JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MIRCEA DRAGANU

La résolution de l'équation intégro-différentielle de la diffusion des neutrons à l'aide des équations intégrales

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 29 (1950), p. 141-168.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1950_9_29__141_0>

La résolution de l'équation intégro-différentielle de la diffusion des neutrons à l'aide des équations intégrales (*);

Par Mircea DRĂGANU
à Cluj (Roumanie).

O. Halpern, R. Lueneburg et O. Clark ont déduit une équation intégro-différentielle qui doit décrire le phénomène de la diffusion des neutrons à travers les plaques matérielles, la fonction inconnue continue et dérivable étant la probabilité de présence des neutrons dans un point quelconque de la plaque. On montre dans le présent Mémoire comment la résolution de cette équation intégro-différentielle peut être réduite dans le cas plan stationnaire, des chocs élastiques à symétrie sphérique ou non et tenant compte des conditions aux limites, à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm, la

(*) Mémoire présenté au Cercle de Mathématiques de la Société des Sciences de Cluj, dans la séance du 11 décembre 1947 et à la Société des Sciences de Bucarest, section des Mathématiques, dans la séance du 17 février 1947. Pour son élaboration nous avons eu à notre disposition, à cause des circonstances troubles de la guerre, seulement la bibliographie indiquée. Le Chapitre V est ajouté ultérieurement après que nous est parvenu *Phys. Rev.*, t. 59-70, 1941-1946. A la suite des mêmes causes, le texte de l'article de E. A. Schuchard et E. A. Uehling paru dans *Phys. Rev.* t. 58, 1940, p. 611-623, nous est méconnu. Nous avons pris connaissance de l'équation intégrale pour la densité des particules, obtenue par ces auteurs, de leur Mémoire publié dans *Phys. Rev.*, t. 59, 1941, p. 136. Mais cette équation, quoique analogue à la nôtre, n'est pas si générale.

fonction inconnue étant cette fois la densité de présence des neutrons dans le point considéré. L'équation intégrale du problème est analogue à l'équation de K. Schwartzschild qui régit la diffusion des radiations dans les atmosphères des étoiles. Elle possède une solution représentable par une fonction méromorphe. On peut obtenir une solution approximative, plus simple au point de vue formel, à l'aide d'une méthode de L. V. King.

1. Déduction des équations fondamentales. — Il est possible de représenter d'une manière satisfaisante le processus de la diffusion des neutrons à travers les plaques matérielles par une équation intégro-différentielle, établie par O. Halpern, H. Lueneburg et O. Clark [1], en supposant les collisions élastiques et une valeur finie pour la probabilité de capture. Si l'on se borne à un faisceau de neutrons incident sur un milieu diffusif de largeur a finie, limité par deux plans parallèles infinis, l'équation de O. Halpern, R. Lueneburg et O. Clark se simplifie sensiblement et prend, pour le cas stationnaire, la forme suivante

$$(1)\quad u\frac{\partial w(x,\,u)}{\partial x}+\left(\frac{\Gamma(u)+\Omega(u)}{v_0}\right)w(x,\,u)=\frac{1}{v_0}\int_{-1}^{+1}w(x,\,u')\Phi(u,\,u'-u)\,du'.$$

Dans cette formule la fonction continue et dérivable w signifie la probabilité de présence du neutron dans le point de la substance matérielle défini par les valeurs x, u des variables indépendantes : Γ et Ω sont respectivement les probabilités totales de diffusion par collision ou de capture et $\Phi(u,\,u'-u)$ est la probabilité par unité de temps de la collision d'un neutron, à la suite de laquelle sa vitesse change de direction; v_0 signifie la vitesse constante des particules diffusées.

Une solution de cette équation a été donnée d'abord par O. Halpern, R. Lueneburg et O. Clark [2], utilisant la transformation de Laplace, les conditions aux limites étant $w(0,\,u)=f(u)$, $u>0$; $w(a,\,u)=0$,

(1) O. Halpern, R. Lueneburg et O. Clark, *Phys. Rev.*, t. 53, 1938, p. 173-183.

(2) O. Halpern, R. Lueneburg et O. Clark, *loc. cit.*; E. A. Schuchard et E. A. Uehling, *Phys. Rev.*, t. 58, 1940, p. 611-623; E. A. Uehling, *Phys. Rev.*, t. 59, 1941, p. 136-143.

$u < 0$, mais l'équation a été résolue seulement pour le cas particulier à symétrie sphérique, c'est-à-dire quand on a l'équation beaucoup plus simple

$$(2) \qquad u\frac{\partial w(x,\,u)}{\partial x}+\left(\frac{\Gamma+\Omega}{v_0}\right)w(x,\,u)=\frac{\Gamma}{2v_0}\int_{-1}^{+1}w(x,\,u')\,du',$$

Γ et Ω étant cette fois des constantes.

D'autre part, W. Bothe (³) résout l'équation (2) en développant la solution en série des fonctions sphériques. Il obtient encore une solution assez satisfaisante, de son point de vue, par une méthode simple et directe, en négligeant les conditions aux limites, à l'aide d'une équation intégrale pour la densité totale des neutrons

$$(3) \qquad \rho(x)=\int_{-1}^{+1}w(x,\,u')\,du',$$

analogue à celle de Milne pour l'intensité des radiations dans les atmosphères stellaires, et déduit une expression de cette densité.

C'est ensuite G. C. Wick (⁴) qui donne, dans un Mémoire très clair, un autre procédé d'intégration, én réduisant l'équation intégro-différentielle (2) à un système d'équations algébriques linéaires, qu'il résout par une méthode d'interpolation de Gauss, combinée avec une méthode d'approximation par polynômes (⁵).

Nous considérons d'abord l'équation

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w(x,\,u)}{\partial x}+\dfrac{1}{u}w(x,\,u)=\dfrac{\sigma}{2u}\displaystyle\int_{-1}^{+1}w(x,\,u')\,du'+\dfrac{1}{u}q(x), \\ \qquad\qquad 0<\sigma=\dfrac{\Gamma}{\Gamma+\Omega}\leqq 1, \end{cases}$$

obtenue de (2) par un changement de la variable indépendante x et de la variable w, et nous nous proposons de l'intégrer au moyen d'une équation intégrale, tenant compte des conditions aux limites. La

(³) W. Bothe, *Z. f. Phys.*, t. **118**, 1941, p. 401-408; *ibid.*, t. **119**, 1942, p. 493-497.

