

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

EMILE DURAND

Recherches sur la théorie de l'électron de Dirac

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 28 (1949), p. 77-135.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1949_9_28__77_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Recherches sur la théorie de l'électron de Dirac;

PAR ÉMILE DURAND.

(Faculté des Sciences de Toulouse.)

I. — Les fonctions d'ondes.

1. LES ÉQUATIONS D'ONDES. — Désignons par γ^p les quatre matrices de von Neumann qui ont pour expression

$$\begin{bmatrix} & & i & \\ & & & i \\ -i & & & \\ & & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & & & \\ -1 & & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & i & \\ & & & -i \\ -i & & & \\ & & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix},$$

$p = 1, 2, 3, 4$ de gauche à droite; elles obéissent aux conditions de Dirac

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 \gamma_0 \delta_{\mu\nu}.$$

Les matrices que l'on en déduit par multiplication sont reliées aux 16 matrices α de notre première publication par les relations :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \gamma_0 \\ \gamma_w &= i\alpha_s \alpha_w & \gamma_4 &= \alpha_4 \\ \gamma_{uv} &= \alpha_{uv} & \gamma_{w3} &= i\alpha_w \\ \gamma_{w3} &= \alpha_{w3} & \gamma_{123} &= -i\alpha_{123} \\ \gamma_{1234} &= -i\alpha_{123} \end{aligned}$$

Nous utiliserons les matrices duales surlignées définies comme les matrices $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ de notre première publication; rappelons que

$$\begin{aligned} \overline{\gamma_{uv}} &= \gamma_{w3} & \overline{\gamma_w} &= \gamma_{w3} & \overline{\gamma_0} &= \gamma_{1234} \\ \overline{\gamma_{w3}} &= \gamma_{uv} & \overline{\gamma_4} &= -\gamma_{123} \end{aligned}$$

u, v, w étant une permutation paire de 1, 2, 3.

Avec ces matrices, les équations de Dirac et leurs conjuguées s'écrivent

$$(1) \quad \left[\gamma_\rho \vec{D}^\rho + \gamma_0 k_0 \right] \psi_k = 0,$$

$$(2) \quad \psi_k^\times \left[\overset{\leftarrow}{D}^\rho \gamma_\rho - \gamma_0 k_0 \right] = 0,$$

avec les notations

$$\begin{aligned} \vec{D}^\rho &= \partial^\rho - i\varepsilon \mathbf{A}^\rho \\ \overset{\leftarrow}{D}^\rho &= \partial^\rho + i\varepsilon \mathbf{A}^\rho \quad (\rho = 1, 2, 3, 4); \\ \partial_u &= \frac{\partial}{dx_u}, \quad \partial_t = \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

L'opérateur $\overset{\leftarrow}{D}^\rho$ n'agit que sur les fonctions d'ondes placées à sa gauche; on a aussi

$$\psi^\times = i\psi^* \gamma^4, \quad \varepsilon = \frac{2\pi e}{ch}, \quad k_0 = \frac{2\pi m_0 c}{h};$$

\mathbf{A}^ρ est le quadripotential correspondant au champ appliqué. D'une manière plus explicite, l'équation (1) s'écrit (1) :

$$(3) \quad \begin{cases} (D_1 + iD_2) \psi_4 + D_3 \psi_3 - i(D_4 + k_0) \psi_1 = 0, \\ (D_1 - iD_2) \psi_3 - D_3 \psi_4 - i(D_4 + k_0) \psi_2 = 0, \\ (D_1 + iD_2) \psi_2 + D_3 \psi_1 - i(D_4 - k_0) \psi_3 = 0, \\ (D_1 - iD_2) \psi_1 - D_3 \psi_2 - i(D_4 - k_0) \psi_4 = 0. \end{cases}$$

Multiplions (1) en avant par l'opérateur $\left[\gamma_q \vec{D}^q - \gamma_0 k_0 \right]$; il vient :

$$\left[\vec{D}_r^\rho - k_0^2 + \frac{1}{2} \left(\vec{D}_\rho \vec{D}^q - \vec{D}^q \vec{D}_\rho \right) \gamma^{\rho q} \right] \psi_k = 0,$$

comme on a entre opérateurs les relations

$$\begin{aligned} \vec{D}_r^\rho &= \partial_r^\rho - 2i\varepsilon A_r \partial^\rho - \varepsilon^2 A_r^2, \\ \vec{D}_\rho \vec{D}^q - \vec{D}^q \vec{D}_\rho &= -i\varepsilon H_{\rho q}, \quad \text{avec } H_{\rho q} = \partial_\rho A_q - \partial_q A_\rho, \end{aligned}$$

on obtient l'équation du second ordre

$$(4) \quad \left[\gamma_0 \left(\vec{D}_r^\rho - 2i\varepsilon A_r \partial^\rho - \varepsilon^2 A_r^2 - k_0^2 \right) - \frac{1}{2} i\varepsilon \gamma_{\rho q} H^{\rho q} \right] \psi_k = 0.$$

(1) On a multiplié les deux premières équations par $-i$ et les deux dernières par i .

D'une manière analogue en multipliant l'équation (2) en arrière par l'opérateur $\left[\underset{\leftarrow}{D}^\nu \gamma_\nu + \gamma_0 k_0 \right]$ on obtient l'équation conjuguée du second ordre

$$(5) \quad \psi_k^* \left[\gamma_0 \left(\underset{\leftarrow}{D}^\nu + 2i\varepsilon \underset{\leftarrow}{D}^\nu A_\nu - \varepsilon^2 \Lambda_\nu^\nu - k_0^2 \right) - \frac{1}{2} i\varepsilon \gamma_{\rho\sigma} H^{\rho\sigma} \right] = 0.$$

En l'absence de champs, on peut faire $A^\nu = 0$; les équations (3) du premier ordre deviennent

$$(6) \quad \begin{cases} (\partial_1 + i\partial_2)\psi_1 + \partial_3\psi_3 - i(\partial_4 + k_0)\psi_1 = 0, \\ (\partial_1 - i\partial_2)\psi_3 - \partial_3\psi_1 - i(\partial_4 + k_0)\psi_2 = 0, \\ (\partial_1 + i\partial_2)\psi_2 + \partial_3\psi_1 - i(\partial_4 - k_0)\psi_3 = 0, \\ (\partial_1 - i\partial_2)\psi_1 - \partial_3\psi_2 - i(\partial_4 - k_0)\psi_4 = 0. \end{cases}$$

Ces équations admettent la solution particulière⁽¹⁾

$$(7) \quad \psi_3 = -\psi_2^*, \quad \psi_4 = \psi_1^*,$$

qui donne

$$(8) \quad |\psi_k^* \alpha_{uv} \psi_k| = |\psi_k^* \alpha_4 \psi_k| = |\psi_k^* \alpha_0 \psi_k| = |\psi_k^* \alpha_3 \psi_k| = 0.$$

On a donc des probabilités toujours égales pour les valeurs $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ du spin et pour les valeurs $+m_0$ et $-m_0$ de la masse propre.

L'existence de cette solution (7) est liée à la possibilité d'avoir des équations réelles pour les fonctions d'ondes; si l'on remplace, en effet, les matrices γ^ν de von Neumann par les matrices

$$\xi_p = \Lambda^+ \gamma_p \Lambda$$

(Λ est la matrice qui faisait passer des matrices α aux matrices β dans notre première publication. Les matrices ξ_p ont pour expression ($p = 1, 2, 3, 4$ de gauche à droite) :

$$\begin{bmatrix} & -1 & & \\ -1 & & & \\ & & -1 & \\ & -1 & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & -i & & \\ i & & & \\ & & & i \\ & -i & & \end{bmatrix}.$$

(1) Les deux dernières équations sont alors les équations conjuguées des deux premières.

Elles satisfont les conditions de Dirac, puisque $\Lambda\Lambda^* = 1$. Les équations d'ondes s'écrivent :

$$(9) \quad [\xi_p \partial^p + k_0 \gamma_0] \psi_k = 0,$$

on voit qu'elles ne contiennent plus le symbole i des imaginaires; on a

$$\psi'_k = \Lambda^+ \psi_k.$$

Soit

$$(10) \quad \begin{cases} \psi'_1 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_2 + \psi_3) & \psi'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 - \psi_3), \\ \psi'_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_4) & \psi'_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_4). \end{cases}$$

Si les ψ_k obéissent aux équations (7), on voit d'après (10), que les ψ'_k sont réels; mais les équations (6) admettent des solutions plus générales que (7); il en résulte que les équations (9) admettent aussi des solutions complexes.

Il ne suffit donc pas d'avoir des opérateurs différentiels réels pour que les fonctions d'ondes soient nécessairement réelles; enfin quand Λ^p est différent de zéro, le symbole i des imaginaires s'introduit dans les opérateurs puisque $\mathbb{D}_p = \partial_p - i\varepsilon\Lambda_p$. Il ne semble donc pas qu'il y ait intérêt à remplacer les matrices γ^p par les matrices ξ^p .

2. TRANSFORMATION DES FONCTIONS D'ONDES DANS UNE ROTATION D'UNIVERS.

— Si l'on effectue une rotation des axes dans l'Univers de Minkowski, les équations de Dirac conservent la même forme, les nouvelles fonctions d'ondes ψ'_k étant des combinaisons linéaires à coefficients constants des anciennes. Si les nouvelles variables x'_p sont reliées aux anciennes x_p par les formules $x_q = o_{pq}x'^q$, on a

$$(11) \quad \psi'_k = \Lambda \psi_k,$$

Λ étant une certaine matrice à quatre rangs; la démonstration de cette propriété repose sur l'existence de cette matrice Λ qui doit satisfaire les relations

$$(12) \quad \gamma'_p = \Lambda^{-1} \gamma_p \Lambda$$

en posant

$$\gamma'_p = \sum_{q=1}^{q=4} o_{qp} \gamma_q$$

γ_ρ désigne les matrices de von Neumann (pour cette démonstration, voir LOUIS DE BROGLIE, *L'électron magnétique*, p. 146 à 151).

Les éléments de la matrice Λ ne s'expriment pas d'une manière simple en fonction des éléments o_{pq} de la matrice de la transformation générale de Lorentz; c'est pourquoi son expression générale n'a jamais été donnée; on est obligé de démontrer son existence par des voies détournées. (Voir par exemple l'élégante démonstration de M. Louis de Broglie dans *Particules à spin*, p. 66 à 71.)

Il est remarquable que cette matrice Λ s'exprime simplement avec les paramètres d'Olinde Rodrigues généralisés que nous avons définis dans notre première publication; ces paramètres complexes l_k sont reliés aux o_{pq} par des relations compliquées que nous avons données [voir 1^{re} publication, chap. III; équations (43)].

Voici l'expression de Λ dans le cas le plus général

$$(13) \quad \Lambda = \sum_{\omega=1}^{\omega=3} i\gamma_{u\omega} L_{\omega} + i\bar{\gamma}_0 L_4 - \sum_{\omega=1}^{\omega=3} \gamma_{u\omega} M_{\omega} + \gamma_0 M_4;$$

u, v, ω , permutation circulaire de 1, 2, 3; on a posé

$$2M_k = l_k + l_k^*, \quad 2iL_k = l_k - l_k^*.$$

Un calcul un peu long, mais sans difficulté, permet de s'assurer que l'expression (13) de Λ satisfait bien la relation (12) quand on tient compte de l'expression des o_{pq} en fonction des l_k , soit

$$(14) \quad o_{pq} = [l_k^* \varepsilon_p \varepsilon_q l_k],$$

on a

$$(15) \quad \Lambda^{-1} = - \sum_{\omega=1}^{\omega=3} i\gamma_{u\omega} L_{\omega} + i\bar{\gamma}_0 L_4 + \sum_{\omega=1}^{\omega=3} \gamma_{u\omega} M_{\omega} + \gamma_0 M_4,$$

les l_k étant normalisés comme nous l'avons indiqué dans la deuxième partie, soit

$$[l_k l_k] = [l_k^* l_k^*] = 1.$$

Sous forme de tableau, la matrice s'écrit :

$$(16) \quad \begin{bmatrix} [M_3 + iM_3] & i[M_1 + iM_2] & [L_3 - iL_3] & [L_1 + iL_2] \\ i[M_1 - iM_2] & [M_3 - iM_3] & [L_3 - iL_2] & -[L_3 + iL_3] \\ [L_3 - iL_3] & [L_1 + iL_2] & [M_3 + iM_3] & i[M_1 + iM_2] \\ [L_1 - iL_2] & -[L_3 + iL_3] & i[M_1 - iM_2] & [M_3 - iM_3] \end{bmatrix}.$$

La matrice adjointe Λ^+ peut s'écrire

$$(17) \quad \Lambda^+ = \sum_{w=1}^{w=3} i\gamma_{0w} L_w - i\bar{\gamma}_0 L_4 + \sum_{w=1}^{w=3} \gamma_{uv} M_w + \gamma_0 M_4.$$

En comparant (15) et (17), on voit que l'on a la relation bien connue

$$\Lambda^+ = \gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4;$$

la matrice Λ n'est donc pas unitaire.

Voici l'expression de Λ dans quelques cas particuliers.

a. Rotations spatiales. — Les paramètres l_k sont réels et s'identifient avec les paramètres d'Olinde Rodrigues; la matrice Λ devient :

$$(18) \quad \Lambda = \begin{bmatrix} (l_1 + il_3) & i(l_1 + il_2) & 0 & 0 \\ i(l_1 - il_2) & (l_1 - il_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (l_1 + il_3) & i(l_1 + il_2) \\ 0 & 0 & i(l_1 - il_2) & (l_1 - il_3) \end{bmatrix}.$$

On notera que le quadrant inférieur à droite ne fait que reproduire le quadrant supérieur à gauche. Si les l_k sont exprimés avec les angles d'Euler, Λ prend la forme

$$(19) \quad \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}} \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \text{idem} \end{bmatrix}.$$

Si les l_k sont exprimés à l'aide des cosinus directeurs λ_{μ} de l'axe de la rotation spatiale et par la grandeur de son angle θ , Λ s'écrit :

$$(20) \quad \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} - i\mu_3 \sin \frac{\theta}{2} \\ -(\mu_2 + i\mu_1) \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (\mu_2 - i\mu_1) \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} + i\mu_3 \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \text{idem} \end{bmatrix}.$$

b. Transformation de Lorentz pure. — Le système x'_1, x'_2, x'_3 est

animé par rapport au système x_1, x_2, x_3 d'une vitesse $c\beta_u$ de grandeur $c\beta$ et de cosinus directeurs $\lambda_u = \frac{\beta_u}{\beta}$ ($u = 1, 2, 3$); en posant $\text{th}\gamma = \beta$, nous avons trouvé dans notre première publication que les l_k avaient pour expression

$$l_u = i\lambda_u \text{sh} \frac{\gamma}{2}, \quad l_4 = \text{ch} \frac{\gamma}{2}.$$

Le tableau (16) prend alors la forme

$$(21) \quad \begin{bmatrix} \text{ch} \frac{\gamma}{2} & 0 & \lambda_3 \text{sh} \frac{\gamma}{2} & (\lambda_1 + i\lambda_2) \text{sh} \frac{\gamma}{2} \\ 0 & \text{ch} \frac{\gamma}{2} & (\lambda_1 - i\lambda_2) \text{sh} \frac{\gamma}{2} & -\lambda_3 \text{sh} \frac{\gamma}{2} \\ \lambda_3 \text{sh} \frac{\gamma}{2} & (\lambda_1 + i\lambda_2) \text{sh} \frac{\gamma}{2} & \text{ch} \frac{\gamma}{2} & 0 \\ (\lambda_1 - i\lambda_2) \text{sh} \frac{\gamma}{2} & -\lambda_3 \text{sh} \frac{\gamma}{2} & 0 & \text{ch} \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}.$$

On peut constater que toutes ces matrices coïncident avec celles de M. Louis de Broglie dans les cas particuliers qu'il a étudiés (*L'électron magnétique*, p. 148 et 154). Nous aurons plus loin l'occasion d'utiliser quelques-unes de ces expressions; voici tout de suite une première application.

Exemple d'application de la matrice Λ . — Les équations de Dirac admettent dans le système de repos x'_1, x'_2, x'_3 , et en l'absence de champ, la solution

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= C e^{-k_0 x'_4}, & \psi'_3 &= A e^{k_0 x'_4}, \\ \psi'_2 &= D e^{-k_0 x'_4}, & \psi'_4 &= B e^{k_0 x'_4}, \end{aligned}$$

où A, B, C, D sont quatre constantes quelconques,

$$k_0 x'_4 = 2\pi i \nu' t' = \frac{2\pi i}{h} W t' \quad \text{avec} \quad \nu' = \frac{m_0 c^2}{h} = \frac{W}{h}.$$

ψ'_1 et ψ'_2 correspondent donc aux énergies négatives de ψ'_3, ψ'_4 aux énergies positives.

Dans le système x_1, x_2, x_3 on a la solution

$$\psi_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Lambda^{-1} \psi'_k(x_1 x_2 x_3 x_4);$$

Λ^{-1} se déduit du tableau (21) en changeant les signes des trois cosinus directeurs λ_u .

On a aussi

$$x'_4 = -i u_p x^p,$$

u_p est le quadrivecteur unité tangent à la ligne d'Univers :

$$u_p = \frac{dx_p}{d\sigma}, \quad d\sigma = c\sqrt{1-\beta^2} dt,$$

d'où

$$u_u = \frac{\beta_u}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

on a $u^p = -1$. On posera $\beta_4 = i$ pour écrire

$$(22) \quad u_p = \frac{\beta_p}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Les nouvelles solutions s'écrivent :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = C \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} e^{ik_0 u_p x^p} - [A \lambda_3 + B(\lambda_1 + i \lambda_2)] \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} e^{-ik_0 u_p x^p}, \\ \psi_2 = D \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} e^{ik_0 u_p x^p} - [A(\lambda_1 - i \lambda_2) - B \lambda_3] \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} e^{-ik_0 u_p x^p}, \\ \psi_3 = -[C(\lambda_3 + D(\lambda_1 + i \lambda_2))] \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} e^{ik_0 u_p x^p} + A \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} e^{-ik_0 u_p x^p}, \\ \psi_4 = -[C(\lambda_1 - i \lambda_2) - D \lambda_3] \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} e^{ik_0 u_p x^p} + B \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} e^{-ik_0 u_p x^p}. \end{array} \right.$$

Si l'on se borne aux énergies positives ($C = D = 0$), on pourra comparer ces formules à celles de M. de Broglie (*L'électron magnétique*, p. 163); pour que l'identité soit parfaite, il faut diviser toutes nos solutions par $\operatorname{ch} \frac{\gamma}{2}$; ceci a l'avantage de donner des coefficients qui gardent une valeur finie quand β tend vers 1.

