\sqrt{g}\right]=0.$$

Cette condition ne présente pas ainsi un intérêt physique immédiat. Nous allons maintenant montrer à la lumière des formules précédentes sa signification :

(1) peut s'écrire

$$\begin{aligned}A+B+C= & \left(\frac{\partial L_r}{\partial q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial q_r}-\frac{\partial Q_r}{\partial q_i}\frac{\partial L_i}{\partial q_r}\right)\sqrt{g}\\ & +\left(L_r\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_i\,\partial q_r}-Q_r\frac{\partial^2 L_i}{\partial q_i\,\partial q_r}\right)\sqrt{g}+\left(L_r\frac{\partial Q_i}{\partial q_r}-Q_r\frac{\partial L_i}{\partial q_r}\right)\frac{\partial}{\partial q_i}\sqrt{g},\end{aligned}$$

(A) est identiquement nul du fait de sa structure, la somme B et C peut s'exprimer autrement, on peut écrire la relation

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{g}}(B+C)= & \Sigma_r L_r \Sigma_i\left(\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_i\,\partial q_r}+\frac{\partial Q_i}{\partial q_r}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right)\\ & -\Sigma_r Q_r \Sigma_i\left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial q_i\,\partial q_r}+\frac{\partial L_i}{\partial q_r}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g}\right),\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}B+C=A_1+B_1+C_1+D_1= & \Sigma_r L_r\frac{\partial}{\partial q_r}\Sigma_i\frac{\partial}{dq_i}(Q_i\sqrt{g})-\Sigma_{ir}L_r Q_i\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}\\ & -\Sigma_r Q_r\frac{\partial}{\partial q_r}\Sigma_i\frac{\partial}{\partial q_i}(L_i\sqrt{g})+\Sigma_{ri}Q_r L_i\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}.\end{aligned}$$

Pour chaque valeur de r les équations de la Mécanique classique montrent que A_1 est nul, la somme $B_1+D_1=0$

$$B_1+D_1=\Sigma_{ir}(Q_r L_i-L_r Q_i)\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_r}\operatorname{Log}\sqrt{g}$$

est identiquement nulle du fait de sa structure; seule demeure la condition

$$C_1=\Sigma_r Q_r\frac{\partial}{\partial q_r}\Sigma_i(L_i\sqrt{g})=0.$$

Ainsi apparaît le fait que l'opérateur hamiltonien initial n'est pas hermitique du fait de la présence de

$$\frac{h}{2\pi_i}\Sigma L_i\frac{\partial}{\partial q_i}.$$

L'expression $\Sigma_i \frac{\partial L_i}{\partial q_i} + L_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}$ étant nulle pour un opérateur hermitique $\frac{h}{2\pi i} \Sigma L_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ dans l'espace de configuration où $d\tau = \sqrt{g}\, dq_i\, dq_n$.

En effet, les opérateurs

$$-\frac{h^2}{8\pi^2}\left(A_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_i}\right) + U \quad \text{et} \quad \frac{h}{2\pi i} \Sigma L_i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

doivent être séparément hermitiques. On doit associer aux L_i dans

$$\frac{h}{2\pi i} \Sigma L_i \frac{\partial}{\partial q_i} + R_1,$$

un terme R_1 tel que

$$R_1 = \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum \frac{\partial}{\partial q_i} (L_i \sqrt{g}).$$

En tenant compte de ce terme dans les seules équations où il ait à intervenir que celles-ci sont alors vérifiées, on a alors

$$\text{(E)} \qquad \Sigma_i \left(A_i \frac{\partial^2 R}{\partial q_i^2} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial R}{\partial q_i} - 2 Q_i \frac{\partial R_1}{\partial q_i} \right) = 0.$$

On vient de voir que

$$\Sigma_i \left(A_i \frac{\partial^2 R}{\partial q_i^2} + A_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \frac{g_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial R}{\partial q_i} \right) = \Sigma_r Q_r \frac{\partial}{\partial q_r} \Sigma_i \frac{\partial L_i}{\partial q_i} + L_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g},$$

on voit bien que (E) est vérifiée.