(⁴) G. O. Wick, *Z. f. Phys.*, t. **121**, 1943, p. 102-118.

(⁵) *Voir* aussi J. Lense, *Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik*, 1933, p. 107.

fonction $q(x)$ représente la distribution isotrope des sources de neutrons à l'intérieur de la substance diffusive. σ est ici une constante.

Remarquons d'abord qu'on a

$$(5)\qquad \int_{-1}^{1} w(x, u')\,du' = \int_{-1}^{0} w(x, u')\,du' + \int_{0}^{1} w(x, u')\,du'$$

et encore

$$(6)\qquad \int_{-1}^{0} w(x, u')\,du' = \int_{0}^{1} w(x, -u')\,du'.$$

Introduisons les nouvelles notations $w_1(x, u)$, $w_2(x, u)$ définies par les relations

$$(7)\qquad w_1(x, u) = w(x, u), \qquad w_2(x, u) = w(x, -u),$$

avec ces notations l'expression (5) de la densité peut s'écrire de la manière suivante

$$(8)\qquad \int_{-1}^{+1} w(x, u')\,du' = \int_{0}^{1} [w_1(x, u') + w_2(x, u')]\,du'.$$

D'après (3) et (8) ces deux fonctions $w_1(x, u)$ et $w_2(x, u)$ satisfont aux équations

$$(9)\qquad \frac{\partial w_1(x, u)}{\partial x} + \frac{1}{u} w_1(x, u) = \frac{\sigma}{2u}\int_{0}^{1} du'[w_1(x, u') + w_2(x, u')] + \frac{1}{u} q(x)$$
$$(0 < u < 1),$$

$$(10)\qquad \frac{\partial w_2(x, u)}{\partial x} - \frac{1}{u} w_2(x, u) = -\frac{\sigma}{2u}\int_{0}^{1} du'[w_1(x, u') + w_2(x, u')] - \frac{1}{u} q(x)$$
$$(0 < u < 1).$$

C'est un système d'équations intégro-différentielles analogue au système d'équations intégro-différentielles de K. Schwartzschild ([6]), qu'on rencontre dans la théorie des atmosphères stellaires.

Considérons maintenant les deux formes différentielles

$$(11)\qquad \frac{\partial w_1(x, u)}{\partial x} + \frac{1}{u} w_1(x, u) = 0$$

([6]) K. SCHWARTZSCHILD, *Berl. Ber.*, 1914, p. 1183.

et

$$\frac{\partial w_2(x, u)}{\partial x} - \frac{1}{u} w_2(x, u) = 0, \tag{12}$$

ainsi que leurs adjointes respectives

$$\frac{\partial z_1(x, u)}{\partial x} - \frac{1}{u} z_1(x, u) = 0 \tag{13}$$

et

$$\frac{\partial z_2(x, u)}{\partial x} + \frac{1}{u} z_2(x, u) = 0. \tag{14}$$

Soit $z_1(x, u)$ une solution de l'équation (13). Multiplions (9) par cette solution, puis multiplions (13) par la solution $w_1(x, u)$ de (9). En ajoutant les expressions ainsi obtenues et en intégrant ensuite de a à c on obtient

$$\begin{aligned} (15)\quad & z_1(c, u) w_1(c, u) - z_1(a, u) w_1(a, u) \\ & = \frac{\sigma}{2u} \int_a^c dx \int_0^1 du' z_1(x, u)[w_1(x, u') + w_2(x, u')] + \frac{1}{u} \int_a^c q(x) z_1(x, u)\, dx. \end{aligned}$$

De même en multipliant (10) par une solution de (14), puis (14) par la solution $w_2(x, u)$ de (10), ajoutant et intégrant ensuite l'expression obtenue de c à b, on a

$$\begin{aligned} (16)\quad & z_2(b, u) w_2(b, u) - z_2(c, u) w_2(c, u) \\ & = -\frac{\sigma}{2u} \int_c^b dx \int_0^1 du' z_2(x, u)[w_1(x, u') + w_2(x, u')] - \frac{1}{u} \int_c^b . \end{aligned}$$

a et b sont des constantes, c une valeur intermédiaire quelconque de la coordonnée de position $a \leqq c \leqq b$.

Nous introduisons les conditions aux limites suivantes :

$$w_1(a, u) = g(u) \qquad (0 < u < 1,\ x = a), \tag{17}$$

$$w_2(b, u) = h(u) \qquad (0 < u < 1,\ x = b). \tag{18}$$

En effet, d'après les définitions (7), $w_1(x, u)$ signifie la probabilité de présence d'un neutron dans le processus de diffusion en sens direct, tandis que $w_2(x, u)$ signifie par contre la probabilité de présence de la particule dans le processus de diffusion en sens inverse. Les conditions (17), (18) sont plus générales que les conditions aux limites de O. Halpern, R. Lueneburg et O. Clark et contiennent les trois premiers cas considérés par G. C. Wick dans le Mémoire cité. La condition (17), c'est la condition pour que la distribution des neutrons en mouvement direct sur le plan $x=a$ soit la distribution incidente connue $g(u)$. D'autre part si $h(u)=0$, la seconde condition aux limites (18) exprime qu'après le délaissement du plan $x=b$ aucune particule n'est réfractée en arrière.

Avec ces conditions aux limites les équations (15) et (16) s'écrivent de la manière suivante :

$$(19)\qquad w_1(x, u)=e^{\frac{a-x}{u}}g(u)+\frac{1}{u}\int_a^x e^{\frac{\xi-x}{u}}q(\xi)\,d\xi + \frac{\sigma}{2u}\int_a^x d\xi\int_0^1 du'\,e^{\frac{\xi-x}{u}}[w_1(\xi, u')+w_2(\xi, u')],$$

$$(20)\qquad w_2(x, u)=e^{\frac{x-b}{u}}h(u)+\frac{1}{u}\int_x^b e^{\frac{x-\xi}{u}}q(\xi)\,d\xi + \frac{\sigma}{2u}\int_x^b d\xi\int_0^1 du'\,e^{\frac{x-\xi}{u}}[w_1(\xi, u')+w_2(\xi, u')].$$

La solution de l'équation différentielle (13) est

$$(21)\qquad z_1(x, u)=C_1\,e^{\frac{x}{u}},$$

celle de l'équation (14) est, au contraire.

