JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. DIXMIER

Sur les variétés *J* d'un espace de Hilbert

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 28 (1949), p. 321-358.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1949_9_28__321_0>

Sur les variétés J d'un espace de Hilbert;

Par J. DIXMIER.

Introduction.

Ce Travail complète sur quelques points le premier Mémoire ([1]) que j'ai publié sur les variétés et les opérateurs J [3]. Je suppose ce Mémoire connu du lecteur, et j'utilise ses notations. L'espace de Hilbert complexe considéré sera, pour simplifier, supposé séparable, sauf mention expresse du contraire ([2]).

Rappelons brièvement certaines définitions et certains résultats de E.

On définit les variétés J d'un espace hilbertien H comme les domaines d'existence des opérateurs fermés de H. Les opérateurs J sont les opérateurs dont l'image est une variété J. Les variétés J forment un réseau $\mathcal{L}$ pour les opérations $\dot{+}$ et $\cap$, très exactement le réseau engendré par les variétés fermées. Les opérateurs J se reproduisent par addition et multiplication, et tout opérateur J est le produit de deux opérateurs fermés. Le domaine d'existence et le domaine des valeurs d'un opérateur J sont des variétés J. La variété transformée d'une variété J par un opérateur J est une variété J.

Soit D une variété J. Les variétés fermées à une infinité de dimensions contenues dans D sont appelées les noyaux de D. Si D ne contient aucun noyau, D est dite de classe 3_n, n étant sa dimen-

([1]) Ce Mémoire est désigné dans la suite par E. Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie qui suit cette introduction.

([2]) Le cas général peut aussi se traiter, mais conduit à des classifications plus pénibles, les questions de dimension jouant souvent un rôle essentiel.

sion ($n = 1, 2, \ldots, \infty$). Si D, non fermée, possède des noyaux, D est dite de classe 2. Si D est fermée et a une infinité de dimensions, D est dite de classe 1. Les variétés J de classe 3 sont les domaines des valeurs des opérateurs fermés complètement continus. Une variété J de classe 2 est somme, d'une infinité de façons, de deux de ses noyaux.

Un noyau N est dit maximal s'il n'existe aucun noyau $N' \supset N$ tel que $N' \ominus N$ ait une infinité de dimensions. D, de classe 2, est dite de classe 2*a* si elle ne possède aucun noyau maximal, de classe 2*b* dans le cas contraire.

Une variété fermée V réduit D si $P_V D \subset D$. Une base orthonormale (e_i) de [D] est dite base de D si toute variété $[e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots]$ réduit D. D est alors l'ensemble des vecteurs $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ tels que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 |x_i|^2 < +\infty$, (a_i) étant une certaine suite de nombres (appelée suite de valeurs propres) tels que $\inf_i a_i > 0$, bien déterminée, à une similitude près, par D, et qui définit D à une transformation isométrique près.

Soit D, D′, deux variétés J partout denses dans H, et soit $\mathcal{G}(D, D')$ l'ensemble des opérateurs J biunivoques dont le domaine d'existence est D et le domaine des valeurs D′. On peut caractériser les cas dans lesquels $\mathcal{G}(D, D')$ contient des opérateurs bornés. L'existence de tels opérateurs définit entre D et D′ une relation d'ordre au sens large notée $D \succ D'$. La relation d'équivalence « $D \succ D'$, $D' \succ D$ » est notée $D \sim D'$. Enfin, l'existence d'un opérateur bicontinu L tel que $L(D) = D'$ est une relation d'équivalence notée $D \simeq D'$ (L peut alors être supposé unitaire).

Enfin, relativement aux opérateurs fermés de $\mathcal{G}(D, D')$, on a les résultats suivants. Si D ou D′ est de classe 1, tous les opérateurs de $\mathcal{G}(D, D')$ sont fermés. Si l'une des variétés D et D′, D par exemple, est de classe 3, $\mathcal{G}(D, D')$ ne contient d'opérateurs fermés que si D′ est de classe 1. Enfin, si D et D′ sont de classe 2, $\mathcal{G}(D, D')$ contient à la fois des opérateurs fermés et des opérateurs non fermés. Ce cas, le plus complexe, conduit à la construction de certains opérateurs notés $A(V, V'; W, W'; L, L')$.

Ceci posé, voici quels sont les problèmes, laissés en suspens dans E, et que nous résolvons ici.

Soit D une variété J, N et N′ deux noyaux non maximaux de D. Il est prouvé dans E qu'il existe un opérateur unitaire U conservant D tel que $U(N) = N'$. Donc N et N′ jouent exactement le même rôle dans D. Dans une variété J de classe $2a$, tous les noyaux jouent le même rôle. En est-il de même pour les noyaux non maximaux d'une variété J de classe $2b$? Cette question, englobée dans un problème plus général, fait l'objet du Chapitre I.

On a noté dans E que beaucoup de définitions relatives aux variétés J ne faisaient intervenir que les opérations $\dot{+}$ et $\cap$, autrement dit étaient invariantes dans tout automorphisme du réseau $\mathcal{L}$. Il en est ainsi en particulier pour la classification des variétés J. D'où les problèmes suivants, relatifs en somme à la structure de $\mathcal{L}$.

1° Étudier les relations entre la classification des variétés J et la relation d'inclusion dans $\mathcal{L}$. Ce problème fait l'objet du Chapitre II, et conduit à une relation d'ordre intéressante entre opérateurs bornés.

2° Étudier les relations entre la classification des variétés J et les opérations $\dot{+}$ et $\cap$ dans $\mathcal{L}$. Ce problème fait l'objet du Chapitre III. Le résultat le plus notable est que les variétés J de classe 3 se reproduisent par les opérations $\dot{+}$ et $\cap$, et peuvent en un certain sens être considérées comme *négligeables* : si l'on ajoute à une variété J de classe 1 ou 2 une variété J de classe 3, on ne modifie que *très peu* ses caractéristiques essentielles. Ce fait est d'ailleurs lié à l'étude des idéaux dans l'anneau des opérateurs fermés bornés, comme nous le montrerons ailleurs ([1]).

Dans le Chapitre IV, on montre que les relations $\succ$, $\sim$, $\simeq$, peuvent être définies uniquement à partir des opérations $\dot{+}$ et $\cap$, ce qui prouve que beaucoup de propriétés établies dans E et dans le présent article sont des résultats relatifs à la structure du réseau $\mathcal{L}$.

Au Chapitre V, on détermine exactement l'ensemble des opérateurs du type $A(V, V'; W, W'; L, L')$, ensemble dont on savait déjà qu'il déborde celui des opérateurs fermés. Cette étude est englobée dans

---

([1]) Cf. *Les idéaux dans l'ensemble des variétés* J *d'un espace hilbertien* (*Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 4e *série*, t. **10**, 1949, p. 91-114).

une recherche plus générale, qui permet en particulier de classer les opérateurs J.

Bibliographie.

[1] B. H. Arnold, *Rings of operators on vector spaces* (*Ann. of Math.*, t. 45, 1944, p. 24-49).

[2] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. II, Paris, 1947.

[3] J. Dixmier, *Étude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications* (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 77, 1949, p. 11-101.

[4] G. W. Mackey, *Isomorphisms of normed linear spaces* (*Ann. of Math.*, t. 43, 1942, p. 244-260).

[5] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space*, New-York, 1932.

I. — Variétés linéaires fermées contenues dans une variété J.

1. Préliminaires sur les suites de nombres. — Il n'est question dans ce paragraphe que de suites de nombres $(a_1, a_2, \ldots)$, avec $a_i > 0$ pour tout i.

On appellera $n^{\text{ième}}$ *section* d'une telle suite la suite $(a_n, a_{n+1}, \ldots)$. Lorsque la suite (a_i) est équivalente à sa première section, c'est-à-dire lorsque $a_i^{-1}.\, a_{i+1}$ est borné ainsi que le rapport inverse, il est immédiat que la suite est équivalente à toutes ses sections. Dans ce cas, la suite est aussi équivalente à toute suite $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, a_1, a_2, \ldots)$, où les α_i (> 0) sont arbitraires.

Si la suite (a_i) est non décroissante, elle est semblable à sa $n^{\text{ième}}$ section si et seulement si elle lui est équivalente (*cf.* E, lemme 5.4).

Lemme 1.1 — *Soit (a_i) et (a'_i) deux suites non décroissantes tendant vers $+\infty$, (b_i) et (b'_i) deux suites bornées. Si les suites $(b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots) = S$ et $(b'_1, a'_1, b'_2, a'_2, \ldots) = S'$ sont semblables, l'une des suites (a_i), (a'_i) est équivalente à une section de l'autre.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de S' qui correspond aux a_i dans la similitude. $\mathcal{E}$ est un ensemble de nombres *tendant vers* $+\infty$ et $S' - \mathcal{E}$ est un ensemble de nombres *bornés*. Donc $\mathcal{E}$ contient tous les a'_i, sauf un nombre fini n d'entre eux, et ne contient qu'un nombre fini n' de b'_i. Si $n \geq n'$ (resp. $n < n'$) on obtient une suite semblable à $\mathcal{E}$ en remplaçant ces b'_i (resp. n d'entre eux) par n' (resp. n) des nombres a'_i de $S' - \mathcal{E}$. Dans les deux cas, l'une des suites (a_i), (a'_i) est semblable, et par suite équivalente, à une section de l'autre.

2. Définitions. — Soit D une variété J, partout dense dans l'espace H (pour simplifier). Soit V, V′ deux variétés linéaires fermées contenues dans D. S'il existe un unitaire $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ (E, Chap. IV, § 3) tel que $U(V') \subset V$, on écrira $V \overset{D}{>} V'$. Cette relation est évidemment réflexive et transitive, c'est donc une relation d'ordre au sens large. La relation « $V \overset{D}{>} V'$, $V' \overset{D}{>} V$ » est une relation d'équivalence que nous noterons : $V \overset{D}{=} V'$. Alors, la relation $V \overset{D}{>} V'$ est une relation d'ordre entre classes d'équivalence : les classes d'équivalence forment un ensemble ordonné, soit $\mathcal{F}(D)$, dont nous allons étudier la structure. On va établir les résultats suivants :

Théorème 1.1. — *La relation* $V \overset{D}{=} V'$ *est équivalente à l'existence d'un* $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ *tel que* $U(V) = V'$.

Il est évident que si $U(V) = V'$ pour un $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$, on a $V \overset{D}{=} V'$. On démontrera la réciproque dans la suite.

Théorème 1.2. — $\mathcal{F}(D)$ *est totalement ordonné, et même isomorphe à un ensemble de nombres rationnels ordonné à la manière habituelle.*

Ainsi, étant données V et V′, on a une et une seule des relations $V \underset{\neq}{\overset{D}{>}} V'$, $V \overset{D}{=} V'$, $V' \underset{\neq}{\overset{D}{>}} V$.

3. Démonstration des théorèmes. — Lemme 1.2. — $V \overset{D}{>} V'$ *entraîne* $V \overset{H}{>} V'$. $V \overset{H}{>} V'$ *est équivalent à*

$$\dim V \geq \dim V', \quad \dim H \ominus V \leq \dim H \ominus V'.$$

Démonstration immédiate.

Lemme 1.3. — *Soit* $n = \dim V$, $n' = \dim V'$, *n et n' finis.*

a. On a $V \underset{\neq}{\overset{D}{>}} V'$, $V \overset{D}{=} V'$, $V' \underset{\neq}{\overset{D}{>}} V$ *suivant que* $n > n'$, $n = n'$, $n' > n$.

b. Si $V \overset{D}{=} V'$, *il existe un* $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ *tel que* $U(V) = V'$.

