JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE PARODI

Sur un type d'équations intégrales de seconde espèce résolubles par le calcul symbolique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 28 (1949), p. 35-62.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1949_9_28__35_0>

Sur un type d'équations intégrales de seconde espèce résolubles par le calcul symbolique;

Par Maurice PARODI.

1. Forme du noyau; méthode générale de résolution. — Considérons les équations intégrales singulières de seconde espèce du type

$$f(t) + \lambda \int_0^{\infty} \mathrm{K}(x, t) f(x)\, dx = g(t), \tag{1}$$

où $f(t)$ est une fonction inconnue, le noyau $\mathrm{K}(x, t)$ étant de la forme

$$\mathrm{K}(x,t) = \overset{\star}{a}(t) \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!} x^n \overline{b(t)}^{\overset{\star}{}\,n}. \tag{2}$$

$\star$ étant le symbole du produit de composition, la série étant supposée uniformément convergente pour toute valeur de x et t appartenant à l'intervalle $(0, +\infty)$.

Nous allons montrer que le calcul symbolique permet de ramener la recherche des solutions des équations de ce type à la résolution d'équations fonctionnelles.

Posons, *au sens de Laplace* (1), $a(t) \supset \rho(s)$, $b(t) \supset \psi(s)$; le noyau $\mathrm{K}(x, t)$ a pour image, prise par rapport à t,

$$\rho(s)\, e^{-x\psi(s)}.$$

(1) D'une façon générale, une transformation de Laplace sera caractérisée par le paramètre s, une intégrale de Carson par le paramètre p.

Faisons sur les deux membres de (1) une transformation de Laplace en opérant sur la variable t; en posant $f(t) \supset \varphi(s)$, $g(t) \supset \theta(s)$, il vient

$$\varphi(s) + \lambda\rho(s) \int_0^{\infty} e^{-x\psi(s)} f(x)\, dx = \theta(s),$$

ou encore

$$\varphi(s) + \lambda\rho(s)\, \varphi[\psi(s)] = \theta(s). \tag{3}$$

Si l'on sait résoudre l'équation fonctionnelle (3) en $\varphi(s)$, l'original de sa solution, s'il existe, sera une solution de (1) à condition que les intégrales convergent.

La résolution de (3) n'est pas, en général, plus aisée que celle de l'équation (1), cependant, dans certaines circonstances, ce procédé peut conduire à des résultats intéressants.

C'est ce qui se produit en particulier quand la fonction $\psi(s)$ est une fonction périodique d'ordre deux ([1]), c'est-à-dire telle que sa seconde itérée redonne la variable :

$$\psi[\psi(s)] = s.$$

La fonction $\psi(s)$ peut, dans ces conditions, revêtir les formes

$$s, \quad \frac{1}{as}, \quad a - s, \quad \frac{s}{as - 1}, \quad \frac{2 - s}{1 - s}, \ldots \quad (a = \text{const.}).$$

En remplaçant alors s par $\psi(s)$ dans l'équation (3), on obtient

$$\varphi[\psi(s)] + \lambda\rho[\psi(s)]\, \varphi(s) = \theta[\psi(s)],$$

et en éliminant $\varphi[\psi(s)]$ entre cette dernière équation et l'équation (3), il vient la solution

$$\varphi(s) = \frac{\theta(s) - \lambda\rho(s)\, \theta[\psi(s)]}{1 - \lambda^2 \rho(s)\, \rho[\psi(s)]}, \tag{4}$$

à condition que l'expression qui figure au dénominateur du second membre soit différente de zéro; de la considération de cette dernière on peut d'ailleurs déduire, comme nous le montrerons, les valeurs caractéristiques de l'équation (1).

Avec l'expression trouvée pour $\varphi(s)$, la solution de (1) est donnée

([1]) M. Parodi, *C. R. Acad. Sc.*, 226, 1948, p. 43.

en ayant recours à la formule d'inversion de la transformation de Laplace, par l'intégrale complexe

$$(5)\qquad f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{st}\,\frac{\theta(s)-\lambda\rho(s)\,\theta[\psi(s)]}{1-\lambda^2\rho(s)\,\rho[\psi(s)]}\,ds.$$

C étant un contour de Bromwich approprié.

On peut remarquer que $\varphi(s)$ est égal au produit de deux facteurs; le premier, $\theta(s)-\lambda\rho(s)\,\theta[\psi(s)]$, a manifestement pour original

$$g(t)-\lambda\int_0^\infty \mathrm{K}(x,\,t)\,g(x)\,dx.$$

Posons, pour le second

$$\varphi_1(s)=\frac{1}{1-\lambda^2\rho(s)\rho[\psi(s)]}\subset h(t),$$

la correspondance étant entendue au sens de Laplace.

La solution de l'équation envisagée (1) s'écrit alors

$$f(t)=\overset{\star}{h}(t)\left[\overset{\star}{g}(t)-\overline{\lambda\int_0^\infty \mathrm{K}(x,\,t)\,g(x)\,dx}^{\,\star}\right]$$

avec les notations du produit de composition.

L'expression de $\varphi_1(s)$ conduit de plus à la relation

$$\varphi_1(s)-\lambda^2\varphi_1(s)\,\rho(s)\,\rho[\psi(s)]=0,$$

dont l'original s'écrit

$$h(t)-\lambda^2\overset{\star}{h}(t)\,\overline{\int_0^\infty \mathrm{K}(x,t)\,a(x)\,dx}^{\,\star}=0.$$

C'est une équation homogène en $h(t)$ dont *les valeurs caractéristiques sont les carrés de celles de l'équation* (1); elles sont indépendantes de $b(t)$.

Les expressions de $\psi(s)$ que nous avons données et qui sont telles que $\psi[\psi(s)]=s$ permettent de construire une infinité d'autres fonctions périodiques du second ordre. Babbage [1] a en effet montré que si $f(s)$ est une solution particulière de l'équation

$$\psi[\psi(s)]=s.$$

la fonction $\varphi^{-1}\{f[\varphi(s)]\}$ où $\varphi(s)$ est une fonction arbitraire, d'inverse $\varphi^{-1}(s)$, est une fonction périodique du second ordre.

---

(1) *Phil. Trans.*, t. **105**, 1815, p. 389.

Montrons-le. On a, en écrivant $\varphi\psi(s)$ à la place de $\varphi[\psi(s)]$ pour simplifier l'écriture, et en opérant sur la fonction précédente,

$$\begin{aligned}\psi[\psi(s)] &= \psi\varphi^{-1}f\varphi(s) = \varphi^{-1}f\varphi\varphi^{-1}f\varphi(s)\\ &= \varphi^{-1}ff\varphi(s) = \varphi^{-1}\varphi(s) = s.\end{aligned}$$

La fonction $\varphi^{-1}f\varphi(s)$ est donc une fonction périodique du second ordre.

Ces considérations nous permettent donc de déterminer une infinité de noyaux $K(x, t)$ pour lesquels la relation (4) sera valable.