$$(22)\qquad z_2(x, u)=C_2\,e^{-\frac{x}{u}}.$$

Si l'on impose les conditions $z_1(c, u)=1$, $z_2(c, u)=1$, on a

$$(23)\qquad C_1\,e^{\frac{c}{u}}=1,\qquad C_1=e^{-\frac{c}{u}},\qquad z_1(x, u)=e^{\frac{x-c}{u}},\qquad z_1(a, u)=e^{\frac{a-c}{u}};$$

$$(24)\qquad C_2\,e^{-\frac{c}{u}}=1,\qquad C_2=e^{\frac{c}{u}},\qquad z_2(x, u)=e^{\frac{c-x}{u}},\qquad z_2(b, u)=e^{\frac{c-b}{u}}.$$

En introduisant encore le paramètre d'intégration ξ et en écrivant partout x au lieu de c, on obtient enfin, le système suivant de deux équations intégrales

$$(25)\qquad \begin{aligned}\varpi_1(x, u) = {} & e^{\frac{a-x}{u}} g(u) + \frac{1}{u}\int_a^x e^{\frac{\xi-x}{u}} q(\xi)\, d\xi \\ & + \frac{\sigma}{2u}\int_a^x d\xi \int_0^1 du'\, e^{\frac{\xi-x}{u}} [\varpi_1(\xi, u') + \varpi_2(\xi, u')],\end{aligned}$$

$$(26)\qquad \begin{aligned}\varpi_2(x, u) = {} & e^{\frac{a-b}{u}} h(u) + \frac{1}{u}\int_x^b e^{\frac{x-\xi}{u}} q(\xi)\, d\xi \\ & + \frac{\sigma}{2u}\int_x^b d\xi \int_0^1 du'\, e^{\frac{x-\xi}{u}} [\varpi_1(\xi, u') + \varpi_2(\xi, u')].\end{aligned}$$

On montre aisément que les solutions (25) et (26) satisfont effectivement aux équations intégro-différentielles (9) et (10). A cet effet on dérive (25) par rapport à x, puis (26) toujours par rapport à x, on multiplie encore l'équation d'origine (25) par $\frac{1}{u}$ et l'équation (26) par $-\frac{1}{u}$ et l'on ajoute ensuite l'expression ainsi obtenue de (25) avec celle obtenue par dérivation de (25), on ajoute de même la relation obtenue de (26) par multiplication avec $-\frac{1}{u}$ à celle obtenue par dérivation de (26) par rapport à x. Toutes les simplifications effectuées, on obtient justement le système d'équations intégro-différentielles (9), (10).

Il est convenable maintenant d'introduire les nouvelles fonctions

$$(27)\qquad \rho_1(x) = \int_0^1 \varpi_1(x, u')\, du', \qquad \rho_2(x) = \int_0^1 \varpi_2(x, u')\, du',$$

$$(28)\quad \rho(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x) = \int_0^1 [\varpi_1(x, u') + \varpi_2(x, u')]\, du' = \int_{-1}^{+1} \varpi(x, u')\, du'.$$

Les équations (25), (26) s'écrivent alors

$$(29)\quad \varpi_1(x, u) = e^{\frac{a-x}{u}} g(u) + \frac{1}{u}\int_a^x e^{\frac{\xi-x}{u}} q(\xi)\, d\xi + \frac{\sigma}{2u}\int_a^x d\xi\, e^{\frac{\xi-x}{u}} \rho(\xi),$$

$$(30)\quad \varpi_2(x, u) = e^{\frac{x-b}{u}} h(u) + \frac{1}{u}\int_x^b e^{\frac{x-\xi}{u}} q(\xi)\, d\xi + \frac{\sigma}{2u}\int_x^b d\xi\, e^{\frac{x-\xi}{u}} \rho(\xi).$$

Faisons encore la somme des deux équations ci-dessus, puis remplaçons $\frac{1}{u}$ par η, introduisons g et h comme nouvelles fonctions et permutons l'ordre d'intégration, nous avons enfin l'équation intégrale

$$\left(\frac{du}{u^2} = -d\eta, \qquad du = -u^2\,d\eta, \qquad du = -\frac{d\eta}{\eta^2}\right),$$

$$(31)\quad \rho(x) = \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^2}\left[e^{-|a-x|\eta}g(\eta) + e^{-|x-b|\eta}h(\eta)\right] + \int_a^b d\xi\, q(\xi)\int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta}e^{-|\xi-x|\eta} + \frac{\sigma}{2}\int_a^b d\xi\,\rho(\xi)\int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta}e^{-|\xi-x|\eta},$$

car nous avons les relations

$$(32)\quad \begin{cases} (a,\, x), \quad a < x \begin{cases} (\xi - x) = -|\xi - x|, \\ (a - x) = -|a - x|, \end{cases} \\ (x,\, b), \quad x < b \begin{cases} (\xi - x) = -|\xi - x|, \\ (x - b) = -|x - b|. \end{cases} \end{cases}$$

En introduisant maintenant une notation habituelle pour le logarithme intégral, c'est-à-dire

$$(33)\quad K_n(|\xi - x|) = \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^{n+1}}e^{-|\xi-x|\eta}, \qquad K_0(|\xi - x|) = K(|\xi - x|),$$

et aussi la fonction

$$(34)\quad K_n[|\xi - x|, f(\eta)] = \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^{n+1}}e^{-|\xi-x|\eta}f(\eta),$$

l'équation (31) s'écrit d'une manière plus succincte

$$(35)\quad \rho(x) = K_1[|a - x|, g(\eta)] + K_1[|x - b|, h(\eta)] + \int_a^b d\xi\, q(\xi) K(|\xi - x|) + \frac{\sigma}{2}\int_a^b d\xi\,\rho(\xi) K(|\xi - x|)$$

ou encore

$$(36)\quad \rho(x) = F(x) + \frac{\sigma}{2}\int_a^b d\xi\,\rho(\xi) K(|\xi - x|)$$

si $F(x)$ signifie la fonction

$$(37)\quad F(x) = K_1[|a - x|, g(\eta)] + K_1[|x - b|, h(\eta)] + \int_a^b d\xi\, q(\xi) K(|\xi - x|).$$

On résout l'équation différentielle (35) et l'on introduit la valeur de $\rho(x)$ ainsi obtenue dans les équations (29), (30). On obtient alors *l'albedo mesurable* (d'après la nomenclature de G. C. Wick), c'est-à-dire le rapport des densités des corpuscules réfléchis à la densité des corpuscules incidents, qui a un sens expérimental déterminé

$$\beta_m = \frac{\int_{-1}^{0} w(0, u)\, du}{\int_{0}^{1} w(0, u)\, du}, \tag{38}$$

ou si l'on tient compte de (7),

$$\beta_m = \frac{\int_{0}^{1} w_2(0, u)\, du}{\int_{0}^{1} w_1(0, u)\, du}. \tag{39}$$

Avec les mêmes notations *l'albedo*, qui donne le rapport du nombre des neutrons réfléchis au nombre des neutrons incidents, est

$$\beta = -\frac{\int_{0}^{1} u w_2(0, u)\, du}{\int_{0}^{1} u w_1(0, u)\, du}, \tag{40}$$

mais cette grandeur n'a qu'un intérêt expérimental direct.