Démonstration. — Si $V \overset{D}{=} V'$, on a $n \geqq n'$, $n' \geqq n$ (lemme 1.2), donc $n = n'$.

Réciproquement, si $n = n'$, il existe (E, prop. 5.9) un $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ tel que $U(V) = V'$. D'où (*b*).

Supposons maintenant par exemple $n > n'$. Soit V'' une variété linéaire à n' dimensions avec $V'' \subset V$. On a $V'' = U(V')$ pour un $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$, donc $V \overset{D}{>} V'$. D'ailleurs, $V \overset{D}{\neq} V'$ puisque $n \neq n'$.

Ainsi, $n > n'$ entraîne $V \underset{\neq}{\overset{D}{>}} V'$, $n = n'$ entraîne $V \overset{D}{=} V'$, $n' > n$ entraîne $V' \underset{\neq}{\overset{D}{>}} V$; donc les réciproques sont vraies; d'où (*a*).

Lemme 1.4. — *Si la dimension de* V *est finie et celle de* V' *infinie, on a* $V' \underset{\neq}{\overset{D}{>}} V$.

Démonstration. — Soit $V'' \subset V'$, avec $\dim V'' = \dim V$. On a $V'' = U(V)$ pour un $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$, donc $V' \overset{D}{>} V$. Il est évident que $V \overset{D}{\neq} V'$.

Lemme 1.5. — *Si* V *et* V' *sont deux noyaux non maximaux, on a* $V' = U(V)$ *pour un* $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$.

Démonstration. — C'est la proposition 5.10 de E.

Lemme 1.6. — *Les théorèmes* 1.1 *et* 1.2 *sont vrais si* D *est de classe* 3_n, *n fini.* $\mathcal{F}(D)$ *est alors isomorphe à l'ensemble ordonné* $1, 2, 3, 4, \ldots n$.

Démonstration. — Immédiate à partir du lemme 1.2.

Lemme 1.7. — *Les théorèmes* 1.1 *et* 1.2 *sont vrais si* D *est de classe* 1. $\mathcal{F}(D)$ *est alors isomorphe à l'ensemble ordonné*

$$-1,\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\quad \ldots;\quad 0;\quad \ldots,\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{2},\quad 1.$$

Démonstration. — Immédiate à partir du lemme 1.2.

LEMME 1.8. — *Les théorèmes* 1.1 *et* 1.2 *sont vrais si* D *est de classe* 3_∞. $\mathcal{F}(D)$ *est alors isomorphe à l'ensemble ordonné* 1, 2, 3, 4, ...

Démonstration. — Immédiate à partir du lemme 1.3, puisque D ne contient aucun noyau.

LEMME 1.9. — *Les théorèmes* 1.1 *et* 1.2 *sont vrais si* D *est de classe* 2*a*. $\mathcal{F}(D)$ *est alors isomorphe à l'ensemble ordonné*

$$-1,\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\quad -\ldots;\quad 0.$$

Démonstration. — Si $V \overset{D}{=} V'$, $\dim V = \dim V'$ (lemme 1.2). Le théorème 1.1 résulte alors du lemme 1.3, *b* et du lemme 1.5.

La comparaison des V de dimensions finies résulte du lemme 1.3. Pour deux noyaux quelconques V, V′, on a $V \overset{D}{=} V'$ (lemme 1.5). Pour un noyau V′ et une V de dimension finie, on a $V' \underset{\neq}{\overset{D}{>}} V$ (lemme 1.4). D'où le lemme.

LEMME 1.10. — *Les théorèmes* 1.1 *et* 1.2 *sont vrais si* D *est de classe* 2*b*. $\mathcal{F}(D)$ *est alors isomorphe, suivant les cas, soit à l'ensemble ordonné*

$$-1,\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\quad \ldots,\quad 0;\quad 1,$$

soit à l'ensemble ordonné

$$-1,\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\quad \ldots;\quad 0;\quad \ldots,\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{2},\quad 1,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{7}{4},\quad \ldots$$

Démonstration. — La comparaison des V de dimensions finies résulte du lemme 1.3. Pour un noyau V′ et une V de dimension finie, on a $V' \underset{\neq}{\overset{D}{>}} V$ (lemme 1.4). Reste à comparer les noyaux entre eux.

a. Si V et V′ sont deux noyaux non maximaux, on a $V' = U(V)$ pour un $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ (lemme 1.5), donc $V' \overset{D}{=} V$.

b. Si V est non maximal et V′ maximal, on ne peut avoir $V \overset{D}{>} V'$. D'ailleurs, soit $V'' \subset V'$ un noyau de déficience infinie dans V′. On

$aV'' = U(V)$ pour un $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$, puisque V'' et V sont non maximaux. Ainsi, $V' \underset{\neq}{\overset{D}{>}} V$.

c. Soit enfin V et V' maximaux. Soit $\Delta = D \cap (H \ominus V)$, $\Delta' = D \cap (H \ominus V')$. Soit $(e_1, e_2, \ldots)$ une base orthonormale de V, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ une base orthonormale de Δ, $(a_1, a_2, \ldots)$ une suite de valeurs propres correspondantes de Δ. Comme Δ est de classe 3_∞, (E, Chap. V, § 4), on peut supposer la suite (a_i) non décroissante et tendant vers $+\infty$. Posons

$$V_n = [e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots]; \qquad V_{-n} = V \oplus [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n]; \qquad V_0 = V;$$
$$\Delta_n = \Delta \dotplus [e_1, e_2, \ldots, e_n]; \qquad \Delta_{-n} = \Delta \cap [\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \ldots]; \qquad \Delta_0 = \Delta.$$

On a

$$V_p \underset{\neq}{\subset} V_q, \qquad \Delta_p \underset{\neq}{\supset} \Delta_q \qquad \text{si} \quad p > q;$$
$$D = V_p + \Delta_p \qquad \text{pour tout } p.$$

V_n admet la base orthonormale $(e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots)$ si $n \geqq 0$, et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{-n}, e_1, e_2, \ldots)$ si $n < 0$; Δ_n admet pour base orthonormale et suite de valeurs propres correspondantes :

$$(\varepsilon_{-n+1}, \varepsilon_{-n+2}, \ldots) \quad \text{et} \quad (a_{-n+1}, a_{-n+2}, \ldots) \text{ si } n < 0,$$
$$(e_1, e_2, \ldots, e_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) \quad \text{et} \quad (1, 1, \ldots, 1, a_1\, a_2, \ldots)$$

(1 écrit n fois) si $n \geqq 0$.

Soit alors $(a'_1, a'_2, \ldots)$ une suite de valeurs propres de Δ'. Puisque $D = V \dotplus \Delta = V' \dotplus \Delta'$, D admet les suites de valeurs propres $(1, a'_1, 1, a'_2, \ldots)$ et $(1, a_1, 1, a_2, \ldots)$ qui sont donc semblables (E, th. 5.6). Par suite (lemme 1.1), l'une des suites $(a_1, a_2, \ldots)$, $(a'_1, a'_2, \ldots)$ est semblale à une section de l'autre. On en déduit aisément, utilisant le théorème 5.7 de E, que $\Delta' \simeq \Delta_n$ pour un n au moins, donc que $V' = U(V_n)$ pour un $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ et un n au moins. Nous sommes donc ramenés à comparer entre eux les V_n.

Premier cas. — $\overline{\lim\limits_{i=\infty}}\, a_{i+1} \cdot a_i^{-1} < +\infty$. Alors, la suite (a_i) est semblable à ses sections, donc $\Delta_p \simeq \Delta_q$ pour tout couple (p, q). Par suite, $V_p = U(V_q)$ $(U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D))$ pour tout couple (p, q).

Deuxième cas. — $\overline{\lim}_{i=\infty} a_{i+1} \cdot a_i^{-1} = +\infty$. Si $p > q$, $V_p \underset{\neq}{\subset} V_q$, donc $V_q \overset{\mathrm{D}}{>} V_p$.

Montrons que $V_p \overset{\mathrm{D}}{\not\succeq} V_q$. Supposons qu'il existe un $U \in \widetilde{\mathfrak{U}}(D)$ tel que $U(V_q) = V'_q \subset V_p \subset V_q$. Soit $\Delta'_q = D \cap (H \ominus V'_q) = U(\Delta_q)$. On a $\Delta'_q = \Delta_q \dot{+} (V_q \ominus V'_q)$. Or, $\Delta_q \dot{+} (V_q \ominus V'_q) \simeq \Delta_q$ est impossible puisque la suite (a_i) n'est pas semblable à ses sections.

Ainsi, le lemme est démontré dans tous les cas.

II. — Inclusion des Variétés J.

1. Problème. — Soit D une variété J. Étudions les variétés J, D', contenues dans D et notamment leurs *classes* et leurs *valeurs propres*.

Si D a n dimensions (n fini), les variétés J contenues dans D sont des variétés J à 0, 1, 2, ..., n dimensions. Si $\dim D = \infty$, D contient, on le sait, des variétés J à un nombre fini quelconque de dimensions. En définitive, on peut se borner au cas où $\dim D = \dim D' = \infty$.

Lemme 2.1. — *Soit* A *un opérateur linéaire fermé borné, avec* $D_A = H$. *On a* $\Delta_A \approx \Delta_{A^*}$ *et* $\Delta_A \simeq \Delta_{A^*}$ *quand* A *est dans le cas p.*

Démonstration. — On a $A \doteq UK$, avec les propriétés suivantes :

1° K est self-adjoint; par suite, $\Delta_K = K([\Delta_K])$.

2° U est partiellement isométrique, et transforme isométriquement $[\Delta_K]$ en $[\Delta_A]$, Δ_K en Δ_A. Par suite, U^* transforme isométriquement $[\Delta_A]$ en $[\Delta_K]$.

Ceci posé, comme $A^* = KU^*$, on a $\Delta_{A^*} \subset \Delta_K$, et

$$\Delta_{A^*} = K\big(U^*(H)\big) \supset K\big(U^*([\Delta_A])\big) = K([\Delta_K]) = \Delta_K,$$

donc

$$\Delta_{A^*} = \Delta_K, \qquad \Delta_A = U(\Delta_K) = U(\Delta_{A^*}).$$

Si A est dans le cas p, U est unitaire (*cf.* E, lemme 3.1).

Lemme 2.2. — *Soit* A, A', *deux opérateurs linéaires fermés bornés* *biunivoques tels que* $D_A = D_{A'} = H$, $\Delta_{A'} \subset \Delta_A$. *On a* $A' = AR$, *où* R *est linéaire fermé borné biunivoque, avec* $D_R = H$.

Démonstration. — $R = A^{-1}A'$ est un opérateur J biunivoque, et $D_R = H$. Donc R est fermé borné. Et $A' = AR$ (*cf.* E, démonstration de la proposition 6.3).

Remarque. — Si A est complètement continu, A' l'est aussi (*cf.* E, th. 1.11).

2. Solution du problème quand D et D' sont partout denses. — Rappelons d'abord la proposition 6.3 de E.

Proposition 2.1. — *Soit* D, D' *deux variétés* J *partout denses :*

a. Pour qu'il existe une variété J, $D'' \subset D$, *telle que* $D'' \simeq D'$, *il faut et il suffit qu'il existe un opérateur linéaire borné* T *avec* $D_T = H$ *qui transforme biunivoquement* D *en* D'.

b. Quand T *existe, il peut être supposé dans le cas* p.

Démonstration. — *a.* 1° La condition est nécessaire : soit $D'' \subset D$ avec $D'' \simeq D'$. Soit B, B'' des opérateurs linéaires bornés, dans le cas *p*, avec $D_B = D_{B''} = H$, $\Delta_B = D$, $\Delta_{B''} = D''$.