Pour faire cette comparaison on peut noter que l'on a les relations

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \operatorname{sh} \gamma &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \operatorname{th} \gamma &= \beta, \\ \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1} & \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + 1} & \operatorname{th} \frac{\gamma}{2} &= \frac{1 - \sqrt{1-\beta^2}}{\beta}, \\ \frac{W}{c} &= \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{W}{c} + m_0 c &= \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} (1 + \sqrt{1-\beta^2}). \end{aligned}$$

Si l'on considère les équations complètes (énergies positives et négatives), on remarquera que la transformation de Lorentz associée au changement de signe de l'énergie le changement de signe de la vitesse.

Les équations de M. Louis de Broglie (*L'électron magnétique*, p. 281) correspondent à une autre solution; aux signes (+) et (−) devant les énergies correspondent les mêmes β_u ; cette dernière solution est d'ailleurs plus intéressante pour le calcul des solutions $\psi_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$ qui se réduisent à des fonctions données pour $x_4 = 0$. (Voir p. 286 de l'ouvrage déjà cité.)

Il existe bien entendu encore d'autres solutions où l'on changerait le signe d'un ou de plusieurs β_u avec chaque fois le signe (+) ou (−) pour l'énergie.

5. POTENTIELS DES FONCTIONS D'ONDES EN L'ABSENCE DE CHAMP. — Malgré la différence de nature fondamentale qui existe entre l'onde de la mécanique ondulatoire et les ondes de la théorie classique du champ, M. Louis de Broglie a souvent signalé une certaine analogie; par exemple dans *L'électron magnétique*, p. 139, il signale l'analogie qu'il y a entre le passage des équations du premier ordre de Dirac aux équations du second ordre de Gordon, et le passage des équations de Maxwell aux équations du second ordre pour les champs $H^{\mu\nu}$.

En poursuivant cette analogie nous allons voir qu'il y a intérêt, au moins en l'absence de champ, à faire correspondre aux quatre fonctions ψ_k de Dirac quatre fonctions potentiels Φ_k . Par analogie avec les $H^{\mu\nu}$ qui sont reliés à leurs potentiels A^ν par des relations linéaires et du premier ordre, les fonctions ψ_k seront aussi reliées à leurs potentiels Φ_k par d'autres relations linéaires et du premier ordre.

Voici les conditions qu'il convient d'imposer aux potentiels en théorie de Dirac; il suffira qu'ils obéissent aux équations du second ordre du type Gordon :

$$(24) \quad (\partial_\mu^2 - k_0^2) \Phi_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4);$$

il n'est pas nécessaire d'introduire une condition supplémentaire qui correspondrait à la condition de Lorentz pour les potentiels électromagnétiques.

La définition du *champ* ψ_k de Dirac à partir des potentiels est la suivante :

$$(25) \quad \psi_k = [\gamma_p \overset{\rightarrow}{\partial}^p - \gamma_0 k_0] i \gamma_4 \Phi_k,$$

γ_p désignant les matrices de von Neumann; d'une manière plus explicite (25) s'écrit

$$\begin{aligned} \psi_1 &= i(\partial_4 - k_0) \Phi_1 + (\partial_1 + i \partial_2) \Phi_4 + \partial_3 \Phi_3, \\ \psi_2 &= i(\partial_4 - k_0) \Phi_2 + (\partial_1 - i \partial_2) \Phi_3 - \partial_3 \Phi_4, \\ \psi_3 &= i(\partial_4 + k_0) \Phi_3 + (\partial_1 + i \partial_2) \Phi_2 + \partial_3 \Phi_1, \\ \psi_4 &= i(\partial_4 + k_0) \Phi_4 + (\partial_1 - i \partial_2) \Phi_1 - \partial_3 \Phi_2. \end{aligned}$$

Les équations conjuguées de (25) s'écrivent

$$(26) \quad \psi_k^* = \Phi_k^* \left[\overset{\leftarrow}{\partial}^q \gamma_q + k_0 \gamma_0 \right] i \gamma_4,$$

ou

$$\psi_k^\times = \psi_k^* i \gamma_4 = - \Phi_k^* \left[\overset{\leftarrow}{\partial}^q \gamma_q + k_0 \gamma_0 \right].$$

Il est facile de voir que les fonctions ψ_k définies par (25) obéissent aux équations de Dirac; il suffit pour cela de multiplier en avant les deux membres de l'équation (25) par l'opérateur $i \gamma^* (\gamma_p \overset{\rightarrow}{\partial}^p + k_0 \gamma_0)$; au premier membre on a alors l'opérateur de Dirac appliqué aux fonctions d'ondes ψ_k et au second membre on a $-(\overset{\leftarrow}{\partial}^q - k_0^2) \Phi_k$ qui est nul d'après l'équation (24).

Aux fonctions de Dirac on impose la condition d'être uniformes et finies dans tout le domaine d'intégration et de s'annuler aux limites; il faudra qu'il en soit de même pour les potentiels Φ_k et pour leurs dérivées $\partial_p \Phi_k$ puisque les ψ_k contiennent les dérivées premières des potentiels.

Quand on effectue une rotation des axes dans l'Univers de Minkowski les fonctions ψ_k se transforment comme nous l'avons déjà indiqué : $\psi'_k = \Lambda \psi_k$; à partir de l'équation (25) on trouve que les potentiels se transforment suivant la loi

$$\Phi'_k = \gamma_4 \Lambda \gamma_4 \Phi_k.$$

Exemple d'application des potentiels. — Choisissons comme potentiels les quatre fonctions :

$$(27) \quad \Phi_k = g_k \frac{\text{ch}}{2\pi W} e^{-\frac{2\pi i}{h} \rho_u x_u} \sin \frac{2\pi}{h} W t;$$

Les g_k sont quatre constantes arbitraires :

$$p_u = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta_u; \quad \frac{W}{c} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Ces potentiels obéissent aux équations (24); les équations (25) donnent pour les fonctions d'ondes de Dirac les expressions

$$(28) \quad \psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_u x^u)} + b_k e^{\frac{2\pi i}{h}(-Wt - p_u x^u)},$$

en posant :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{c}{2W} [g_1 \alpha' - g_3 p_3 - g_4 (p_1 + ip_2)], \\ b_1 = \frac{c}{2W} [g_1 \alpha + g_3 p_3 + g_4 (p_1 + ip_2)], \\ a_2 = \frac{c}{2W} [g_2 \alpha' - g_3 (p_1 - ip_2) + g_4 p_3], \\ b_2 = \frac{c}{2W} [g_2 \alpha + g_3 (p_1 - ip_2) - g_4 p_3], \\ a_3 = \frac{c}{2W} [-g_1 p_3 - g_2 (p_1 + ip_2) + g_3 \alpha], \\ b_3 = \frac{c}{2W} [g_1 p_3 + g_2 (p_1 + ip_2) + g_3 \alpha'], \\ a_4 = \frac{c}{2W} [-g_1 (p_1 - ip_2) + g_2 p_3 + g_4 \alpha], \\ b_4 = \frac{c}{2W} [g_1 (p_1 - ip_2) - g_2 p_3 + g_4 \alpha']. \end{array} \right.$$

α et α' ont pour expression

$$\alpha = \frac{W}{c} + m_0 c, \quad \alpha' = \frac{W}{c} - m_0 c,$$

on a donc les relations

$$(30) \quad a_k + b_k = g_k;$$

ces équations (28), (29), (30) sont identiques à celles que l'on trouve dans l'Ouvrage de M. Louis de Broglie (*L'électron magnétique*, p. 286).

Plus loin, nous utiliserons les potentiels d'une manière systématique pour la recherche de solutions rigoureuses se réduisant au temps $t = 0$ à une fonction donnée de $x_1 x_2 x_3$.

II. — Les grandeurs densitaires.

1. LES IDENTITÉS QUADRATIQUES. — Les grandeurs densitaires les plus importantes de la Théorie de Dirac sont représentées par des formes bilinéaires du type $[\psi_k^\times \gamma \psi_k]$, γ désignant l'une des 16 matrices de von Neumann. On peut aussi les exprimer avec les matrices α sous la forme $[\psi_k^* \alpha \psi_k]$; la correspondance est la suivante entre les deux représentations

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{ll} [\psi_k^\times \gamma_0 \psi_k] = [\psi_k^* i \alpha_4 \psi_k], & [\psi_k^\times \gamma_u \psi_k] = -[\psi_k^* \alpha_u \psi_k]; \\ [\psi_k^\times \gamma_i \psi_k] = [\psi_k^* i \alpha_0 \psi_k], & [\psi_k^\times \gamma_{uv} \psi_k] = -[\psi_k^* \alpha_{uv} \psi_k]; \\ [\psi_k^\times \gamma_{uv} \psi_k] = [\psi_k^* i \alpha_{uv} \psi_k], & [\psi_k^\times \gamma_{123} \psi_k] = -[\psi_k^* \alpha_{123} \psi_k]; \\ [\psi_k^\times \gamma_{uv} \psi_k] = [\psi_k^* i \alpha_{uv} \psi_k], & [\psi_k^\times \gamma_{1234} \psi_k] = -[\psi_k^* \alpha_{1234} \psi_k]. \end{array} \right.$$

Nous utiliserons de préférence la notation avec les γ et le ψ^\times associé car la variance tensorielle correspond alors aux indices des matrices γ .

Les identités quadratiques que nous avons établies dans notre première publication pour des formes bilinéaires plus générales du type $[f_k \gamma g_k]$ sont valables ici; pour simplifier l'écriture nous poserons

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_p = [\psi^\times \gamma_p \psi], & w_1 = [\psi^\times \gamma_0 \psi] \\ \sigma_p = [\psi^\times \bar{\gamma}_p \psi], & w_2 = [\psi^\times \bar{\gamma}_0 \psi] \end{array} \right. \quad m_{pq} = [\psi^\times \psi_{pq} \psi].$$

Ces tenseurs abstraits w_1 ; a_p , m_{pq} , σ_p , w_2 sont reliés aux tenseurs physiques (w_1) , (a_p) , (m_{pq}) , (σ_p) , (?) par les relations

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (a_p) = -ec a_p, & (w_1) = im_0 w_1 \\ (\sigma_p) = \frac{h}{4\pi} \sigma_p, & (?) = w_2 \end{array} \right. \quad (m_{pq}) = \frac{e}{2k_0} m_{pq}.$$

(a_p) est la densité de courant-charge électrique; (σ_p) est la densité de spin, (w_1) la densité massique au repos; (m_{pq}) la densité de moment magnétique et de moment électrique; l'invariant (w_2) est ininterprété⁽¹⁾. Nous utiliserons de préférence les tenseurs abstraits qui simplifient les formules.

Les quatre identités de base s'écrivent

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1 m^{\bar{p}q} + w_2 m^{pq} = [\sigma^p a^q - \sigma^q a^p], \\ a_p'' = -\sigma_p'' = w_1^2 - w_2^2, \quad a_p \sigma^p = 0. \end{array} \right.$$

(1) En fait il ne s'agit pas de véritables densités mais de densités de valeurs moyennes.

On peut en déduire toutes les autres; voici les plus caractéristiques

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij} m^{pq} = -\omega_2 \sigma^p, \quad a_{ij} \overline{m}^{pq} = \omega_1 \sigma^p, \\ \sigma_{ij} m^{pq} = -\omega_2 a^p, \quad \sigma_{ij} \overline{m}^{pq} = \omega_1 a^p; \\ \frac{1}{2} m_{pq} m^{pq} = -(\omega_1^2 + \omega_2^2), \quad \frac{1}{4} m_{pq} \overline{m}^{pq} = \omega_1 \omega_2, \\ \frac{1}{2} [m^{\overline{p}r} \overline{m}^q_r - m^{pr} \overline{m}^q_r] = [\sigma^{pq} - a^{pq}] + \frac{1}{2} \delta^{pq} [\omega_1^2 - \omega_2^2]. \end{array} \right.$$

Une conséquence importante des identités précédentes, c'est que les 16 grandeurs densitaires peuvent se calculer à partir de sept d'entre elles; par exemple avec a_s, a_u, m_{uv} ou ω_1, a_u, m_{u4} ; etc.

Donnons quelques indications sur la manière de calculer les autres grandeurs connaissant a_s, a_u, m_{uv} . On commencera par calculer σ_s et ω_1 par les relations ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_w} \overrightarrow{m_{wv}} &= \omega_1 \sigma_s, \\ (\overrightarrow{a_w})^2 - (\overrightarrow{m_{wv}})^2 &= \omega_1^2 - \sigma_s^2 \end{aligned}$$

(on écrit $\overrightarrow{m_{wv}}$ au lieu de $\overrightarrow{m_{vw}}$).

Puis, on calculera ω_2 par la formule

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 - (\overrightarrow{a_u})^2 - a_s^2;$$

enfin on calculera $\overrightarrow{m_{w4}}$ et $\overrightarrow{\sigma_{wv}}$ par les équations

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_s} \overrightarrow{m_{w4}} + \omega_2 \overrightarrow{\sigma_{wv}} &= \overrightarrow{m_{wv}} \wedge \overrightarrow{a_{wv}}, \\ \overrightarrow{a_s} \overrightarrow{\sigma_{wv}} - \omega_2 \overrightarrow{m_{w4}} &= \overrightarrow{\sigma_{wv}} \wedge \overrightarrow{a_{wv}} + \omega_1 \overrightarrow{m_{wv}}. \end{aligned}$$

Quand on calcule les 16 grandeurs densitaires avec les quatre ψ_k complexes, on utilise en fait huit fonctions réelles mais comme il y a un

(1) On trouve :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(a_w^{uv} - m_w^{uv})^2 + 4a_w m_w^{uv}} + (a_w^{uv} - m_w^{uv})}, \\ \sigma_s &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(a_w^{uv} - m_w^{uv})^2 + 4a_w m_w^{uv}} - (a_w^{uv} - m_w^{uv})}. \end{aligned}$$

En particulier si $a_w m_w^{uv} = 0$ on a $\sigma_s = 0$.

facteur de phase arbitraire l'une des fonctions ψ_k peut toujours être réelle; il ne reste donc que sept fonctions réelles.

2. LES RELATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE. — Ces relations ont été découvertes progressivement par de nombreux auteurs ⁽¹⁾; W. Franz ⁽²⁾, W. Kofink ⁽³⁾ et O. Costa de Beauregard ⁽⁴⁾ en ont fait une étude d'ensemble systématique.

Il s'agit de relations entre les densités de valeurs moyennes qui sont des conséquences des équations d'ondes de Dirac. Certaines d'entre elles peuvent s'expliquer par comparaison avec les formules de l'Électromagnétisme des milieux polarisés, mais d'autres restent encore ininterprétées, nous tâcherons de pousser encore plus loin l'analogie avec la Théorie des milieux polarisés; plus loin nous partirons de ces équations du premier ordre pour établir un nouveau groupe de relations différentielles du second ordre.

Pour obtenir ces relations on part des équations de Dirac (1) et (2); on multiplie (1) en avant par $\psi_k^\dagger \gamma_A$ et (2) en arrière par $\gamma_A \psi_k$; γ_A désignant l'une des 16 matrices γ , soit $\gamma_0, \gamma_p, \gamma_{pq}, \overline{\gamma_p}, \overline{\gamma_0}$.

Les 16 équations obtenues avec (1) sont combinées avec les 16 équations obtenues avec (2) par addition puis, par soustraction; on obtient ainsi les 32 équations cherchées; elles sont au nombre de 16 sous forme

⁽¹⁾ P. A. M. DIRAC, *The quantum theory of electron* (Roy. Soc. Proc., t. 118, 1928, p. 351); J. VON NEUMANN, *Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie* (Zeits. f. Phys., t. 48, 1928, p. 868 et 880); W. GORDON, *Der Strom der Diracschen Quantentheorie* (Zeits. f. Phys., t. 50, 1928, p. 630); H. TÉTRODE, *Der Impuls-Energiesatz in der Diracschen Quantentheorie* (Zeits. f. Phys., t. 49, 1928, p. 861); AL. PROCA, *Sur la théorie de Dirac dans un champs nul* (Ann. de Physique, t. 20, 1933, p. 429); UHLENBECK et LAPORTE, *New covariant relations following from the Dirac Equations* (Phys. Rev., t. 37, 1931, p. 1553).

⁽²⁾ W. FRANZ, *Zur Methodik der Dirac Gleichung* (Sitz. Math. Abt. Bay. Akad., t. 3, 1935, p. 379).

⁽³⁾ W. KOFINK, *Beziehungen zwischen den Realitätsrelationen* (Annalen der Physik, t. 38, 1940, p. 583).