2. Discussion de l'équation intégrale. — Nous nous proposons maintenant d'étudier l'équation intégrale (37). Elle est tout à fait analogue à l'équation de K. Schwartzschild qu'on rencontre dans la théorie de la diffusion du rayonnement dans les atmosphères des étoiles et qui, si J signifie la *productivité* (Ergiebigkeit) du rayonnement et H la hauteur de l'atmosphère, s'écrit de la manière suivante

$$J(x) - \frac{\sigma}{2}\int_{0}^{H} d\xi\, J(\xi) K[(n + \sigma)\,|\xi - x|] = x E + \frac{\sigma}{2} B K_1[(x + \sigma)(H - x)], \tag{41}$$

x et σ sont respectivement les coefficients d'absorption et de diffusion,

$4\pi x E$ est la fonction qui décrit la loi d'émission du rayonnement par unité de volume.

Notre équation (37) et l'équation de K. Schwartzschild ont des caractères communs, notamment en ce qui concerne le noyau. En effet le noyau de l'équation (37), ainsi que celui de l'équation de K. Schwartzschild, diverge vers l'infini sur la droite $x = \xi$ comme un logarithme. Mais ces équations intégrales diffèrent par les conditions aux limites. L'équation (37) satisfait, par exemple, aux conditions aux limites suivantes :

$$j_1(0, u) = 0, \qquad x = 0, \qquad u > 0, \tag{42}$$

$$j_2(H, u) = B, \qquad x = b, \qquad u > 0, \tag{43}$$

j_1 étant l'intensité du rayonnement de l'extérieur vers l'intérieur de l'étoile, j_2 l'intensité du rayonnement de l'intérieur vers l'extérieur de l'atmosphère stellaire. La grandeur J est reliée aux intensités j_1, j_2 par la relation

$$J = \int_0^1 (j_1 + j_2)\, du. \tag{44}$$

C'est K. Schwartzschild lui-même qui a résolu l'équation (41) par un procédé numérique; on démontre en effet que la valeur $\frac{1}{2}$ du paramètre de l'équation intégrale n'est pas une valeur caractéristique, donc que l'équation (41) possède une solution.

On peut démontrer d'une manière analogue qu'en général le paramètre $\frac{\sigma}{2}$ n'est pas une valeur caractéristique de l'équation intégrale homogène,

$$\rho(x) - \frac{\sigma}{2}\int_a^b K(|\xi - x|)\rho(\xi)\, d\xi = 0, \tag{45}$$

où σ d'après (5) est une valeur positive plus petite que l'unité, donc que cette équation n'a pas d'autre solution que $\rho(x) \equiv 0$.

Supposons en effet quelque part $\rho(x) > 0$ et soit $\overline{x}$ le point où $\rho(x)$ prend sa valeur maxima $\rho(\overline{x})$. On a l'inégalité

$$\rho(\overline{x}) - \frac{\sigma}{2}\int_a^b d\xi\, K(|\xi - \overline{x}|)\rho(\xi)\, d\xi > \rho(x)\left[1 - \frac{\sigma}{2}\int_a^b K(|\xi - \overline{x}|)\, d\xi\right]. \tag{46}$$

Mais dans la théorie du logarithme intégral on établit la relation ([7])

$$(47) \qquad \int_a^b K(|\xi - \bar{x}|)\, d\xi = 2 - K_1(\bar{x} - a) - K_1(b - \bar{x}).$$

Or les fonctions $K_2(\bar{x} - a)$, $K_2(b - \bar{x})$ sont des quantités positives, car on a, en général, les relations

$$(48) \qquad K_1(z) = e^{-z} - zK(z), \qquad K(z) < \frac{e^{-z}}{z}, \qquad z > 0.$$

Donc

$$(49) \qquad 1 - \frac{\sigma}{2}\int_a^b K(|\xi - \bar{x}|)\, d\xi = 1 - \sigma + \frac{\sigma}{2} K_1(\bar{x} - a) + \frac{\sigma}{2} K_1(b - \bar{x}) > 0$$

et tenant compte de l'inégalité (46), nous déduisons enfin

$$(50) \qquad \rho(\bar{x}) - \frac{\sigma}{2}\int_a^b d\xi\, K(|\xi - \bar{x}|)\rho(\xi)\, d\xi > 0.$$

Cette dernière inégalité contredit la supposition d'après laquelle $\rho(x)$ représente une solution de l'équation (47); $\rho(x)$ comme solution de (45) ne peut donc être positive en aucun point. On voit de la même manière qu'elle ne peut être non plus négative. La prémice est ainsi démontrée, la seule solution de (45) est $\rho(x) \equiv 0$, donc $\frac{\sigma}{2}$ n'est pas une valeur caractéristique.