On a (lemme 2.2) $B'' = BR$, avec R borné biunivoque, $D_R = H$. Puis, utilisant le lemme 2.1,

$$D' \simeq D'' = \Delta_{B''} \simeq \Delta_{B''^*} = \Delta_{R^*B^*} = R^*(\Delta_{B^*})$$

et, comme $\Delta_{B^*} \simeq \Delta_B = D$, on voit que $D' = T(D)$, avec T borné, $D_T = H$, et T biunivoque *dans* D, puisque R^* est biunivoque dans Δ_{B^*} (en effet, $R^*B^* = B''^*$ est biunivoque).

2° La condition est suffisante : si $D' = T(D)$ avec T linéaire borné, $D_T = H$, T biunivoque dans D, on a $D' = \Delta_{TB}$ et TB est fermé borné dans le cas *p*. Donc

$$D' = \Delta_{TB} \simeq \Delta_{B^*T^*} \subset \Delta_{B^*} \simeq \Delta_B = D,$$

donc

$$D' \simeq D'', \quad \text{avec} \quad D'' \subset D.$$

b. Résulte de E, théorème 6.2, *e*.

Le théorème 6.2 de E donne aussi la

PROPOSITION 2.2. — *Soit* D, D′, *deux variétés* J *partout denses. Il existe un opérateur linéaire borné* T, *avec* $D_T = H$, *qui transforme biunivoquement* D *en* D′, *seulement dans les cas suivants :*

1° D *étant de classe* 1 *ou* 2, *la classe de* D′ *est supérieure ou égale à celle de* D.

2° D *et* D′ *étant de classe* 3, *avec les suites non décroissantes de valeurs propres* (a_i) *et* (a'_i), *on a*

$$\overline{\lim_{i=\infty}}\, a_i'^{-1}\, a_i < +\infty.$$

Les propositions 2.1 et 2.2 donnent le

THÉORÈME 2.1. — *Soit* D, D′, *deux variétés* J *partout denses. Il existe un opérateur unitaire* U *tel que* $U(D') \subset D$ *seulement dans les cas* 1° *et* 2° *de la proposition* 2.2.

(On voit alors aisément qu'on peut choisir U de façon que D et U(D′) aient une base orthonormale commune.)

5. SOLUTION DU PROBLÈME DANS LE CAS GÉNÉRAL. PROPOSITION 2.3. — *Soit* D, D′, *deux variétés* J *à* ∞ *dimensions. Pour qu'il existe une variété* J, $D'' \subset D$, *telle que* $D'' \approx D'$, *il faut et il suffit qu'il existe un opérateur linéaire borné* T *tel que* $T(D) = D'$.

Démonstration. — 1° La condition est nécessaire : soit $D'' \subset D$ avec $D'' \approx D'$. Soit B, B″ des opérateurs linéaires bornés biunivoques, avec $D_B = D_{B''} = H$, $\Delta_B = D$, $\Delta_{B''} = D''$. On a (lemme 2.2) $B'' = BR$ avec R borné biunivoque, $D_R = H$. Puis, utilisant le lemme 2.1,

$$D' \approx D'' = \Delta_{B''} \approx \Delta_{B''^*} = \Delta_{R^*B^*} = R^*(\Delta_{B^*})$$

et, comme $\Delta_{B^*} \approx \Delta_B = D$, on voit que $D' = T(D)$ avec T borné.

2° La condition est suffisante : si $D' = T(D)$, avec T linéaire borné, on a

$$D' = \Delta_{TB},$$

donc

$$D' = \Delta_{TB} \approx \Delta_{B^*T^*} \subset \Delta_{B^*} \approx \Delta_B = D,$$

donc

$$D' \approx D'', \qquad \text{avec} \quad D'' \subset D.$$

PROPOSITION 2.4. — *Soit* D, D', *deux variétés* J *à* ∞ *dimensions. Il existe un opérateur linéaire borné* T *tel que* $D' = T(D)$ *seulement dans les cas suivants :*

1° D *est de la classe* 1 *ou* 2.

2° D *et* D' *étant de classe* 3 *avec les suites non décroissantes de valeurs propres* (a_i) *et* (a'_i), *on a*

$$\overline{\lim_{i=\infty}}\, a_i'^{-1}\, a_i < +\infty.$$

Démonstration. — D'après la proposition 2.2, les conditions précédentes sont effectivement suffisantes pour l'existence de T, sauf dans le cas, qui reste à examiner, où D est de classe 2 et D' de classe 1; or, dans ce cas, si N est un noyau de D et J un opérateur qui transforme isométriquement N en D, $T = JP_N$ est borné et $T(D) = D'$.

D'autre part, ces conditions sont nécessaires. Car, si D' est de classe 1 ou 2, avec un noyau N, $T^{-1}(N)$ est un noyau de D. Donc, si D est de classe 3, $D' = T(D)$ est de classe 3; de plus, les conditions relatives aux valeurs propres résultent alors de E, lemme 6.3 (où D et D' sont supposés partout denses; mais on se ramène à ce cas en transformant D et D' par des opérateurs isométriques).

Les propositions 2.3 et 2.4 donnent le

THÉORÈME 2.2. — *Soit* D, D' *deux variétés* J *à* ∞ *dimensions. Il existe un opérateur isométrique* I *tel que* $I(D') \subset D$ *seulement dans les cas* 1° *et* 2° *de la proposition* 2.4.

Conséquences particulières. — Soit D et D' partout denses, de classe 3_∞.

1° S'il existe un opérateur linéaire borné T tel que $T(D) = D'$, il existe aussi un opérateur T' linéaire fermé borné dans le cas *p* tel que $T'(D) = D'$.

2° S'il existe un opérateur isométrique I tel que $I(D') \subset D$, il existe aussi un opérateur unitaire U tel que $U(D') \subset D$.

3° S'il existe des opérateurs isométriques I_1, I_2 tels que $I_1(D) \subset D'$, $I_2(D) \supset D'$, on a $D \simeq D'$.

Remarque. — Soit D, D' deux variétés J, avec $D' \subset D$. Soit X_n une suite de vecteurs de D'. Si $X_n \to 0$ dans la topologie de D', $X_n \to 0$ dans la topologie de D (la topologie de D' est plus fine que celle de D). En effet, on peut se borner au cas où D et D' ont ∞ dimensions. Soit alors A (resp. A') un opérateur linéaire borné biunivoque avec $D_A = H$, $\Delta_A = D$ (resp. $D_{A'} = H$, $\Delta_{A'} = D'$). On a $A'^{-1}X_n \to 0$ au sens usuel. Or (lemme 2.2) $A'^{-1} = R^{-1}A^{-1}$, donc $A^{-1}X_n = RA'^{-1}X_n \to 0$ au sens usuel, ce qui veut dire que $X_n \to 0$ dans la topologie de D.

4. Relation d'ordre entre opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas *p*. — Soit A et A' deux opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas *p*. On écrira $A \succ A'$ s'il existe deux opérateurs S et T linéaires fermés bornés dans le cas *p* tels que $A' = SAT$. Cette relation est réflexive et transitive : c'est une relation d'ordre au sens large. La relation « $A \succ A'$, $A' \succ A$ », que nous noterons $A \sim A'$ est une relation d'équivalence que nous exprimerons en disant que A et A' sont *pseudo-équivalents*. Si A et A' sont équivalents, ils sont pseudo-équivalents, mais on verra que la réciproque n'est pas toujours vraie. La pseudo-équivalence partage les opérateurs fermés bornés dans le cas *p* en classes, ordonnées par la relation $\succ$.

Théorème 2.3. — *Soit* A *et* A' *deux opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p. On a* $A \succ A'$ *si et seulement si* $\Delta_A \succ \Delta_{A'}$ *donc si et seulement si, pour un unitaire* U,

$$\Delta_{UA'} = U(\Delta_{A'}) \subset \Delta_A.$$

En particulier, si $\Delta_{A'} \subset \Delta_A$, *on a* $A \succ A'$.

(Ce résultat est à rapprocher du théorème 3.8 de E).

Démonstration. — Si $A \succ A'$ on a, avec les notations précédentes, $A' = SAT$. Donc $\Delta_{A'} = S(\Delta_{AT})$, $\Delta_{AT} \succ \Delta_{A'}$. D'autre part, $\Delta_{AT} \subset \Delta_A$, donc (prop. 2.1) $\Delta_A \succ \Delta_{AT}$. Ainsi, $\Delta_A \succ \Delta_{A'}$.

Réciproquement, si $\Delta_A \succ \Delta_{A'}$, on a

$$\Delta_{A'} = \bar{S}(\Delta_A) = \Delta_{SA},$$

où l'on peut supposer S fermé borné dans le cas p (th. 2.1, b). Donc (E, th. 3.8 et 3.9) $A' = L\bar{S}AU$ avec U unitaire et L de première classe. $S = L\bar{S}$ est borné dans le cas p.

THÉORÈME 2.4. — *Soit* A *et* A' *deux opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p. Si* $A \succ A'$, *il existe deux unitaires,* U *et* V, *deux opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p,* S *et* T, *tels que* $A' = SAU = VAT$.

(Ce résultat est à rapprocher du théorème 3.9 de E).

Démonstration. — L'existence de S et U a été prouvée dans la démonstration précédente. On a

$$A'^* = U^* A^* S^*,$$

donc $A^* \succ A'^*$, donc il existe un unitaire et un opérateur linéaire fermé borné dans le cas p, qu'on peut appeler V^* et T^*, tels que $A'^* = T^* A^* V^*$. D'où $A' = VAT$.

Remarque. — Si, plus particulièrement, $\Delta_{A'} \subset \Delta_A$, on a $A' = AR$ (lemme 2.2) avec R fermé borné biunivoque et $D_R = H$. Mais R est dans le cas p (c'est-à-dire $[\Delta_R] = H$) si et seulement si $\Delta_{A'} = A(\Delta_R)$ est partout dense dans la topologie de Δ_A [ce qui n'est pas toujours le cas, même avec $\Delta_{A'}$ partout dense (*cf.* E, prop. 9.5)].

Le théorème 2.3 permet de déterminer le comportement des opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p vis-à-vis des relations $\succ$ et $\sim$:

THÉORÈME 2.5. — *Les classes de pseudo-équivalence sont :*

Classe C_1 : *les opérateurs de première classe.*

Classe C_2 : *les opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p d'inverse non borné, non complètement continus.*

Classes C_3 : *les opérateurs linéaires fermés complètement continus dans le cas p; deux tels opérateurs* A *et* A' *sont pseudo-équivalents si et* *seulement si les suites non croissantes de valeurs propres de* A^*A *et* A'^*A', *soit* (a_i) *et* (a'_i), *sont équivalentes.*

Deux opérateurs pseudo-équivalents sont équivalents s'ils appartiennent à C_1 (*cas trivial*) *ou à une même classe* C_3, *mais pas toujours équivalents s'ils appartiennent à* C_2. *On a* $C_1 \underset{\not\sim}{\succ} C_2$, $C_2 \underset{\not\sim}{\succ} C$ *si* C *est une classe* C_3. *Si* A *et* A' *sont complètement continus, on a* $A \succ A'$ *si et seulement si* $\overline{\lim\limits_{i=\infty}}\, a_i^{-1}\, a'_i < +\infty$. *L'ensemble des classes* C_3 *n'est pas totalement ordonné par la relation* $\succ$.

III. — Sommes et intersections des variétés J.

1. Somme et intersection de deux variétés J qui ont une base commune. — Si D, D' ont une base commune, on a $[D]=[D']$. Supposons, pour simplifier, D et D' partout denses.