⁽⁴⁾ O. COSTA DE BEAUREGARD, *Sur dix relations conséquences des équations de Dirac* (C. R. Acad. Sc., t. 214, 1942, p. 818).

vectorielle d'espace au nombre de 10 sous forme tensorielle d'Univers, les voici écrites sous cette dernière forme

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 \left\{ \begin{array}{l} 1. \partial_\rho a^\rho = 0, \\ 2. 2 k_0 \varpi_1 = t^{\rho, \bar{\rho}}; \end{array} \right. \\ \gamma_\rho \left\{ \begin{array}{l} 3. \partial^\rho \varpi_1 = t^{\rho, \bar{\rho}}, \\ 4. 2 k_0 a^\rho + \partial_q m^{\rho q} = t^{\rho, \bar{\rho}}; \end{array} \right. \\ \gamma^{\rho q} \left\{ \begin{array}{l} 5. \partial^\rho \sigma^q - \partial^q \sigma^\rho = - [\overline{t^{\rho, q} - t^{q, \rho}}], \\ 6. 2 k_0 m^{\rho q} - [\partial^\rho a^q - \partial^q a^\rho] = [\overline{t^{\rho, q} - t^{q, \rho}}]; \end{array} \right. \\ \gamma_\rho \left\{ \begin{array}{l} 7. \partial_q m^{\rho q} = - t^{\rho, \bar{\rho}}, \\ 8. 2 k_0 \sigma^\rho - \partial^\rho \varpi_2 = \overline{t^{\rho, \bar{\rho}}}; \end{array} \right. \\ \gamma_0 \left\{ \begin{array}{l} 9. 0 = \overline{t^{\rho, \bar{\rho}}}, \\ 10. \partial_q \sigma^q - 2 k_0 \varpi_2 = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On a indiqué à gauche la matrice multiplicative γ_λ qui a donné naissance aux deux relations; la première est obtenue par addition, la deuxième par soustraction. Les tenseurs $t^{\lambda, \rho}$ qui figurent au second membre des équations ont pour expression :

$$(37) \quad \begin{aligned} t^{\lambda, \rho} &= [\psi_k^{\times} \overleftarrow{D}^\rho \gamma^\lambda \psi_k - \psi_k^{\times} \overrightarrow{D}^\rho \gamma^\lambda \psi_k] \\ &= [\partial^\rho \psi_k^{\times} \gamma^\lambda \psi_k - \psi_k^{\times} \gamma^\lambda \partial^\rho \psi_k] + 2 i \varepsilon A^\rho [\psi_k^{\times} \psi^\lambda \psi_k]. \end{aligned}$$

Tous les tenseurs qui figurent dans ces équations possèdent le caractère de réalité des tenseurs d'Univers; ils sont imaginaires purs s'ils contiennent une fois l'indice $\bar{\rho}$; l'invariant ϖ_1 est aussi imaginaire pur; toutes ces équations sont donc réelles.

En prenant la duale de l'équation n° 3 et en tenant compte de l'identité $\partial_q (\overline{\partial^\rho \sigma^q - \partial^q \sigma^\rho}) \equiv 0$, on en déduit

$$(38) \quad \partial_q t^{\rho, q} = \partial_q t^{q, \rho}.$$

Par contre les deux divergences du tenseur $\overline{t^{\rho, q}}$ ne sont pas les mêmes; en prenant la duale n° 6 et en tenant de l'équation n° 7 et de l'identité $\partial_q (\overline{\partial^\rho a^q - \partial^q a^\rho}) \equiv 0$, on trouve

$$(39) \quad \partial_q [\overline{t^{\rho, q} - t^{q, \rho}}] = 2 k_0 \overline{t^{\rho, \bar{\rho}}}.$$

Voici l'interprétation que l'on donne de quelques-unes des formules (36) :

N° 1. Équation de continuité de Dirac.

N° 2. Comme en relativité, la trace du tenseur intertique de tétrade t^{pq} est égale à un facteur constant près à la densité massique de repos; il y a cependant une différence essentielle car t^{pq} n'est pas nécessairement symétrique; on ne peut donc parler d'une véritable interprétation.

N° 4. Le courant total a^p est la somme d'un courant de conduction et d'un courant de polarisation; cette formule correspond à la formule classique des milieux polarisés.

N° 7. Expression du courant magnétique de Proca.

Les autres formules n'ont pas reçu d'interprétations claires et compréhensibles. M. O. Costa de Beauregard a divisé les relations précédentes en deux groupes (*Thèse*, Paris, 1943, p. 70); l'un serait formé par les relations à caractères dynamiques (2, 3, 5, 8, 10) l'autre par les relations ayant une signification électromagnétique (1, 4, 6, 7, 9). Il ne semble pas cependant qu'une telle distinction s'impose; on a plutôt l'impression que chaque formule est susceptible à la fois d'une interprétation dynamique (ou cinématique) et d'une interprétation électromagnétique. Telles sont par exemple les équations n° 4 et 5 et nous verrons que dans le cas de l'onde plane monochromatique la relation n° 3 que M. O. Costa de Beauregard range dans les relations à caractère dynamique, s'identifie avec la relation de Frenkel dont le caractère électromagnétique ne saurait être nié.

On peut se demander pourquoi on ne peut établir une correspondance plus poussée avec l'électromagnétisme des milieux polarisés, c'est parce que l'équation n° 6 ci-dessus ne peut être comparée à l'équation classique $4\pi m^{pq} - H^{pq} = -F^{pq}$, cette dernière est du type mixte car elle contient la grandeur densitaire m^{pq} et les grandeurs finies H^{pq} et F^{pq} tandis que l'équation n° 6 ne contient que des grandeurs densitaires.

Cas de l'onde plane monochromatique. — En l'absence de champs les équations de Dirac admettent la solution

$$\psi_k = \Lambda_k e^{-ik_\alpha u^\alpha} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_p = \frac{\beta_p}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ u''_p = -1 \end{cases} \quad (\beta_i = i).$$

Deux seulement des quatre constantes Λ_k peuvent être choisies arbitrairement [voir équations (23) où l'on fait $C = D = 0$ pour supprimer les énergies négatives].

On a

$$\psi_k^\times = \Lambda_k^\times e^{ik_0 x^0 + i p x^1} \quad \text{avec} \quad \Lambda_k^\times = i \Lambda_k^* \gamma_4,$$

d'où

$$\partial^\nu \psi_k^\times = ik_0 u^\nu \psi_k^\times, \quad \partial^\nu \psi = -ik_0 u^\nu \psi_k.$$

Ceci donne pour le tenseur $t^{\lambda\nu}$ l'expression

$$t^{\lambda\nu} = 2 ik_0 u^\nu [\psi_k^\times \gamma^\lambda \psi_k].$$

Les grandeurs $[\psi_k^\times \gamma^\lambda \psi_k]$ sont des constantes et l'on a

$$[\psi_k^\times \gamma^\lambda \psi_k] = [\Lambda_k^\times \gamma^\lambda \Lambda_k].$$

Les 10 équations différentielles (36) s'écrivent alors

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1. \quad 0 = 0, & 2. \quad \omega_1 = i u_\rho a^\rho; \\ 3. \quad 0 = u_\eta m^{\rho\eta}, & 4. \quad a^\rho = i \alpha_1 u^\rho; \\ 5. \quad 0 = u^\rho a^\rho - u^\rho a^\rho, & 6. \quad m^{\rho\eta} = i [\overline{\sigma^\rho u^\rho} - \sigma^\rho \overline{u^\rho}]; \\ 7. \quad 0 = \alpha_2 u^\rho & 8. \quad \sigma^\rho = i u_\eta \overline{m^{\rho\eta}}; \\ 9. \quad 0 = u_\rho \sigma^\rho, & 10. \quad \alpha_2 = 0. \end{array} \right.$$

Ces relations ne sont pas indépendantes; on peut toutes les déduire des nos 4 et 10, soit

$$\begin{aligned} a^\rho &= i \alpha_1 u^\rho, \\ \alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

En effet l'équation n° 6 résulte de l'équation n° 4 et de l'identité (34) où l'on fait $\alpha_2 = 0$; l'équation n° 8 résulte de l'équation n° 4 et de l'identité $a_\eta \overline{m^{\rho\eta}} = \alpha_1^2 \sigma^\rho$; l'équation n° 2 résulte de $a_\rho^2 \equiv \alpha_1^2 - \alpha_2^2$ quand on y fait $\alpha_2 = 0$.

Quant aux équations de numéros impairs, elles se déduisent immédiatement des équations de numéros pairs.

Si l'on veut calculer explicitement les tenseurs ω_1 , a^ρ , $m^{\rho\eta}$, σ^ρ , on

utilisera les expressions suivantes des constantes A_k [équations (23)]:

$$A_1 = - [A \lambda_3 + B (\lambda_1 + i \lambda_2)] \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2},$$

$$A_2 = - [A (\lambda_1 - i \lambda_2) - B \lambda_3] \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2},$$

$$A_3 = A \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2},$$

$$A_4 = B \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2},$$

où A et B sont deux constantes arbitraires généralement complexes; on trouve ainsi

$$\omega_1 = -i(A^*A + B^*B).$$

Il vaut mieux calculer les autres tenseurs dans le système de repos, puis appliquer les règles de transformations pour avoir leur valeur actuelle; on trouve

$$\begin{aligned} \omega_1^{(0)} &= -i(A^*A + B^*B), & m_{uv}^{(0)} &= -\sigma_{uv}^{(0)}, & m_{uv}^{(0)} &= 0, \\ \sigma_1^{(0)} &= (A^*B + B^*A), & a_{uv}^{(0)} &= 0, & a_k^{(0)} &= -\omega_1^{(0)}, \\ \sigma_2^{(0)} &= i(A^*B - B^*A), & \sigma_4^{(0)} &= 0, & \omega_2^{(0)} &= 0, \\ \sigma_3^{(0)} &= (A^*A - B^*B). \end{aligned}$$

Pour les valeurs actuelles, on trouve par exemple

$$\omega_1 = \omega_1^{(0)}, \quad u^\rho = (A^*A + B^*B) u^\rho, \dots$$

Revenons aux relations (40) et cherchons leur signification.

L'équation n° 3 est la relation bien connue de Frenkel; écrivons les équations nos 6 et 8 sous forme vectorielle d'espace; ($\overrightarrow{m_{uv}} = i\overrightarrow{\pi}$; $\overrightarrow{m_{uv}} = \overrightarrow{\mu}$)

$$(6_1) \quad \overrightarrow{\mu} = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\overrightarrow{\sigma} + i\sigma_4 \frac{\overrightarrow{v}}{c} \right],$$

$$(6_2) \quad \overrightarrow{\pi} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\overrightarrow{\sigma} \wedge \frac{\overrightarrow{v}}{c} \right],$$

$$(8_1) \quad \overrightarrow{\sigma} = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\left(\frac{\overrightarrow{v}}{c} \wedge \overrightarrow{\pi} \right) + \overrightarrow{\mu} \right],$$

$$(8_2) \quad \sigma_4 = -\frac{i}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\overrightarrow{v}}{c} \cdot \overrightarrow{\mu}.$$

(6₁) est liée au double magnétisme de l'électron; quand $\beta = 0$ elle donne avec les tenseurs physiques définis par (33),

$$\left(\overset{\rightarrow}{\mu}_{,0}\right) = -\frac{m_0 c}{e} \left(\overset{\rightarrow}{\sigma}_{,0}\right).$$

(6₁) montre aussi que les trois vecteurs \vec{c} , $\overset{\rightarrow}{\mu}$, $\overset{\rightarrow}{\sigma}$ sont coplanaires et de (6₂) on en déduit que $\overset{\rightarrow}{\pi}$, toujours normal au plan des trois vecteurs précédents, est nul quand $v = 0$.

Quand v tend vers c , β tend vers 1 et les grandeurs densitaires précédentes (sauf α_1) tendent vers l'infini. Cependant les grandeurs intégrées restent finies car la condition de normalisation conduit en fait (1) à remplacer les grandeurs $[\psi^* \alpha_\lambda \psi]$ par

$$\frac{[\psi_k^* \alpha_\lambda \psi_k]}{[\psi_k^* \alpha_0 \psi_k]} \quad \text{avec} \quad [\psi_k^* \alpha_0 \psi_k] = \frac{A^* A + B^* B}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

(Voir par exemple le calcul de M. Louis de Broglie dans son Ouvrage *Particules à spin*, p. 86-88.)

5. LES RELATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE (2). — *a. Première forme.* — Par dérivation des relations différentielles du premier ordre et en tenant compte de l'identité suivante valable pour un tenseur antisymétrique quelconque $B^{\mu\nu}$

$$[\partial_\rho^\mu B^{\nu\rho} - \partial_\rho^\nu B^{\mu\rho}] + [\overline{\partial_\rho^\mu B^{\nu\rho}} - \overline{\partial_\rho^\nu B^{\mu\rho}}] \equiv -\partial_\rho^\nu B^{\mu\rho},$$

(1) En supposant le corpuscule enfermé dans un volume $v = \iiint dv$ la condition de normalisation donne en effet

$$\frac{A^* A + B^* B}{\sqrt{1 - \beta^2}} \iiint dv = 1, \quad \text{d'où} \quad v = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{A^* A + B^* B}.$$

En particulier la grandeur $\Omega_1 = \iiint \omega_1 dv = \alpha_1 \iiint dv$ est égale à $\Omega_1 = -i\sqrt{1 - \beta^2}$.

(2) E. DURAND, *C. R. Acad. Sc.*, t. 218, 1944, p. 36-38.

on obtient aisément les relations

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. [\partial_r^2 - 4k_0^2] \omega_1 = \partial_\rho t^{\rho q}{}_{;q} - 2k_0 t^{\rho}{}_{;\rho}, \\ 2. [\partial_r^2 - 4k_0^2] a^\rho = \partial_q [\overline{t^{\rho q} - t^{\rho}{}_{;\rho}}] - 2k_0 t^{\rho}{}_{;\rho}, \\ 3. [\partial_r^2 - 4k_0^2] m^{\rho q} = -2k_0 [\overline{t^{\rho q} - t^{\rho}{}_{;\rho}}] \\ \quad + [\partial^\rho t^{\rho q} - \partial^q t^{\rho}{}_{;\rho}] - [\partial^\rho t^{\rho q} - \partial^\rho t^{\rho}{}_{;\rho}], \\ 4. [\partial_r^2 - 4k_0^2] \sigma^\rho = 2k_0 \overline{t^{\rho q}{}_{;q}} - \partial_q [\overline{t^{\rho q} - t^{\rho}{}_{;\rho}}], \\ 5. [\partial_r^2 - 4k_0^2] \omega_2 = -\partial_\rho \overline{t^{\rho}{}_{;\rho}} \end{array} \right.$$

On voit que si les tenseurs du type $t^{\Lambda\rho}$ étaient nuls les grandeurs densitaires du type $[\psi^\times \gamma_\Lambda \psi]$ obéiraient toutes aux équations $(\partial_r^2 - 4k_0^2)[\] = 0$.

Dans ces relations, comme dans les relations du premier ordre, le tenseur $t^{\rho\sigma}$ ne figure que par ses contractions $t^{\rho q}{}_{;q}$ et $\overline{t^{\rho q}{}_{;q}}$, et le champ électromagnétique $H^{\rho q}$ ne figure pas explicitement; il n'en sera plus ainsi dans les nouvelles relations du second ordre que nous allons maintenant établir.

b. Deuxième forme. — On part des équations du second ordre (4) et (5) de Dirac écrites sous la forme

$$(42) \quad \left[\gamma_0 \underset{\rightarrow}{B} - \frac{1}{2} i \varepsilon \gamma_{\rho q} H^{\rho q} \right] \psi_k = 0,$$

$$(43) \quad \psi_k^\times \left[\gamma_0 \underset{\leftarrow}{B} - \frac{1}{2} i \varepsilon \gamma_{\rho q} H^{\rho q} \right] = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} \underset{\rightarrow}{B} &= \underset{\rightarrow}{\partial_r^2} - 2i\varepsilon \underset{\rightarrow}{A_r} \partial^r - \varepsilon^2 \underset{\rightarrow}{A_r^2} - k_0^2, \\ \underset{\leftarrow}{B} &= \underset{\leftarrow}{\partial_r^2} + 2i\varepsilon \underset{\leftarrow}{\partial^r} \underset{\leftarrow}{A_r} - \varepsilon^2 \underset{\leftarrow}{A_r^2} - k_0^2. \end{aligned}$$

En multipliant (42) en avant par $\psi_k^\times \gamma^\Lambda$ et (43) en arrière par $\gamma^\Lambda \psi_k$, puis en combinant les équations obtenues par addition et soustraction, on obtient les relations cherchées; voyons quelle sera la contribution apportée par les opérateurs $\underset{\rightarrow}{B}$ et $\underset{\leftarrow}{B}$; on a, en tenant compte de la relation de Lorentz $\partial_q A^q = 0$ pour les potentiels,

$$\begin{aligned} \psi_k^\times \left[\gamma^\Lambda \left(\underset{\leftarrow}{B} + \underset{\rightarrow}{B} \right) \right] \psi_k &= \partial_r^\times [\psi_k^\times \gamma^\Lambda \psi_k] - 2 [\partial^r \psi_k^\times \gamma^\Lambda \partial_r \psi_k] + 2i\varepsilon \Lambda^k t^{\Lambda r}{}_{;r} \\ &\quad + 2 [\psi_k^\times \gamma^\Lambda \psi_k] (\varepsilon^2 \underset{\leftarrow}{A_r^2} - k_0^2), \\ \psi_k^\times \left[\gamma^\Lambda \left(\underset{\leftarrow}{B} - \underset{\rightarrow}{B} \right) \right] \psi_k &= \partial_\rho t^{\Lambda\rho}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est particulièrement intéressante puisqu'elle fait apparaître la divergence des tenseurs $t^{\lambda\nu}$ dont l'importance physique est très grande.

Voici sous la forme tensorielle d'Univers les 10 relations du second ordre :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad \psi_k^\times \left[\gamma^0 \left(\begin{array}{c} \text{B} + \text{B} \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) \right] \psi_k = 2i\varepsilon \frac{1}{2} m_{pq} \Pi^{pq}, \\ 2. \quad \psi_k^\times \left[\gamma^r \left(\begin{array}{c} \text{B} + \text{B} \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) \right] \psi_k = -2i\varepsilon \sigma_{ij} \Pi^{\overline{ij}}, \\ 3. \quad \psi_k^\times \left[\gamma^{pq} \left(\begin{array}{c} \text{B} + \text{B} \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) \right] \psi_k = 2i\varepsilon [\alpha_2 \Pi^{\overline{pq}} - \alpha_1 \Pi^{pq}], \\ 4. \quad \psi_k^\times \left[\overline{\gamma}^r \left(\begin{array}{c} \text{B} + \text{B} \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) \right] \psi_k = 2i\varepsilon \alpha_{ij} \Pi^{\overline{ij}}, \\ 5. \quad \psi_k^\times \left[\overline{\gamma}^0 \left(\begin{array}{c} \text{B} + \text{B} \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) \right] \psi_k = -2i\varepsilon \frac{1}{2} \overline{m}_{\overline{pq}} \Pi^{\overline{pq}}. \end{array} \right.$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad \partial_p t^{0,p} = 0, \\ 2. \quad \partial_j t^{0,j} = -2i\varepsilon \alpha_{ij} \Pi^{ij}, \\ 3. \quad \partial_r t^{pq,r} = -2i\varepsilon [m^{pq} \Pi^r_r - m^{qr} \Pi^p_p], \\ 4. \quad \partial_j \overline{t}^{0,j} = 2i\varepsilon \sigma_{ij} \Pi^{ij}, \\ 5. \quad \partial_p \overline{t}^{0,p} = 0. \end{array} \right.$$

Cherchons la signification physique de ces équations.