Cela étant dit, on remarque tout de suite qu'il n'est pas possible d'appliquer les théorèmes de Fredholm directement à l'équation (45), son noyau étant singulier et, en outre, sa trace devient infinie. Or, comme le noyau

$$(51) \qquad K(|\xi - x|) = \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta} e^{-|\xi - x|\eta},$$

diverge logarithmiquement vers l'infini sur la droite $\xi = x$, il faudrait s'attendre que le noyau itéré du second ordre soit borné, car le logarithme tend vers l'infini plus lentement encore que n'importe quelle

---

([7]) *Voir*, par exemple, A. Unsöld, *Physik der Sternatmosphären*, Berlin, Springer, 1938.

puissance positive; encore de la divergence de la trace du noyau $K(|x-\xi|)$ découle la divergence de toutes les autres traces d'ordre supérieur obtenues par la formule de récurence

$$d_{m+1} = -\frac{1}{m+1}\int_a^b d_m(\xi, \xi)\, d\xi. \tag{52}$$

Formons maintenant la nouvelle équation

$$\rho(x) = F_2(x) + \frac{\sigma^2}{4}\int_a^b K^{(2)}(x, y)\rho(y)\, dy, \tag{53}$$

où $K^{(2)}(x, y)$ est le premier noyau itéré du noyau $K(|x-\xi|)$, c'est-à-dire

$$K^{(2)}(x, y) = \int_a^b K(|x-\xi|)\, K(|\xi-y|)\, d\xi, \tag{54}$$

et $F_2(x)$ signifie la fonction connue

$$F_2(x) = F(x) + \frac{\sigma}{2}\int_a^b K(|x-\xi|)\, F(\xi)\, d\xi. \tag{55}$$

En considérant de plus près le noyau (54), on peut montrer tout de suite par un calcul facile, mais un peu long, qu'il a une valeur finie, et sa trace aussi. On a en effet,

$$\int_a^b K(|x-\xi|)\, K(|\xi-x|)\, d\xi = \int_a^b [K(|x-\xi|)]^2\, d\xi = I_1 + I_2 \tag{56}$$

si I_1 et I_2 signifient les intégrales

$$I_1 = \int_a^x [K(x-\xi)]^2\, d\xi, \tag{57}$$

$$I_2 - \int_x^b [K(\xi-x)]^2\, d\xi. \tag{57'}$$

On fait en (57) la substitution $x - \xi = v$, et l'on obtient en intégrant par parties, et en tenant compte de la formule

$$\frac{d}{dv}K(v) = -\frac{e^{-v}}{v}, \tag{58}$$

l'expression

$$(59)\qquad \mathrm{I}_1=\int_0^{x-a}[\mathrm{K}(v)]^2\,dv=(x-a)[\mathrm{K}(x-a)]^2+2\,\mathrm{D}_1,$$

où D_1 est l'intégrale

$$(60)\qquad \mathrm{D}_1=\int_0^{x-a}\mathrm{K}(v)e^{-v}\,dv,$$

qu'on intègre de nouveau par parties. En tenant compte des formules

$$(61)\qquad \int_0^{x-a}=\int_0^{x-a}+\int_{x-a}^{\infty}-\int_{x-a}^{\infty}=\int_0^{\infty}-\int_{x-a}^{\infty},$$

$$(62)\qquad \int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx=\mathrm{Log}\frac{\beta}{\alpha}\quad (^8),$$

on obtient, en revenant à la variable originaire,

$$(63)\qquad \mathrm{D}_1=-e^{-(x-a)}\mathrm{K}(x-a)+\mathrm{Log}\,2-\int_{x-a}^{\infty}\frac{e^{-2v}}{v}\,dv.$$

La dernière intégrale s'évalue facilement par le changement de variable $s=2v$, et l'on obtient enfin

$$(64)\qquad \mathrm{D}_1=-e^{-(x-a)}\mathrm{K}(x-a)+\log 2+\mathrm{K}[2(x-a)],$$

donc

$$(65)\qquad \mathrm{I}_1=(x-a)[\mathrm{K}(x-a)]^2-2e^{-(x-a)}\mathrm{K}(x-a)+2\log 2+2\,\mathrm{K}[2(x-a)].$$

On fait ensuite en (57′) la substitution $\xi-x=u$ et l'on intègre par parties. On a ainsi à la fin de ces calculs

$$(66)\qquad \mathrm{I}_2=\int_0^{b-x}[\mathrm{K}(u)]^2\,du=(b-u)[\mathrm{K}(b-x)]^2+2\,\mathrm{D}_2,$$

où D_2 signifie l'expression analogue à D_1

$$(67)\qquad \mathrm{D}_2=\int_0^{b-x}\mathrm{K}(u)e^{-u}\,du.$$

---

(8) Pour cette formule, *voir* par exemple, E. Schvenberg, *Hb. d. Astrophysik*, II, 1, 1929, p. 213 et aussi O. Schlömitch, *Vorlesungen über einzelne Theile der Höheren Analysis*, II, Braunschweig, 1895, p. 250.

On calcule cette intégrale, comme plus haut, par parties, en employant les formules déjà écrites (61), (62) et l'on arrive enfin au résultat suivant

$$(68) \qquad D_2 = -e^{-(b-x)}K(b-x) + \log 2 + K[2(b-x)].$$

Donc

$$(69) \qquad I_2 = (b-x)[K(b-x)]^2 - 2e^{-(b-x)}K(b-x) + \log 2 + 2K[2(b-x)].$$

La trace du noyau $K^{(2)}(x, y)$ est donnée alors par

$$(70) \qquad \mathfrak{T}r\, K^{(2)}(x, y) = \int_a^b K^{(2)}(x, x)\,dx = \int_a^b (I_1 + I_2)\,dx.$$

Nous avons donc à effectuer d'abord, après le changement de variable $x - a = u$, l'intégrale

$$(71) \qquad \int_a^b I_1\,dx = \int_0^{b-a} du\,\{u[K(u)]^2 - 2e^{-u}K(u) + 2\log 2 + 2K(2u)\}\,du = i_1 + i_2 + i_3,$$

si l'on a posé

$$(72) \qquad i_1 = \int_0^{b-a} u[K(u)]^2\,du,$$

$$(73) \qquad i_2 = -2\int_0^{b-a}[e^{-u}K(u) - \log 2]\,du,$$

$$(74) \qquad i_3 = 2\int_0^{b-a} K(2u)\,du.$$

Les trois intégrales peuvent être évaluées facilement par parties et l'on obtient ainsi, à la fin des calculs

$$(75) \qquad i_1 = \frac{(b-a)^2}{2}[K(b-a)]^2 - e^{-(b-a)}(b-a+1)K(b-a) + K[2(b-a)] + \frac{1}{2}e^{-2(b-a)} - \frac{1}{2} + \log 2,$$

$$(76) \qquad i_2 = 2e^{-(b-a)}K(b-a) - 2\log 2 - 2K[2(b-a)] + 2(b-a)\log 2,$$

$$(77) \qquad i_3 = 2(b-a)K[2(b-a)] - \frac{1}{2}e^{-2(b-a)} + \frac{1}{2}.$$

Nous avons encore à effectuer l'intégrale

$$\int_a^b I_2\,dx, \tag{78}$$

qui, après la substitution $b - x = v$, conduit à une expression identique à (71) au terme additif $4 \operatorname{Log} 2$ près, le paramètre d'intégration étant cette fois v; c'est-à-dire

$$\int_a^b I_2\,dx = i_1 + i_2 + i_3. \tag{79}$$

On obtient ainsi pour la trace $d_1^{(2)}$ la valeur

$$\begin{aligned} d_1^{(2)} = \mathfrak{Tr}\, K^{(2)}(x, y) = (b-a)^2 [K(b-a)]^2 - 2\,e^{-(b-a)}(b-a-1)\,K(b-a) \\ + 4\left(b-a-\frac{1}{2}\right) K[2(b-a)] - e^{-2(b-a)} \\ + 1 + 4\left(b-a-\frac{1}{2}\right) \log 2 = K(\text{const.}). \end{aligned} \tag{80}$$