Remarque. — La forme de l'opérateur est indiscutablement liée d'une part par la manière dont la formule a été obtenue, d'autre part par sa forme même à la théorie des multiplicateurs et des invariants intégraux.

La condition $\sum \frac{\partial L_i}{\partial q_i} + L_i \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} = 0$ exprime que $\sqrt{g}$ est multiplicateur du système $\frac{dq_i}{L_i} = \frac{dq_n}{L_n}$.

Opérateur hermitique du deuxième ordre.

Nous avons, dans l'étude du premier ordre déduit l'opérateur hermitique de la fonction par l'intermédiaire de la formule d'Ostrogradsky. Écrivons la condition d'hermiticité pour un opérateur du deuxième ordre $P_{ik} = P_{ki}$

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\Sigma_{ik} P_{ik}\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k} + Q_i\frac{\partial}{\partial q_i} + R_1,$$

$$\int_D \left(P_{ik}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\,\partial q_k} + Q_i\frac{\partial f}{\partial q_i} + R_1\right) e\sqrt{g}\,dq_1\,dq_n$$

$$= \int_D \left(P_{ik}\frac{\partial^2 e}{\partial q_i\,\partial q_k} + Q_i\frac{\partial e}{\partial q_i} + R_1\right) f\sqrt{g}\,dq_1\,dq_n,$$

$$\int_D \left[P_{ik}\sqrt{g}\left(e\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\,\partial q_k} - f\frac{\partial^2 e}{\partial q_i\,\partial q_k}\right) + Q_i\sqrt{g}\left(e\frac{\partial f}{\partial q_i} - f\frac{\partial e}{\partial q_i}\right)\right] dq_1\,dq_n = 0.$$

On a, en envisageant sur la surface S, l'intégrale

$$\int_S \Sigma_{ik} P_{ik}\sqrt{g}\left(e\frac{\partial f}{\partial q_i} - f\frac{\partial e}{\partial q_i}\right)\alpha_k\,d\sigma = 0.$$

Les fonctions f et e étant nulles sur S, d'où en appliquant la formule d'Ostrogradsky

$$\int_D \Sigma_{ki}\frac{\partial}{\partial q_k}\left[P_{ik}\sqrt{g}\right]\left(e\frac{\partial f}{\partial q_i} - f\frac{\partial e}{\partial q_i}\right) dq_1\,dq_2\,dq_n = 0,$$

d'où

$$\int_D \left[\Sigma_{ik} P_{ik}\sqrt{g}\left(e\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\,\partial q_k} + \frac{\partial e}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial e}{\partial q_i} - f\frac{\partial^2 e}{\partial q_i\,\partial q_k}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(P_{ik}\sqrt{g}\right)\left(e\frac{\partial f}{\partial q_i} - f\frac{\partial e}{\partial q_i}\right)\right] dq_1\,dq_n = 0.$$

Si l'on remarque que, puisque $P_{ik} = P_{ki}$ les termes $\frac{\partial e}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial q_i}$, $\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial e}{\partial q_i}$ disparaissent, on obtient bien ainsi la formule

$$Q_i = \frac{1}{\sqrt{g}}\Sigma_k\frac{\partial}{\partial q_k}\left(P_{ik}\sqrt{g}\right).$$

Montrons-en l'unité si

$$Q_i\sqrt{g} = \lambda_i + \Sigma_k \frac{\partial}{\partial q_k}(P_{ki}\sqrt{g}).$$

On a

$$\int_D \lambda_i\left(e\frac{\partial f}{\partial q_i} - f\frac{\partial e}{\partial q_i}\right) dq_1\, dq_n = 0,$$

quel que soit e et f, nulles sur D.