Les seconds membres des équations (44) n'ont pas d'analogues en électromagnétisme classique des milieux polarisés, sauf cependant le premier qui représente la densité d'énergie potentielle; on rencontre aussi en électromagnétisme classique une formule analogue au second membre du n° 4; les équations de Maxwell admettent en effet la solution

$$e_j \Pi^{\overline{ij}} = 0 \quad \text{quand} \quad e_j = \text{const.}$$

Mais ce sont les équations (45) qui sont les plus intéressantes; les nos 1 et 5 se retrouvent en électromagnétisme des milieux polarisés; elles expriment la conservation du courant de conduction et du courant magnétique.

L'équation n° 2 qui a été donnée par Tétrode lui a permis de doter son tenseur $t^{0,j}$ des coefficients physiques nécessaires; on reconnaît au second membre, à un facteur près, la densité de force-puissance de Lorentz; le premier membre doit être interprété comme la divergence

du tenseur inertique; ce tenseur n'est pas symétrique mais on peut le remplacer par $\frac{1}{2}(t^{p,q} + t^{q,p})$, car la divergence est la même sur les deux indices d'après (38); il y a cependant une autre différence entre cette équation et l'équation des milieux polarisés; au lieu du courant total a^q qui figure ici, il y a le courant de conduction qui correspond en Théorie de Dirac au courant $t^{0,p}$ de Gordon.

Dans le second membre de l'équation n° 8 on reconnaît, à un facteur constant près, la densité de moment pondéro-moteur d'Univers appliquée au fluide fictif de Dirac par le champ; d'où l'idée assez naturelle de choisir les coefficients physiques du tenseur $t^{p,q,r}$ de manière que sa divergence s'identifie avec la densité de moment pondéromoteur.

On a ainsi les expressions suivantes pour les tenseurs physiques ($t^{\lambda,\mu}$) correspondant aux tenseurs abstraits $t^{\lambda,\mu}$:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} t^{0,p} = -\frac{2k_0}{ec} (t^{0,p}), \\ t^{p,q} = \frac{4\pi i}{ch} (t^{p,q}), \\ t^{p,q,r} = -im_0 \left(\frac{4\pi}{h}\right)^2 (t^{p,q,r}), \\ \bar{t}^{p,q} = ?, \\ \bar{t}^{0,p} = \frac{2k_0}{iec} (\bar{t}^{0,p}). \end{array} \right.$$

Seul le tenseur $\bar{t}^{p,q}$ reste ininterprété; M. O. Costa de Beauregard a calculé les deux divergences de ce tenseur (*Thèse*, p. 85) qui correspondent à nos formules (45)₄ et (39).

Il est bon de noter que les équations (44) ne sont pas autre chose que les équations (41) mises sous une autre forme

Cas de l'onde plane monochromatique. — Elle est solution en l'absence de champs ($H_{pq} = 0$); les seconds membres des équations (45) sont nuls, le tenseur $t^{p,q}$ a pour expression

$$t^{p,q} = -2k_0 v_1 u^p u^q \quad \text{car} \quad a^p = i v_1 u^p.$$

Avec les tenseurs physiques (33) et (46) on a

$$(47) \quad (t^{p,q}) = (v_1) V^p V^q,$$

V^ν étant la quadrivitesse relativiste; (v_1) qui est une constante est bien égale à la densité massique au repos.

Les quatre équations (45)₂ signifient que l'accélération γ^ν est nulle; l'onde plane monochromatique correspond bien au mouvement rectiligne et uniforme du fluide de Dirac.

Le tenseur physique $(t^{\mu\nu})$ a pour expression

$$(48) \quad (t^{\mu\nu}) = -\frac{m_0 c}{e} V^\nu (m^{\mu\lambda}).$$

4. LES MOMENTS CINÉTIQUES PROPRES DU POINT DE VUE RELATIVISTE. — Nous nous proposons de retrouver ici les résultats obtenus par M. Louis de Broglie (¹), mais d'une manière plus rapide et plus générale; nous montrerons que l'on peut adjoindre aux trois composantes d'espace S^μ du spin fini une quatrième composante S^4 , les quatre composantes S^μ formant un pseudo-quadrivecteur; nous préciserons enfin le passage des grandeurs finies S^μ aux grandeurs densitaires σ^μ en mettant bien en évidence le caractère de tenseur complètement antisymétrique de rang 3 de ces dernières.

a. Mouvement d'un point. — Nous allons d'abord définir un pseudotenseur purement cinématique. Soit un point qui, dans un certain système a des coordonnées $X_{(0)}^1, X_{(0)}^2, X_{(0)}^3$ et une vitesse $c \cdot B_{(0)}^\mu$; les $X_{(0)}^\mu$ et les $B_{(0)}^\mu$ sont des fonctions du temps $ict' = X_{(0)}^4$.

Si ce premier système est animé d'une vitesse $c\beta^\mu$ par rapport à un deuxième système et si un observateur se trouve placé dans ce deuxième système, il attribuera au point une position X^μ et une vitesse cB^μ qui seront des fonctions du nouveau temps X_4 ; on pourra les calculer par la transformation de Lorentz et par la règle relativiste de composition des vitesses.

Une fois ce résultat obtenu, le deuxième observateur pourra toujours décomposer les coordonnées X^μ et la vitesse cB^μ en deux parties d'après les règles classiques de la géométrie et de la cinématique de Galilée. La décomposition la plus naturelle est celle qui fait correspondre la première partie au mouvement rectiligne et uniforme

(¹) LOUIS DE BROGLIE, *Particules à spin*, p. 48 à 53.

du premier système, soit $\eta^a = -i\beta^a X_4$ pour la position et $c\beta^a$ pour la vitesse.

Pour exprimer plus commodément les quadrivitesse relativistes sous la forme $\frac{B^p}{\sqrt{1-B^2}}$ ou $\frac{\beta_p}{\sqrt{1-\beta^2}}$ nous poserons

$$B_4 = \beta_4 = i.$$

En posant aussi $\eta^4 = X^4$ on aura

$$(49) \quad \eta_p = -i\beta_p X_4 \quad (p = 1, 2, 3, 4).$$

Considérons alors le déterminant suivant :

$$(50) \quad \Delta = -i \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \frac{B_1}{\sqrt{1-B^2}} & \frac{B_2}{\sqrt{1-B^2}} & \frac{B_3}{\sqrt{1-B^2}} & \frac{B_4}{\sqrt{1-B^2}} \end{vmatrix} = 0.$$

Il est nul car les éléments des deux premières lignes ne diffèrent que par un même coefficient.

Désignons par S^p le mineur de η^p pris avec son signe; les trois composantes d'espace S^a correspondent aux trois grandeurs de M. Louis de Broglie (nous ne ferons pas ici le calcul détaillé car nous avons en vue l'interprétation des grandeurs densitaires; nous le reprendrons plus loin quand nous chercherons à interpréter les grandeurs intégrées).

Nous sommes donc amenés à associer à ces trois composantes S^a la composante S^4 :

$$(51) \quad S_4 = i \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ \frac{B_1}{\sqrt{1-B^2}} & \frac{B_2}{\sqrt{1-B^2}} & \frac{B_3}{\sqrt{1-B^2}} \end{vmatrix}.$$

Comment se transforme l'être mathématique S^p dans une rotation d'Univers? Pour le voir il suffit de remarquer que si dans la deuxième ligne du déterminant Δ on avait $\frac{\beta^p}{\sqrt{1-\beta^2}}$ au lieu de β^p , les mineurs de η^p seraient des tenseurs complètement antisymétriques de rang 3; ils

se transformeraient donc comme un quadrivecteur; tels qu'ils sont ils se transforment donc suivant l'équation

$$(52) \quad S_p = b_{pq} S'_{(0)} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Dans le système de repos on a

$$(53) \quad S'_{(0)} = 0, \quad S''_{(0)} = X''_{(0)} \frac{B'_{(0)}}{\sqrt{1 - B'^2_{(0)}}} - X'_{(0)} \frac{B''_{(0)}}{\sqrt{1 - B'^2_{(0)}}},$$

$S''_{(0)}$ est donc égal au moment de la quadrivitesse d'Einstein.

En développant le déterminant Δ sur la première ligne, on en déduit

$$\beta_q S' = 0.$$

Pour passer des grandeurs cinématiques aux grandeurs dynamiques, il suffit de multiplier par la masse au repos m_0 du point matériel.

b. Grandeurs densitaires. — Pour définir une densité de moment cinétique propre σ^p qui soit un quadrivecteur, nous pourrions partir du pseudo-tenseur purement cinématique défini dans le paragraphe précédent; les vitesses B^p et β^p ne seront plus des fonctions du temps mais formeront deux champs de vitesses fonctions de x_1, x_2, x_3, x_4 .

Pour passer de la grandeur cinématique à la grandeur dynamique, il faudra multiplier par l'élément de masse au repos dm_0 qui est un invariant; on a

$$dm_0 = \rho_0 dv_0 = \rho' dv$$

comme

$$dv = dv_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

on a

$$\rho' = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

[Pour l'étude détaillée de cette grandeur ρ' et des autres grandeurs dynamiques relatives aux milieux continus, voir l'article que nous avons donné au *Journal de Mathématiques* (1).]

(1) E. DURAND, *Journ. Math.*, t. XXV, fasc. 3, 1946.

σ'' sera donc le mineur de η'' dans le déterminant suivant qui est d'ailleurs nul

$$(54) \quad -i\rho_0 \begin{vmatrix} \frac{\eta_1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\eta_2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\eta_3}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\eta_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta_2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta_3}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \frac{B_1}{\sqrt{1-B^2}} & \frac{B_2}{\sqrt{1-B^2}} & \frac{B_3}{\sqrt{1-B^2}} & \frac{B_4}{\sqrt{1-B^2}} \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le déterminant suivant la première ligne, on a

$$(55) \quad \beta_j \sigma'' = 0.$$

σ'' est un tenseur complètement antisymétrique de rang 3; il se transforme comme un quadrivecteur, on peut aussi l'écrire sous la forme

$$(56) \quad \sigma'' = -i\rho_0 \frac{\beta_j}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[X'' \frac{B^j}{\sqrt{1-B^2}} - X^j \frac{B''}{\sqrt{1-B^2}} \right].$$

La grandeur $\int \sigma'' d\nu$ n'est qu'un pseudo-quadrivecteur comme dans le paragraphe précédent; c'est la grandeur $\int dX_i \int \sigma'' d\nu$ qui redonne un quadrivecteur.

Une fois que l'on a défini la densité de moment cinématique propre, il est facile de donner l'expression du tenseur antisymétrique m'' qui correspond à un coefficient près, à celui de Dirac; il suffit de poser

$$(57) \quad m'' = -i \left[\sigma'' \frac{\beta^j}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sigma^j \frac{\beta''}{\sqrt{1-\beta^2}} \right].$$

On en déduit aussitôt la relation de Frenkel $\beta_j m'' = 0$.

III. — Les grandeurs intégrées.

Les grandeurs densitaires étaient représentées par des lettres minuscules; nous désignerons les grandeurs intégrées par les lettres majuscules correspondantes; on aura donc

$$(58) \quad \begin{cases} \Omega_1 = \iiint \omega_1 d\nu, & \alpha_p = \iiint a_p d\nu, \\ \Omega_2 = \iiint \omega_2 d\nu, & \mathcal{S}_p = \iiint \sigma_p d\nu, \end{cases} \quad \mathcal{M}_{pq} = \iiint m_{pq} d\nu.$$

Nous désignerons aussi par $T^{\Lambda, \rho}$ la grandeur intégrée correspondant à $t^{\Lambda, \rho}$.

L'intégrale de volume n'étant pas invariante, les grandeurs intégrées ne sont que des pseudo-tenseurs; il faudrait prendre l'intégrale de temps de ces grandeurs pour retrouver des tenseurs.

1. L'INTÉGRATION DES RELATIONS DU PREMIER ORDRE. — Les relations entre les grandeurs intégrées sont plus simples que les relations entre les grandeurs densitaires, car tous les termes contenant des gradients des divergences, des rotationnels peuvent se transformer en intégrales de surface et d'après les conditions que l'on impose aux fonctions d'ondes de s'annuler aux limites du domaine, ces termes sont nuls.

Le caractère tensoriel étant détruit par l'intégration, nous serons obligé d'adopter les notations vectorielles d'espace; nous continuerons d'utiliser le jeu des indices d'Univers p, q, r, s qui varient de 1 à 4 dans la règle de sommation, mais nous introduirons aussi le jeu des indices d'espace u, v, w qui varient de 1 à 3.

Voici les relations entre grandeurs intégrées qui correspondent aux relations (36) entre les grandeurs densitaires :

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1. & \frac{d\mathcal{E}^k}{dx_k} = 0, \\ 2. & 2k_0 \Omega_1 = T^{ij}{}_{,j}, \\ 3. & \left\{ \begin{array}{l} T^{ij}{}_{,j} = 0, \\ \frac{d\Omega_1}{dx_k} = T^{iu}{}_{,u}, \end{array} \right. \\ 4. & \left\{ \begin{array}{l} 2k_0 \mathcal{E}^u + \frac{d\mathcal{N}^{uu}}{dx_k} = T^{0,u}, \\ 2k_0 \mathcal{E}^k = T^{0,k}, \end{array} \right. \\ 5. & \left\{ \begin{array}{l} T^{0,k} = T^{k,w}, \\ \frac{dS^w}{dx_k} = - [T^{u,v} - T^{v,u}], \end{array} \right. \\ 6. & \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{E}^w}{dx_k} + 2k_0 \mathcal{N}^{wk} = [T^{\bar{u},v} - T^{\bar{v},u}], \\ 2k_0 \mathcal{N}^{uv} = [T^{\bar{w},k} - T^{\bar{k},w}], \end{array} \right. \\ 7. & \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{N}^{uv}}{dx^k} = -T^{\bar{0},vw}, \\ 0 = T^{\bar{0},k}, \end{array} \right. \\ 8. & \left\{ \begin{array}{l} 2k_0 \mathcal{S}^u = -T^{\bar{u}j}{}_{,j}, \\ 2k_0 \mathcal{S}^k + \frac{d\Omega_2}{dx_k} = -T^{\bar{k}u}{}_{,u}, \end{array} \right. \\ 9. & 0 = T^{\bar{p},p}, \\ 10. & 2k_0 \Omega_2 - \frac{dS^k}{dx_k} = 0. \end{array} \right.$$

En multipliant par x^u avant d'intégrer par parties, on obtient de

nouvelles relations; en voici trois qui sont particulièrement intéressantes.

$$(60) \quad \mathcal{A}^u = \frac{d}{dx_4} \int x^u a^4 dv,$$

$$(61) \quad 2k_0 \int x^u a^4 dv + \mathcal{M}^{u4} = \int x^u t^{0,4} dv,$$

$$(62) \quad \mathcal{M}^{uv} = - \int x^{uv} \bar{t}^{0,4} dv.$$

L'équation (59)₁ est la plus connue; elle s'écrit aussi $\mathcal{A}_4 = \text{const.}$ et l'on sait que les ondes sont normalisées en choisissant la constante égale à i .

L'équation (60) montre que \mathcal{A}^u est la vitesse du centre de gravité de la probabilité à un facteur constant près.

(61) est une équation donnée sous une autre forme par Schrödinger (¹). Elle montre que les coordonnées du centre de gravité de la probabilité peuvent se décomposer en deux parties dont l'une $\frac{i}{2k_0} \mathcal{M}^{u4}$ garde toujours une valeur très petite (Tremblement de Schrödinger).

La première équation (59)₄ est obtenue en dérivant (61) par rapport à x_4 [(voir plus loin, équation (88)]. La deuxième équation (59)₄ montre que \mathcal{A}_4 et $T^{0,4}$ ne diffèrent que par une constante multiplicative; nous donnerons plus loin l'interprétation de cette formule.

La première équation (59)₅ montre que $T^{u,4} = T^{4,u}$ malgré que les grandeurs densitaires ne soient pas symétriques; par contre $T^{u,v}$ est différent en général de $T^{v,u}$, comme le montre l'équation suivante et le défaut de symétrie de ce pseudo-tenseur est égal à la dérivée du spin fini S^v .

(59)₇ avec $T^{0,4} = 0$ montre que la masse magnétique totale est nulle; l'équation (62) montre bien que $t^{0,4}$ est la densité de masse magnétique.