A l'aide de cette valeur de la trace et de la formule de récurrence (52), on peut calculer les traces successives du noyau (54). On obtient ainsi la série des valeurs

$$\left\{\begin{aligned} & d_1^{(2)} = k, \qquad d_2^{(2)} = -\frac{k}{2!}(b-a), \qquad d_3^{(2)} = \frac{k}{3!}(b-a)^2, \\ & d_4^{(2)} = -\frac{k}{4!}(b-a)^3, \qquad \ldots, \qquad d_{m+1}^{(2)} = (-1)^m \frac{k}{(m+1)!}(b-a)^m, \quad \ldots . \end{aligned}\right. \tag{81}$$

Nous pouvons écrire alors la fonction $D_2\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)$ de Fredholm ([9]), relative à l'équation intégrale (53) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} D_2\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) &= 1 + \frac{\sigma^2}{4} d_1^{(2)} + \frac{\sigma^4}{4^2} d_2^{(2)} + \frac{\sigma^6}{4^3} d_3^{(2)} + \ldots + \frac{\sigma^{2m}}{4^m} d_m^{(2)} + \ldots \\ &= 1 + \sum_m^{0,\infty} (-1)^m \frac{\sigma^{2(m+1)} k (b-a)^m}{4^{m+1}(m+1)!}. \end{aligned} \tag{82}$$

([9]) FRANK-MISES, *Differentialgleichungen der Physik*, I, Braunschweig, 1930, p. 516.

On calcule ensuite à l'aide des valeurs (81) et d'une formule de récurrence ([10]) les expressions

$$(83)\qquad d_m^{(2)}(x, y) = K^{(2)}(x, y)\, d_m^{(2)} + \int_a^b K^{(2)}(x, \zeta)\, d_{m-1}^{(2)}(\zeta, y)\, d\zeta.$$

C'est ainsi qu'on construit la fonction $D_2\left(x, y; \frac{\sigma}{4}\right)$ de Fredholm

$$(84)\qquad D_2\left(x, y; \frac{\sigma^2}{4}\right) = K^{(2)}(x, y) + \frac{\sigma^2}{4} d_1^{(2)}(x, y) + \frac{\sigma^4}{4^2} d_2^{(2)}(x, y) + \ldots + \frac{\sigma^{2m}}{4^m} d_m^{(2)}(x, y) + \ldots.$$

Le noyau (54) étant intégrable, la solution de Fredholm s'écrira comme il suit ([11])

$$(85)\qquad \rho(x) = F(x) + \frac{\sigma}{2}\int_a^b \Gamma\left(x, y; \frac{\sigma}{2}\right) F(\xi)\, d\xi$$

où la résolvante Γ est représentée par la fonction méromorphe

$$(86)\ \Gamma\left(x, y, \frac{\sigma}{2}\right) = K(|x-y|) + \frac{\sigma}{2}\,\frac{D_2\left(x, y; \frac{\sigma^2}{4}\right)}{D_2\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)} + \frac{\sigma}{4}\int_a^b K(|x-\xi|\,\frac{D_2\left(x, \xi; \frac{\sigma^2}{4}\right)}{D_2\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}\, d\xi.$$

3. Résolution de l'équation intégrale (35) par la méthode de King. — L'utilisation pour des buts pratiques de la méthode de Fredholm rencontre des difficultés, en raison des calculs très longs qu'elle comporte. Il semble donc convenable de tenter une méthode d'approximation. Dans ce qui suit, nous voulons esquisser une méthode de telle nature que la méthode de L. V. King ([12]).

Si, par exemple, $\varphi(x)$ signifie l'intégrale

$$(87)\qquad \varphi(x) = \frac{\sigma}{2}\int_a^b K(|x-\xi|)\, d\xi$$

([10]) Frank-Mises, *Differentialgleichungen der Physik*, I, Braunschweig, 1930, p. 516.

([11]) E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, III, p. 382.

([12]) *Voir* E. Schoenberg, *Hb. d. Astrophysik,* II, 1, 1929, p. 213.

et ε la valeur

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{1-\beta}, \tag{88}$$

où α est la valeur moyenne de $f(x)$, c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{F}(x)\,dx \tag{89}$$

et β la valeur moyenne de $\varphi(x)$

$$\beta = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{90}$$

la solution approximative de L. V. King s'écrit sous la forme

$$\rho(x) = \mathrm{F}(x) + \varepsilon\varphi(x). \tag{91}$$

Cette solution sera considérée comme une approximation suffisante si elle diffère peu de la moyenne arithmétique

$$\frac{1}{2}[\rho_1(x) + \rho_2(x)]. \tag{92}$$

Dans cette expression $u_1(x)$ signifie la solution

$$\rho_1(x) = \mathrm{F}(x) + \varepsilon_1\varphi(x), \tag{93}$$

où ε_1 est donné par

$$\varepsilon_1 = \frac{m}{1-l}, \tag{94}$$

m étant la limite inférieure de la fonction $\mathrm{F}(x)$, qu'on suppose comprise entre les limites m et M, $m < \mathrm{F}(x) < \mathrm{M}$, pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle (a, b). La fonction $\varphi(x)$ est, d'autre part, comprise entre les limites $l < \varphi(x) < \mathrm{L}$, $|\mathrm{L}| < 1$. En (92) on a considéré encore comme solution la fonction

$$\rho_2(x) = \mathrm{F}(x) + \varepsilon_2\varphi(x), \tag{95}$$

où

$$\varepsilon_2 = \frac{\mathrm{M}}{1-\mathrm{L}}. \tag{96}$$

A l'aide des formules (47), (48) la fonction $\varphi(x)$ peut être exprimée par des fonctions connues, comme il suit

$$(97)\qquad \varphi(x)=\frac{\sigma}{2}[2-e^{-(x-a)}+(x-a)\,\mathrm{K}(x-a)-e^{-(b-x)}+(b-x)\,\mathrm{K}(b-x)].$$