Supposons les λ_i connus, on a alors en prenant $f = e^n$

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = n\, e^{n-1}\frac{\partial e}{\partial q_i}.$$

$$e\frac{\partial f}{\partial q_i} = n\, e^n\frac{\partial e}{\partial q_i},$$

d'où

$$\int_D \Sigma_i\lambda_i\left(e\frac{\partial f}{\partial q_i} - f\frac{\partial e}{\partial q_i}\right) dq_1\, dq_n = \int_D \Sigma_i\left(\lambda_i e^n\frac{\partial e}{\partial q_i}\right) dq_1\, dq_n,$$

$$\int_D \Sigma_i\left(\lambda_i e^n\frac{\partial e}{\partial q_i}\right) dq_1\, dq_n = \int_D \Sigma\lambda_i\frac{\partial e^{n+1}}{\partial q_i}\, dq_1\, dq_n = 0$$

et, par conséquent,

$$\int_D \Sigma_i\frac{\partial\lambda_i}{\partial q_i} e^{n+1}\, dq_1\, dq_n = 0,$$

d'où

$$\Sigma_i\frac{\partial\lambda_i}{\partial q_i} = 0,$$

on a

$$\int_D \Sigma_i(\lambda_i e)\, e^{n-1}\frac{\partial e}{\partial q_i}\, dq_1\, dq_n = 0.$$

On peut donc, puisque e est quelconque et en supposant $n > 1$, avoir l'équation

$$\Sigma_i\frac{\partial}{\partial q_i}(\lambda_i e) = 0,$$

soit

$$e\,\Sigma_i\frac{\partial\lambda_i}{\partial q_i} + \Sigma_i\lambda_i\frac{\partial e}{\partial q_i} = 0,$$

$$\Sigma_i\frac{\partial\lambda_i}{\partial q_i} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma_i\lambda_i\frac{\partial e}{\partial q_i} = 0.$$

On peut alors écrire n équations, à partir des fonctions e_1, e_2, e_n et l'on a un système d'équation linéaire homogène en λ_i dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial q_1} & \frac{\partial e_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial e_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial e_2}{\partial q_1} & \frac{\partial e_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial e_2}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \mathrm{J},$$

Jacobien des n fonctions e. On sait que n fonctions nulles sur une même surface S peuvent être prises indépendamment dans D. J n'est pas nul, les λ_i sont donc tous nuls, la solution est unique, d'où

Théorème. — *L'opérateur hermitique du deuxième ordre dans un espace de configuration de capacité tensorielle* $\sqrt{g}$ *est*

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\Sigma_{ik}\mathrm{P}_{ik}\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k} + \frac{1}{\sqrt{g}}\Sigma_i\frac{\partial}{\partial q_i}(\mathrm{P}_{ik}\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_k} + \mathrm{R},$$

R *étant arbitraire.*

Détermination des opérateurs.

Nous n'avons jusqu'ici qu'effectué l'étude des opérateurs correspondants à des fonctions des moments de Poisson. Il nous semble utile de procéder à la formation des opérateurs d'aspects différents, comprenant par exemple des dérivées des divers ordres des coordonnées par rapport au temps.

Cette détermination se fait aisément si l'on admet la possibilité de la correspondance entre la Mécanique ondulatoire et la Mécanique classique par l'approximation de l'optique géométrique.

Envisageons dans ce cas une fonction quelconque des coordonnées et du temps des dérivées d'ordre quelconque des coordonnées par rapport au temps.

Le système envisagé étant holonome, son hamiltonien étant donné, le système évolue en cours du temps et l'on a le système d'équations d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

On peut dès lors exprimer uniquement en fonction des p_i les diverses dérivées partielles des coordonnées q_i; en effet, on a

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = -\Sigma_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_k}\frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial t},$$

soit

$$\frac{d^2 q_i}{\partial t^2} = \Sigma_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial t}.$$

Il suffit de procéder ainsi pour les diverses dérivées des coordonnées q_i par rapport au temps, quant aux dérivées d'une fonction quelconque par rapport au temps. Elles s'obtiennent par la même méthode

$$\frac{dF}{dt} = \Sigma_i\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \Sigma_i\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial t};$$

la dérivée seconde s'obtient aisément à partir de

$$\frac{d}{dt}\left[\Sigma_i\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial t}\right],$$

de même pour les autres dérivées, dont on calcule les dérivées par la même méthode que précédemment.