Parmi les noyaux simples ainsi définis, nous pouvons signaler les suivants :

$$x^{-\frac{\nu}{2}} t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx}) \supset \frac{1}{s^{\nu+1}} e^{-\frac{x}{s}} \qquad (R(\nu) > -1$$

$$\frac{\cos 2\sqrt{tx}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-\frac{x}{s}}, \qquad \frac{\sin 2\sqrt{tx}}{\sqrt{x}} \supset \frac{1}{s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{\frac{x}{s}} \qquad (R(s) > 0),$$

$J_\nu(t)$ étant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν.

Notons que la méthode est encore valable quand $\psi(s)$ est une fonction périodique d'ordre n, c'est-à-dire telle que son itérée d'ordre n redonne la variable ; nous le montrerons sur des exemples, nous bornant pour l'instant à indiquer qu'il est possible de trouver des noyaux satisfaisant à cette condition. En se référant aux travaux de Babbage (¹), on sait en effet que parmi l'ensemble des fonctions périodiques d'ordre n, il existe la suivante

$$\psi(s) = \frac{aa's - \left(a^2 - 2a\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)}{a'^2 s - a'\left(a - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right)},$$

a et a' étant arbitraires et k un entier compris entre zéro et n.

Il est alors facile de déterminer l'original de

$$\rho(s)\, e^{-x\psi(s)},$$

quand la forme de $\rho(s)$ a été précisée.

Nous allons appliquer ces principes généraux à l'étude de quelques types d'équations intégrales de seconde espèce.

(¹) Voir, par exemple, H. Laurent, *Traité d'Analyse*, Paris, 1890, t. 6, p. 246.

2. ÉQUATIONS DE SECONDE ESPÈCE OU $\psi(s)$ EST UNE FONCTION PÉRIODIQUE DU SECOND ORDRE. — Considérons, par exemple, l'équation en $f(t)$

$$f(t)+\lambda\int_0^{\infty}\mathrm{K}(t,x)f(x)\,dx=g(t),$$

où

$$\mathrm{K}(t,x)=\left(\frac{d}{dt}+1\right)t^{\frac{\nu}{2}}x^{-\frac{\nu}{2}}\mathrm{J}_\nu(2\sqrt{tx}).$$

Puisque

$$t^{\frac{\nu}{2}}x^{-\frac{\nu}{2}}\mathrm{J}_\nu(2\sqrt{tx})\supset\frac{1}{s^{\nu+1}}e^{-\frac{x}{s}},\qquad \mathcal{R}(\nu)>-1,\qquad \mathcal{R}(s)>0,$$

et que le membre de gauche de cette correspondance est nul pour $t=0$, on peut écrire

$$\mathrm{K}(t,x)\supset-\frac{s+1}{s^{\nu+1}}e^{-\frac{x}{s}}.$$

On a donc

$$\psi(s)=\frac{1}{s}\qquad \rho(s)=\frac{s+1}{s^{\nu+1}}$$

et

$$\rho(s)\rho\left(\frac{1}{s}\right)=(s+1)\left(\frac{1}{s}+1\right).$$

D'après la théorie générale faite plus haut, l'image au sens de Laplace, de $f(t)$, a pour expression

$$\varphi(s)=\frac{1}{1-\lambda^2\dfrac{(s+1)^2}{s}}\left[\theta(s)-\lambda\frac{s+1}{s^{\nu+1}}\theta\left(\frac{1}{s}\right)\right].$$

Ainsi

$$h(t)\supset\frac{s}{s-\lambda^2(s+1)^2}=\frac{-s}{\sqrt{1-4\lambda^2}}\times\left[\frac{1}{s-\dfrac{1-2\lambda^2+\sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda^2}}-\frac{1}{s-\dfrac{1-2\lambda^2-\sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda^2}}\right]$$

et

$$f(t)=-\frac{1}{\sqrt{1-4\lambda^2}}\frac{d}{dt}\left[\overset{\star}{e}{}^{\frac{1-2\lambda^2+\sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda^2}t}-\overset{\star}{e}{}^{\frac{1-2\lambda^2+\sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda^2}t}\right]\times\left[\overset{\star}{g}(t)-\lambda\overset{\star}{\overline{\int_0^{\infty}\mathrm{K}(t,x)g(x)\,dx}}\right].$$

Les valeurs caractéristiques sont $\pm\frac{1}{2}$.

Étudions maintenant un exemple simple qui va nous conduire à des généralisations intéressantes. Soit l'équation en $f(t)$

$$f(t)+\lambda\int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}}x^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{tx})f(x)\,dx=g(t). \tag{6}$$

Puisque

$$t^{\frac{\nu}{2}}x^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{tx})\supset\frac{1}{s^{\nu+1}}e^{-\frac{x}{s}},$$

l'équation fonctionnelle adjointe (3) prend la forme

$$\varphi(s)+\frac{\lambda}{s^{\nu+1}}\varphi\left(\frac{1}{s}\right)=\theta(s),$$

et sa solution est

$$\varphi(s)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left[\theta(s)-\frac{\lambda}{s^{\nu+1}}\theta\left(\frac{1}{s}\right)\right].$$

En remontant aux originaux, il apparaît que la solution de (6) s'écrit

$$f(t)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left\{g(t)-\lambda\int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}}x^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{tx})g(x)\,dx\right\} \tag{7}$$

à condition que λ diffère des valeurs caractéristiques ± 1.

Cherchons maintenant les solutions de (6) correspondant aux valeurs caractéristiques de λ [1].

Supposons en premier lieu $\lambda=+1$; il nous faut trouver la solution en $\varphi(s)$ de l'équation

$$\varphi(s)+\frac{1}{s^{\nu+1}}\varphi\left(\frac{1}{s}\right)=\theta(s). \tag{8}$$

Remplaçons s par $\frac{1}{s}$, il vient

$$\varphi\left(\frac{1}{s}\right)+s^{\nu+1}\varphi(s)=\theta\left(\frac{1}{s}\right). \tag{8'}$$

L'examen des équations (8) et (8′) montre que la résolution de (8) ne sera possible que si $\theta(s)$ satisfait à l'équation

$$\theta(s)=\frac{1}{s^{\nu+1}}\theta\left(\frac{1}{s}\right). \tag{9}$$

---

(1) M. Parodi, *C. R. Acad. Sc.*, t. **226**, 1948, p. 153.

La fonction $g(t)$, d'image $\theta(s)$, doit donc, pour que le problème soit possible, avoir une forme particulière qu'il est d'ailleurs facile d'obtenir; l'équation (9) a pour solution

$$\theta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{s^{\nu+1}}\,\alpha\left(\frac{1}{s}\right),$$

$\alpha(s)$ étant une fonction arbitraire; si donc $A(t)$ est l'original de $\alpha(s)$, $g(t)$ doit être de la forme

$$g(t) = A(t) + \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}} x^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx})\,A(x)\,dx. \tag{10}$$

Supposons $g(t)$ de la forme (10) et cherchons les solutions de (8).

Nous pouvons considérer l'équation

$$\varphi(s) + \frac{1+\mu}{s^{\nu+1}}\,\varphi\left(\frac{1}{s}\right) + \mu\eta(s) = \theta(s), \tag{11}$$

$\eta(s)$ étant une fonction arbitraire; pour $\mu = 0$ elle est identique à l'équation (8).