Sa valeur moyenne (90) s'obtiendra en intégrant par parties cette expression à l'aide des changements de variables convenables; on obtient ainsi l'expression

$$(98)\qquad \beta=\frac{\sigma}{b-a}\left\{b-a-\frac{1}{2}+\mathrm{K}_2(b-a)\right\}.$$

On a utilisé les formules [13]

$$(99')\qquad n\,\mathrm{K}_n(x)=e^{-x}-x\,\mathrm{K}_{n-1}(x),$$

$$(99'')\qquad \mathrm{K}_1(x)=e^{-x}-x\,\mathrm{K}(x),$$

$$(99''')\qquad 2\,\mathrm{K}_2(x)=e^{-x}-x\,\mathrm{K}_1(x)=e^{-x}(1-x)+x^2\mathrm{K}(x).$$

Par les procédés habituels on trouve que la fonction $\varphi(x)$ prend son maximum pour la valeur $\frac{(b+a)}{2}$ de la variable indépendante, donc

$$(99)\qquad \varphi_{\max}\left(\frac{b+a}{2}\right)=\sigma\left[1-e^{-\frac{b-a}{2}}+\left(\frac{b-a}{2}\right)\mathrm{K}\left(\frac{b-a}{2}\right)\right],$$

car après la substitution $b-x=u$, on a la relation suivante, qu'on utilise dans le calcul de la valeur $\varphi_{\max}$:

$$(101)\qquad \frac{d\mathrm{K}(u)}{du}=-\frac{d\mathrm{K}(b-x)}{dx}.$$

En outre elle prend ses valeurs minima pour $x=a$, et $x=b$ et l'on trouve $\varphi_{\min}(a)=\varphi_{\min}(b)$.

Nous voulons considérer seulement trois cas particuliers (conditions aux limites de O. Halpern, R. Lueneburg et O. Clark),

---

[13] A. Unsöld, *Physik der Sternatmosphären*, Springer, 1938, Anhang B.

notamment :

a. $$g(\eta) = 1, \qquad h(\eta) = 0, \qquad q(x) = 0$$
(Distribution incidente uniforme);

b. $$g(\eta) = \delta\left(1 - \frac{1}{\eta}\right), \qquad h(\eta) = 0, \qquad q(x) = 0$$
(Distribution incidente normale);

c. $$g(\eta) = \frac{2}{\eta} = 2u, \qquad h(\eta) = 0, \qquad q(x) = 0$$
(Distribution incidente cosinusoïdale),

où $\delta(z)$ signifie la fonction impropre de Dirac.

a. Premier cas, $g(\eta) = 1$, $h(\eta) = 0$, $q(x) = 0$. — D'après (37) la fonction $F(x)$ a dans ce cas la valeur

$$(102) \qquad F_a = \int_1^\infty e^{-|a-x|\eta} \frac{d\eta}{\eta^2} = K_1(|a-x|) = e^{-|a-x|} - |a-x| K(|a-x|).$$

L'intégration par rapport à x entre les limites (a, b) s'effectue de la même manière que celle de $\varphi(x)$ et l'on obtient à la fin des calculs pour la valeur moyenne de $F(x)$ l'expression

$$(103) \qquad \alpha_a = \frac{1}{2(b-a)} [3 - 3e^{-(b-a)} - (b-a) K_1(b-a)],$$

et la solution (91) devient, dans ce cas, à l'aide de la formule (88) la suivante

$$(104) \qquad \bar{\rho}_a(\alpha) = K_1(\alpha - a) \frac{3 - 3e^{-(b-a)} - (b-a) K_1(b-a)}{2(b-a) - \sigma[2(b-a) - 1 + 2K_2(b-a)]} [2 - K_1(x-a) - K_1(b-x)].$$

b. Deuxième cas, $g(\eta) = \delta\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$, $h(\eta) = 0$, $g(x) = 0$. — Dans ce cas la fonction $F(x)$ est, conformément à la formule (37), donnée par

$$(105) \qquad F_b = \int_1^\infty \delta\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) e^{-|a-x|\eta} \frac{d\eta}{\eta^2} = e^{-|a-x|},$$

car on a ([14]) pour n'importe quel domaine autour du point critique

---

([14]) P. A. M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, 2e édit. p. 73.

où la fonction δ ne doit pas s'annuler

$$(106)\qquad f(a)=\int f(x)\,\delta(x-a)\,dx.$$

La valeur moyenne α est donnée par la formule

$$(107)\qquad \alpha_b=\frac{1}{b-a}\left[1-e^{-(b-a)}\right]$$

et la solution approximative de *King* sera

$$(108)\quad \overline{\rho_b}(x)=e^{-(x-a)}+\frac{1-e^{-(b-a)}}{(b-a)-\sigma\left[b-a-\frac{1}{2}+K_2(b-a)\right]}\left[2-K_1(x-a)-K_1(b-x)\right]$$

c. Troisième cas, $g(\eta)=\frac{2}{\eta}$, $h(\eta)=0$, $g(x)=0$. — La fonction $F(x)$ a cette fois l'expression

$$(109)\quad F_c=2\int_1^\infty e^{-|a-x|\eta}\frac{d\eta}{\eta^3}=2K_2(|a-x|)=2e^{-(x-a)}[1-(x-a)]+(x-a)^2K(x-a).$$

Donc en intégrant comme plus haut, on a, tous calculs effectués,

$$(110)\qquad \alpha_c=\frac{4}{b-a}\left[\frac{1}{3}-K_3(b-a)\right].$$

Pour le calcul de (110) on a tenu compte de la formule (99′) qui donne, appliquée trois fois successivement,

$$(99^{\text{IV}})\qquad 3K_3(x)=e^{-x}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^3}{2}K(x).$$

On a alors

$$(111)\quad \overline{\rho_c}(x)=2e^{-(x-a)}[1-(x-a)]+(x-a)^2K(x-a)+\frac{4\left[\frac{1}{3}-K_3(b-a)\right]}{(b-a)-\sigma\left[b-a-\frac{1}{2}+K_2(b-a)\right]}\left[2-K_1(x-a)-K_1(b-x)\right].$$

A l'aide des formules (103), (107), (110) on calcule les valeurs correspondantes de *l'albedo mesurable* par l'intermédiaire des relations (29), (30). Il est encore nécessaire de calculer la largeur du milieu diffusif pour laquelle l'approximation de *King* est suffisante.