[L'existence d'une base commune est assurée par exemple, si $D \dot{+} D' = H$ (E, lemme 3.2 et th. 5.12)].

Soit donc deux variétés J, D et D' admettant la base hétérogonale commune $(A_1, A_2, \ldots)$. S étant une suite d'entiers, soit W_S la variété linéaire fermée sous-tendue par les A_i où $i \in S$. S et S' formant une partition de la suite des entiers, W_S et $W_{S'}$ sont *en position simple* par r apport à D et D',

$$W_S \cap W_{S'} = 0, \tag{1}$$

$$W_S \dot{+} W_{S'} = [D] = [D'] = H, \tag{2}$$

$$(W_S \cap D) \dot{+} (W_{S'} \cap D) = D, \tag{3}$$

$$(W_S \cap D') \dot{+} (W_{S'} \cap D') = D'. \tag{4}$$

Comme $D \dot{+} D'$ et $D \cap D'$ (qui contiennent les A_i) sont partout denses, on a aussi

$$W_S \dot{+} W_{S'} = [D \dot{+} D'] = [D \cap D']. \tag{5}$$

Si

$$X \in D \cap D',$$

on a

$$X = X_1 + X_2 \qquad \text{avec} \quad X_1 \in W_S \cap D, \qquad X_2 \in W_{S'} \cap D$$

d'après (3), et

$$X_1 \in W_S \cap D', \qquad X_2 \in W_{S'} \cap D'$$

d'après (4), donc

$$X_1 \in D \cap D', \qquad X_2 \in D \cap D',$$

$$(W_S \cap D \cap D') \dotplus (W_{S'} \cap D \cap D') = D \cap D'. \tag{6}$$

On montre de façon analogue que

$$\big(W_S \cap (D \dotplus D')\big) \dotplus \big(W_{S'} \cap (D \dotplus D')\big) = D \dotplus D'. \tag{7}$$

(1), (5), (6), (7) prouvent que W_S et $W_{S'}$ sont *en position simple* par rapport à $D \cap D'$ et $D \dotplus D'$, donc que (A_i) est base hétérogonale de $D \cap D'$ et $D \dotplus D'$.

On va le redémontrer par un procédé moins simple, mais qui donnera en même temps les valeurs propres de $D \cap D'$ et $D \dotplus D'$. Soit (a_i) et (a'_i) des valeurs propres de D et D′ correspondant à la base (A_i). Soit un vecteur

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i A_i \qquad \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty\right).$$

On a $X \in D$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 |x_i|^2 < +\infty;$$

on a $X \in D'$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i'^2 |x_i|^2 < +\infty.$$

Donc $X \in D \cap D'$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^2 + a_i'^2) |x_i|^2 < +\infty.$$

Or

$$\max(a_i^2, a_i'^2) \leqq a_i^2 + a_i'^2 \leqq 2 \max(a_i^2, a_i'^2).$$

Donc (A_i) est base de $D \cap D'$, la suite correspondante de valeurs propres étant $[\max(a_i, a'_i)]$. Si maintenant $X \in D \dotplus D'$, on a

$$X = Y + Z, \quad \text{avec} \quad Y \in D, \quad Z \in D';$$

si

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i A_i, \qquad Z = \sum_{i=1}^{\infty} z_i A_i,$$

on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 |y_i|^2 < +\infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i'^2 |z_i|^2 < +\infty \qquad \text{et} \qquad x_i = y_i + z_i.$$

Soit

$$\alpha_i = \min(a_i, a'_i).$$

On a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 |y_i + z_i|^2 \leqq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 (|y_i|^2 + |z_i|^2) < +\infty.$$

Réciproquement, supposons

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 |x_i|^2 < +\infty.$$

Soit S et S' deux suites formant une partition de la suite des entiers et telles que $\alpha_i = a_i$ si $i \in S$, $\alpha_j = a'_j$ si $j \in S'$. On a

$$\sum_{i \in S} a_i^2 |x_i|^2 < +\infty, \qquad \sum_{j \in S'} a_j'^2 |x_j|^2 < +\infty.$$

Soit alors

$$Y = \sum_{i \in S} x_i A_i, \qquad Z = \sum_{j \in S'} x_j A_j.$$

On a

$$Y \in D, \qquad Z \in D' \qquad \text{et} \qquad X = Y + Z.$$

Donc :

THÉORÈME 3.1. — *Soit D, D', deux variétés J ayant la base hétérogonale commune (A_i) avec les suites correspondantes de valeurs propres (a_i) et (a'_i) respectivement.* $D \cap D'$ *et* $D \dotplus D'$ *admettent pour base* (A_i), *avec* *les suites correspondantes de valeurs propres* $[\max(a_i, a'_i)]$ *et* $[\min(a_i, a'_i)]$ *respectivement.*

2. Classes de la somme et de l'intersection dans le cas général. — Même quand la position relative de D et D′ est inconnue, on peut donner des renseignements sur les classes de $D \dotplus D'$ et $D \cap D'$ quand on connaît celles de D et D′. Nous allons étudier le cas où l'une des deux variétés J, par exemple D′, *est de classe* 3 (on pourrait étudier aussi le cas où D et D′ sont de classe 1 ou 2, mais les résultats sont peu intéressants).

$D \cap D'$ ne peut contenir aucun noyau, donc est de classe 3 (*cf.* aussi le th. 2.2). On peut d'ailleurs avoir $D \cap D' = 0$ même si $[D] = [D'] = H$ (E, th. 8.1). Étudions maintenant $D \dotplus D'$.

Lemme 3.1. — *Soit* D, D′ *deux variétés* J. *Si* D′ *est de classe* 3, *on obtient, à une équivalence* [1] *près, le noyau le plus général* N *de* $D \dotplus D'$ *de la façon suivante : soit* P *un noyau de* D, C *un opérateur complètement continu avec* $D_C = P$, $\Delta_C \subset D'$, $C' = 1 + C$; *on prend* $N = C'(P)$.

Démonstration. — 1° Soit V, V′ deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires dans un espace d'Hilbert h, V ayant même dimension que D et V′ même dimension que D′. Soit A (resp. A′) un opérateur linéaire borné biunivoque avec $D_A = V$, $\Delta_A = D$ (resp. $D_{A'} = V'$, $\Delta_{A'} = D'$). A′ est complètement continu puisque D′ est de classe 3. Soit $B = AP_V + A'P_{V'}$. Soit W la variété linéaire fermée des zéros de B, $W' = h \ominus W$, $\overline{B}$ la restriction, linéaire fermée bornée *biunivoque*, de B à W′. On a

$$D_B = h, \qquad D_{\overline{B}} = W', \qquad \Delta_B = \Delta_{\overline{B}} = D \dotplus D'.$$

Soit N un noyau de $D \dotplus D'$. $\overline{B}^{-1}(N) = M$ est une variété linéaire fermée (puisque $\overline{B}$ est borné) à ∞ dimensions contenue dans W′ et $\overline{B}$ transforme M en N de façon *bicontinue*. Dans $M \cap V'$, $\overline{B}$, qui est

[1] Rappelons que deux noyaux N, N′ sont dits équivalents si $N \doteq N'$, c'est-à-dire si $N \cap N'$ est de déficience finie dans N et N′.

bicontinu, et A', qui est complètement continu, coïncident, donc $m = M \cap V' \doteq o$. Donc $M_1 = M \ominus m$ a ∞ dimensions; $M_1 \cap V' = o$, et $\overline{B}(M_1)$ est un noyau de $D \dotplus D'$ *équivalent* à N.

AP_V, restreint à M_1, est alors *biunivoque*. Montrons qu'il est *bicontinu*. Dans le cas contraire, il existerait dans M_1 une suite de vecteurs X_n, avec $\|X_n\| = 1$, $X_n \rightharpoonup o$, $AP_V X_n \to o$; comme A' est complètement continu, on aurait $A'P_{V'}X_n \to o$, donc $\overline{B}X_n \to o$, ce qui est impossible, puisque $\overline{B}$ est bicontinu dans M_1. Puisque ainsi AP_V est bicontinu dans M_1, $AP_V(M_1) = P$ est un noyau de D.

Soit X un vecteur qui décrit P, et $Y \in M_1$ le vecteur unique tel que $AP_V Y = X$. $\overline{B}Y$ décrit $\overline{B}(M_1)$. Or

$$\overline{B}Y = (AP_V + A'P_{V'})Y = X + A'P_{V'}Y = X + CX,$$

où C est *complètement continu* (puisque A' est complètement continu et que Y correspond à X de façon bicontinue) avec $D_C = P$, $\Delta_C \subset D'$. Donc l'opérateur $C' = 1 + C$ transforme P en $\overline{B}(M_1)$.

2° Réciproquement, soit P un noyau de D, C un opérateur complètement continu avec

$$D_C = P, \qquad \Delta_C \subset D' \qquad \text{et} \qquad C' = 1 + C.$$

Soit v la variété linéaire fermée dans laquelle $C'X = o$; dans v, l'opérateur 1 qui est bicontinu, et $-C$, qui est complètement continu, coïncident, donc $v \doteq o$. Soit $P_1 = P \ominus v$, qui est un noyau de D. C' est *biunivoque* dans P_1, et, de plus, *bicontinu*. Car, dans le cas contraire, il existerait dans P_1 une suite de vecteurs X_n avec $\|X_n\| = 1$, $X_n \rightharpoonup o$, $C'X_n \to o$; comme C est complètement continu, on aurait aussi $CX_n \to o$, d'où $X_n \to o$, donc contradiction. C' étant bicontinu, $C'(P_1)$ est fermé, à ∞ dimensions, et, comme $\Delta_{C'} \subset P \dotplus D' \subset D \dotplus D'$, $C'(P_1)$ est un noyau de D. De même $C'(P)$ qui est égal à $C'(P_1)$.

LEMME 3.2. — *Les noyaux* N *et* P *du lemme* 3.1 *sont complètement asymptotiques.*

Démonstration. — Soit une suite de vecteurs $X_n \in P$, avec $\|X_n\| = 1$, $X_n \rightharpoonup o$. Alors, $\|C'X_n - X_n\| = \|CX_n\| \to o$, donc $\alpha(X_n, N) \to o$. Par suite (E, th. 1.5) P est complètement asymptotique à N. De même, soit une suite de vecteurs $Y_n \in N$, avec $\|Y_n\| = 1$, $Y_n \rightharpoonup 0$, et considérons la restriction $\overline{C'}$ de C′ à P_1. Soit $X_n = \overline{C'}^{-1} Y_n$. On a $X_n \rightharpoonup 0$, donc $\|Y_n - X_n\| = \|CX_n\| \to 0$, donc $\alpha(Y_n, P) \to 0$. Par suite, N est complètement asymptotique à P.

Lemme 3.3. — *a*. N *est maximal dans* $D \dot{+} D'$ *si et seulement si* P *est maximal dans* D.

b. *En particulier, si* P *est maximal dans* D, P *est maximal dans* $D \dot{+} D'$.

Démonstration. — (*b*) résultera de (*a*) en faisant $C = 0$. Démontrons (*a*).

1° Si P est non maximal dans D, soit P′ un noyau de D orthogonal à P. N est complètement asymptotique à P (lemme 3.2), donc $N \cap (H \ominus P) = n = 0$; $N \ominus n \doteq N$ est complètement asymptotique à P et disjoint de $H \ominus P$, donc de P′; $N \ominus n$ est non asymtotique à $H \ominus P$ (E, prop. 1.7), donc non asymptotique à P′; donc $N + P' \subset D \dot{+} D'$ est fermé et par suite est un noyau de $D \dot{+} D'$, et N est de déficience infinie dans $N \dot{+} P'$: N n'est pasmaximal dans $D \dot{+} D'$.