Changeons s en $\frac{1}{s}$, il vient

$$\varphi\left(\frac{1}{s}\right) + (1+\mu)\,s^{\nu+1}\,\varphi(s) + \mu\eta\left(\frac{1}{s}\right) = \theta\left(\frac{1}{s}\right). \tag{11'}$$

Entre (11) et (11') on peut éliminer $\varphi\left(\frac{1}{s}\right)$: compte tenu de la relation satisfaite par $\theta(s)$, il vient

$$\varphi(s) = \frac{1}{\mu+2}\left[\theta(s) - \frac{\mu+1}{s^{\nu+1}}\,\eta\left(\frac{1}{s}\right) + \eta(s)\right].$$

En faisant $\mu = 0$ dans la formule précédente, nous obtenons la solution de (8)

$$\varphi(s) = \frac{1}{2}\left[\theta(s) - \frac{1}{s^{\nu+1}}\,\eta\left(\frac{1}{s}\right) + \eta(s)\right]$$

où $\eta(s)$ est une fonction arbitraire.

En remontant aux originaux, il apparaît que la solution de (6) correspondant à la valeur caractéristique $\lambda = +1$, est

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[g(t) - \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}} x^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx})\,h(x)\,dx + h(t)\right], \tag{12}$$

$h(t) \supset \eta(s)$ étant une fonction arbitraire.

Supposons maintenant $\lambda = -1$; nous avons à résoudre l'équation en $\varphi(s)$

$$(8'') \qquad \varphi(s) - \frac{1}{s^{\nu+1}} \varphi\left(\frac{1}{s}\right) = \theta(s).$$

En suivant la même marche que dans le cas précédent, on voit que le problème n'est possible que si $\theta(s)$ satisfait à la relation

$$\theta(s) = -\frac{1}{s^{\nu+1}} \theta\left(\frac{1}{s}\right),$$

ce qui impose à $g(t)$ d'être de la forme

$$g(t) = \mathrm{A}(t) - \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}} x^{-\frac{\nu}{2}} \mathrm{J}_\nu(2\sqrt{tx}) \mathrm{A}(x)\, dx,$$

$\mathrm{A}(t)$ étant une fonction arbitraire.

Cette condition étant supposée remplie, en opérant comme plus haut, on trouve pour la solution de (6) correspondant à $\lambda = -1$,

$$(12') \qquad f(t) = \frac{1}{2}\left[g(t) + \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}} x^{-\frac{\nu}{2}} \mathrm{J}_\nu(2\sqrt{tx})\, h(x)\, dx + h(t)\right],$$

$h(t)$ étant une fonction arbitraire.

Noyaux réciproques. — L'étude de l'équation (6) suggère une généralisation importante.

Il apparaît que le noyau de cette équation est tel que la fonction $\rho(s)$ qui figure dans son image satisfait à la relation

$$\rho(s)\rho[\psi(s)] = 1.$$

Montrons que tous les noyaux du type (2) pour lesquels cette relation est satisfaite, sont réciproques, c'est-à-dire tels que si l'on a

$$(13) \qquad g(t) = \int_0^\infty \mathrm{K}(x, t) f(x)\, dx,$$

il en résulte

$$(14) \qquad f(t) = \int_0^\infty \mathrm{K}(x, t)\, g(x)\, dx.$$

L'équation fonctionnelle adjointe de (13) s'écrit

$$\theta(s) = \rho(s)\, \varphi[\psi(s)],$$

d'où l'on tire par itération

$$\theta[\psi(s)] = \rho[\psi(s)]\,\varphi(s).$$

Compte tenu de la relation satisfaite par $\rho(s)$, il vient

$$\varphi(s) = \rho(s)\,\theta[\psi(s)].$$

En remontant aux originaux, il apparaît immédiatement que cette relation implique (14).

Ces considérations permettent de déterminer une famille de noyaux réciproques ([1]).

L'équation fonctionnelle

$$\rho(s)\,\rho[\psi(s)] = 1$$

admet la solution

$$\rho(s) = \frac{\nu(s)}{\nu[\psi(s)]},$$

où $\nu(s)$ est une fonction arbitraire.

Il en résulte que l'image d'un noyau réciproque peut être de la forme

$$\frac{\nu(s)}{\nu[\psi(s)]}\,e^{-x\psi(s)},$$

$\psi(s)$ étant périodique d'ordre deux.

Une famille de noyaux réciproques peut donc être définie par l'intégrale complexe

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\nu(s)}{\nu[\psi(s)]}\,e^{-x\psi(s)}\,e^{st}\,ds,$$

prise le long d'un contour de Bromwich approprié.

Toutes les fois que le noyau d'une équation du type (1) sera réciproque, il est clair que les valeurs caractéristiques seront $\lambda = \pm 1$; les solutions fondamentales sont alors faciles à déterminer.

Montrons-le dans le cas où $\lambda = +1$; on a à résoudre

$$f(t) + \int_0^\infty K(x, t)\,f(x)\,dx = g(t).$$

([1]) M. Parodi, *C. R. Acad. Sc.*, t. **226**, 1948, p. 1948.

L'équation adjointe est de la forme

$$\varphi(s) + \rho(s)\varphi[\psi(s)] = \theta(s).$$

En itérant, compte tenu de la relation satisfaite par $\rho(s)$, il vient

$$\varphi(s) + \rho(s)\varphi[\psi(s)] = \rho(s)\,\theta[\psi(s)].$$

Pour que le problème soit possible, il faut donc que l'on ait

$$\theta(s) = \rho(s)\,\theta[\psi(s)],$$

ce qui implique que $g(t)$ soit solution de l'équation intégrale

$$g(t) = \int_0^\infty \mathrm{K}(x, t)\, g(x)\, dx,$$

dont la solution s'écrit

$$g(t) = \mathrm{A}(t) + \int_0^\infty \mathrm{K}(x, t)\, \mathrm{A}(x)\, dx,$$

$\mathrm{A}(x)$ étant une fonction arbitraire.

La solution correspondant à $\lambda = +1$ s'écrit dans ces conditions

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[g(t) + h(t) - \int_0^\infty \mathrm{K}(x, t)\, h(x)\, dx \right],$$

$h(t)$ étant une fonction arbitraire.

Remarquons de plus que pour qu'une équation du type

$$g(t) = a \int_0^\infty \mathrm{K}(x, t)\, f(x)\, dx \qquad (a = \text{const.})$$

admette une solution réciproque, il faut que son noyau ait une image de la forme

$$\rho(s)\, e^{-x\psi(s)},$$

$\psi(s)$ étant toujours périodique d'ordre deux, la fonction $\rho(s)$ satisfaisant à la relation

$$\rho(s)\,\rho[\psi(s)] = \frac{1}{a^2}.$$

La méthode précédente de détermination d'une famille de noyaux réciproques suggère un procédé plus général pour la recherche de tels noyaux (¹).