2. L'INTÉGRATION DES RELATIONS DU SECOND ORDRE. — Nous n'intégrerons que les équations (45) dont l'interprétation est la plus simple. Les

(¹) *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. II, p. 357.

termes en divergence donne des intégrales de surface qui s'annulent et il reste :

$$(63) \quad \left. \begin{array}{l} 1. \quad \frac{d\Gamma^{0,4}}{dx_4} = 0, \\ 2. \quad \begin{cases} \frac{d\Gamma^{u,4}}{dx_4} = -2i\varepsilon \int a_p \Pi^{up} dv, \\ \frac{d\Gamma^{4,4}}{dx_4} = -2i\varepsilon \int a_u \Pi^{4u} dv, \end{cases} \\ 3. \quad \begin{cases} \frac{d\Gamma^{uv,4}}{dx_4} = -2i\varepsilon \int [m^{up} \Lambda^v_p - m^{vp} \Pi^u_p] dv, \\ \frac{d\Gamma^{uv,4}}{dx_4} = -2i\varepsilon \int [m^{vu} R^v_u - m^{4u} R^v_u] dv. \end{cases} \\ 4. \quad \begin{cases} \frac{d\Gamma^{\bar{u},4}}{dx_4} = 2i\varepsilon \int \sigma_p \Pi^{vp} dv, \\ \frac{d\Gamma^{4,4}}{dx_4} = 2i\varepsilon \int \sigma_u \Pi^{4u} dv, \end{cases} \\ 5. \quad \frac{d\Gamma^{\bar{0},4}}{dx_4} = 0. \end{array} \right\}$$

Si l'on multiplie par x^u les équations (45) et si l'on intègre par parties on obtient les équations :

$$(64) \quad \left. \begin{array}{l} 1. \quad T^{0,u} = \frac{d}{dx_4} \int x^u t^{0,4} dv, \\ 2. \quad \begin{cases} T^{u,v} = \frac{d}{dx_4} \int x^v t^{u,4} dv + 2i\varepsilon \int x^v a_p \Pi^{up} dv, \\ T^{4,v} = \frac{d}{dx_4} \int x^v t^{4,4} dv + 2i\varepsilon \int x^v a_u \Pi^{4u} dv, \end{cases} \\ 3. \quad \begin{cases} T^{v4,u} = \frac{d}{dx_4} \int x^u t^{v,4} dv + 2i\varepsilon \int x^u [m^{uv} \Pi^4_v - m^{4v} \Pi^u_v] dv, \\ T^{uv,w} = \frac{d}{dx_4} \int x^w t^{uv,4} dv + 2i\varepsilon \int x^w [m^{up} \Pi^v_p - m^{vp} \Pi^u_p] dv, \end{cases} \\ 4. \quad \begin{cases} T^{\bar{u},v} = \frac{d}{dx_4} \int x^v \bar{t}^{u,4} - 2i\varepsilon \int x^v \sigma_p \Pi^{vp} dv, \\ T^{\bar{4},u} = \frac{d}{dx_4} \int x^u \bar{t}^{4,4} - 2i\varepsilon \int x^u \sigma_v \Pi^{4v}, \end{cases} \\ 5. \quad T^{\bar{0},u} = \frac{d}{dx_4} \int x^u \bar{t}^{0,4}. \end{array} \right\}$$

En tenant compte de (38) qui exprime l'égalité des deux divergences du tenseur $t^{p,q}$, on en déduit au lieu de la première équation (64)₂ l'équation suivante

$$(65) \quad T^{u,v} = \frac{d}{dx_k} \int x^u t^{k,v} dv + 2i\varepsilon \int x^u a_q H^{vq}.$$

En combinant cette dernière équation avec la deuxième équation (59)₅, on en déduit

$$(66) \quad \frac{d}{dx_k} \left\{ S^v + \int [x^u t^{k,v} - x^v t^{k,u}] dv \right\} = -2i\varepsilon \int [x^u a_q H^{vq} - x^v a_q H^{uq}] dv.$$

Cette dernière équation est bien connue; au second membre figure le moment de la force pondéromotrice et au premier membre figure la dérivée du moment cinétique total (spin plus moment cinétique orbital).

On peut trouver une formule analogue avec Ω_1 . Soit

$$(67) \quad \frac{d}{dx_k} \left\{ \Omega_1 + \int x_u t^{u,k} dv \right\} = -2i\varepsilon \int x_u [m^{uv} R_v^k - m^{kv} R_u^k] dv.$$

Cette équation (67) montre que même en l'absence de champ, Ω_1 n'est pas une constante; il faut pour cela lui adjoindre la grandeur $\int x_u t^{u,k} dv$.

Signalons enfin pour terminer l'expression

$$(68) \quad S_{ii} = \frac{1}{2} \int \left\{ x^u (t^{i,v} - t^{v,i}) - x^v (t^{i,u} - t^{u,i}) \right\} dv.$$

Avant d'aborder le chapitre suivant nous voudrions faire une remarque sur les grandeurs intégrées de la théorie de Dirac et sur les grandeurs finies de la théorie des milieux polarisés.

Dans cette dernière théorie on peut effectuer sur les grandeurs densitaires deux types d'intégration en volume. On peut prendre l'intégrale de volume ordinaire qui conduit à la grandeur totale; par exemple l'intégrale de la densité de moment électrique donne le moment électrique total.

Le deuxième type d'intégration fait passer des grandeurs densitaires aux potentiels par l'intégrale de la grandeur retardée divisée par r .

On peut se demander s'il en est de même en théorie de Dirac; la réponse à cette question est affirmative; quand on veut déterminer le champ dipolaire rayonné par l'atome d'hydrogène par exemple, on calcule la grandeur $\int x^u [\psi_k^* \psi_k] dv$; on pourrait penser qu'il s'agit simplement du mouvement du centre de gravité de la probabilité; mais quand on remarque que les raies quadrupolaires se calculent à partir de la formule $\int x^u x^v [\psi_k^* \psi_k] dv$, on voit bien qu'il s'agit en fait des deux premiers termes du développement en série de l'intégrale retardée

$$\int [\psi_k^* \psi_k]_{\tau} \frac{dv}{r},$$

comme cela est bien connue en théorie classique.

Nous pouvons généraliser et dire qu'en théorie de Dirac on peut faire correspondre aux grandeurs densitaires des potentiels.

Par exemple $\int m_{\tau}^{pq} \frac{dv}{r}$ correspondra au potentiel de polarisation M^{pq} , $\int a_{\tau}^p \frac{dv}{r}$ correspondra au potentiel total A^p , etc.

Bien entendu ces analogies sont purement formelles et l'on sait parfaitement que le fluide de probabilité de Dirac n'est pas une véritable densité de charge électrique; elles n'en sont pas moins intéressantes.

3. ESSAI D'INTERPRÉTATION DES GRANDEURS INTÉGRÉES PAR LE MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ DE LA PROBABILITÉ. — *a. Les coordonnées du centre de gravité de la probabilité.* — Elles sont données par les formules

$$X_u = \int x^u [\psi_k^* \alpha_0 \psi_k] dv = -i \int x_u [\psi_k^* \gamma_4 \psi_k] dv,$$

les intégrales de volume étant étendues à tout l'espace. Ces X_u sont des fonctions du temps $X_4 = ict$.

L'équation (61) montre que ces coordonnées se décomposent en deux parties; en posant

$$\begin{aligned} \eta_u &= -\frac{i}{2k_0} \int x_u t^{0,3} dv, \\ \xi_u &= \frac{i}{2k_0} \int m_{uv} dv, \end{aligned}$$

cette équation (61) s'écrit

$$(69) \quad X_u = \eta_u + \xi_u.$$

La grandeur η_u peut prendre des valeurs quelconques en fonction du temps et correspond vraisemblablement au mouvement classique observable de l'électron.

L'autre grandeur ξ_u est toujours plus petite ou égale à $\frac{1}{2} \frac{h}{k_0} = \frac{h}{4\pi m_0 c}$ en vertu de la condition de normalisation; c'est le tremblement de Schrödinger.

Ce tremblement subsiste en l'absence de champ, quand par conséquent η_u peut correspondre à un mouvement rectiligne et uniforme,

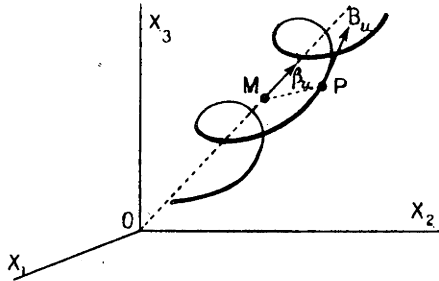


Fig. 1.

la trajectoire du centre de gravité P de la probabilité a alors l'allure hélicoïdale de la figure 1.

(69) peut donc s'écrire encore

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}.$$

Tout ce qui va suivre se rapporte au cas où le mouvement du point M est rectiligne et uniforme de vitesse $c\beta_u$.

Nous allons voir comment une telle décomposition est possible pour les coordonnées de P, en conformité avec les règles de la théorie relativiste classique.

Soient $X_{(0)}^u$ les coordonnées d'un point P_0 en mouvement dans un certain système $M_0 X_{(0)}^1 X_{(0)}^2 X_{(0)}^3$; les $X_{(0)}^u$ sont des fonctions du temps t' ou mieux de $X_{(0)}^4 = ict'$ et nous supposons que la trajectoire reste à

l'intérieur d'une petite sphère; ce sera par exemple une courbe fermée (fig. 2).

Si ce système est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à un autre système $OX_1 X_2 X_3$, quel sera le mouvement pour un observateur placé dans ce dernier système? Pour

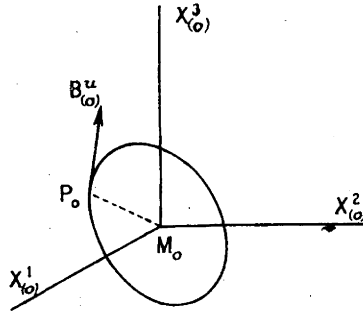


Fig. 2.

résoudre ce problème on a les équations de la transformation de Lorentz pure

$$(70) \quad X_p = b_{pq} X_{(0)}^q \quad \text{avec} \quad \begin{cases} b_{uv} = \delta_{uv} + \frac{\beta_{uv}}{\beta^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right]; \\ b_{u3} = -b_{3u} = -i \frac{\beta_u}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad b_{33} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{cases}$$

On peut préciser et écrire

$$(71) \quad X_u = b_{uv} X_{(0)}^v + b_{u3} X_{(0)}^3,$$

$$(72) \quad X_3 = b_{3v} X_{(0)}^v + b_{33} X_{(0)}^3.$$

L'observateur dans le premier système exprimait les $X_{(0)}^u$ en fonction de $X_{(0)}^i$. L'observateur placé dans le deuxième système exprimera les coordonnées X_u en fonction de X_i . Pour cela il calculera $X_{(0)}^3$ en fonction de X_3 par la formule (72) et il portera cette valeur dans l'équation (71) (n'oublions pas que $X_{(0)}^i$ figure implicitement dans les $X_{(0)}^u$). On obtient ainsi

$$(73) \quad X_u = \frac{1}{b_{33}} [b_{3i} b_{uv} - b_{iv} b_{u3}] X_{(0)}^i + \frac{b_{u3}}{b_{33}} X_3$$

Posons

$$(74) \quad \xi_u = \frac{1}{b_{44}} [b_{44} b_{uu} - b_{4u} b_{u4}] X_{(0)}^u = X_u^{(0)} - \beta_u \frac{\beta_u X_{(0)}^u}{\beta^2} [1 - \sqrt{1 - \beta^2}],$$

$$(75) \quad \eta_u = \frac{b_{u4}}{b_{44}} X_4 = -i \beta_u X_4.$$

L'équation (73) s'écrit alors

$$(76) \quad X_u = \eta_u + \xi_u.$$

Elle correspond à l'équation (69) de la théorie de Dirac ; η_u est bien l'équation d'un mouvement rectiligne et uniforme et ξ_u conserve une valeur finie quand β tend vers 1 ; cette dernière condition est indispensable pour qu'on puisse assimiler le ξ_u de (74) à celui de la théorie de Dirac, car ce dernier reste très petit ; avec (74) on trouve

$$\xi_u'' = X_{(0)}'' - (\beta_u X_{(0)}^u)^2,$$

ce qui montre que ξ_u'' est toujours plus petit que $(X_0)''$; comme nous avons supposé que $(X_0)''$ restait toujours plus petit qu'une valeur donnée, il en est de même pour ξ_u'' . De (74) on peut aussi déduire

$$\beta_u \xi_u = \beta_u X_{(0)}^u \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Quand β tend vers 1, quelles que soient les équations du mouvement dans le système primitif, $\beta_u \xi_u$ tendra vers zéro ; ainsi une vibration quelconque qui se propage à la vitesse de la lumière est nécessairement transversale. Ce sont les composantes dans la direction de propagation qui subissent la contraction de Lorentz.

On peut dire que ξ_u est l'équation du mouvement vu par l'observateur du système $OX_1 X_2 X_3$, mais rapporté au système entraîné $O\xi_1 \xi_2 \xi_3$ (fig. 3).

En posant $\eta_4 = X_4$ on peut écrire

$$(77) \quad X_4 = \xi_4 + \eta_4 \quad \text{avec} \quad \xi_4 = 0,$$

(76) et (77) peuvent se réunir dans l'équation unique

$$(78) \quad X_p = \eta_p + \xi_p \quad (p = 1, 2, 3, 4).$$

On pourrait considérer η_p et ξ_p comme des quadrivecteurs et admettre que l'on a dans le système primitif

$$(79) \quad X_{(0)}^p = \xi_{(0)}^p + \eta_{(0)}^p.$$

Il est facile de trouver des $\xi_{(0)}''$ et des $\eta_{(0)}''$ qui par la transformation de Lorentz pure donnent les $\xi_{(0)}'$ et $\eta_{(0)}'$ des formules (74) et (75), $\xi_4 = 0$ et $\eta_4 = X_4$. Ce sont

$$(80) \quad \begin{cases} \eta_{(0)}'' = 0, & \xi_{(0)}'' = X_{(0)}'', \\ \eta_{(0)}^i = \sqrt{1 - \beta^2} \eta_i, & \xi_{(0)}^i = X_{(0)}^i - \eta_{(0)}^i = -i\beta_\nu X_{(0)}^\nu, \end{cases}$$

qui donnent

$$(81) \quad \xi_\rho = b_{\rho\mu} \xi_{(0)}''^\mu, \quad \eta_\rho = b_{\rho\mu} \eta_{(0)}''^\mu.$$

Il importe de noter que cette décomposition de $X_{(0)}^i$ donnée par la formule (79) ne serait pas possible pour l'observateur placé dans le

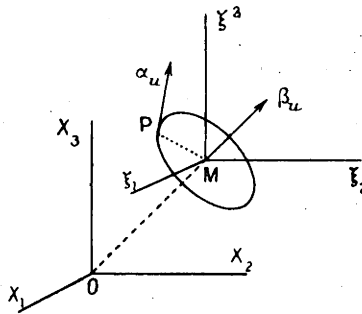


Fig. 3.

système entraîné; pour lui, il n'y a pas à décomposer le temps $X_{(0)}^4$ en $\eta_{(0)}^4$ et $\xi_{(0)}^4$; la vitesse β^u qui figure dans les formules (80) lui est inaccessible en vertu même des principes relativistes; on sait en effet qu'aucune mesure effectuée dans son système ne peut lui permettre de déterminer la vitesse de translation de son système.

Nous avons donné cette formule pour montrer que si l'on considère ξ^ρ comme un quadrivecteur, ξ_4 ne saurait être nul dans tous les systèmes; cette particularité ne se présente que dans le système OX, X_2, X_3 parce que l'on utilise le même temps pour exprimer le mouvement du point M et le mouvement du point P.

Étant donné le caractère artificiel de la décomposition (79) avec les formules (80), nous ne considérerons pas, dans la suite de cet exposé, ξ^ρ et η^ρ comme des quadrivecteurs; ils se transformeront suivant les formules (74) et (75). On conviendra de choisir dans tous les systèmes le même temps pour exprimer les mouvements des deux

points M et P; ξ_a sera donc nul dans tous les systèmes; on aura en particulier au lieu de (80) les expressions

$$(82) \quad \begin{cases} \eta_{(0)}^u = 0, & \xi_{(0)}^u = X_{(0)}^u, \\ \eta_{(0)}^i = X_{(0)}^i, & \xi_{(0)}^i = 0. \end{cases}$$

L'équation (78) sera valable dans tous les systèmes.

b. La vitesse du centre de gravité de la probabilité (¹). — En Théorie de Dirac la vitesse cB_u du centre de gravité de la probabilité a pour expression

$$(83) \quad B_u = i \frac{dX_u}{dX_4} = \int [\psi_k^* \gamma_u \psi_k] d\nu = - \int [\psi_k^* \alpha_u \psi_k] d\nu.$$

La composante de temps B_4 est un invariant; elle est égale à i dans tous les systèmes de référence; on a, en effet,

$$(84) \quad B_4 = i \frac{dX_4}{dX_4} = i = \int [\psi_k^* \gamma_4 \psi_k] d\nu = i \int [\psi_k^* \alpha_0 \psi_k] d\nu,$$

et la condition de normalisation donne

$$\int [\psi_k^* \alpha_0 \psi_k] d\nu = 1.$$

On comprend pourquoi en Théorie de Dirac on n'utilise pas la quadrivitesse relativiste

$$\beta_p = \frac{B_p}{\sqrt{1 - B^2}} \quad (p = 1, 2, 3, 4).$$

Cette dernière devient infinie quand B tend vers 1; or la vitesse du centre de gravité de la probabilité peut être très voisine de la lumière et même lui être toujours égale. La longueur dans l'espace temps de la quadrivitesse d'Einstein est un invariant toujours égal à -1 ; $\beta_4^q = -1$.

La longueur de la pseudo-quadrivitesse de Dirac est un pseudo-invariant que l'on peut faire correspondre dans le cas qui nous préoccupe du pseudo-invariant Ω_1

$$(85) \quad B_4^q = -(1 - B^2) = \Omega_1^2,$$

(¹) Les vitesses B_u , β_u , α_u que nous considérerons sont en fait les vitesses divisées par la constante c .

nous poserons

$$(86) \quad \Omega_1 = -i\sqrt{1 - \beta^2}.$$

En théorie de Dirac on a

$$(87) \quad \Omega_1 = \int |\psi_k^* \gamma_0 \psi_k| dv = i \int [\psi_k^* \alpha_k \psi_k] dv.$$

La grandeur $\int \Omega_1 dX_s$ est bien un invariant; c'est le temps propre de la cinématique relativiste⁽¹⁾.

La première équation (59)_s que nous avons déduite de la théorie de Dirac, s'écrit

$$(88) \quad B_u = \beta_u + \alpha_u,$$

en posant

$$(89) \quad \beta_u = i \frac{d\eta_u}{dX_s} = \frac{1}{2k_0} T^{0,u},$$

$$(90) \quad \alpha_u = i \frac{d\xi_u}{dX_s} = -\frac{1}{2k_0} \frac{d\mathcal{N}^{u^s}}{dX_s}.$$

La deuxième équation (59)_s s'écrit

$$(91) \quad B_s = \beta_s \quad \text{ou} \quad B_s = \beta_s + \alpha_s \quad \text{avec} \quad \alpha_s = 0$$

en posant

$$\beta_s = \frac{1}{2k_0} T^{0,s}.$$

On peut donc réunir (88) et (91) dans l'équation unique

$$(92) \quad B_p = \beta_p + \alpha_p.$$

On peut aussi obtenir la même formule en dérivant par rapport à X_s l'équation (78) que nous avons déduite de la théorie relativiste classique; nous avons donc d'après (74)

$$(93) \quad \begin{aligned} \alpha_u &= i \frac{d\xi_u}{dX_s} = \frac{1}{b_{ss}} (b_{ss} b_{uu} - b_{su} b_{us}) B_{(0)}^{uu} \frac{dX_0^s}{dX_s} \\ &= \left[B_{(0)}^{uu} - \beta_u \frac{\beta_{uu} B_{(0)}^{uu}}{\beta^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \right] \frac{dX_0^s}{dX_s}. \end{aligned}$$

(1) Voir LOUIS DE BROGLIE, *l'Électron magnétique*, p. 223, dans le cas où le mouvement total B_u se réduit au mouvement rectiligne uniforme β_u .