On peut appliquer ici au calcul des fonctions des dérivées quelconques à partir des p_i et utiliser les résultats indiqués plus haut pour le passage à la Mécanique ondulatoire.

Construction des opérateurs hermitiques.

Étant donné deux opérateurs R et S tous deux hermitiques, nous savons que l'opérateur $RS + SR$ est également un opérateur hermitique.

Nous allons, à partir de cette remarque effectuer par la construction de l'ensemble des opérateurs à partir des fonctions. Il suffit de remarquer que les opérateurs étant linéaires, il est possible de construire l'opérateur comme somme d'autres opérateurs.

Ainsi $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_n$ s'obtiendra en construisant A_1, A_2 et A_3 et A_n.

Nous verrons dans les exemples suivants l'intérêt de cette méthode et le degré de généralité des opérateurs ainsi obtenus.

Opérateurs du deuxième ordre. — L'opérateur doit donner par approximation de l'optique géométrique la fonction $\Sigma_{ik} P_{ik} p_i p_k$.

Pour l'obtenir, on pose, en tenant compte de l'*ordre* des indices,

$$P_{ik} = Q_i Q_k, \qquad P_{ki} = Q_k Q_i, \qquad P_{ik} = P_{ki},$$

Q_i et Q_k étant deux fonctions quelconques, mais telles que leur produit soit P_{ik}.

On obtient ainsi dans l'espace de configuration l'opérateur correspondant à $\Sigma_{ik} P_{ik} p_i p_k$, soit

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\left[Q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1}{2\sqrt{g}}(Q_i\sqrt{g})\right]\left[Q_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_k}(Q_k\sqrt{g})\right] = A,$$

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\left[Q_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{1}{2\sqrt{g}}(Q_k\sqrt{g})\right]\left[Q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i\sqrt{g})\right] = B.$$

Développons (A) et déterminons les coefficients des divers termes différentiels

$$Q_i Q_k \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} + Q_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{Q_i}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(Q_k\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_i}$$
$$+ Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_k}(Q_k\sqrt{g})\right] + \frac{1}{2\sqrt{g}} Q_k \frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_k}$$
$$+ \frac{1}{4g}\frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_k}(Q_k\sqrt{g}).$$

Le terme en $\dfrac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}$ est P_{ik}.

Étudions les termes différentiels du premier ordre en $\dfrac{\partial}{\partial q_k}$; leur coefficient est

$$Q_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{Q_k}{2}\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} + \frac{Q_i Q_k}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g} + \frac{Q_k}{2}\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} + \frac{Q_k Q_i}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}\operatorname{Log}\sqrt{g},$$

soit

$$Q_i Q_k \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} + Q_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + Q_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_i},$$

ce qui s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i Q_k) + Q_i Q_k \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial q_i} + P_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g}.$$

Le coefficient de $\frac{\partial}{\partial q_k}$ est donc le coefficient déjà obtenu antérieurement.

Mais cette méthode fournit un terme complémentaire obtenu en faisant la somme des produits dans un sens ou dans l'autre soit après simplification

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(Q_i \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i \partial q_k} + Q_k \frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_i \partial q_k} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_k}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(Q_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + Q_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_i}\right) \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g} \\ &+ \frac{1}{2}\left(Q_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + Q_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_k}\right) \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} \\ &+ Q_i Q_k \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g} + \frac{1}{2} Q_i Q_k \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g}, \end{aligned}$$

en tenant compte de ce que $Q_i Q_k = P_{ik} = Q_k Q_i$ on a

$$\begin{aligned} &P_{ik} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g} + P_{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial P_{ik}}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_k} \operatorname{Log} \sqrt{g} + \frac{1}{2} \frac{\partial P_{ik}}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_i} \operatorname{Log} \sqrt{g} \\ &+ \frac{1}{2}\left(Q_i \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i \partial q_k} + Q_k \frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_i \partial q_k} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_k}\right). \end{aligned}$$

Envisageons maintenant le terme T

$$Q_k \frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_i \partial q_k} + Q_i \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i \partial q_k} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}$$

et la dérivée seconde

$$\frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial q_i \partial q_k} = \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}(Q_i Q_k).$$