Au lieu de considérer la transformation de Laplace qui fait correspondre à $f(t)$ une fonction $\varphi(s)$ par l'intermédiaire de l'exponentielle e^{-st}, on peut envisager une transformation fonctionnelle de la forme

$$\varphi(s) = \int_0^\infty \Phi(s, t) f(t)\, dt,$$

qui fait correspondre à $f(t)$, par l'intermédiaire de la fonction $\Phi(s, t)$, une fonction $\varphi(s)$; nous noterons cette correspondance

$$\varphi(s) \underset{\Phi}{\subset} f(t), \qquad f(t) \underset{\Phi}{\supset} \varphi(s).$$

Si, dans ces conditions, on applique la transformation fonctionnelle précédente aux deux membres des équations (13) et (14), en admettant la convergence des intégrales et en posant

$$\varphi(s) \underset{\Phi}{\subset} f(t), \qquad \theta(s) \underset{\Phi}{\subset} g(t),$$

on obtient

$$(13') \qquad \theta(s) = \int_0^\infty \Phi(s, t)\, dt \int_0^\infty \mathrm{K}(x, t) f(x)\, dx,$$

$$(14') \qquad \varphi(s) = \int_0^\infty \Phi(s, t)\, dt \int_0^\infty \mathrm{K}(x, t)\, g(x)\, dx.$$

Supposons l'interversion des intégrales possible, il vient

$$(13'') \qquad \theta(s) = \int_0^\infty f(x)\, dx \int_0^\infty \Phi(s, t)\, \mathrm{K}(x, t)\, dt,$$

$$(14'') \qquad \varphi(s) = \int_0^\infty g(x)\, dx \int_0^\infty \Phi(s, t)\, \mathrm{K}(x, t)\, dt.$$

Imaginons alors que la fonction $\mathrm{K}(x, t)$ soit telle que l'on ait

$$\mathrm{K}(x, t) \underset{\Phi}{\supset} \Phi[\psi(s), x]\, \rho(s),$$

(¹) M. Parodi, *C. R. Acad. Sc.*, t. **227**, 1948, p. 810.

$\psi(s)$ étant une fonction périodique du second ordre; les équations (13″) et (14″) prennent les formes

$$\theta(s) = \varphi[\psi(s)]\rho(s), \tag{13‴}$$
$$\varphi(s) = \theta[\psi(s)]\rho(s), \tag{14‴}$$

et il apparaît, puisque $\psi(s)$ est périodique d'ordre deux, que (13‴) et (14‴) sont équivalentes si $\rho(s)$ satisfait à la relation

$$\rho(s)\rho[\psi(s)] = 1.$$

Ainsi, si $K(x, t) \supset \rho(s)\Phi[\psi(s), x]$, où $\psi(s)$ est périodique d'ordre deux, et si $\rho(s)$ vérifie la relation précédente, les équations (13) et (14) seront vérifiées simultanément.

Il existe donc une famille de noyaux réciproques qui sont tels qu'étant donnée une fonction arbitraire $\Phi(s, t)$, ils sont solutions de l'équation intégrale

$$\int_0^\infty \Phi(s, t)K(x, t)\,dt = \Phi[\psi(s), x]\rho(s),$$

$\psi(s)$ et $\rho(s)$ satisfaisant aux conditions ci-dessus indiquées.

Cette remarque permet de construire des noyaux réciproques; il suffit de se fixer $\Phi(s, t)$, $\psi(s)$ et $\rho(s)$, puis de résoudre l'équation intégrale précédente

Le noyau $\Phi(s, t)$ de cette dernière équation étant arbitraire, rien n'empêche de le choisir lui-même réciproque; dans ces conditions sa solution est immédiate, il vient

$$K(x, t) = \int_0^\infty \Phi(t, z)\rho(z)\Phi[\psi(z), x]\,dz.$$

Connaissant un noyau réciproque, nous pourrons ainsi en construire d'autres

Donnons un exemple simple.

Prenons

$$\Phi(s, t) = \cos st, \qquad \psi(s) = 1 - s, \qquad \rho(s) = e^{1-2s},$$

nous avons

$$\psi\psi(s) = s, \qquad \rho(s)\rho(1 - s) = 1,$$

et, par suite, le noyau

$$K(x, t) = \frac{2e}{\pi}\int_0 e^{-2z}\cos tz \cos(1-z)x\,dz,$$

est réciproque.

On trouvera dans la note signalée, d'autres exemples de noyaux réciproques déterminés par cette méthode.

Exemples divers. — *a.* Soit l'équation de seconde espèce

$$(15)\qquad f(t)+\lambda\int_0^\infty e^t e^{-x} x^{-\frac{\nu}{2}} t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx}) f(x)\,dx = g(t).$$

On a

$$e^t x^{-\frac{\nu}{2}} t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx}) \supset \frac{1}{(s-1)^{\nu+1}} e^{-\frac{x}{s-1}},$$

et, en prenant les images des deux membres de (15) par rapport à t, il vient l'équation fonctionnelle adjointe

$$(16)\qquad \varphi(s)+\frac{\lambda}{(s-1)^{\nu+1}}\varphi\left(\frac{s}{s-1}\right)=\theta(s)\qquad \mathcal{R}(s)>1.$$

La fonction $\frac{s}{s-1}$ est une fonction périodique du second ordre et la solution de (16) s'écrit

$$\varphi(s)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left[\theta(s)-\frac{\lambda}{(s-1)^{\nu+1}}\theta\left(\frac{s}{s-1}\right)\right].$$

La solution de la proposée est donc

$$(17)\qquad f(t)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left[g(t)-\lambda\int_0^\infty e^t e^{-x} x^{-\frac{\nu}{2}} t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx})\, g(x)\,dx\right],$$

quand λ diffère des valeurs caractéristiques ± 1.

Les solutions correspondant aux valeurs caractéristiques peuvent être déterminées en opérant comme dans l'exemple précédent.

b. Soit à résoudre l'équation en $f(t)$

$$(18)\qquad f(t)+\lambda\int_0^\infty e^t e^{-x} t^{\frac{\nu}{2}} x^{-\frac{\nu}{2}} I_\nu(2\sqrt{tx}) f(x)\,dx = g(t).$$

On a

$$e^t t^{\frac{\nu}{2}} x^{-\frac{\nu}{2}} I_\nu(2\sqrt{tx}) \supset \frac{1}{(s-1)^{\nu+1}} e^{\frac{x}{s-1}}\qquad \mathcal{R}(s)>1,$$

et l'équation fonctionnelle adjointe prend la forme

$$\varphi(s) + \frac{\lambda}{(s-1)^{\nu+1}} \varphi\left(\frac{s-2}{s-1}\right) = \theta(s), \qquad \mathcal{R}(s) > 2.$$

La fonction $\frac{s-2}{s-1}$ est périodique d'ordre deux et l'on obtient sans difficulté la solution $f(t)$ de (18) :

$$(19) \qquad f(t) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[g(t) - \lambda \int_0^\infty e^t e^{-x} t^{\frac{\nu}{2}} x^{-\frac{\nu}{2}} I_\nu(2\sqrt{tx})\, g(x)\, dx\right]$$

avec $\lambda \neq \pm 1$.

c. Soit l'équation

$$(20) \qquad f(t) = g(t) + \lambda \int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{tx}}{\sqrt{t}} f(x)\, dx.$$

L'équation fonctionnelle adjointe s'écrit

$$(21) \qquad \varphi(s) = \theta(s) + \lambda \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, \varphi\left(\frac{1}{s}\right)\Bigg].$$

et sa solution est

$$\varphi(s) = \frac{1}{1-\lambda^2\pi}\left[\theta(s) + \lambda\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,\theta\left(\frac{1}{s}\right)\right].$$

Ainsi l'équation (20) est satisfaite par

$$f(t) = \frac{1}{1-\lambda^2\pi}\left[g(t) + \lambda \int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{tx}}{\sqrt{t}} g(x)\, dx\right],$$

à condition que λ diffère des valeurs caractéristiques $\pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

En opérant comme au début de ce Chapitre, on trouve que pour que le problème soit possible quand $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, il faut que $g(t)$ soit de la forme

$$(22) \qquad g(t) = A(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{tx}}{\sqrt{t}} A(x)\, dx,$$

$A(t)$ étant une fonction arbitraire et que, dans ces conditions, la solution de la proposée est

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[g(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{tx}}{\sqrt{t}}\, h(x)\, dx + h(t)\right], \tag{23}$$

$h(t)$ étant une fonction arbitraire.