Nous pouvons donc interpréter l'équation (91) de Dirac; on a en effet $\xi_4 = 0$, donc $\alpha_4 = 0$; et l'on avait $\xi_4 = 0$ parce que l'on utilisait le même temps pour le mouvement des deux points M et P.

Voici l'expression du facteur $\frac{dX_0^4}{dX_4}$ qui se trouve dans (93)

$$(94) \quad \frac{dX_0^4}{dX_4} = \frac{i}{b_{4q} B_{(0)}^q} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta_u B_{(0)}^u}.$$

En tenant compte de (93) et (94), la vitesse $B_u = \beta_u + \alpha_u$ prend la forme

$$(95) \quad B_u = \frac{1}{1 + \beta_v B_{(0)}^v} \left\{ \sqrt{1-\beta^2} B_{(0)}^u + \beta_u \left[1 + \frac{\beta_v B_{(0)}^v}{\beta^2} (1 - \sqrt{1-\beta^2}) \right] \right\},$$

cette expression est bien celle que l'on obtiendrait en utilisant la règle de composition des vitesses de la cinématique d'Einstein; on voit, comme il est bien connu, qu'elle s'applique encore à des vitesses $B_{(0)}^u$ ou β^u qui sont égales à celle de la lumière. On sait que la vitesse résultante B_u ne peut jamais dépasser la vitesse de la lumière; on trouve aisément la relation

$$(96) \quad \sqrt{1-B^2} = \sqrt{1-B_{(0)}^2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta_u B_{(0)}^u}.$$

On voit que si l'une des vitesses $B_{(0)}$ ou β est égale à 1, on a aussi $B = 1$. Quand β tend vers 1, B_u tend vers β_u et quel que soit le mouvement dans le système de repos, on observe des trajectoires rectilignes parcourues à la vitesse de la lumière.

D'après (96) le facteur $\frac{dX_{(0)}^4}{dX_4}$ peut encore s'écrire

$$(97) \quad \frac{dX_{(0)}^4}{dX_4} = \frac{\sqrt{1-B^2}}{\sqrt{1-B_{(0)}^2}}.$$

On voit d'après cette dernière formule que l'équation de transformation pour le pseudo-invariant Ω_1 est

$$\Omega_1 = \Omega_{(0)}^1 \frac{dX_{(0)}^4}{dX_4}.$$

Les équations de transformation des pseudo-quadrivitesse B_p et β_p s'écrivent

$$(98) \quad B_p = b_{pq} B_{(0)}^q \frac{dX_{(0)}^4}{dX_4}, \quad \beta_p = b_{pq} \beta_{(0)}^q \sqrt{1-\beta^2}, \quad \text{avec} \quad B_{(0)}^4 = \beta_{(0)}^4 = i.$$

[La formule (93) donne l'équation de transformation de α^ρ puisque $\alpha_{(0)}^u = B_{(0)}^u$ et $\alpha_4 = \alpha_{(0)}^4 = 0$.]

c. *Le pseudo-quadrivecteur de spin S^ρ* . — Le spin intégré S^ρ de la théorie de Dirac ayant toujours une valeur finie en vertu de la condition de normalisation, il n'est pas question de le représenter par le mineur de η^ρ dans le déterminant (50); ce dernier se réduisant aux formules (53) dans le système de repos, on voit qu'il devient infini quand $B_{(0)}$ tend vers 1.

Nous ferons correspondre le spin S^ρ de Dirac au mineur de η^ρ dans le déterminant D ci-après, qui est d'ailleurs nul puisque les éléments de la première ligne sont des équimultiples de ceux de la seconde.

$$(99) \quad D = -i \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta_2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta_3}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta_2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta_3}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les S^ρ ont pour expression

$$(100) \quad S^\rho = -i \frac{\beta_\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} [X^\rho B^\eta - X^\eta B^\rho].$$

On peut aussi écrire

$$S^\rho = -i \frac{\beta_\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} [X^\eta \alpha^\rho - X^\rho \alpha^\eta] = -i \frac{\beta_\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} [\xi^\rho B^\eta - \xi^\eta B^\rho],$$

ou encore

$$(101) \quad S^\rho = -i \frac{\beta_\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} [\xi^\rho \alpha^\eta - \xi^\eta \alpha^\rho].$$

C'est cette dernière expression qui est la plus simple; elle donne d'une manière plus explicite

$$S^u = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [\xi^u \alpha^v - \xi^v \alpha^u],$$

$$S^4 = \frac{i\beta_u}{\sqrt{1-\beta^2}} [\xi_u \alpha_{11} - \xi_{11} \alpha_u] + \frac{i\beta_v}{\sqrt{1-\beta^2}} [\xi_{11} \alpha_u - \xi_u \alpha_{11}] + \frac{i\beta_{1v}}{\sqrt{1-\beta^2}} [\xi_u \alpha_v - \xi_v \alpha_u].$$

Dans le système de repos on a

$$(102) \quad S_{(0)}^4 = 0, \quad S_{(0)}^u = X_{(0)}^u B_{(0)}^v - X_{(0)}^v B_{(0)}^u;$$

les trois composantes d'espace ne se réduisent donc pas au moment de la quadrivitesse d'Einstein, mais au moment de la vitesse ordinaire.

Si la dernière ligne du déterminant D était formée par $\frac{B^p}{\sqrt{1-B^2}}$ au lieu de B^p , les quatre composantes de S^p formeraient un tenseur complètement antisymétrique de rang 3; elles se transformeraient donc comme un quadrivecteur; telles qu'elles se présentent elles se transforment donc suivant l'expression

$$(103) \quad S_p = b_{pq} S'_{(0)} \frac{dX'_{(0)}}{dX_p}.$$

Elles forment donc un pseudo-quadrivecteur.

Des formules (100) et (101) on en déduit les relations

$$(104) \quad \beta_q S^q = 0, \quad B_q S^q = 0.$$

On peut aussi calculer aisément la longueur du vecteur S^p d'après (103), on trouve

$$(105) \quad S_u^u = \frac{1}{[1 + \beta_u B'_{(0)}]^2} \left\{ (1 - \beta^2) (\vec{S}_{(0)})^2 - (\beta_u S'_{(0)})^2 \right\}.$$

On voit bien que cette longueur garde une valeur finie quand β ou $B_{(0)}$ tendent vers 1.

On notera que si S^p n'est pas un quadrivecteur, la grandeur $\int S^p dX_p$ en est un.

d. Le pseudo-tenseur antisymétrique M^{pq} . — Pour que cette grandeur M^{pq} corresponde à celle de Dirac, il faudra que l'on ait toujours en vertu de (69)

$$(106) \quad M^{u4} = -i\zeta^u.$$

Il ne sera pas possible en général d'adopter le pseudo-tenseur

$$(107) \quad M^{pq} = -\frac{i}{\sqrt{1-\beta^2}} [\beta^p S^q - \beta^q S^p],$$

qui aurait pourtant l'avantage de satisfaire la relation de Frenkel

$$\beta_q M^{pq} = 0,$$

et qui donnerait dans le système de repos

$$M_{(0)}^{\mu\nu} = 0, \quad M_{(0)}^{\mu\nu} = -S_{(0)}^{\mu\nu}.$$

Pour satisfaire à la condition (106) dans le cas général (centre de gravité en mouvement dans le système de repos) on pourrait songer à poser

$$(108) \quad M^{\mu\nu} = B_\rho \xi_\mu - B_\rho \xi_\nu,$$

on aurait aussi $M_{(0)}^{\mu\nu} = -S_{(0)}^{\mu\nu}$; mais d'après l'attitude que nous avons adoptée avec les formules (82) qui excluent les formules (81) la grandeur ξ^ρ n'est pas un quadrivecteur; la grandeur $M^{\mu\nu}$ précédente ne se transforme donc pas comme un pseudo-quadrivecteur; il y a cependant une exception; c'est quand on a

$$(109) \quad \beta_\nu X_{(0)}^\nu = 0,$$

car les formules (80) et (82) coïncident; mais il s'agit là d'un cas particulier, de ce que nous pourrions appeler une vibration transversale.

Enfin on pourrait songer au troisième pseudo-tenseur que voici

$$(110) \quad M_{\rho\eta} = \beta_\rho X_\eta - \beta_\eta X_\rho = \beta_\rho \xi_\eta - \beta_\eta \xi_\rho,$$

il satisfait toujours à la formule (106), mais donne dans le système de repos $M_{(0)}^{\mu\nu} = 0$; au point de vue probabiliste cela veut dire que les valeurs propres $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ ont la même probabilité.

e. Le pseudo-invariant Ω_2 . — En théorie de Dirac il est lié à S_4 par la relation

$$\Omega_2 = \frac{dS_4}{dX_4}.$$

Avec nos formules comme $S_{(0)}^4 = 0$, il en serait de même de Ω_2 .

4. CALCUL RIGoureux DES GRANDEURS INTÉGRÉES EN L'ABSENCE DE CHAMPS ET DANS UN CAS PARTICULIER. — Nous nous proposons de calculer d'une manière rigoureuse les grandeurs intégrées de la théorie de Dirac en l'absence de champs, dans le cas où, au temps $t=0$, les fonctions d'ondes se réduisent à une même fonction de Gauss multipliée par

quatre constantes g_k différentes. Pour cela nous utiliserons les potentiels des fonctions d'ondes que nous avons définis dans un précédent Chapitre.

Nous commencerons les calculs dans un cas plus général en supposant que, au temps $t=0$, les quatre fonctions d'ondes se réduisent à une même fonction quelconque de x_1, x_2, x_3 , multipliée par quatre constantes complexes g_k différentes. Nous les poursuivrons en particulier de plus en plus cette fonction unique de x_1, x_2, x_3 ; elle sera d'abord égale au produit d'une fonction de Gauss par ce qui reste de l'onde plane monochromatique au temps $t=0$, mais nous ne donnerons l'expression rigoureuse de toutes les grandeurs intégrées que pour une fonction de Gauss à symétrie sphérique; nous verrons que toutes ces grandeurs s'expriment à l'aide d'une fonction unique θ du temps.

Ces calculs correspondent en théorie de Dirac, à ceux que Darwin a effectués en mécanique ondulatoire à une fonction d'onde. (Voir LOUIS DE BROGLIE, *Introduction à la mécanique ondulatoire*, p. 178-188.) Ils sont les développements des calculs que M. Louis de Broglie a donnés dans son Ouvrage : *L'électron magnétique*, p. 170-192, pour :

- 1° l'approximation newtonnienne;
- 2° les ondes à énergies positives.

1° *Calcul des potentiels Φ_k des fonctions d'ondes ψ_k .* — En prenant comme potentiels les expressions

$$(111) \quad \Phi_k = g_k \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(P_1, P_2, P_3)}{\sqrt{k_0^2 + P_u^2}} e^{iP_u x^u} \sin \sqrt{k_0^2 + P_u^2} ct \, dP_1 \, dP_2 \, dP_3,$$

qui satisfont les relations $[\partial_q^q - k_0^2] \Phi_k = 0$, les fonctions ψ_k de Dirac que l'on en déduira se réduiront pour $t=0$ à

$$(112) \quad \psi_k(x_1, x_2, x_3, 0) = g_k f(x_1, x_2, x_3) = g_k \iiint_{-\infty}^{+\infty} F(P_u) e^{iP_u x^u} \, dP_1 \, dP_2 \, dP_3.$$

On a, en effet, d'après l'équation (25)

$$\psi_k^{\sim} = [\gamma_\nu \partial^\nu - \gamma_0 k_0] i \gamma_4 \Phi_k.$$

On voit que, seule la dérivation des Φ_k par rapport au temps

remplacera le sinus par un cosinus qui ne s'annulera pas pour $t = 0$; le cosinus étant égal à 1 au temps $t = 0$, on a bien

$$\psi_k(x_1, x_2, x_3, 0) = i(\partial_t \Phi_k)_0 = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \right)_0 = g_k f(x_1, x_2, x_3).$$

Quand on se donne arbitrairement la fonction f , le calcul de la fonction $F(P_u)$ est compliqué et ne s'exprime pas toujours à l'aide des fonctions habituelles de l'analyse. Quant au calcul de l'intégrale qui donne Φ_k , elle est encore plus difficile, c'est pourquoi nous allons donner Φ_k sous forme de développements en séries par rapport au temps; les coefficients qui dépendront de x_1, x_2, x_3 se calculeront par simple dérivation à partir de la fonction donnée $f(x_1, x_2, x_3)$ et il n'y aura aucune intégrale à effectuer.

2° *Expression des potentiels Φ_k sous forme de développement en série.*

— Développons le sinus en série dans (111); il vient

$$\Phi_k = g_k \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (ct)^{2n+1} \iiint_{-\infty}^{+\infty} F(P_u) [k_0^2 + P_u^2]^n e^{iP_u x^u} dP_1 dP_2 dP_3,$$

ou encore

$$(113) \quad \Phi_k = g_k \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(ct)^{2n+1}}{(2n+1)!} L_{2n+1},$$

en posant

$$(114) \quad L_{2n+1} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n F(P_u) [k_0^2 + P_u^2]^n e^{iP_u x^u} dP_1 dP_2 dP_3.$$

Le Laplacien de L_{2n+1} a pour expression

$$\partial_u^2 L_{2n+1} = - \iiint_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n F(P_u) [k_0^2 + P_u^2]^n P_u^2 e^{iP_u x^u} dP_1 dP_2 dP_3;$$

on a donc la relation de récurrence

$$L_{2n+3} = [\partial_u^2 - k_0^2] L_{2n+1},$$

qui donne de proche en proche à partir de L_1

$$(115) \quad L_{2n+1} = [\partial_u^2 - k_0^2]^n L_1.$$

Tous les L_{2n+1} peuvent donc se calculer par dérivation à partir de L_1 qui n'est autre d'après (114) que la fonction f donnée.

3° *Définition et développement en série de la fonction Θ .* — Nous poserons

$$(116) \quad \Theta = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi^* \Phi \, dv \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Phi_k = g_k \Phi, \\ \Phi_k^* = g_k^* \Phi^*, \end{cases}$$

dv désigne l'élément de volume $[dx_1 dx_2 dx_3]$.

Alors que les Φ_k sont des fonctions de $x_1 x_2 x_3$ et du temps, Θ n'est fonction que du temps. Nous verrons plus loin que la connaissance de cette fonction permet d'exprimer toutes les grandeurs intégrées de la théorie de Dirac. Nous allons donner l'expression de Θ sous forme de développement en série. On a

$$\Phi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(ct)^{2n+1}}{(2n+1)!} L_{2n+1}, \quad \Phi_k^* = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(ct)^{2n+1}}{(2n+1)!} L_{2n+1}^*.$$

La règle de multiplication de deux séries nous permet d'écrire

$$(117) \quad \Theta = \sum_{n=0}^{n=\infty} (ct)^{2n+2} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{(2p+1)! [2(n-p)+1]!} \int L_{2p+1}^* L_{2n-p+1} \, dv.$$

Pour aller plus loin nous allons supposer que la fonction donnée $f(x_1, x_2, x_3)$ et toutes ses dérivées, c'est-à-dire tous les L_{2n+1} s'annulent à l'infini; cette condition est bien réalisée pour la fonction f que nous utiliserons plus loin. Dans ce cas nous allons démontrer que l'on a

$$(118) \quad \begin{aligned} \int L_{2(n-p)+1}^* L_{2p+1} \, dv &= \int L_{2n-p+1} L_{2p+1}^* \, dv \\ &= \int L_1 L_{2n+1}^* \, dv = \int L_1^* L_{2n+1} \, dv = I_{2n+2}, \end{aligned}$$

en désignant par I_{2n+2} la valeur commune de toutes ces intégrales.

On a en effet

$$\begin{aligned} \int L_{2n+1} L_{2m+1}^* \, dv &= \int (\partial_u^u - k_0^2) L_{2n-1} L_{2m+1}^* \, dv \\ &= \int \partial_u^u L_{2n-1} L_{2m+1}^* \, dv - k_0^2 \int L_{2n-1} L_{2m+1}^* \, dv \end{aligned}$$

et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \int \partial_u^u L_{2m-1} L_{2m+1}^* &= \int \partial_u (\partial_u L_{2m-1} L_{2m+1}^*) \, dv - \int \partial_u (L_{2m-1} \partial_u L_{2m+1}^*) \, dv \\ &\quad + \int L_{2m-1} \partial_u^u L_{2m+1}^* \, dv. \end{aligned}$$

Les deux premières intégrales du second membre peuvent se transformer en intégrales de surface, qui sont nulles puisque tous les L_{2n+1} s'annulent à l'infini; on a donc

$$\int L_{2n+1} L_{2m+1}^* dv = \int L_{2n-1} L_{2m+3}^* dv.$$

De proche en proche on voit que l'on peut en déduire

$$(119) \quad \int L_{2n+1} L_{2m+1}^* = \int L_{2(n-p)+1} L_{2(m+p)+1}^*.$$

Pour retrouver les relations (118) il suffira de faire $m = 0$ ou bien $p = n - m$ dans (119).

Grâce aux formules (118) l'équation (117) devient

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} (ct)^{2n+2} I_{2n+2} \sum_{p=0}^n \frac{1}{(2p+1)!} \frac{1}{[2(n-p)+1]}.$$

On démontre aisément que l'on a

$$\sum_{p=0}^n \frac{1}{(2p+1)!} \frac{1}{[2(n-p)+1]} = \frac{1}{2} \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Il en résulte pour Θ l'expression

$$(120) \quad \Theta = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2ct)^{2n+2}}{(2n+2)!} I_{2n+2} \quad \text{avec} \quad I_{2n+2} = \int L_1^* L_{2n+1} dv,$$

nous verrons plus loin que l'on peut éviter le calcul des intégrales de volume pour la détermination des constantes I_{2n+2} .