On a

$$Q_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + Q_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial q_k}$$

et

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_k}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + Q_k \frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_i \partial q_k} + \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i \partial q_k} Q_i + \frac{\partial Q_k}{\partial q_k}\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial q_i \partial q_k}.$$

Par suite, l'expression T s'écrit

$$\frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial q_i \partial q_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}.$$

Le terme $R = \Sigma R_{ik} + \lambda_{ik}$ résiduel contiendra une partie fixée par les données des P_{ik}, mais aussi une partie $-\Sigma_{ik}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}$.

Il suffit de remarquer que chaque terme $\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}$ peut être choisi arbitrairement, les $Q_i Q_k$ ne satisfaisant qu'à la condition $Q_i Q_k = P_{ik}$.

On obtient donc ainsi la formule que nous avions établie directement pour les opérateurs hermitiques du deuxième ordre.

Opérateur du troisième ordre. — Effectuons tout d'abord les tableaux des permutations i, j, k

$$ijk, \quad ikj; \qquad jik, \quad jki; \qquad kij, \quad kji.$$

Recherchons s'il nous est possible de poser pour une permutation ijk donnée $P_{ijk} = Q_i P_{jk}$.

Ceci revient à rechercher l'opérateur sous la forme du produit de deux opérateurs hermitiques du premier et du deuxième ordre

$$P_{ijk}\frac{\partial^3}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \equiv \left(Q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\right)\left(P_{jk}\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}\right).$$

Mais un opérateur hermitique du deuxième ordre comprend, ainsi que nous l'avons vu, un terme en P_{jk}, mais également en P_{kj}.

Par suite, on obtiendra par cette méthode

$$P_{ijk} = Q_i P_{jk}, \qquad P_{jki} = P_{jk} Q_i.$$

Mais également

$$P_{ikj} = Q_i P_{kj}, \qquad P_{kji} = P_{kj} Q_i.$$

Nous obtenons ainsi quatre termes P_{ikj} sur six existants, soit donc en utilisant trois fonctions Q_i, Q_k, Q_j, douze fonctions P_{ijk} au lieu des six de la permutation.

On est donc contraint de fractionner les fonctions P_{ijk} en deux et d'envisager les expressions $2P_{ijk}$ que l'on répartit entre chacune des fonctions Q_i, Q_j, Q_k.

On a alors à effectuer la construction des opérateurs

$$\begin{aligned}&\left[Q_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i\sqrt{g})\right]\\ &\quad\times\left[P_{jk}\frac{\partial^2}{\partial q_j\partial q_k}+P_{kj}\frac{\partial^2}{\partial q_k\partial q_j}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_j}(P_{jk}\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_k}\right.\\ &\qquad\qquad\left.+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_k}(P_{kj}\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_j}+R_1\right],\end{aligned}$$

R_1 étant arbitraire.

Cette opération donnera lieu au développement analytique suivant :

$$\begin{aligned}&Q_iP_{jk}\frac{\partial^3}{\partial q_i\partial q_j\partial q_k}+Q_i\frac{\partial P_{jk}}{\partial q_i}\frac{\partial^2}{\partial q_j\partial q_k}+Q_i\frac{\partial P_{kj}}{\partial q_i}\frac{\partial^2}{\partial q_k\partial q_j}+Q_iP_{jk}\frac{\partial^3}{\partial q_i\partial q_j\partial q_k}\\ &\quad+Q_i\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_j}(P_{jk}\sqrt{g})\right]\frac{\partial}{\partial q_k}+\frac{Q_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_j}(P_{jk}\sqrt{g})\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_k}\\ &\quad+Q_i\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_k}(P_{kj}\sqrt{g})\right]\frac{\partial}{\partial q_j}+\frac{Q_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_k}(P_{kj}\sqrt{g})\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_j}\\ &\quad+Q_i\frac{\partial R_1}{\partial q_i}+Q_iR_1\frac{\partial}{\partial q_i}+\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i\sqrt{g})P_{jk}\frac{\partial^2}{\partial q_j\partial q_k}\\ &\quad+\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_j}(P_{jk}\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_k}\\ &\quad+\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_k}(P_{kj}\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_j}+\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i\sqrt{g})R_1.\end{aligned}$$