En prenant $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, on trouve que le problème n'est possible que si $g(t)$ est de la forme

$$g(t) = A(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{tx}}{\sqrt{t}}\, A(x)\, dx, \tag{24}$$

$A(t)$ étant une fonction arbitraire et que la solution est de la forme

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[g(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{tx}}{\sqrt{t}}\, h(x)\, dx + h(t)\right], \tag{25}$$

$h(t)$ étant une nouvelle fonction arbitraire.

A ce type d'équations se rattache le suivant

$$f(t) = g(t) + \lambda\int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{tx}}{\sqrt{x}} f(x)\, dx. \tag{26}$$

On trouve la solution

$$f(t) = \frac{1}{1-\lambda^2\pi}\left[g(t) + \lambda\int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{tx}}{\sqrt{x}}\, g(x)\, dx\right] \tag{27}$$

avec $\lambda \neq \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

d. Soit l'équation

$$f(t) = g(t) + \lambda\int_0^\infty \cos(2tx) f(x)\, dx. \tag{28}$$

Posons $t = \sqrt{z}$ et divisons les deux membres de (28) par $\sqrt{z}$, il vient

$$\frac{f(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} + \lambda\int_0^\infty \frac{\cos 2x\sqrt{z}}{\sqrt{z}} f(x)\, dx.$$

Supposons que l'on puisse écrire $\frac{f(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \supset \varphi(s)$, $\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \supset \theta(s)$; la transformée de Laplace de l'équation précédente est

$$\varphi(s) = \theta(s) + \lambda\sqrt{\frac{\pi}{s}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{s}} f(x)\,dx.$$

Faisons le changement de variable $x^2 = u$, nous obtenons immédiatement l'équation fonctionnelle

$$\varphi(s) = \theta(s) + \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,\varphi\left(\frac{1}{s}\right)$$

de solution

$$\varphi(s) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2\pi}{4}}\left[\theta(s) + \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,\theta\left(\frac{1}{s}\right)\right].$$

En remontant aux originaux, il vient

$$\frac{f(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2\pi}{4}}\left[\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} + \frac{\lambda}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos 2\sqrt{xz}}{\sqrt{z}}\,\frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx\right]$$

soit

$$f(t) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2\pi}{4}}\left[g(t) + \lambda\int_0^{\infty}\cos(2xt)\,g(x)\,dx\right] \tag{29}$$

avec $\lambda \neq \pm\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

Ce résultat peut être généralisé : la même méthode montre que les équations du type

$$f\left(\frac{mt}{2}\right) = g(t) + \lambda\int_0^{\infty}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(mtx)\,f(x)\,dx \tag{30}$$

admettent la solution

$$f(t) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2\pi}{4}}\left[g\left(\frac{2t}{m}\right) + \lambda\int_0^{\infty}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2tx)\,g\left(\frac{2x}{m}\right)dx\right]. \tag{31}$$

e. Soit enfin l'équation en $f(t)$

$$f(t) = g(t) + \lambda\int_0^{\infty}\sin(xt)\,f(x)\,dx.$$

En posant, au sens de Laplace, $f(\sqrt{t}) \supset \varphi(s)$, $g(\sqrt{t}) \supset \theta(s)$ il est facile de voir que la résolution de l'équation envisagée se ramène à celle de l'équation fonctionnelle

$$\varphi(s) = \theta(s) + \frac{\lambda}{4s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,\theta\left(\frac{1}{4s}\right)$$

dont la solution s'écrit

$$\varphi(s) = \frac{1}{1-\frac{\lambda^2\pi}{2}}\left[\theta(s) + \frac{\lambda}{4s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,\theta\left(\frac{1}{4s}\right)\right].$$

Si donc λ diffère de l'une des valeurs caractéristiques $\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, la solution cherchée s'écrit

$$f(t) = \frac{1}{1-\frac{\lambda^2\pi}{2}}\left[g(t) + \lambda\int_0^\infty \sin(xt)\,g(x)\,dx\right].$$

Restent à déterminer les solutions de la proposée quand λ prend une des valeurs caractéristiques.

Dans le cas où $\lambda = +\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, Goursat [1] signale que les solutions fondamentales, en nombre infini, dépendant d'un paramètre arbitraire; nous allons préciser ce résultat en montrant que quand λ prend une valeur caractéristique il existe une infinité de solutions fondamentales *dépendant d'une fonction arbitraire* et en donnant la forme générale de ces solutions.

En opérant comme nous avons fait dans les paragraphes qui précèdent, il apparaît que pour $\lambda = +\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, le problème n'est possible que si $g(t)$ est de la forme

$$g(t) = \Lambda(t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(xt)\,\Lambda(x)\,dx,$$

$\Lambda(x)$ étant une fonction arbitraire et que dans ces conditions les

---

(1) *Analyse mathématique*, 2e éd., t. **3**, p. 437; *voir* aussi E. Picard, *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, 1927, p. 41 et P. Lévy, *Bull. Sciences math.*, t. **52**, 1928, p. 156.

solutions fondamentales s'écrivent

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[g(t)+h(t)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\sin(xt)\,h(x)\,dx\right].$$

Elles dépendent de la fonction arbitraire $h(t)$.

Dans le cas où $\lambda=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, on trouve que la condition de possibilité du problème est que $g(t)$ soit de la forme

$$g(t)=\mathrm{A}(t)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty}\sin(xt)\,\mathrm{A}(x)\,dx,$$

$\mathrm{A}(x)$ étant une fonction arbitraire et que dans cette hypothèse, les solutions fondamentales s'écrivent

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[g(t)+h(t)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\sin(xt)\,h(x)\,dx\right],$$

$h(t)$ étant encore une fonction arbitraire.

Remarque. — Dans le cas où la fonction $g(t)$ est une constante, la méthode que nous avons utilisée pour trouver les solutions fondamentales ne s'applique pas; il est cependant possible de déterminer ces dernières quand l'équation fonctionnelle adjointe appartient à un type connu.

Donnons un exemple. Soit l'équation en $f(t)$

$$f(t)+\lambda\int_{0}^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_{1}(2\sqrt{tx})f(x)\,dx=-1.$$

En utilisant *la transformation de Carson*, l'image de cette relation conduit à l'équation en $\varphi(p)$

$$\varphi(p)+\lambda\varphi\left(\frac{1}{p}\right)=-1$$

qui admet $\lambda=-1$ comme valeur caractéristique.