2° Si N est non maximal dans $D \dot{+} D'$, soit N′ un noyau de $D \dot{+} D'$ orthogonal à N. D'après les lemmes 3.1 et 3.2, il existe alors un noyau P′ de D complètement asymptotique à N′. P et N sont complètement asymptotiques, donc aussi $H \ominus P$ et $H \ominus N$ (E, prop. 1.4). P′ est complètement asymptotique à N′, donc à $H \ominus N \supset N'$, donc à $H \ominus P$ (d'après E, prop. 1.6). Donc (E, prop. 1.7) P′ est non asymptotique à P, et $P \cap P' \doteq 0$. Donc $P \dot{+} P'$ est un noyau de D, et P est de déficience infinie dans $P \dot{+} P'$: P n'est pas maximal dans D.

Lemme 3.4. — *Si* $D \dot{+} D'$ *est fermé*, D *est fermé*.

Démonstration. — C'est la proposition 3.13 de E appliquée dans l'espace $D \dot{+} D'$.

THÉORÈME 3.2. — *a. Soit* D, D′, *deux variétés* J, *avec* D′ *de classe* 3. $D \dotplus D'$ *est de classe* 3, 2*b ou* 2*a suivant que* D *est de classe* 3, 2*b ou* 2*a*. *Si* D *est de classe* 1, $D \dotplus D'$ *est de classe* 1 *ou* 2*b*.

b. Les noyaux de D *et de* $D \dotplus D'$ *se correspondent par le procédé du lemme* 3.1. *Dans cette correspondance, les noyaux homologues sont complètement asymptotiques.*

Démonstration. — Il suffit d'établir *a*.

1° Si D est de classe 3, $D \dotplus D'$ ne peut avoir aucun noyau (lemme 3.1), donc est de classe 3.

2° Si D est de classe 2*b*, $D \dotplus D'$ contient des noyaux maximaux (lemme 3.3) et n'est pas fermé (lemme 3.4), donc est de classe 2*b*.

3° Si D est de classe 2*a*, $D \dotplus D'$ contient des noyaux dont aucun n'est maximal (lemme 3.3) et n'est pas fermé (lemme 3.4), donc est de classe 2*a*.

4° Si D est de classe 1, $D \dotplus D'$ peut être de classe 1 (par exemple si $D' \subset D$) ou 2*b* (par exemple si D′ est de classe 3_∞ et $[D']$ orthogonal à D); car D, étant noyau maximal de lui-même, est noyau maximal de $D \dotplus D'$.

En particulier, on voit que :

THÉORÈME 3.3. — *Les variété* J *de classe* 3 *forment un sous-réseau* $\mathcal{L}'$ *de* $\mathcal{L}$.

On peut remarquer que $\mathcal{L}'$, contrairement à $\mathcal{L}$, ne possède pas de plus grand élément.

3. VALEURS PROPRES DE LA SOMME ET DE L'INTERSECTION DE DEUX VARIÉTÉS DE CLASSE 3. — Soit D et D′ deux variétés J de classe 3. Le théorème 2.2 fournit des renseignements sur la suite des valeurs propres de $D \cap D'$. Étudions $D \dotplus D'$. Le problème est sans intérêt si D et D′ sont de classe 3_n et $3_{n'}$, n et n' finis. Supposons donc D de classe 3_∞. Si D′ est de classe 3_n, n fini, on se ramène par récurrence à étudier le cas où D′ a 1 dimension. Nous avons donc deux cas à envisager.

I. D est de classe 3_∞, D' a 1 dimension.

Si $D' \not\subset [D]$, la question peut être réglée aisément. Car soit $(A_1, A_2, \ldots)$ une base hétérogonale de D, $(a_1, a_2, \ldots)$ une suite correspondante de valeurs propres, A_0 un vecteur unitaire dans D'. Alors $(A_0, A_1, A_2, \ldots)$ est base hétérogonale de $D \dotplus D'$, avec la suite correspondante de valeurs propres $(1, a_1, a_2, \ldots)$.

Envisageons le cas général. Soit V une variété linéaire fermée de H, telle que $V' = H \ominus V$ ait 1 dimension. Soit A un opérateur linéaire borné biunivoque tel que $D_A = V$, $\Delta_A = D$. Il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots)$ de V telle que $Ae_i = a_i^{-1}\varepsilon_i$, les ε_i formant une base orthonormale de D et les a_i une suite non décroissante de valeurs propres correspondantes (d'après les propriétés des opérateurs complètement continus). Soit A' un opérateur linéaire biunivoque tel que $D_{A'} = V'$, $\Delta_{A'} = D'$. Soit $B = AP_V + A'P_{V'}$. On a $\Delta_B = D \dotplus D'$. B est complètement continu. Soit $(f_1, f_2, \ldots)$ un système orthonormal de H(1) tel que $Bf_i = b_i^{-1}\varphi_i$, les φ_i formant une base orthonormale de $D \dotplus D'$ et les b_i une suite non décroissante de valeurs propres correspondantes. Soit

$$V_i = [e_1, e_2, \ldots, e_i], \qquad W_i = [f_1, f_2, \ldots, f_i].$$

W_i a 1 dimension de plus que $V_{i-2} \oplus V'$, donc il existe un vecteur unitaire $X \in W_i$ orthogonal à $V_{i-2} \oplus V'$, donc appartenant à $[e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \ldots]$. Comme $X \in W_i$, on a $\|BX\| \geqq b_i^{-1}$. Comme $X \in [e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \ldots]$, on a $\|BX\| = \|AX\| \leqq a_{i-1}^{-1}$. Donc $b_i^{-1} \leqq a_{i-1}^{-1}$, $b_i \geqq a_{i-1}$.

V_i a 1 dimension de plus que W_{i-1}, donc il existe un vecteur unitaire $Y \in V_i$ avec $Y \in [f_i, f_{i+1}, \ldots]$. D'où $\|BY\| \geqq a_i^{-1}$, $\|BY\| \leqq b_i^{-1}$. D'où $b_i \leqq a_i$.

Conclusion. — $a_{i-1} \leqq b_i \leqq a_i$.

Si $\overline{\lim}_{i=\infty} a_{i-1}^{-1} \cdot a_i < +\infty$, on voit que la suite (b_i) est équivalente à la suite (a_i), donc que $D \approx D \dotplus D'$. Si $\overline{\lim}_{i=\infty} a_{i-1}^{-1} \cdot a_i = +\infty$, il n'en est pas

(1) Ce système est complet, à moins que B ait des zéros non nuls, ce qui ne peut d'ailleurs arriver que si $D' \subset D$ (cas trivial).

toujours ainsi; on peut alors donner des résultats plus compliqués que nous n'indiquerons pas. Énonçons simplement :

PROPOSITION 3.1. — *Soit* D *une variété* J *de classe* 3_∞, (α_i) *une suite non décroiesante de valeurs propres de* D. *Supposons* $\overline{\lim\limits_{i=\infty}}\, \alpha_{i-1}^{-1}.\alpha_i < +\infty$. *Alors, si* D′ *est une variété linéaire à n dimensions* (*n fini*), *on a* $D \approx D \dot{+} D'$.

Remarque. — De l'étude qui précède, on peut tirer des renseignements concernant les variétés J de la forme $D \dot{+} D'$, où D est une variété J quelconque et où D′ a n dimensions (n fini). Si D est de classe $2b$, soit $D = N \dot{+} \Delta$, où N est un noyau maximal et Δ une variété J de classe 3 orthogonale à N. On a

$$D \dot{+} D' = N \dot{+} \Delta \dot{+} D' = N \dot{+} (\Delta \dot{+} P_{[\Delta]} D'),$$

$P_{[\Delta]} D'$ a un nombre fini de dimensions, et l'on est ramené à étudier $\Delta \dot{+} P_{[\Delta]} D'$.

Si D est de classe $2a$, on peut aussi indiquer un procédé général d'étude dont nous avons fait l'application dans E, (lemme 10.3).

II. D et D′ sont de classe 3_∞.

Soit V, V′, deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires dans H et à ∞ dimensions. Soit toujours A un opérateur linéaire borné biunivoque tel que $D_A = V$, $\Delta_A = D$; soit $(e_1, e_2, \ldots)$ une base orthonormale de V telle que $Ae_i = a_i^{-1}.\varepsilon_i$, les ε_i formant une base orthonormale de D avec la suite non décroissante (a_i) comme système de valeurs propres correspondantes. Définissons de même A', e'_i, ε'_i, a'_i pour V′ et D′. Soit

$$B = A P_V + A' P_{V'}.$$

On a

$$D_B = H, \quad \Delta_B = D \dot{+} D'.$$

Soit $(f_1, f_2, \ldots)$ un système orthonormal de H (non complet si B a des zéros non nuls) tel que $Bf_i = b_i^{-1}\varphi_i$, les φ_i formant une base orthonormale de $D \dot{+} D'$, avec la suite non décroissante (b_i) comme système de valeurs propres correspondantes. Soit

$$V_i = [e_1, e_2, \ldots, e_i], \qquad V'_i = [e'_1, e'_2, \ldots, e'_i] \qquad W_i = [f_1, f_2, \ldots, f_i].$$

W_{2n-1} a 1 dimension de plus que $V_{n-1} \oplus V'_{n-1}$, d'où, pour X unitaire bien choisi, $\| BX \| \geqq b^{-1}_{2n-1}$, et

$$\| BX \| = \| AP_V X + A' P_{V'} X \| \leqq \| AP_V X \| + \| A' P_{V'} X \| \leqq a_n^{-1} + a_n'^{-1} \leqq 2 \max(a_n^{-1}, a_n'^{-1}).$$

Donc

$$b_{2n} \geqq b_{2n-1} \geqq \frac{1}{2} \min(a_n, a'_n).$$

V_n a 1 dimension de plus que W_{n-1}, d'où, de même, $b_n \leqq a_n$. On a aussi $b_n \leqq a'_n$. Ainsi $b_n \leqq \min(a_n, a'_n)$.

Donc :

Proposition 3.2. — *Soit* D, D', *deux variétés* J *de classe* 3_∞ ; soit (α_i), (α'_i), (β_i) *des suites non décroissantes de valeurs propres de* D, D', $D \dot{+} D'$. *On a*

$$(1) \qquad \varliminf_{i=\infty} [\min(\alpha_i, \alpha'_i)] \beta_i^{-1} > 0, \qquad \varlimsup_{i=\infty} [\min(\alpha_i, \alpha'_i)] \beta_{2i-1}^{-1} < +\infty.$$

On ne peut d'ailleurs pas préciser davantage ces résultats. En effet, si D et D' ont une base commune $(e_1, e_2, \ldots)$ à laquelle correspondent les suites de valeurs propres $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ et $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots)$, on peut prendre $\beta_i = \min(\alpha_i, \alpha'_i)$, de sorte que

$$\varliminf_{i=\infty} [\min(\alpha_i, \alpha'_i)] \beta_i^{-1} < +\infty.$$

D'autre part, si $D \approx D'$, avec D et D' orthogonaux, on peut prendre $\alpha'_i = \alpha_i$, $\beta_{2i-1} = \beta_{2i} = \alpha_i$, de sorte que, dans ce cas,

$$\varlimsup_{i=\infty} [\min(\alpha_i, \alpha'_i)] \beta_{2i-1}^{-1} > 0.$$

Proposition 3.3. — *Soit* D, D' *deux variétés* J *de classe* 3_∞ ; *soit* (α_i) *une suite non décroissante de valeurs propres de* D. $D \succ D'$ *entraîne* $D \dot{+} D' \approx D$ *si et seulement si*

$$\varlimsup_{i=\infty} \alpha_i^{-1} . \alpha_{2i} < +\infty.$$

Démonstration. — Si

$$\overline{\lim_{i=\infty}}\, \alpha_i^{-1} . \alpha_{2i} < +\infty \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim_{i=\infty}}\, \alpha_i'^{-1} . \alpha_i < +\infty,$$

les conditions (1) et (2) de la proposition 3.2 montrent que les suites (α_i) et (β_i) sont équivalentes, donc que $D \dotplus D' \approx D$. Si

$$\overline{\lim_{i=\infty}}\, \alpha_i^{-1} . \alpha_{2i} = +\infty,$$

soit D_1 et D_2 deux variétés J orthogonales avec $D_1 \approx D_2 \approx D$. $D_1 \dotplus D_2$ admet $(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \ldots)$ pour suite de valeurs propres, donc $D_1 \dotplus D_2$ et D_1 ne sont pas isométriquement équivalents.