On a également à effectuer l'opération

$$\begin{aligned}&\left[P_{jk}\frac{\partial^2}{\partial q_j\partial q_k}+P_{kj}\frac{\partial^2}{\partial q_k\partial q_j}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_j}(P_{jk}\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_k}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_k}(P_{kj}\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_j}+R\right]\\ &\quad\times\left[Q_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(Q_i\sqrt{g})\right].\end{aligned}$$

On obtient alors

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{jk}\frac{\partial^2 \mathrm{Q}_i}{\partial q_j \partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_i}+\mathrm{P}_{jk}\frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_j}\frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_i}+\mathrm{P}_{jk}\frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k}\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_i}\\
&\quad+\mathrm{P}_{jk}\mathrm{Q}_i\frac{\partial^3}{\partial q_j \partial q_k \partial q_i}+\mathrm{P}_{kj}\frac{\partial^2 \mathrm{Q}_i}{\partial q_k \partial q_j}\frac{\partial}{\partial q_i}+\mathrm{P}_{kj}\frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_j}\frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_i}\\
&\quad+\mathrm{P}_{kj}\frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k}\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_i}+\mathrm{P}_{kj}\mathrm{Q}_i\frac{\partial^3}{\partial q_j \partial q_k \partial q_i}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_j}(\mathrm{P}_{jk}\sqrt{g})\frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_j}(\mathrm{P}_{jk}\sqrt{g})\mathrm{Q}_i\frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_i}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_k}(\mathrm{P}_{kj}\sqrt{g})\frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial q_i}\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_k}(\mathrm{P}_{kj}\sqrt{g})\mathrm{Q}_i\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_i}+\mathrm{R}_1\mathrm{Q}_i\frac{\partial}{\partial q_i}\\
&\quad+\mathrm{P}_{jk}\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k}\left[\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(\mathrm{Q}_i\sqrt{g})\right]+\mathrm{P}_{jk}\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(\mathrm{Q}_i\sqrt{g})\right]\frac{\partial}{\partial q_k}\\
&\quad+\mathrm{P}_{jk}\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(\mathrm{Q}_i\sqrt{g})\right]\frac{\partial}{\partial q_j}+\frac{\mathrm{P}_{jk}}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(\mathrm{Q}_i\sqrt{g})\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k}\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_j}(\mathrm{P}_{jk}\sqrt{g})\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}(\mathrm{Q}_i\sqrt{g})\right]+\ldots
\end{aligned}
$$

On a les termes relatifs aux P_{kj} en permutant k et j.

On a alors pour coefficient du terme en $\dfrac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j}$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Q}_r\frac{\partial \mathrm{P}_{ij}}{\partial q_r}+\frac{\mathrm{Q}_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_r}(\mathrm{P}_{rj}\sqrt{g})+\frac{\mathrm{P}_{ij}}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_r}(\mathrm{Q}_r\sqrt{g})\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_r}(\mathrm{P}_{ri}\sqrt{g})\mathrm{Q}_j+\frac{\mathrm{P}_{ij}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_r}(\mathrm{Q}_r\sqrt{g})+\mathrm{P}_{ij}\frac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial q_r}.
\end{aligned}
$$

Les termes non écrits n'intéressent que les termes en P_{kj} et multiplicateurs auxquels seule une allusion sera faite.