L'équation à résoudre est alors l'équation d'Abel dont une solution particulière s'écrit

$$\varphi(p)=\frac{\log\log p-\log\log a}{\log(-1)},$$

a étant une constante arbitraire.

Une solution fondamentale correspondant à $\lambda = -1$ sera l'original de cette expression; déterminons-le.

On a (au sens de Carson)

$$-(\log p + \gamma) = p\int_0^\infty e^{-pt}\log t\,dt \qquad (\gamma = \text{const. d'Euler}),$$

donc

$$-\frac{\log\log p + \gamma}{\log p} = \int_0^\infty e^{-t\log p}\log t\,dt = \int_0^\infty p^{-t}\log t\,dt.$$

Or,

$$p^{-t} \subset \frac{x^t}{\Gamma(1+t)}.$$

Ainsi

$$-\frac{\log\log p + \gamma}{\log p} \subset \int_0^\infty \frac{x^t \log t\,dt}{\Gamma(1+t)}$$

et comme on peut écrire

$$\log\log p = -\gamma - p\left[\frac{1}{p}\,\frac{-(\log\log p + \gamma)}{\log p}\log p\right]$$

il vient

$$f(t) = \frac{1}{\log(-1)}\left[-\gamma - \log\log a + \frac{d}{dt}\int_0^t [\gamma + \log(t-\tau)]\,d\tau\int_0^\infty \frac{\tau^s \log s\,ds}{\Gamma(1+s)}\right].$$

5. Équations de seconde espèce où la fonction $\psi(s)$ est périodique d'ordre n. — Nous avons indiqué que la méthode pouvait s'appliquer au cas où la fonction $\psi(s)$ est périodique d'ordre n; nous allons, dans cette hypothèse, généraliser quelques-uns des résultats établis au paragraphe précédent.

Raisonnons tout d'abord dans le cas où $\psi(s)$ est une fonction périodique d'ordre trois

$$\psi\{\psi[\psi(s)]\} = s.$$

Considérons l'équation intégrale

$$f(t) + \lambda\int_0^\infty K(x, t) f(x)\,dx = g(t) \tag{32}$$

où le noyau $K(x, t)$ a une transformée de Laplace de la forme

$$\rho(s)\,e^{-x\psi(s)},$$

$\psi(s)$ étant périodique d'ordre trois.

L'image de cette équation est

$$\varphi(s)) + \lambda\rho(s)\varphi[\psi(s)] = \theta(s)$$

dont la solution en $\varphi(s)$ s'écrit

$$(33) \qquad \varphi(s) = \frac{\theta(s) - \lambda\rho(s)\,\theta[\psi(s)] + \lambda^2\rho(s)\,\rho[\psi(s)]\,\theta[\psi\,\psi(s)]}{1 + \lambda^3\rho(s)\,\rho[\psi(s)]\,\rho[\psi\,\psi(s)]}.$$

Une intégrale de Bromwich-Wagner, prise le long d'un contour convenable, donnerait donc $f(t)$.

Nous allons étudier plus particulièrement le cas où

$$(34) \qquad \rho(s)\,\rho[\psi(s)]\,\rho[\psi\,\psi(s)] = \varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Cherchons quelles sont dans ces conditions les propriétés du noyau. Considérons les trois relations

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(t) = \int_0^\infty K(x, t) f(x)\,dx, \qquad h(t) = \int_0^\infty K(x, t)\,g(x)\,dx, \\ \qquad f(t) = \varepsilon \int_0^\infty K(x, t)\,h(x)\,dx, \end{array} \right.$$

dont les images respectives s'écrivent, en posant $h(t) \supset H(s)$,

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(s) = \rho(s)\,\varphi[\psi(s)], \\ H(s) = \rho(s)\,\theta[\psi(s)], \\ \varphi(s) = \varepsilon\rho(s)\,H[\psi(s)]. \end{array} \right.$$

La première de ces relations, itérée deux fois, donne

$$\theta[\psi(s)] = \rho[\psi(s)]\,\varphi[\psi\,\psi(s)].$$
$$\theta[\psi\psi(s)] = \rho[\psi\,\psi(s)]\,\varphi(s),$$

et il vient

$$\varphi(s) = \frac{\theta[\psi\,\psi(s)]}{\rho[\psi\,\psi(s)]}.$$

Mais la seconde relation (36) donne

$$H[\psi(s)] = \rho[\psi(s)]\,\theta[\psi\,\psi(s)]$$

et, par suite,

$$\varphi(s) = \frac{\theta[\psi\,\psi(s)]}{\rho[\psi\,\psi(s)]} = \varepsilon\rho(s)\,H[\psi(s)]$$

compte tenu de (34).

Les deux premières relations (35) impliquent donc la troisième.

Si donc le noyau est tel que $\rho(s)\rho[\psi(s)]\rho[\psi\psi(s)] = \varepsilon$, on aura

$$f(t) = \varepsilon\int_0^\infty K(x, t)\,dx\int_0^\infty K(\lambda, x)\,g(\lambda)\,d\lambda \tag{35'}$$

et aussi

$$f(t) = \varepsilon\int_0^\infty K(x, t)\,dx\int_0^\infty K(\lambda, x)\,dx\int_0^\infty K(\lambda, \mu)f(\mu)\,d\mu.$$

Quand la relation (34) est satisfaite, les valeurs propres de (32) sont données par l'équation

$$\lambda^3\varepsilon + 1 = 0.$$

Cherchons les solutions fondamentales de (32) dans le cas où $\varepsilon = +1$; les valeurs caractéristiques sont :

$$-1, \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Déterminons la solution fondamentale correspondant à $\lambda = -1$.

On a à résoudre l'équation en $\varphi(s)$,

$$\varphi(s) - \rho(s)\varphi[\psi(s)] = \theta(s) \tag{37}$$

qui, itérée deux fois, donne

$$\varphi[\psi(s)] - \rho[\psi(s)]\varphi[\psi\psi(s)] = \theta[\psi(s)],$$
$$\varphi[\psi\psi(s)] - \rho[\psi\psi(s)]\varphi(s) = \theta[\psi\psi(s)].$$

De la première de ces équations on tire

$$\varphi[\psi\psi(s)] = \frac{-\theta[\psi(s)] + \varphi[\psi(s)]}{\rho[\psi(s)]}$$

et, en portant cette valeur dans la seconde, il vient

$$\varphi(s) - \rho(s)\varphi[\psi(s)] = -\rho(s)\theta[\psi(s)] - \frac{\theta[\psi\psi(s)]}{\rho[\psi\psi(s)]}.$$

La comparaison de cette équation et de l'équation à résoudre, montre que le problème n'est possible que si $\theta(s)$ est telle que

$$\theta(s) = -\rho(s)\theta[\psi(s)] - \frac{\theta[\psi\psi(s)]}{\rho[\psi\psi(s)]}.$$

En remontant aux originaux, on voit que $g(t)$ doit satisfaire à la relation

$$g(t) = -\int_0^\infty K(x, t)\, g(x)\, dx - \int_0^\infty K(x, t)\, dx \int_0^\infty K(\lambda, x)\, g(\lambda)\, d\lambda$$

dont la solution est, comme on le vérifie facilement,

$$g(t) = A(t) - \int_0^\infty K(x, t)\, A(x)\, dx,$$

$A(x)$ étant une fonction arbitraire.