4° *Calcul de la fonction Θ .* — Nous allons faire le calcul dans le cas particulier où la fonction donnée f a pour expression

$$(121) \quad f = \pi^{-\frac{3}{4}} a^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{2} x^2 - \mu u x^u}.$$

C'est donc le produit d'une fonction de Gauss à symétrie sphérique par ce qui reste de l'onde plane au temps $t = 0$; on a

$$\mu a = \frac{k_0 \beta_u}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta_u = \frac{v_u}{c}, \quad k_0 = \frac{2\pi m_0 c}{h} = \frac{2\pi \nu_0}{c}, \quad \nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h}.$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f^* f dv = 1.$$

Il faut calculer dans (120) les intégrales

$$(122) \quad I_{2n+2} = \int L_1^* L_{2n+1} dV = \int f^* (\partial_u^n - k_0^2)^n f dV.$$

L'application de l'opérateur $(\partial_u^n - k_0^2)^n$ à la fonction f conduit rapidement à des expressions très compliquées; le calcul des intégrales serait donc pénible; pour l'éviter nous allons établir une formule de récurrence qui nous donnera tous les I_{2n+2} à partir de I_2 qui est d'ailleurs égal à 1.

Nous ne donnerons pas les détails de ces calculs; il suffit de dériver sous le signe somme par rapport aux paramètres a et p_u pour obtenir la relation de récurrence sous la forme

$$(123) \quad -2I_{2n+2} = \frac{\partial}{\partial a} [a^2 I_{2n+2}] + 4a^2 p_u^n \frac{\partial I_{2n+2}}{\partial p_u^n} + 2(p_u^n + k_0^2) I_{2n+2}.$$

Cette formule donne

$$\begin{aligned} I_2 &= 1, \\ 2I_4 &= -\{2(k_0^2 + p_u^2) + 3a^2\}, \\ 4I_6 &= \{4(k_0^2 + p_u^2)^2 + 12a^2(k_0^2 + p_u^2) + 15a^4 + 8a^2 p_u^2\}, \\ 8I_8 &= -\{8(k_0^2 + p_u^2)^3 + 36a^2(k_0^2 + p_u^2)^2 \\ &\quad + 90a^4(k_0^2 + p_u^2) + 48a^2 p_u^2(k_0^2 + p_u^2) + 120a^4 p_u^2 + 105a^6\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Nous avons tous les éléments nécessaires pour calculer numériquement la fonction Θ pour des valeurs données de a et de p_u .

Par dérivation sous le signe somme et par intégration par parties, on peut aussi obtenir les relations suivantes qui nous seront utiles :

$$(124) \quad \int (\partial_u f^*) (\partial_u^n - k_0^2)^n f dV = i \frac{a^2}{2} \frac{\partial I_{2n+2}}{\partial p_u} + ip_u I_{2n+2},$$

$$(125) \quad \int (\partial_{uv} f^*) (\partial_u^n - k_0^2)^n f dV = -\frac{a^4}{4} \frac{\partial^2 I_{2n+2}}{\partial p_u \partial p_v} \\ - \frac{a^2}{2} \left(p_u \frac{\partial I_{2n+2}}{\partial p_v} + p_v \frac{\partial I_{2n+2}}{\partial p_u} \right) - p_u p_v I_{2n+2}.$$

5° *Propriétés de la fonction θ .* — Dans le calcul des grandeurs intégrées de la théorie de Dirac à l'aide des potentiels se présentent des expressions du type

$$\int \partial_u \Phi^* \partial^u \Phi dV \quad \text{et} \quad \int \partial_i \Phi^* \partial_i \Phi.$$

Nous allons montrer qu'on peut les relier à la fonction θ et que l'on a

$$(126) \quad 4 \int \partial_u \Phi^* \partial^u \Phi = \partial_{44} \theta - 4k_0^2 \theta + 2,$$

$$(127) \quad 4 \int \partial_i \Phi^* \partial_i \Phi = \partial_{44} \theta - 2.$$

En effet, les potentiels satisfaisant les relations

$$(128) \quad (\partial_\eta^2 - k_0^2) \Phi = 0, \quad (\partial_\eta^2 - k_0^2) \Phi^* = 0,$$

on en déduit

$$2 \partial_\eta \Phi^* \partial^\eta \Phi = \partial_\eta^2 (\Phi^* \Phi) - 2k_0^2 (\Phi^* \Phi).$$

En intégrant et en tenant compte de la nullité des Φ_k à l'infini on obtient

$$(129) \quad 2 \int \partial_\eta \Phi^* \partial^\eta \Phi d\nu = \partial_{44} \theta - 2k_0^2 \theta.$$

Considérons aussi l'identité ci-après

$$\partial_u [\partial^u \Phi^* \partial_i \Phi + \partial_i \Phi^* \partial^u \Phi] + \partial_i [\partial_i \Phi^* \partial_i \Phi - \partial_u \Phi^* \partial^u \Phi - k_0^2 \Phi^* \Phi] = 0.$$

En intégrant et en tenant compte de la nullité des dérivées premières des potentiels à l'infini, on trouve que le dernier crochet donne une constante; en la calculant pour $t = 0$ on trouve qu'elle est égale à 1; on a donc

$$(130) \quad \int \partial_u \Phi^* \partial^u \Phi - \int \partial_i \Phi^* \partial_i \Phi = -k_0^2 \theta + 1.$$

En combinant les relations (129) et (130) on trouve bien les relations (126) et (127).

De (128) on peut aussi tirer la relation

$$\partial_\eta [\Phi^* \partial^\eta \Phi - \Phi \partial^\eta \Phi^*] = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$(131) \quad \partial_{44} \theta = 2 \int \Phi^* \partial_i \Phi = 2 \int \Phi \partial_i \Phi^*.$$

Voici sans indication des calculs quelques autres relations:

$$(132) \quad - \int \Phi \partial_u \Phi^* = \int \Phi^* \partial_u \Phi = ip_u \theta + i \frac{a^2}{2} \frac{\partial \theta}{\partial p_u},$$

$$(133) \quad \int \partial_u \Phi^* \partial_i \Phi = - \int \partial_i \Phi^* \partial_u \Phi = - \frac{1}{2} \partial_i \int \Phi^* \partial_u \Phi,$$

$$(134) \quad - \int \partial_{uv} \Phi^* \cdot \Phi = \int \partial_u \Phi^* \partial_v \Phi = \int \partial_v \Phi^* \partial_u \Phi = - \int \Phi^* \partial_{uv} \Phi \\ = \left(\frac{1}{2} a^2 \partial_{uv} + p_u p_v \right) \theta + \frac{a^2}{2} \left(p_u \frac{\partial \theta}{\partial p_v} + p_v \frac{\partial \theta}{\partial p_u} \right) + \frac{a^2}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p_u \partial p_v}.$$

6° *Calcul des grandeurs intégrées quand $p_u = 0$.* — Quand $p_u = 0$ les grandeurs intégrées prennent une forme relativement simple. On peut les calculer sans difficulté à l'aide des formules (25), (126), (127) et (131). Ici avec une fonction de Gauss à symétrie sphérique au temps $t = 0$ on démontre que l'on a aussi

$$\int \partial_u \Phi^* \partial_u \Phi dV = \int \partial_v \Phi^* \partial_v \Phi dV = \int \partial_w \Phi^* \partial_w \Phi dV = \frac{1}{3} \int \partial_u \Phi^* \partial_u \Phi.$$

Pour abréger l'écriture nous poserons

$$(135) \quad [\gamma_\lambda] = [g_k^\lambda \gamma_\lambda g_k] \quad \text{avec} \quad g_k^\lambda = g_k^* i \gamma_\lambda.$$

Ces crochets symboliques $[\gamma_\lambda]$ sont donc des constantes; nous supposons que les constantes g_k sont choisies de manière que

$$(136) \quad [g_k^* g_k] = 1,$$

ce qui entraîne

$$\int [\psi_k^* \psi_k] dV = 1.$$

Le calcul donne alors

$$(137) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \Omega_1 = -\frac{1}{2} [\gamma_0] \{ \partial_{44} \theta - 4k_0^2 \theta \}, \\ 2. \alpha_u = -\frac{1}{3} [\gamma_u] \{ \partial_{44} \theta + 2k_0^2 \theta - 1 \} + k_0 [\gamma_{u4}] \partial_4 \theta, \\ 3. \alpha_i = [\gamma_i] = i, \\ 4. \mathfrak{N}_{uv} = -\frac{1}{6} [\gamma_{uv}] \{ \partial_{44} \theta - 4k_0^2 \theta - 4 \}, \\ 5. \mathfrak{N}_{ui} = -\frac{1}{6} [\gamma_{ui}] \{ \partial_{44} \theta + 8k_0^2 \theta - 4 \} + k_0 [\gamma_u] \partial_4 \theta, \\ 6. \mathfrak{S}_{uv} = -\frac{1}{3} [\gamma_{uv}] \{ \partial_{44} \theta - 4k_0^2 \theta - 1 \}, \\ 7. \mathfrak{S}_i = [\gamma_{123}] \{ 2k_0^2 \theta - 1 \} - k_0 [\gamma_{123i}] \partial_4 \theta, \\ 8. \Omega_2 = -\frac{1}{2} [\gamma_{1234}] \partial_{44} \theta + k_0 [\gamma_{123}] \partial_4 \theta. \end{array} \right.$$

Pour l'expression des pseudo-tenseurs $T^{\lambda,\rho}$ il est commode de poser

$$(138) \quad \mathcal{E} = \partial_{44} 0 - 4k_0^2 0 + 2.$$

On peut alors écrire

$$(139) \quad \left\{ \begin{array}{l} T^{0,u} = \frac{1}{3} k_0 [\gamma^u] \mathcal{E} - \frac{1}{6} [\gamma^{u4}] \partial_4 \mathcal{E}, \\ T^{0,t} = 2k_0 [\gamma^t] = 2ik_0, \\ T^{u,u} = -\frac{1}{3} k_0 [\gamma_0] \mathcal{E}, \quad T^{u,v} = -T^{v,u} = -\frac{1}{6} [\gamma^{uv4}] \partial_4 \mathcal{E}, \\ T^{u,t} = T^{t,u} = 0, \quad T^{t,t} = 2k_0 [\gamma_0], \\ T^{uv,v} = 0, \quad T^{u,t,t} = 0, \quad T^{uv,t} = 2k_0 [\gamma^{uvt}], \\ T^{ut,u} = \frac{1}{6} [\gamma_0] \partial_4 \mathcal{E}, \quad T^{u,t,v} = T^{t,v,u} = \frac{1}{3} k_0 [\gamma^{uvt}] \mathcal{E}, \\ T^{uv,w} = -\frac{1}{6} [\gamma_{1234}] \partial_4 \mathcal{E} + \frac{1}{3} k_0 [\gamma_{123}] \mathcal{E}, \\ T^{\bar{w},w} = 0, \quad T^{\bar{t},t} = 0, \quad T^{\bar{w},t} = 2k_0 [\gamma^{wv}], \\ T^{\bar{t},w} = \frac{1}{3} k_0 [\gamma^{wv}] \mathcal{E}, \\ T^{\bar{v},w} = -T^{\bar{w},v} = -\frac{1}{6} [\gamma^u] \partial_4 \mathcal{E} + \frac{1}{3} k_0 [\gamma^{ut}] \mathcal{E}, \\ T^{\bar{0},w} = \frac{1}{6} [\gamma^{wv}] \partial_4 \mathcal{E}, \\ T^{\bar{0},t} = 0. \end{array} \right.$$

On vérifie sans peine que toutes ces grandeurs intégrées satisfont les relations générales (59) et (63).

Portons notre attention sur le mouvement du centre de gravité de la probabilité de coordonnées X_u ; on trouve :

$$(140) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{i} \int x^u a^t d\nu = X^u = i[\gamma^u] \left\{ -\frac{1}{6} \int \mathcal{E} dx_4 + \frac{1}{2} \partial_4 0 \right\} - ik_0 [\gamma^{ut}] 0, \\ -\frac{i}{2k_0} \int x^u t^{0,t} d\nu = \eta^u = \frac{i}{2k_0} \left\{ \frac{1}{6} \mathcal{E} - 1 \right\} [\gamma^{ut}] - \frac{1}{6} i[\gamma^u] \int \mathcal{E} dx_4, \\ \frac{i}{2k_0} \int m_{ut} d\nu = \xi^u = -\frac{i}{2k_0} [\gamma^{ut}] \left\{ \frac{1}{6} \mathcal{E} + [2k_0^2 0 - 1] \right\} + \frac{i}{2} [\gamma^u] \partial_4 0. \end{array} \right.$$

La formule générale (61) est bien satisfaite et s'écrit

$$X_u = \eta_u + \xi_u.$$

On voit que malgré la symétrie sphérique des fonctions d'ondes au temps $t = 0$, le centre de gravité n'est pas, en général, au repos.

Ce n'est pas seulement le tremblement de Schrödinger ξ_u qui intervient, mais aussi le terme η_u qui n'est pas constant; au temps $t = 0$, on a

$$0 = 0, \quad \partial_{i_1} 0 = 0, \quad \partial_{i_2} 0 = -2, \quad \mathcal{E} = 0,$$

d'où

$$X_0^u = 0, \quad \eta_0^u = \frac{i}{2k_0} [\gamma^{u_1}], \quad \xi_0^u = -\frac{i}{2k_0} [\gamma^{u_2}].$$

Le centre de gravité X_0^u est à l'origine car les deux grandeurs η_0^u et ξ_0^u se détruisent.

On peut voir sur l'expression (140) de X_u que la trajectoire du centre de gravité est plane; considérons en effet le vecteur

$$\mathcal{O}^w = [i\gamma_{u_1}] [\gamma^v] - [i\gamma_{v_1}] [\gamma^u];$$

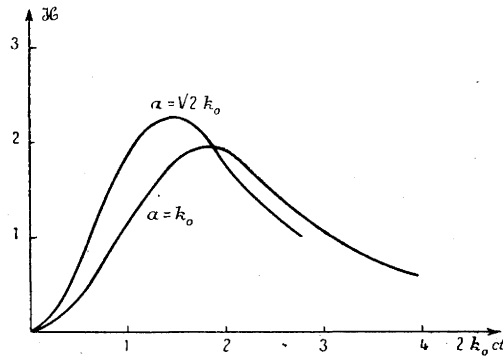


Fig. 4.

il satisfait la relation

$$X_{uv} \mathcal{O}^w = 0,$$

la trajectoire reste donc dans le plan des deux vecteurs constants $[i\vec{\gamma}_{u_1}]$ et $[\vec{\gamma}_u]$.

Pour se faire une idée de la variation de X_u et de chacune de ses parties η_u et ξ_u , il faut étudier la variation de \mathcal{E} en fonction du temps. A partir de (120) et de (123) on trouve aisément la relation

$$(141) \quad \mathcal{E} = \partial_{i_1} 0 - 4k_0^2 0 + 2 = 2 \frac{\partial}{\partial u} (u^2 0).$$

\mathcal{H} est donné sous forme de développement en série :

$$\mathcal{H} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(2ct)^{2n+2}}{(2n+2)!} A_{2n+2} \quad \text{avec} \quad A_{2n+2} = \frac{\partial}{\partial a} (a^3 I_{2n+2}).$$

Les A_{2n+2} sont donnés de proche en proche à partir du premier par la relation de récurrence (123) qui peut s'écrire ici ($p_u = 0$)

$$-2I_{2n+4} = A_{2n+2} + 2k_0^2 I_{2n+2}.$$

On a pour les premiers termes

$$\begin{aligned} A_2 &= 3a^2, \\ -2A_4 &= 3a^2(5a^2 + 2k_0^2), \\ 4A_6 &= 3a^2(35a^4 + 20a^2k_0^2 + 4k_0^4), \\ -8A_8 &= 3a^2(315a^6 + 210a^4k_0^2 + 60a^2k_0^4 + 8k_0^6). \end{aligned}$$

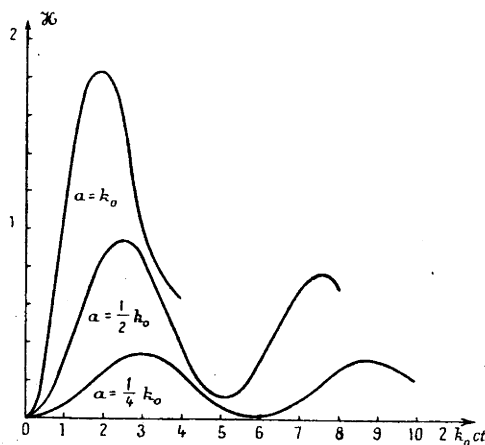


Fig. 5.

Les figures (4) et (5) indiquent l'allure de la fonction \mathcal{H} pour différentes valeurs de a .

$$\left(a = \sqrt{2}k_0, \quad a = k_0, \quad a = \frac{1}{2}k_0, \quad a = \frac{1}{4}k_0. \right)$$

Pour calculer les derniers points de ces courbes avec une précision suffisante, il a fallu prendre les 14 premiers termes du développement en série, ce qui conduit déjà à des calculs longs et pénibles.

On voit que lorsque a est plus petit que k_0 la courbe décroît progressivement par une série d'ondulations; la décroissance s'effectue sans ondulations après une rapide ascension initiale quand $a > k_0$. Il est probable que pour t égal à l'infini la fonction \mathcal{H} tend vers zéro et que la surface comprise entre la courbe représentative et l'axe des abscisses a une valeur finie. Le déplacement η_u pour le temps qui va de zéro à l'infini aurait alors une valeur finie ⁽¹⁾ au bout d'un temps suffisamment grand, seul subsisterait le tremblement de Schrödinger ξ_u .

Dans la période troublée qui suit la mesure faite au temps $t = 0$, l'intégrale du spin \mathcal{S}^w n'est pas une constante, mais on obtiendra une constante en lui ajoutant l'intégrale du moment cinétique « orbital »; la formule générale (66) s'écrit ici

$$(142) \quad \mathcal{S}^w - \int [x^u t^{i,v} - x^v t^{i,u}] dV = [\gamma^{uv}] = \frac{1}{2k_0} T^{uv,i}.$$

Le tenseur $T^{uv,i}$ apparaît ici, à un coefficient près, comme le moment cinétique total; on ne voit pas très bien à quoi correspond la décomposition en spin et en moment cinétique orbital; cela ne correspond pas en tout cas à la décomposition de X_u en η_u et ξ_u .