IV. — Automorphismes du réseau $\mathcal{L}$ des variétés J.

Dans ce chapitre, nous ne ferons aucune restriction de séparabilité sur H.

1. Opérateurs semi-linéaires. — *Définition.* — Soit A un opérateur de H possédant les deux propriétés suivantes :

$$A(X + Y) = AX + AY, \qquad A(\lambda X) = \varphi(\lambda)\, AX,$$

où X et Y sont deux vecteurs arbitraires de H, λ un nombre complexe arbitraire, φ un automorphisme du corps des nombres complexes. A est appelé opérateur semi-linéaire (*cf.* [2], p. 120).

Soit $\bar{\lambda}$ le nombre complexe conjugué de λ. On sait que, si φ est continu (pour la topologie usuelle du corps des nombres complexes), $\varphi(\lambda) = \lambda$ ou $\varphi(\lambda) = \bar{\lambda}$.

Lemme 4.1. — *Si* A *et* B *sont deux opérateurs semi-linéaires relatifs à l'automorphisme* φ *et si* C *est un opérateur linéaire,* ACB^{-1} *est un opérateur linéaire.*

Démonstration. — Pour tout vecteur X et tout nombre complexe λ, on a

$$ACB^{-1}\lambda X = AC\overset{-1}{\varphi}(\lambda)\, B^{-1}X = A\overset{-1}{\varphi}(\lambda)\, CB^{-1}X = \lambda ACB^{-1}X$$

Définition. — A, semi-linéaire, est appelé conjugaison (*Cf.* [5], page 357, où est donnée une définition un peu plus restrictive) si A transforme biunivoquement H en H, si $\varphi(\lambda) = \bar{\lambda}$, et si $(AX, AY) = \overline{(X, Y)}$ pour tout couple de vecteurs X, Y.

LEMME 4.2. — *Si* A *et* B *sont deux conjugaisons,* AB *est unitaire.*

Démonstration. — B^{-1} est une conjugaison, donc $AB = A(B^{-1})^{-1}$ est linéaire (lemme 1.1), transforme biunivoquement H en H, et $(ABX, ABY) = (X, Y)$ pour tout couple de vecteurs X, Y.

LEMME 4.3. — *Soit* A *une conjugaison,* D *une variété* J. *On a* $A(D) \simeq D$.

Démonstration. — Soit (e_i) une base orthonormale de D [1], (ε_j) un système orthonormal tel que l'ensemble des e_i et des ε_i forme une base orthonormale de H. L'opérateur A′ qui, au vecteur X de coordonnées $x_i = (X, e_i)$, $\xi_j = (X, \varepsilon_j)$, fait correspondre le vecteur X′ de coordonnées $x'_i = \bar{x}_i$, $\xi'_j = \bar{\xi}_j$ est évidemment une conjugaison. Comme D est l'ensemble des X pour lesquels $\xi_j = 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 |x_i|^2 < +\infty$ [avec une certaine suite (a_i)], on a $A'(D) = D$. D'ailleurs $AA' = U$ est un unitaire (lemme 4.2). Donc

$$A(D) = AA'(D) = U(D).$$

2. AUTOMORPHISMES DE $\mathcal{L}$. — THÉORÈME 4.1. — *Supposons la dimension de* H *infinie. Soit* $\mathfrak{A}$ *un automorphisme de* $\mathcal{L}$. *Deux cas peuvent se présenter :*

a. Ou bien il existe un automorphisme A *de* H (*c'est-à-dire un opérateur de première classe*) *tel que* $\mathfrak{A}(D) = A(D)$ *pour toute* $D \in \mathcal{L}$.

b. Ou bien il existe une conjugaison C *et un automorphisme* A′ *de* H *tels que* $\mathfrak{A}(D) = CA'(D)$ *pour toute* $D \in \mathcal{L}$.

---

[1] Dans E on établi l'existence d'une base orthonormale quand D est séparable. Mais la démonstration est valable sans changements dans le cas général.

Démonstration. — D'après (E, Chap. III, § 5), l'homologue dans $\mathcal{A}$ d'une variété linéaire à n dimensions (n fini) est une variété à n dimensions. Alors ([4], p. 245) il existe un opérateur semi-linéaire A, transformant biunivoquement H en H, tel que $\mathcal{A}(D) = D'$ soit équivalent à $A(D) = D'$ lorsque D et D' ont 1 dimension. Soit D une variété J quelconque, $D' = \mathcal{A}(D)$. Si $D_0 \subset D$ a 1 dimension, $D'_0 = \mathcal{A}(D_0)$ est contenue dans D'. Or $D'_0 = A(D_0)$. Ainsi, $A(D) \subset D'$; de même, $A^{-1}(D') \subset D$. Donc, pour toute variété J, D, la relation $D' = \mathcal{A}(D)$ est équivalente à $D' = A(D)$.

Soit T un opérateur linéaire biunivoque borné tel que $D_T = H$. $T' = ATA^{-1}$ est linéaire (lemme 4.1), biunivoque, partout défini, et transforme toute variété J en une variété J. Donc (E, th. 3.16) T' est borné.

Ceci posé, utilisons un raisonnement dû à Arnold ([1] p. 34). Supposons que l'automorphisme φ du corps des nombres complexes correspondant à A ne soit pas continu. Alors, pour tout entier i, on peut trouver v_i tel que $|v_i| < 1$, $|\varphi(v_i)| > i$. Soit (e_i) un système orthonormal dénombrable de $H (i = 1, 2, \ldots)$; soit $e'_i = Ae_i$; soit (ε_μ) un système orthonormal tel que l'ensemble des e_i et des ε_μ forme une base orthonormale de H; et soit T l'opérateur borné linéaire biunivoque défini dans tout H par $Te_i = v_i e_i$, $T\varepsilon_\mu = \varepsilon_\mu$. On a

$$T'e'_i = \varphi(v_i)e'_i, \qquad \text{donc} \quad \|T'e'_i\| \, \|e'_i\|^{-1} \geq i,$$

de sorte que T' ne serait pas borné.

Donc φ est continu. Si $\varphi(\lambda) = \lambda$, A est linéaire, et transforme toute variété J en une variété J, donc (E, th. 3.16) est de première classe. Si $\varphi(\lambda) = \bar{\lambda}$, soit C une conjugaison de H. $A' = C^{-1}A$ est linéaire (lemme 4.1) et transforme toute variété J en une variété J (*cf.* lemme 4.3), donc est de première classe; et $A = CA'$.

Remarques. — 1° Réciproquement, tout automorphisme de H, et tout produit d'un automorphisme de H par une conjugaison, définissent des automorphismes de $\mathcal{L}$. C'est immédiat grâce notamment au lemme 4.3.

2° Le théorème 4.1 n'est pas vrai si la dimension de H est finie.

PROPOSITION 4.1. — *Étant données deux variétés* J, D *et* D′, *on a* $D \simeq D'$ *si et seulement si* $D' = \mathcal{A}(D)$ *pour un automorphisme de* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{L}$.

Démonstration. — Si $D \simeq D'$, c'est-à-dire si $D' = U(D)$ pour un unitaire U, U définit dans $\mathcal{L}$ un automorphisme $\mathcal{A}$.

Supposons maintenant $D' = \mathcal{A}(D)$. Si la dimension de H est infinie, ou bien $D' = A(D)$ avec A de première classe, donc $D' \simeq D$ (E, th. 3.7), ou bien $D' = CA'(D)$ avec A′ de première classe (donc $A'(D) \simeq D$), et C conjugaison (donc $D' \simeq D$ d'après le lemme 4.3). Si la dimension de H est finie, la proposition est presque triviale.

Définition. — Soit D une variété J. On désignera par $\mathcal{L}_D$ le réseau des variétés J contenues dans D. On a $\mathcal{L}_H = \mathcal{L}$.

LEMME 4.4. — *Soit* D *et* D′ *deux variétés* J. *S'il existe un isomorphisme de* $\mathcal{L}_D$ *sur* $\mathcal{L}_{D'}$, *on a* $\dim[D] = \dim[D']$.

Démonstration. — Comme dans E, proposition 5.10, on voit qu'il existe un isomorphisme entre $\mathcal{L}_D$ et $\mathcal{L}_{[D]}$, et entre $\mathcal{L}_{D'}$ et $\mathcal{L}_{[D']}$, donc entre $\mathcal{L}_{[D]}$ et $\mathcal{L}_{[D']}$. Considérons alors dans [D] une famille $\mathcal{F}$ de variétés linéaires fermées V_μ possédant les propriétés suivantes : *a.* Étant données V_μ et V_ν $(\mu \neq \nu)$, on a $V_\mu \underset{\neq}{\subset} V_\nu$, ou $V_\nu \underset{\neq}{\subset} V_\mu$; *b.* $[D] \in \mathcal{F}$ et $O \in \mathcal{F}$; *c.* A toute $V_\mu \in \mathcal{F}$ correspond une $V_{\mu'} \in \mathcal{F}$ [et, d'après (*a*), une seule] telle que $V_\mu \subset V_{\mu'}$ avec V_μ de déficience 1 dans $V_{\mu'}$; *d.* La variété linéaire fermée engendrée par toute sous-famille de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$. On voit aisément que le nombre cardinal de $\mathcal{F}$ est la dimension de [D]. L'isomorphisme entre $\mathcal{L}_{[D]}$ et $\mathcal{L}_{[D']}$ et les remarques de E, Chapitre III, paragraphe 5, prouvent alors que $\dim[D] = \dim[D']$.

PROPOSITION 4.2. — *Étant données deux variétés* J, D *et* D′, *on a* $D \approx D'$ *si et seulement si il existe un isomorphisme* $\mathcal{J}$ *de* $\mathcal{L}_{[D]}$ *sur* $\mathcal{L}_{[D']}$ *tel que* $\mathcal{J}(D) = D'$.

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons-là remplie. D'après le lemme 4.4, [D] et [D′] ont même dimension. Soit alors J un opérateur qui transforme isométriquement $[D']$ en $[D]$. J définit un isomorphisme $\mathcal{J}'$ de $\mathcal{L}_{[D']}$ sur $\mathcal{L}_{[D]}$. Donc $\mathcal{J}'\mathcal{J}$ est un automorphisme de $\mathcal{L}_{[D]}$, de sorte que, (prop. 4.1),

$$\mathcal{J}'\mathcal{J}(D) = J\mathcal{J}(D) \simeq D, \qquad \text{d'où} \qquad D' = \mathcal{J}(D) \approx D.$$

Remarque. — Les relations $\simeq$ et $\approx$ sont ainsi définies intrinsèquement dans $\mathcal{L}$.