D'où, en développant

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}=&\;\mathrm{Q}_r\frac{\partial \mathrm{P}_{ij}}{\partial q_r}+\mathrm{Q}_i\frac{\partial \mathrm{P}_{rj}}{\partial q_r}+\mathrm{P}_{ri}\frac{\partial \mathrm{Q}_j}{\partial q_r}+\mathrm{P}_{rj}\frac{\partial \mathrm{Q}_r}{\partial q_r}+\mathrm{Q}_j\frac{\partial \mathrm{P}_{ri}}{\partial q_r}+\mathrm{P}_{ri}\frac{\partial \mathrm{Q}_j}{\partial q_r}\\
&+\mathrm{Q}_r\mathrm{P}_{ij}\frac{\partial}{\partial q_r}\mathrm{Log}\sqrt{g}+\mathrm{P}_{ri}\mathrm{Q}_j\frac{\partial}{\partial q_r}\mathrm{Log}\sqrt{g}+\mathrm{P}_{rj}\mathrm{Q}_i\frac{\partial}{\partial q_r}\mathrm{Log}\sqrt{g}.
\end{aligned}
$$

Envisageons le groupement [1]

$$Q_r P_{ij} + P_{ri} Q_j + P_{rj} Q_i,$$

on a

$$Q_r P_{ij} + P_{ri} Q_j + P_{rj} Q_i = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \Sigma_r \frac{\partial}{\partial q_r} (P_{ijr} + P_{rij} + P_{rji}).$$

En dénombrant les divers termes et en faisant retour aux P_{ijr} initiaux on trouve que ce coeficient est [2] $\Sigma_r \frac{1}{2\sqrt{g}} \Sigma_r \frac{\partial}{\partial q_r} \left[(P_{rij} + P_{irj} + P_{ijr}) \sqrt{g} \right]$. On voit donc que la détermination de ces termes est indépendante du choix intermédiaire des Q_r et P_{ij}.

Les termes d'ordre moins élevés ne peuvent être déterminés sans choix préalable des Q_r et P_{jr} ; ceci ne peut s'effectuer par un choix direct des termes du premier ordre et fixe alors le terme multiplicateur.

On voit sur l'étude de ce cas particulier la généralité de la méthode.

CONCLUSION.

De l'étude sommaire des opérateurs hermitiques que nous venons d'effectuer, il résulte que la donnée de la capacité tensorielle de l'espace de configuration suffit à définir les opérateurs hermitiques à partir de la Mécanique classique, mais que ceux-ci possèdent certains degrés de liberté que peuvent limiter d'autres considérations [5].

Nous possédons un procédé général de formation de ces opérateurs, nous retrouvons les résultats déjà vus pour les considérations d'intégrale première T, tant pour le premier que pour le deuxième ordre, nous voyons très nettement que la fonction R complémentaire joue un rôle déterminant sur la forme de ces opérateurs, nous avons vu que

---

(1) On aperçoit l'importance toute particulière des égalités des divers termes.

(2) On a pris $P_{rij} + P_{ijr}$ et non pas $P_{rij} + P_{rji}$, pour respecter l'ordre de la dérivation.

(3) Il y a lieu toutefois, de noter que l'un des deux opérateurs, l'hamiltonien est déjà hermitique.

c'est l'existence hypothétique de cette fonction dont dépend l'existence des opérateurs intégrale première du deuxième ordre de la Mécanique ondulatoire.

Les deux points de vue hermiticité et mesure simultanée sont donc concordants.

Nous voyons aussi que l'étude de l'hermiticité a permis de lever l'hypothèque qui existait sur les intégrales du premier ordre dans le cas d'un champ électromagnétique et sur l'importance des déplacements virtuels en Mécanique ondulatoire. Nous pouvons également proposer la forme de l'hamiltonien correcte dans le cas d'un champ électromagnétique

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\Sigma_{ik}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g^{ik}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)+\frac{h}{2\pi i}\left(\Sigma_i \mathrm{L}_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\frac{1}{2\sqrt{g}}\Sigma_i\frac{\partial}{\partial q_i}(\mathrm{L}_i\sqrt{g})\right)+\mathrm{U}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

J.-Louis Destouches, *Principes fondamentaux de Physique théorique.*

J.-Louis Destouches, *Cinétique opérationnelle.*

Delassus, *Leçons sur la dynamique des systèmes.*

Louis de Broglie, *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire; Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules; Théorie de la Quantification dans la nouvelle Mécanique.*

Bouligand, *Mécanique rationnelle.*

Léon Brillouin, *Les Tenseurs.*