Les grandeurs Ω_1 et \mathcal{N}^{uv} ne sont pas des constantes, mais comme pour le spin, on peut leur adjoindre d'autres grandeurs qui donnent des constantes; on a en effet

$$\begin{aligned} \Omega_1 - \frac{1}{2k_0} T^{u,u} &= \frac{1}{2k_0} T^{i,i} = [\gamma_0], \\ \mathcal{N}^{uv} - \frac{1}{2k_0} T^{i,v} &= -\frac{1}{2k_0} T^{i,u} = [\gamma^{uv}]. \end{aligned}$$

La constante a , qui fixe l'étalement du globule de probabilité au temps $t = 0$, donc aussi la précision de la mesure de la position, peut être choisie arbitrairement. Elle peut être choisie aussi petite qu'on le veut et par conséquent, d'après (141), pendant un temps fini, mais aussi grand qu'on le veut (quelques milliards d'années par exemple),

(1) Cependant si les courbes tendaient vers une valeur finie, quand t tend vers l'infini, au lieu de tendre vers zéro, η_u correspondrait à un mouvement rectiligne et uniforme.

on peut faire en sorte que \mathcal{H} reste aussi petit qu'on le veut, donc négligeable.

Nous avons dit aussi que lorsque t croît indéfiniment, il est probable que \mathcal{H} tende vers zéro. D'ailleurs s'il n'en était pas ainsi, chaque électron conserverait indéfiniment la trace de toutes les mesures qui ont été effectuées sur lui. Ceci serait contraire au fait expérimental que tous les électrons sont identiques.

Nous allons étudier les grandeurs intégrées dans le cas particulier où $\mathcal{H} = 0$.

Étude des grandeurs intégrées quand $\mathcal{H} = 0$. — Toutes les grandeurs du type $T^{\lambda,\mu}$ sont nulles, sauf celles qui avaient une valeur constante, soit

$$T^{0,4} = 2k_0[\gamma^4], \quad T^{4,4} = 2k_0[\gamma_0], \quad T^{uv,4} = 2k_0[\gamma^{uv}], \quad T^{\bar{0},4} = 2k_0[\gamma^{uv}].$$

La fonction θ se calcule aisément car elle obéit alors à l'équation différentielle

$$\partial_{44}\theta - 4k_0^2\theta + 2 = 0,$$

on a

$$\theta = \frac{1}{2k_0^2} [1 - \cos 2k_0 ct].$$

Les équations (137) s'écrivent

$$(143) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_1 = [\gamma_0], & i\mathcal{N}_{u4} = [i\gamma_{u4}] \cos 2k_0 ct + [\gamma_u] \sin 2k_0 ct, \\ \mathcal{A}_4 = [\gamma_4], & \mathcal{A}_u = [\gamma_u] \cos 2k_0 ct - [i\gamma_{u4}] \sin 2k_0 ct, \\ \mathcal{N}_{uv} = [\gamma_{uv}], & i\mathcal{S}_4 = -[i\gamma_{123}] \cos 2k_0 ct - [\gamma_{1234}] \sin 2k_0 ct, \\ \mathcal{S}_{uv} = [\gamma_{uv}], & \Omega_2 = [\gamma_{1234}] \cos 2k_0 ct - [i\gamma_{123}] \sin 2k_0 ct. \end{array} \right.$$

Ce qu'il y a de remarquable, c'est que les grandeurs intégrées obéissent aux mêmes relations (34) et (35) que les grandeurs densitaires correspondantes; on peut donc les calculer toutes à partir de sept d'entre elles par exemple \mathcal{A}_4 , \mathcal{A}_u , $i\mathcal{N}_{u4}$. Comme ces sept grandeurs ont une interprétation particulièrement simple, on peut dire que l'on a interprété toutes les grandeurs intégrées.

Les coordonnées X_u du centre de gravité de la probabilité sont données par

$$X_u = \frac{i}{2k_0} \mathcal{N}_{u4}.$$

La vitesse $c\alpha_u$ du centre de gravité est donnée par

$$\alpha_u = \frac{V_u}{c} = \frac{1}{c} \frac{dX_u}{dt}.$$

α_i est la quatrième composante de la quadri-pseudo-vitesse, toujours égale à i .

La trajectoire du centre de gravité est une ellipse harmonique; en choisissant convenablement les quatre constantes complexes g_k , on pourra donner à cette ellipse une forme et une orientation quelconque. On ne diminue en rien la généralité du problème en prenant comme plan de l'ellipse le plan des x_1, x_2 . Il suffit pour cela de choisir les constantes g_k ci-après où a et b sont deux constantes telles que

$$b \leq a \leq \frac{1}{2} k_0;$$

on a aussi posé pour simplifier l'écriture

$$(144) \quad 2k_0 a = \sin \zeta.$$

Les g_k ont alors la forme

$$(145) \quad \begin{cases} g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{b}{a}} \sin \frac{\zeta}{2}, & g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{b}{a}} \sin \frac{\zeta}{2}, \\ g_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{b}{a}} \cos \frac{\zeta}{2}, & g_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{b}{a}} \cos \frac{\zeta}{2}. \end{cases}$$

Les grandeurs intégrées ont pour expression

$$(146) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = -i \cos \zeta, \\ \alpha_1 = i, \\ \Re_{23} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \cos \zeta, \\ \Re_{31} = 0, \\ \Re_{12} = \frac{b}{a}, \\ \Im_1 = -\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \\ \Im_2 = 0, \\ \Im_3 = -\frac{b}{a} \cos \zeta, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = a \sin 2k_0 ct, \\ X_2 = b \cos 2k_0 ct, \\ X_3 = 0, \\ \alpha_1 = 2k_0 a \cos 2k_0 ct, \\ \alpha_2 = -2k_0 b \sin 2k_0 ct, \\ \alpha_3 = 0, \\ \Im_4 = -2ik_0 \sqrt{a^2 - b^2} \cos 2k_0 ct, \\ \Omega_2 = 2k_0 \sqrt{a^2 - b^2} \sin 2k_0 ct, \end{array} \right.$$

La figure 6 représente la trajectoire elliptique du centre de gravité correspondant à ces formules, elle indique aussi la position des différents vecteurs.

Parmi les relations (34) et (35) qui sont aussi valables pour les grandeurs intégrées (146), en voici trois qui sont particulièrement intéressantes :

$$(147) \quad 2ik_0 \vec{\alpha} \vec{X} = -\Omega_2 \mathcal{S}_3,$$

$$(148) \quad 2ik_0 \vec{X} \wedge \vec{\alpha} = \Omega_1 \vec{\mathcal{S}} - \alpha_4 \vec{\mathcal{M}}_{uv},$$

$$(149) \quad 2ik_0 \Omega_2 \vec{X} - \mathcal{S}_3 \vec{\alpha} = \Omega_1 \vec{\mathcal{M}}_{uv} - \alpha_4 \vec{\mathcal{S}}.$$

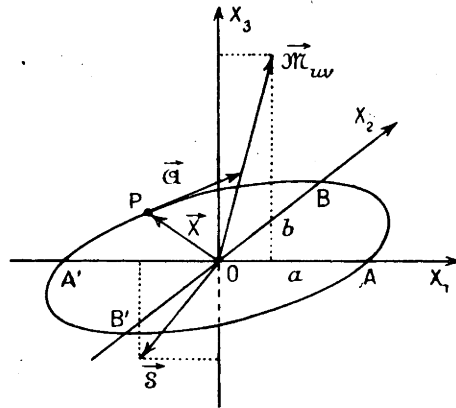


Fig. 6.

Cas du mouvement circulaire et uniforme. — Si l'on fait $a = b$ dans les formules (146), l'ellipse devient une circonférence; les grandeurs \mathcal{S}_4 et Ω_2 s'annulent; il reste

$$(150) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = -i\sqrt{1-\alpha^2}, \\ \alpha_4 = i, \\ \mathcal{M}_{23} = \mathcal{M}_{31} = 0, \\ \mathcal{M}_{12} = 1, \\ \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = 0, \\ \mathcal{S}_3 = -\sqrt{1-\alpha^2}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = a \sin 2k_0 ct, \\ X_2 = a \cos 2k_0 ct, \\ X_3 = 0, \\ \alpha_1 = 2k_0 a \cos 2k_0 ct, \\ \alpha_2 = -2k_0 a \sin 2k_0 ct, \\ \alpha_3 = 0, \end{array} \right. \\ \mathcal{S}_4 = \Omega_2 = 0.$$

En particulier si l'on choisit le rayon a de la circonférence tel que

$a = \frac{1}{2k_0} = \frac{h}{4\pi m_0 c}$, l'on a $\Omega_1 = 0$, c'est-à-dire que la vitesse du point P sur la circonférence est toujours égale à celle de la lumière. On retrouve ainsi une théorie proposée par M. de Weysenhoff (1) pour la représentation de l'électron dans le cadre de la Théorie relativiste classique. On notera que dans ce cas le spin est nul, c'est-à-dire que les probabilités sont égales pour les valeurs $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Dès le début de notre étude sur la Théorie de Dirac, nous avons signalé l'existence de solutions qui annulaient le spin [équations (7)]; l'équation (148) s'écrit alors

$$\vec{X} \wedge \vec{\alpha} = -\frac{1}{2k_0} \vec{\mathcal{M}}_{uv},$$

et le vecteur $\vec{\mathcal{M}}_{uv}$ a une signification cinématique parfaitement claire.

Cas du repos. — Si l'on fait $a = 0$ dans les formules (150), toutes les grandeurs sont nulles sauf

$$(151) \quad \Omega_1 = -i, \quad \alpha_4 = i, \quad \mathcal{M}_{12} = 1, \quad \mathcal{S}_3 = -1.$$

Le centre de gravité de la probabilité est au repos et les vecteurs $\vec{\mathcal{S}}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{uv}$ sont disposés le long de l'axe des x_3 comme l'indique la figure 7(a).

Les constantes g_k ont alors les valeurs

$$g_1 = g_2 = g_3 = 0, \quad g_4 = 1.$$

Il est facile de choisir ces constantes de manière que le vecteur $\vec{\mathcal{M}}$, par exemple, ait une direction quelconque définie par les angles φ et θ (fig. 7 b). Il suffit pour cela d'effectuer une rotation des axes d'angle θ autour d'une direction dont les cosinus directeurs sont

$$\mu_1 = \sin \varphi, \quad \mu_2 = -\cos \varphi, \quad \mu_3 = 0.$$

La matrice générale (20) nous donne les nouvelles fonctions d'ondes; comme la fonction de Gauss à symétrie sphérique n'est pas

(1) Réunions de l'Institut H. Poincaré, 1947, sous la Présidence de M. Louis de Broglie.

modifiée par la rotation des axes, la transformation ne porte que sur les quatre constantes g_k qui deviennent

$$(152) \quad g_1 = g_2 = 0, \quad g_3 = -e^{i\frac{\pi}{2}\varphi} \sin \frac{\theta}{2}, \quad g_4 = e^{-i\frac{\pi}{2}\varphi} \cos \frac{\theta}{2}.$$

On a alors

$$(153) \quad \partial \mathfrak{N}_{23} = |\partial \mathfrak{N}| \sin \theta \cos \varphi, \quad \partial \mathfrak{N}_{31} = |\partial \mathfrak{N}| \sin \theta \sin \varphi, \quad \partial \mathfrak{N}_{12} = |\partial \mathfrak{N}| \cos \theta.$$

On retrouve bien les formules données par M. Louis de Broglie dans ce cas particulier (*L'électron magnétique*, p. 184-185).

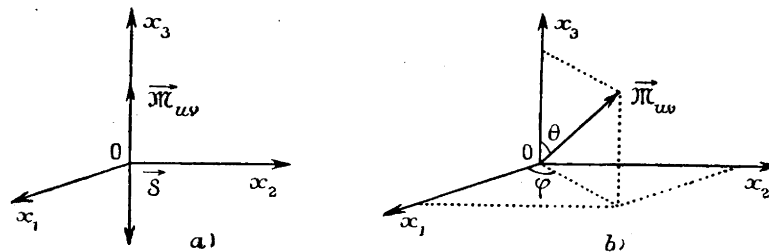


Fig. 7

On notera que les deux constantes g_1 et g_2 étant nulles, on se limite aux ondes à énergie positive; il importe de noter que même dans ce cas le centre de gravité de la probabilité n'est pas au repos; la suppression des énergies négatives fait disparaître le tremblement ξ_u de Schrödinger dans $X_u = \eta_u + \xi_u$, mais il reste η_u qui n'est pas constant. Nous avons dit cependant que η_u tendait vers une constante quand t croissait indéfiniment.

7° *Calcul des grandeurs intégrées quand p_u est différent de zéro.* — Quand on considère l'expression (121) au lieu d'une fonction de Gauss à symétrie sphérique, les grandeurs intégrées ont une expression beaucoup plus compliquée. On trouve

$$(154) \quad \left\{ \begin{aligned} \int |\psi_k^* \gamma^A \psi_k| dv &= - [g_k^* \gamma^p \gamma^A \gamma^q i \gamma^t g_k] \int \partial_p \Phi^* \partial_q \Phi dv, \\ &- k_0 [g_k^* (\gamma^A \gamma^u + \gamma^u \gamma^A) i \gamma^t g_k] \int \Phi^* \partial_u \Phi dv, \\ &- k_0 [g_k^* (\gamma^A \gamma^t - \gamma^t \gamma^A) i \gamma^t g_k] \int \Phi^* \partial_t \Phi dv, \\ &+ k_0^2 [g_k^* \gamma^A i \gamma^t g_k] \int \Phi^* \Phi dv. \end{aligned} \right.$$

On peut exprimer toutes les intégrales qui figurent dans cette dernière expression avec la fonction θ et ses dérivées par rapport au temps et par rapport aux paramètres p_u . Pour la vitesse α_u du centre de gravité de la probabilité on obtient

$$(155) \quad \alpha_u = 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=3} [\gamma_\nu] \left\{ \left(\frac{1}{2} a^2 \partial_{uv} + 2 p_u p_\nu \right) \theta + \frac{a^2}{2} \left(p_u \frac{\partial \theta}{\partial p_\nu} + p_\nu \frac{\partial \theta}{\partial p_u} \right) + \frac{a^4}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial p_u \partial p_\nu} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} - [\gamma_{uv}] \partial_v \left[i p_\nu \theta + i \frac{a^2}{2} \frac{\partial \theta}{\partial p_\nu} \right], \\ - [\gamma_{uv}] \partial_v \left[i p_w \theta + i \frac{a^2}{2} \frac{\partial \theta}{\partial p_w} \right], \\ - 2 k_0 [\gamma_0] \left[i p_u \theta + i \frac{a^2}{2} \frac{\partial \theta}{\partial p_u} \right] - \frac{1}{2} [\gamma_u] \partial_v \theta + k_0 [\gamma_{us}] \partial_s \theta. \end{array} \right.$$

Nous ne chercherons pas à faire ces calculs numériquement pour des cas particuliers parce qu'ils sont trop longs et aussi parce qu'il n'est pas sûr que l'expression (121) soit bien celle qui convienne.

Il est beaucoup plus simple et beaucoup plus correct d'appliquer la transformation de Lorentz aux grandeurs dans le système de *repos* que nous avons calculées dans le paragraphe précédent.

1^{er} cas. — Mouvement circulaire à la vitesse de la lumière dans le système de *repos*.

M. de Weysenhoff a donné les formules qui se réduisent à nos formules (150) quand $\beta_u = 0$; sous forme pseudo-tensorielle elles s'écrivent :

$$(156) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta}_p = 0, \\ \alpha_\gamma \mathcal{M}^{\nu\eta} = 0, \quad \text{on a aussi} \quad \alpha_\gamma \mathcal{M}^{\bar{p}\bar{q}} = 0, \\ \dot{\mathcal{M}}_{p\eta} = \beta_p \alpha_\eta - \beta_\eta \alpha_p, \\ \alpha_\eta^q = 0. \end{array} \right.$$

Les points désignent les dérivées par rapport à l'argument $2k_0 ct$.

On notera que l'on a toujours $\mathcal{S}^p = 0$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$. La grandeur de la vitesse $c\alpha_u$ est toujours égale à celle de la lumière; c'est en effet une chose bien connue en cinématique relativiste, que si à une vitesse qui est égale à celle de la lumière on ajoute une vitesse quelconque, la vitesse résultante est encore égale à celle de la lumière.

2^e cas. — La position du centre de gravité de la probabilité est fixe dans le système de repos.

Dans ce cas les *temps* du centre de gravité et de l'origine du système de repos se transforment de la même manière. On a

$$(157) \quad \frac{dX_4^0}{dX_4} = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

On peut admettre que tous les pseudo-tenseurs se transforment comme des tenseurs, mais il faut ensuite multiplier le résultat obtenu par le facteur constant $\sqrt{1 - \beta^2}$. Les équations (151) donnent

$$\Omega_4^{(0)} = -i, \quad \alpha_4^{(0)} = i, \quad \mathfrak{N}_1^{(0)} = 1, \quad \mathfrak{S}_3^{(0)} = 1,$$

les autres grandeurs étant toutes nulles. On en déduit

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_4^{(0)} \sqrt{1 - \beta^2} = -i \sqrt{1 - \beta^2}, \\ \alpha_p &= b_{pq} \alpha_q^{(0)} \sqrt{1 - \beta^2} = \beta_p, \end{aligned}$$

(en particulier on voit que l'on a $\alpha_4 = \beta_4 = i$; ce sont des invariants).

Les grandeurs obtenues satisfont toujours les relations du type (34) et (35) avec $\Omega_2 = 0$; en voici quelques-unes :

$$(158) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_q \mathfrak{N}^{pq} = 0, & \alpha_q \mathfrak{N}^{\bar{p}q} = \Omega_1 \mathfrak{S}^p, \\ \alpha_q^q = -\mathfrak{S}_q^q = \Omega_1^2, & \Omega_1 \mathfrak{N}^{pq} = [\overline{\mathfrak{S}^p \alpha^q} - \mathfrak{S}^q \alpha^p], \\ & \alpha_1 \mathfrak{S}^q = 0. \end{array} \right.$$

M. Louis de Broglie a aussi étudié ce cas particulier dans son ouvrage *L'électron magnétique*, p. 191 et 224; nous retrouvons bien ici les mêmes formules.

Nous exprimons notre profonde gratitude à M. Louis de Broglie, qui a suivi de très près l'ensemble de nos travaux sur la théorie de Dirac.