Cherchons maintenant la solution fondamentale correspondante.

Considérons l'équation fonctionnelle qui, pour $\mu = 0$, se réduit à celle que l'on se propose de résoudre (37) :

$$\varphi(s) - (1 + \mu)\, \rho(s)\, \varphi[\psi(s)] + \mu\eta(s) = \theta(s),$$

$\eta(s)$ étant une fonction arbitraire.

Par itération, il vient

$$\varphi[\psi(s)] - (1 + \mu)\, \rho[\psi(s)]\, \varphi[\psi\psi(s)] + \mu\eta[\psi(s)] = \theta[\psi(s)],$$
$$\varphi[\psi\psi(s)] - (1 + \mu)\, \rho[\psi\psi(s)]\varphi(s) + \mu\eta[\psi\psi(s)] = \theta[\psi\psi(s)].$$

La solution de l'équation envisagée se détermine alors facilement et en y faisant $\mu = 0$, il vient, après quelques transformations, la solution de l'équation fonctionnelle (37)

$$\varphi(s) = -\frac{1}{3}\left[-2\theta(s) - \rho(s)\, \theta[\psi(s)] - \eta(s) - \rho(s)\eta[\psi(s)] - \frac{\eta[\psi\psi(s)]}{\rho[\psi\psi(s)]}\right].$$

En remontant aux originaux, la solution fondamentale de (32), pour $\varepsilon = +1$, correspondant à $\lambda = -1$, s'écrit

$$\begin{aligned} f(t) = -\frac{1}{3}\Big[-2g(t) - \int_0^\infty K(x, t)\, g(x)\, dx - h(t) \\ - \int_0^\infty K(x, t)\, h(x)\, dx \\ - \int_0^\infty K(x, t)\, dx \int_0^\infty K(\lambda, x)\, h(\lambda)\, d\lambda \Big] \end{aligned}$$

où $h(t) \supset \eta(s)$ est une fonction arbitraire.

Pour les valeurs caractéristiques $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, on voit, sans difficulté, que le problème n'est possible que si $g(t)$ prend l'une des formes respectives

$$g(t)=\mathrm{A}(t)+\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\int_0^\infty \mathrm{K}(x,t)\,\mathrm{A}(x)\,dx$$

$\mathrm{A}(t)$ étant une fonction arbitraire, et que les solutions fondamentales correspondantes s'écrivent

$$\begin{aligned}f(t)=-\frac{1}{3}\bigg\{&-2g(t)+\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\int_0^\infty \mathrm{K}(x,t)\,g(x)\,dx-h(t)\\&+\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\int_0^\infty \mathrm{K}(x,t)\,h(x)\,dx\\&+\frac{2}{1\pm i\sqrt{3}}\int_0^\infty \mathrm{K}(x,t)\,dx\int_0^\infty \mathrm{K}(\lambda,x)\,h(\lambda)\,d\lambda\bigg\},\end{aligned}$$

$h(t)$ étant une fonction arbitraire.

Plus généralement cette méthode peut être utilisée pour déterminer les solutions fondamentales d'équations intégrales de seconde espèce dont les noyaux ont des images de la forme

$$\rho(s)\,e^{-x\psi(s)}$$

où $\psi(s)$ est une fonction périodique d'ordre n et où $\rho(s)$ satisfait à la relation

$$(38)\qquad \rho(s)\,\rho[\psi(s)\ldots\rho[\underbrace{\psi\psi\ldots\psi(s)}_{(n-1)}]=\varepsilon\qquad(\varepsilon=\pm 1),$$

La forme du noyau conduit à une généralisation des équations (35′) et les valeurs propres sont données par l'équation [1]

$$\varepsilon\lambda^n+1=0.$$

Notons que la résolution de (38) permet de déterminer la famille des noyaux considérés par une intégrale de Bromwich-Wagner [2].

Parmi les noyaux simples qui rentrent dans le type précédent, nous

---

(1) M. Parodi, *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 980.

(2) M. Parodi, *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1877.

pouvons signaler les suivants :

$$(39)\quad \begin{cases} K(x,\, t) = e^{t} I_0\,(2\sqrt{tx}) \supset \dfrac{e^{-\frac{x}{1-s}}}{s-1} & [\mathcal{R}(s) > 1], \\ K(x,\, t) = e^{-x} I_0(2\sqrt{tx}) \supset \dfrac{e^{-x\left(\frac{s-1}{s}\right)}}{s} & [\mathcal{R}(s) > 1], \end{cases}$$

pour lesquels $\psi(s)$ est périodique d'ordre trois et $\rho(s)$ satisfait à (34); ceci suppose $f(x)$ et $g(x)$ telles que les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-x\frac{1}{1-s}} \begin{Bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{Bmatrix} dx$$

existent pour $\mathcal{R}(s) > 1$.

Parmi les noyaux pour lesquels $\psi(s)$ est périodique d'ordre quatre, nous pouvons retenir le suivant

$$(40)\qquad e^{2t} I_0(2\sqrt{2tx}) \supset \frac{1}{s-2}\, e^{-\frac{2x}{2-s}} \qquad [R(s) > 2].$$

la fonction $\psi(s) = \dfrac{s}{2-s}$ est bien périodique d'ordre quatre, mais

$$\rho(s)\,\rho[\psi(s)]\,\rho[\psi\psi(s)]\,\rho[\psi\psi\psi(s)] = -\frac{1}{4}.$$

La méthode utilisée plus haut pour déterminer les solutions fondamentales s'applique, là encore, sans difficulté; ces considérations supposent bien entendu, que les intégrales existent pour $\mathcal{R}(s) > 2$.

4. Équations intégrodifférentielles. — *a*. Le calcul symbolique permet de résoudre également les équations du type

$$(41)\qquad f^{(n)}(t) + \lambda \int_0^\infty K(x,\, t) f(x)\, dx = g(t) \qquad (n \text{ entier} > 0),$$

$K(x,\, t)$ étant toujours de la forme (2).

En posant

$$f(t) \supset \varphi(s), \qquad g(t) \supset \theta(s)$$

on a, au sens de Laplace,

$$f^{(n)}(t) \supset s^n \varphi(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

et l'équation fonctionnelle adjointe s'écrit

$$(42)\qquad s^n\varphi(s)+\lambda\rho(s)\,\varphi[\psi(s)]=\theta(s)+\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}f^{(k-1)}(0).$$

L'original, s'il existe, d'une solution $\varphi(s)$ de cette équation pourra être une solution de (41).

Là encore, le problème est de solution aisée si $\psi(s)$ est une fonction périodique d'ordre n.

Montrons-le sur un exemple.