3. Isomorphismes de $\mathcal{L}_D$ sur $\mathcal{L}_{D'}$. — Théorème 4.2. — *Soit* D *et* D' *deux variétés* J *de dimensions infinies. Soit* $\mathcal{J}$ *un isomorphisme de* $\mathcal{L}_D$ *sur* $\mathcal{L}_{D'}$. *Deux cas peuvent se présenter* :

a. Ou bien il existe un opérateur J *biunivoque* A, *avec* $D_A = D$, $\Delta_A = D'$, *tel que* $\mathcal{J}(d) = A(d)$ *pour toute* $d \in \mathcal{L}_D$.

b. Ou bien il existe une conjugaison C *conservant* D' *et un opérateur* J *biunivoque* A', *avec* $D_{A'} = D$, $\Delta_{A'} = D'$, *tels que* $\mathcal{J}(d) = CA'(d)$ *pour toute* $d \in \mathcal{L}_D$.

Démonstration. — D'après le lemme 4.4, on a $\dim[D] = \dim[D']$, donc, grâce à un opérateur isométrique, on peut se ramener au cas où $[D] = [D']$, puis raisonner dans l'espace $[D]$. Autrement dit, supposons $[D] = [D'] = H$, H étant de dimension infinie. Soit alors B et B' deux opérateurs linéaires bornés biunivoques tels que

$$D_B = D_{B'} = H, \qquad \Delta_B = D, \qquad \Delta_{B'} = D'.$$

On peut considérer B et B' comme opérant dans $\mathcal{L}$. Alors, $B'^{-1}\mathcal{J}B$ est un automorphisme de $\mathcal{L}$. D'après le théorème 4.1, deux cas sont possibles :

a. Ou bien il existe un opérateur de première classe L tel que

$$B'^{-1}\mathcal{J}B(\Delta) = L(\Delta) \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{J}B(\Delta) = B'L(\Delta)$$

pour toute $\Delta \in \mathcal{L}$, ou $\mathcal{J}(d) = B'LB^{-1}(d)$ pour toute $d \in \mathcal{L}_D$: c'est le cas (a) du théorème, car $B'LB^{-1}$ est un opérateur J biunivoque (E, th. 3.1).

b. Ou bien il existe une conjugaison C_1 et un opérateur de première classe L' tels que

$$B'^{-1}\mathcal{J}B\ (\Delta) = C_1 L'(\Delta), \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{J}B(\Delta) = B'C_1 L'(\Delta)$$

pour toute $\Delta \in \mathcal{L}$, ou $\mathcal{J}(d) = B'C_1 L'B^{-1}(d)$ pour toute $d \in \mathcal{L}_D$: c'est le cas (*b*) du théorème; en effet, soit C une conjugaison telle que $C(D') = D'$ (il en existe; *cf.* démonstration du lemme 4.3); $A' = C^{-1}B'C_1L'B^{-1}$ est linéaire (lemme 4.1) biunivoque et transforme toute variété J en une variété J, donc est un opérateur J, avec $D_{A'} = D$, $\Delta_{A'} = D'$; et $B'C_1L'B^{-1} = CA'$.

Remarque. — Réciproquement, tout opérateur J biunivoque, et tout produit d'un opérateur J biunivoque par une conjugaison, définissent un isomorphisme d'un $\mathcal{L}_D$ sur un $\mathcal{L}_{D'}$.

Théorème 4.3. — *Supposons la dimension de* H *infinie. Soit* $D \in \mathcal{L}$, *et* $\mathcal{J}$ *un isomorphisme de* $\mathcal{L}$ *sur* $\mathcal{L}_D$. *Deux cas peuvent se présenter :*

a. Ou bien il existe un opérateur biunivoque borné A, *avec* $D_A = H$, $\Delta_A = D$, *tel que* $\mathcal{J}(\Delta) = A(\Delta)$ *pour toute* $\Delta \in \mathcal{L}$.

b. Ou bien il existe une conjugaison C *conservant* D, *et un opérateur biunivoque borné* A', *avec* $D_{A'} = H$, $\Delta_{A'} = D$, *tels que* $\mathcal{J}(\Delta) = CA'(\Delta)$ *pour toute* $\Delta \in \mathcal{L}$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème 4.2 au cas où $D = H$, et le fait qu'un opérateur J uniforme A tel que $D_A = H$ est borné (E, th. 3.4).

Proposition 4.3. — *Soit* D, $D' \in \mathcal{L}$, *avec* $[D] = [D'] = H$. *On a* $D \succ D'$ *si et seulement si il existe une* $D'' \in \mathcal{L}'$, $D'' \supset D'$, *et un isomorphisme* $\mathcal{J}$ *de* $\mathcal{L}$ *sur* $\mathcal{L}_{D''}$ *tel que* $\mathcal{J}(D) = D'$.

Démonstration. — La condition est nécessaire : si $D \succ D'$, il existe un opérateur linéaire fermé borné dans le cas *p* tel que $A(D) = D'$ (E, th. 6.3, *e*); A définit l'isomorphisme entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_{\Delta_A}$.

La condition est suffisante : supposons la dimension de H infinie et appliquons le théorème 4.3 *a*. Si $\mathcal{J}(\Delta) = A(\Delta)$ pour toute $\Delta \in \mathcal{L}$ avec A borné biunivoque, la proposition est immédiate. *b*. Si

$\mathcal{J}(\Delta) = CA'(\Delta)$ (C, conjugaison; A', borné biunivoque) pour toute $\Delta \in \mathcal{L}$, on a

$$D' = CA'(D) \simeq A'(D)$$

(lemme 4.3), donc $D \succ D'$. Si la dimension de H est finie, la proposition est presque triviale.

Remarque. — Les relations $\succ$ et $\sim$ sont ainsi définies intrinsèquement dans $\mathcal{L}$. Rappelons alors les résultats suivants, qui apparaissent maintenant comme des résultats sur la structure du réseau $\mathcal{L}$:

1° Si la classe de D' est supérieure à celle de D, on a $D \underset{\not\sim}{\succ} D'$; si D et D' sont de classe 2, on a $D \sim D'$ (mais pas en général $D \simeq D'$); si D et D' sont de classe 3, elles sont comparables ou non, et $D \sim D'$ entraîne $D \simeq D'$.

2° Pour que $D \succ D'$, il faut et il suffit qu'il existe une $D'' \in \mathcal{L}$, $D'' \subset D$, $D'' \simeq D'$.

V. — Construction des opérateurs J.

Dans ce chapitre, H est supposé de nouveau séparable à une infinité de dimensions. Pour tout opérateur J considéré, A, on suppose, sauf mention expresse du contraire, que A est biunivoque et que $[D_A] = [\Delta_A] = H$.

1. Classification des opérateurs J. — Un opérateur J sera dit de classe 1, 2, ou 3_n, suivant que son image est une variété de classe 1, 2, ou 3_n.

Les opérateurs J de classe 1 sont les opérateurs fermés (1). Soit A un tel opérateur. Rappelons que les circonstance suivantes peuvent seules se présenter (E, th. 7.3) :

D_A fermé, Δ_A quelconque; Δ_A fermé, D_A quelconque; D_A et Δ_A de classe 2.

Proposition 5.1. — *Soit* A *un opérateur* J : *a. Si l'un des domaines*

(1) Ne pas confondre opérateurs de classe 1 et opérateurs de 1re classe (ces derniers étant, rappelons-le, les applications linéaires biunivoques et bicontinues de H sur H).

D_A, Δ_A *est de classe* 1, A *est de classe* 1. *b. Pour que* A, *non fermé, soit de classe* 2, *il faut et il suffit que l'un des domaines* D_A, Δ_A *soit de classe* 2. *c. Pour que* A *soit de classe* 3 *il faut et il suffit que* D_A *et* Δ_A *soient de classe* 3.

Démonstration. — *a.* résulte de E, théorème 3.4.

b. Supposons D_A par exemple de classe 2; soit N un noyau de D_A; la restriction de A à N est fermée bornée, donc son image est un noyau de l'image V de A. V est de classe 2, puisque A est supposé non fermé.

Réciproquement, si A est de classe 2, soit un noyau de V, qui est l'image d'une restriction A′ de A; A′ est fermé, donc l'un des domaines $D_{A'}$, $\Delta_{A'}$ contient un noyau qui fournit un noyau de D_A ou de Δ_A. D'ailleurs, D_A et Δ_A sont non fermés [sinon A serait de classe 1, d'après (*a*)].

c. Si A est de classe 3, D_A et Δ_A sont de classe 3 d'après (*a*) et (*b*). Si réciproquement D_A et Δ_A sont de classe 3, A ne peut être de classe 2 d'après (*b*), ni de classe 1 d'après ce qu'on a rappelé des opérateurs fermés.

Conséquence. — Nous sommes amenés à partager les opérateurs de classe 2 en trois sous-classes :

Classe 2α : D_A et Δ_A sont de classe 2;
Classe 2β : D_A est de classe 2 et Δ_A de classe 3;
Classe 2γ : D_A est de classe 3 et Δ_A de classe 2.

Rappelons enfin que, d'après E, proposition 6.2, il existe, dans chacune des classes 2α, 2β, 2γ et 3, des opérateurs A tels que $\widetilde{A} = \Omega$.

2. Construction des opérateurs de classe 2α. — Lemme 5.1. — *Soit* T *un opérateur linéaire fermé borné dans le cas p, non complètement continu. On peut trouver, d'une infinité de manières, une variété linéaire fermée* N *de dimension et de déficience infinies dans* H, *telle que, pour toute variété linéaire fermée,* M, *disjointe de* N, *et non asymptotique à* N, T(M) *soit fermée.*

Démonstration. — Si $T = UT_0$ est la décomposition de T en unitaire U et self-adjoint T_0, il suffit d'établir le lemme pour T_0. Autrement dit, supposons T self-adjoint (et non complètement continu). Alors on peut trouver une variété fermée N, réduisant T, de dimension et de déficience infinies, telle que T soit bicontinu dans $H \ominus N$ (en effet, le spectre continu de T contient un point $\lambda \neq 0$). Supposons $\|TX\| \geqq m\|X\|$, $m > 0$, pour $X \in H \ominus N$. Soit alors M une variété linéaire fermée disjointe de N et non asymptotique à N. On a, pour $X \in M$:

$$\|TX\| = \|TP_N X + TP_{H\ominus N}X\| \geqq \|TP_{H\ominus N}X\|,$$

car $TP_N X \in N$ et $TP_{H\ominus N}X \in H \ominus N$ sont orthogonaux. D'où

$$\|TX\| \geqq m\|P_{H\ominus N}X\| \geqq mC\|X\|,$$

où $C > 0$ est indépendant de X, puisque M est non asymptotique à N. Donc T(M) est fermée.

Lemme 5.2. — *Soit* $\eta > 0$ *un angle arbitrairement petit, et soit* V_1, V_2 *deux variétés linéaires fermées. On peut trouver un opérateur* L *de première classe dans* H, *tel que, si* $\overline{V}_1 = L(V_1)$ *et* $\overline{V}_2 = L(V_2)$, *on ait*

$$a.\quad \beta(\overline{V}_2, \overline{V}_1) \leqq \eta \qquad \text{ou} \qquad b.\quad \beta(\overline{V}_1, \overline{V}_2) \leqq \eta.$$

Démonstration. — Disons, avec Nicodym, que deux variétés linéaires fermées V, V′ sont compatibles si P_V et $P_{V'}$ permutent, c'est-à-dire, si, par exemple,

$$V' = (V' \cap V) \oplus [V' \cap (H \ominus V)].$$

Soit alors $M_1, M_2, \ldots, M_n$, des variétés linéaires fermées orthogonales deux à deux et sous-tendant H, compatibles avec V_1 et V_2. Si l'on démontre par exemple le (*a*) du lemme pour $V_1 \cap M_i$ et $V_2 \cap M_i$ dans l'espace M_i pour tout i, le (*a*) du lemme en résulte aussitôt pour V_1 et V_2 dans H.