Soit l'équation en $f(t)$

$$(43)\qquad f^{(n)}(t)+\lambda\int_0^{\infty}t^{\frac{\nu}{2}}x^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{tx})f(x)\,dx=g(t)$$

dont l'équation adjointe s'écrit

$$(44)\qquad s^n\varphi(s)+\frac{\lambda}{s^{\nu+1}}\varphi\left(\frac{1}{s}\right)=\theta(s)+\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}(0).$$

La fonction $\frac{1}{s}$ est périodique d'ordre deux, nous savons donc résoudre (44), il vient

$$\varphi(s)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left\{\frac{\theta(s)+\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}(0)}{s^n}-\frac{\lambda}{s^{\nu+1}}\left[\theta\left(\frac{1}{s}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k-1)}(0)}{s^{n-k}}\right]\right\}$$

avec $\lambda\neq\pm 1$.

En remontant aux originaux, il apparaît que la solution de (43) est

$$(45)\qquad \begin{aligned} f(t)=\frac{1}{1-\lambda^2}\Bigg[&\int_0^t\cdots\int_0^t g(x)\,(dx)^n\\ &-\lambda\int_0^{\infty}t^{\frac{\nu}{2}}x^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{tx})\,g(x)\,dx\\ &+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k-1)}(0)}{\Gamma(k)}t^{k-1}-\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k-1)}(0)\,t^{\nu+n-k}}{\Gamma(\nu+n-k+1)}\Bigg]\end{aligned}$$

à condition que les intégrales convergent.

Lorsque λ prend une des valeurs caractéristiques -1 ou $+1$, la recherche des solutions fondamentales s'effectue comme il a été indiqué plus haut.

b. La méthode opérationnelle permet aussi d'étudier les équations du type

$$(46)\qquad \int_0^t\cdots\int_0^t f(x)\,(dx)^n+\lambda\int_0^\infty \mathrm{K}(x,\,t)f(x)\,dx=g(t)\qquad (n \text{ entier} > 0),$$

$\mathrm{K}(x,\,t)$ étant de la forme (2).

L'équation fonctionnelle adjointe s'écrit

$$(47)\qquad s^{-n}\varphi(s)+\lambda\rho(s)\,\varphi[\psi(s)]=\theta(s)$$

avec les notations déjà utilisées.

Le problème est là encore de résolution facile quand $\psi(s)$ est périodique d'ordre n.

Donnons un exemple; soit l'équation

$$(48)\qquad \int_0^t\cdots\int_0^t f(x)(dx)^n+\lambda\int_0^\infty\frac{\cos 2\sqrt{tx}}{\sqrt{t}}f(x)\,dx=g(t)$$

dont l'équation fonctionnelle adjointe est

$$(49)\qquad s^{-n}\varphi(s)+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,\varphi\left(\frac{1}{s}\right)=\theta(s).$$

Sa solution s'écrit

$$\varphi(s)=\frac{1}{1-\lambda^2\pi}\left[s^n\theta(s)-\lambda\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,\theta\left(\frac{1}{s}\right)\right]\qquad\left(\lambda\neq\pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$$

et la solution de (48) est donc, en remontant aux originaux,

$$(50)\qquad f(t)=\frac{1}{1-\lambda^2\pi}\left[g^{(n)}(t)-\lambda\int_0^\infty\frac{\cos 2\sqrt{tx}}{\sqrt{t}}g(x)\,dx\right]$$

à condition que $g(0)=\ldots=g^{(n-1)}(0)=0$ et $\lambda\neq\pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Nous aurions pu tout aussi bien étudier l'équation

$$(51)\qquad \int_0^t\cdots\int_0^t f(x)\,(dx)^n+\lambda\int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}}x^{-\frac{\nu}{2}}\mathrm{J}_\nu(2\sqrt{tx})f(x)\,dx=g(t).$$

On trouve

$$f(t)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left[g^{(n)}(t)-\lambda\int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}}x^{-\frac{\nu}{2}}\mathrm{J}_\nu(2\sqrt{tx})\,g(x)\,dx\right]$$

avec

$$\lambda \neq \pm 1 \qquad \text{et} \qquad g(0) = \ldots = g^{n-1)}(0) = 0.$$

Remarque. — Signalons que la méthode symbolique permet d'étudier des équations intégrales de formes plus compliquées que celles que nous avons envisagées, dont le noyau est toujours du type (2), telle que l'équation en $f(t)$

$$g(t) = \sum_{j=0}^{n} P_j(t) f^{(j)}(t) + \sum_{k=0}^{n} Q_k(t) \int_0^t \cdots \int_0^t g(x)(dx)^k + \lambda \int_0^\infty K(x, t) f(x)\, dx$$

$P_j(t)$ et $Q_k(t)$ étant des polynomes en t.

Soit, par exemple, l'équation en $f(t)$

$$tf'(t) + \int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{tx}) f(x)\, dx = 0.$$

Posons, *au sens de Carson*, $f(t) \supset \varphi(p)$, l'équation fonctionnelle adjointe s'écrit

$$\varphi'(p) = \varphi\left(\frac{1}{p}\right)$$

de solution (¹)

$$\varphi(p) = p^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} p^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$$

et il s'ensuit

$$f(t) = \frac{t^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \frac{t^{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

5. Équations homogènes. — Le calcul opérationnel permet également de résoudre des équations homogènes; l'équation fonctionnelle adjointe s'écrit, avec les notations déjà utilisées,

$$\varphi(s) + \lambda\rho(s)\,\varphi[\psi(s)] = 0. \tag{52}$$

Si $\psi(s)$ est une fonction périodique la résolution des équations de ce type est facile, comme un exemple va nous le montrer.

Soit l'équation homogène, correspondant à (6) qui, pour les

(¹) Silberstein, *Phil. Mag.*, t. **8**, 1940, p. 185.

valeurs caractéristiques de λ s'écrit

$$f(t) \pm \int_0^\infty x^{-\frac{\nu}{2}} t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx}) f(x)\,dx = 0. \tag{53}$$

Son image est

$$\varphi(s) \pm \frac{1}{s^{\nu+1}} \varphi\left(\frac{1}{s}\right) = 0$$

et cette équation fonctionnelle admet la solution

$$\varphi(s) = \theta(s) \mp \frac{1}{s^{\nu+1}} \theta\left(\frac{1}{s}\right),$$

$\theta(s)$ étant une fonction arbitraire; la solution de la proposée est donc

$$f(t) = h(t) \mp \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}} x^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx})\, h(x)\,dx, \tag{54}$$

$h(x) \supset \theta(s)$ étant une fonction arbitraire.

En portant ce résultat dans l'équation envisagée, on obtient la relation

$$h(t) = \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx})\,dx \int_0^\infty y^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{xy})\, h(y)\,dy \tag{55}$$

qui est à rapprocher de l'intégrale de Bessel-Fourier obtenue par Hankel.

Notons que si l'on avait envisagé l'équation homogène qui corres pond à (18), en donnant à λ les valeurs caractéristiques ± 1,

$$f(t) \pm \int_0^\infty e^t e^{-x} x^{-\frac{\nu}{2}} t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx}) f(x)\,dx = 0, \tag{56}$$

on aurait obtenu la solution

$$f(t) = h(t) \mp \int_0^\infty e^t e^{-x} x^{-\frac{\nu}{2}} t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx})\, h(x)\,dx,$$

$h(t)$ étant une fonction arbitraire.

De ce résultat, on déduit la relation

$$h(t) = \int_0^\infty e^t t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx})\,dx \int_0^\infty e^{-y} y^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{xy})\, h(y)\,dy.$$