Ceci posé, soit

$$V_{1'} = H \ominus V_1; \qquad V_{2'} = H \ominus V_2; \qquad \varphi_{ij} = V_i \cap V_j \qquad (i, j = 1, 2, 1', 2');$$
$$H' = H \ominus (\varphi_{12} \oplus \varphi_{12'} \oplus \varphi_{1'2} \oplus \varphi_{1'2'});$$
$$W_i = V_i \cap H' \qquad (i, j = 1, 2, 1', 2').$$

Appliquant le lemme 1.3 de E, nous pouvons prendre pour variétés M_i les variétés définies comme suit :

1° $M_1 = \varphi_{12} \oplus \varphi_{1'2'}$. Alors

$$V_1 \cap M_1 = \varphi_{12} = V_2 \cap M_1.$$

On prendra, pour $X \in M_1$, $LX = X$.

2° $M_2 = \varphi_{12'} \oplus \varphi_{1'2}$. Alors

$$V_1 \cap M_2 = \varphi_{12'}, \qquad V_2 \cap M_2 = \varphi_{1'2},$$

$\varphi_{12'}$ et $\varphi_{1'2}$ sont orthogonales complémentaires dans M_2. Supposons, par exemple, $\dim \varphi_{1'2} \leqq \dim \varphi_{12'}$; soit U un opérateur isométrique tel que $U(\varphi_{1'2}) \subset \varphi_{12'}$. On prendra, pour $X \in M_2$,

$$LX = X + (\operatorname{cotg} \eta) U P_{\varphi_{1'2}} X.$$

3° W_1 et W_2 sont en position p dans H'. Appliquons la proposition 1.8 de E. Soit H'^{η} et $\overline{H}'^{\eta}$, variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires dans H', compatibles avec W_1 et W_2, avec

$$\beta(W_1 \cap \overline{H}'^{\eta}, W_2 \cap \overline{H}'^{\eta}) = \beta(W_2 \cap \overline{H}'^{\eta}, W_1 \cap \overline{H}'^{\eta}) \leqq \eta$$

et

$$\alpha(W_1 \cap H'^{\eta}, W_2 \cap H'^{\eta}) \geqq \eta.$$

On prendra $M_3 = \overline{H}'^{\eta}$ et, pour $X \in M_3$, $LX = X$.

4° $M_4 = H'^{\eta}$. $V_1 \cap M_4$ et $V_2 \cap M_4$ sont en position p dans M_4 et non asymptotiques, donc on peut, par un opérateur bicontinu de M_4, les transformer en variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires de M_4, puis démontrer le lemme dans M_4 à l'aide d'un nouvel opérateur bicontinu par le même procédé que dans M_2.

Lemme 5.3. — *Soit* V_1, V_2, *deux variétés linéaires fermées de dimension et de déficience infinies. On peut trouver deux variétés linéaires fermées* M, M′ *disjointes, à* ∞ *dimensions telles que* $M \dotplus M' = H$, *disjointes de* V_1 *et* V_2, *non asymptotiques à* V_1, *non asymptotiques à* V_2.

Démonstration. — Comme les propriétés exigées de M et M′ sont invariantes dans toute transformation bicontinue de H, on peut, d'après le lemme 5.2, supposer au départ $\beta(V_2, V_1) = \eta < \frac{\pi}{4}$ par exemple. Soit (e_i), (e'_i) des bases orthonormales de V_1 et $H \ominus V_1$, qui ont ∞ dimensions. Soit

$$M = [e_1 + e'_1, e_2 + e'_2, \ldots], \qquad M' = [e_1 - e'_1, e_2 - e'_2, \ldots].$$

Il est immédiat que M et M′ sont orthogonales complémentaires dans H, à ∞ dimensions, et que

$$\alpha(M, V_1) = \beta(M, V_1) = \alpha(M', V_1) = \beta(M', V_1) = \frac{\pi}{4}.$$

Comme, pour $X \in V_2$, on a $\alpha(X, V_1) \leqq \eta$, on voit de plus que

$$\alpha(V_2, M) \geqq \frac{\pi}{4} - \eta, \qquad \alpha(V_2, M') \geqq \frac{\pi}{4} - \eta.$$

Définition. — (*Cf.* E, Chap. VII, § **3**). Soit V, V′, deux variétés linéaires fermées disjointes à ∞ dimensions, sous-tendant H; soit W, W′, deux autres variétés ayant les mêmes propriétés; soit L, L′, deux opérateurs bicontinus tels que

$$D_L = V, \qquad \Delta_L = W, \qquad D_{L'} = V', \qquad \Delta_{L'} = W'.$$

Définissons, dans $V \dot{+} V'$, un opérateur linéaire A de la manière suivante : pour tout $Z = X + X'$ de $V \dot{+} V'$ ($X \in V$, $X' \in V'$), on pose

$$AZ = LX + L'X'.$$

A est biunivoque,

$$D_A = V \dot{+} V', \qquad \Delta_A = W \dot{+} W'.$$

Désignons l'opérateur ainsi construit par $A(V, V'; W, W'; L, L')$.

On a

$$A^{-1} = A(W, W'; V, V'; L^{-1}, L'^{-1}).$$

THÉORÈME 5.1. — *Tout opérateur du type* $A(V, V'; W, W'; L, L')$ *est un opérateur* J *biunivoque* A, *avec* D_A, Δ_A *partout denses de classes* 1 *ou* 2.

b. Réciproquement, tout opérateur J *biunivoque* A, *avec* D_A, Δ_A, *partout denses de classes* 1 *ou* 2, *est du type* $A(V, V'; W, W'; L, L')$.

c. V *et* V′ *sont des noyaux conjugués de* D_A, W *et* W′ *des noyaux conjugués de* Δ_A.

Démonstration. — *a.* est établi dans E (Chap. VII, § 5); *c.* est évident; prouvons *b.* On a $A = C'C^{-1}$, où C, C′ sont des opérateurs linéaires fermés bornés dans le cas p(E, th. 3.2) non complètement continus puisque $D_A = \Delta_C$ et $\Delta_A = \Delta_{C'}$ sont de classes 1 ou 2. Soit N (resp. N′) la variété linéaire fermée que le lemme 5.1 permet d'attacher à C (resp. C′). N et N′ sont de dimensions et de déficiences infinies. Soit (lemme 5.3) M et M′ des variétés linéaires fermées, à ∞ dimensions, telles que $M \cap M' = 0$, $M \dotplus M' = H$, disjointes de N et N′, non asymptotiques à N et N′. Alors, on peut prendre

$$V = C(M), \qquad W = C'(M), \qquad V' = C(M'), \qquad W' = C'(M').$$

Remarques : 1° Le *b.* du théorème avait été prouvé dans E dans le cas des opérateurs linéaires fermés, par une méthode toute différente. On obtient ici le même résultat en même temps pour les opérateurs de classe 2α. Ces opérateurs sont donc, eux aussi, dans la mesure du possible, ramenés aux opérateurs de première classe.

2° Soit D, D′, deux variétés J de classe 2 partout denses. On a donné dans E la construction suivante des opérateurs fermés de $\mathcal{G}(D, D')$: soit V, V′ deux noyaux conjugués de D; W, W′, deux noyaux conjugués de D′; L, L′, des opérateurs bicontinus tels que $D_L = V$, $\Delta_L = W$, $D_{L'} = V'$, $\Delta_{L'} = W'$; on forme

$$A(V, V'; W, W'; L, L').$$

On a fait remarquer dans E que cette construction fournissait également des opérateurs non fermés. Effectivement, le théorème 5.1 prouve qu'on obtient ainsi tous les opérateurs de $\mathcal{G}(D, D')$.

3° On obtient aussi des renseignements sur les opérateurs

$$A(V, V'; W, W'; L, L')$$

qu'on aurait pu considérer *a priori*. Ils sont fermés bornés si V et V′ sont non asymptotiques, fermés d'inverse borné si W et W′ sont non asymptotiques. Mais, si V et V′ d'une part, W et W′ d'autre part, sont asymptotiques, A peut ne pas admettre de prolongement fermé uniforme et l'on peut même avoir $\tilde{A} = \Omega$ (E, prop. 6.2). Plus précisément, on peut montrer (nous ne le ferons pas) que, si l'on se fixe V, V′, W, W′ avec V et V′ asymptotiques, W et W′ asymptotiques, on peut choisir L et L′ de façon que $\tilde{A} = \Omega$.

5. Construction des opérateurs de classe 2β et 2γ. — Étudions par exemple les opérateurs de classe 2β.

Définition. — Soit V, V′, deux variétés linéaires fermées disjointes, à ∞ dimensions, sous-tendant H; soit d, d' deux variétés J de classe 3_∞, disjointes, sous-tendant H; soit C, C′ deux opérateurs J biunivoques, nécessairement fermés, complètement continus, tels que

$$D_C = V, \qquad \Delta_C = d, \qquad D_{C'} = V', \qquad \Delta_{C'} = d'.$$

Définissons, dans $V \dot{+} V'$, un opérateur linéaire A de la manière suivante : pour tout $Z = X + X'$ de $V \dot{+} V'$ $(X \in V,\ X' \in V')$, on pose

$$AZ = CX + C'X'.$$

A est biunivoque,

$$D_A = V \dot{+} V', \qquad \Delta_A = d \dot{+} d'.$$

Désignons l'opérateur ainsi construit par $B(V, V'; d, d'; C, C')$.

Théorème 5.2. — *a. Tout opérateur du type* $B(V, V'; d, d'; C, C')$ *est un opérateur* J *biunivoque* A *avec* D_A *partout dense de classe* 1 *ou* 2, Δ_A *partout dense de classe* 3.

b. Réciproquement, tout opérateur J *biunivoque* A, *avec* D_A *partout dense de classe* 1 *ou* 2, Δ_A *partout dense de classe* 3, *est du type* $B(V, V'; d, d'; C, C')$.

c. V *et* V′ *sont des noyaux conjugués de* D_A.

Démonstration. — *a.* On montre, comme au théorème 5.1, que A est un opérateur J, évidemment biunivoque; $\Delta_A = d \dotplus d'$ est partout dense, et de classe 3_∞ (th. 3.2); D_A est partout dense, de classe 1 si V et V' sont non asymptotiques (auquel cas A est fermé complètement continu), de classe 2 si V et V' sont asymptotiques (auquel cas A est de classe 2β).

b. Soit N, N' des noyaux conjugués de D_A. On a

$$d = A(N) \subset \Delta_A, \qquad d' = A(N') \subset \Delta_A,$$

donc d et d' sont des variétés J de classe 3_∞; comme

$$N \cap N' = 0, \qquad [N \dotplus N'] = H,$$

d et d' sont disjointes et sous-tendent H; enfin, la restriction de A à N est un opérateur J, C, nécessairement fermé, et alors complètement continu puisque $\Delta_C = d$; de même pour la restriction C' de A' à N' et l'on a

$$A = B(N, N'; d, d'; C, C').$$

c. est évident.

Remarques. — Le *b.* du théorème n'est pas intéressant quand D_A est de classe 1, puisqu'alors A est fermé complètement continu. Mais il donne une construction de tous les opérateurs J de classe 2β et ramène ceux-ci, dans la mesure du possible, aux opérateurs complètement continus. On a aussi une construction de tous les opérateurs de $\mathcal{G}(D, D')$ lorsque D est de classe 2 et D' de classe 3, et des renseignements sur les opérateurs $B(V, V'; d, d'; C, C')$ qu'on aurait pu considérer *a priori*.