4. Cas plan sans symétrie sphérique. — Considérons maintenant l'équation (1) du premier Chapitre et essayons de la résoudre par le même procédé. Posons

$$\psi(u) = \frac{\Gamma(u) + \Omega(u)}{v_0 u}, \tag{112}$$

puis introduisons x comme nouvelle variable et w comme nouvelle fonction, qui diffèrent toutes les deux des grandeurs semblablement notées dans les Chapitres précédents. Nous avons alors à étudier l'équation

$$\frac{\partial w(x, u)}{\partial x} + \psi(u) w(x, u) = \frac{1}{v_0 u} \int_{-1}^{+1} w(x, u') \Phi(u, u' - u)\, du'. \tag{113}$$

L'intégrale du second membre peut être décomposée très simplement en une somme des deux intégrales

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} w(x, u') \Phi(u, u' - u)\, du' \\ &\quad = \int_{-1}^{0} w(x, u') \Phi(u, u' - u)\, du' + \int_{0}^{1} w(x, u') \Phi(u, u' - u)\, du' \end{aligned} \tag{114}$$

ou, si l'on change u' en $-u'$,

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} w(x, u') \Phi(u, u' - u)\, du' \\ &\quad = \int_{0}^{1} w(x, -u') \Phi(u, -u' - u)\, du' + \int_{0}^{1} w(x, u') \Phi(u, u' - u)\, du'. \end{aligned} \tag{114'}$$

Introduisons maintenant les nouvelles fonctions

$$\left\{ \begin{array}{ll} w(x, u) = w_1(x, u), & \Phi(u, u' - u) = \Phi_{11}(u, u' - u), \\ w(x_1 - u) = w_2(x, u), & \Phi(u, -u' - u) = \Phi_{12}(u, u' - u). \\ & \psi(u) = \psi_1(u). \end{array} \right. \tag{115}$$

On a alors

$$(116)\quad \frac{\partial w_1(x,\,u)}{\partial x} + \psi_1(u)\,w_1(x,\,u)$$
$$= \frac{1}{v_0 u}\int_0^1 [w_1(x,\,u')\,\Phi_{11}(u',\,u'-u) + w_2(x,\,u')\,\Phi_{12}(u,\,u'-u)]\,du'.$$

Remplaçons encore en (113) u par $-u$, ce qui nous conduit à l'équation

$$(117)\quad \frac{\partial w(x,\,u)}{\partial x} + \psi(-u)\,w(x,\,u) = -\frac{1}{v_0 u}\int_{-1}^{+1} w(x,\,u')\,\Phi(-u,\,u'+u)\,du',$$

puis changeons u' en $-u'$; on peut alors écrire

$$(118)\quad \int_{-1}^{+1} w(x,\,u')\,\Phi(-u,\,u'+u)\,du'$$
$$= \int_0^1 w(x,\,-u')\,\Phi(-u,\,-u'+u)\,du' + \int_0^1 w(x,\,u')\,\Phi(-u,\,u'+u)\,du'.$$

Avec les nouvelles notations

$$(119)\qquad \begin{cases} \Phi(-u,\,u'+u) = \Phi_{21}(u,\,u'-u), \\ \Phi(-u,\,u'+u) = \Phi_{22}(u,\,u'-u), \\ \psi(-u) = \psi_1(u), \end{cases}$$

l'équation (117) devient

$$(120)\quad \frac{\partial w_2(x,\,u)}{\partial x} + \psi_2(u)\,w_2(x,\,u)$$
$$= -\frac{1}{v_0 u}\int_0^1 [w_1(x,\,u')\,\Phi_{21}(u,\,u'-u) + w_2(x,\,u')\,\Phi_{22}(u,\,u'-u)]\,du'.$$

Les formes différentielles adjointes des équations (116), (120) s'écrivent de la manière suivante :

$$(121)\qquad \frac{\partial z_1(x,\,u)}{\partial x} - \psi_1(u)\,z_1(x,\,u) = 0,$$

$$(122)\qquad \frac{\partial z_2(x,\,u)}{\partial x} - \psi_2(u)\,z_2(x,\,u) = 0.$$

Tous les calculs sont analogues à ceux du premier Chapitre de ce

Mémoire, à la différence qu'il faut remplacer dans l'équation (25) la parenthèse

$$[\varpi_1(x, u') + \varpi_2(x, u')]$$

par

$$[\varpi_1(x, u')\Phi_{11}(u, u' - u) + \varpi_2(x, u')\Phi_{12}(u, u' - u)]$$

et par

$$[\varpi_1(x, u')\Phi_{21}(u, u' - u) + \varpi_2(x, u')\Phi_{22}(u, u' - u)]$$

dans l'équation (26). A la fin on obtient le système des deux équations

$$\begin{aligned}(123)\quad \varpi_1(x, u) = e^{(a-x)\psi_1(u)} g(u) &+ \frac{1}{\nu_0 u}\int_a^x d\xi \int_0^1 du'\, e^{-(\xi - x)\psi_1(u)} \\ &\times [\varpi_1(x, u')\Phi_{11}(u, u' - u) + \varpi_2(x, u')\Phi_{12}(u, u' - u)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(124)\quad \varpi_2(x, u) = e^{(b-x)\psi_2(u)} h(u) &+ \frac{1}{\nu_0 u}\int_x^b d\xi \int_0^1 du'\, e^{-(\xi - x)\psi_2(u)} \\ &\times [\varpi_1(x, u')\Phi_{21}(u, u' - u) + \varpi_2(x, u')\Phi_{22}(u, u' - u)]).\end{aligned}$$

Si l'on multiplie encore l'équation (123) par $\Phi_{11}(u, \nu - u)$ et l'équation (124) par $\Phi_{12}(u, \nu - u)$ et qu'on ajoute ensuite, après avoir intégré de o à 1, on arrive à la nouvelle équation intégrale

$$\begin{aligned}(125)\qquad \rho_1(x, \nu) = &\int_0^1 e^{(a-x)\psi_1(u)} g(u)\Phi_{11}(u, \nu - u)\, du \\ &+ \int_0^1 e^{(b-x)\psi_2(u)} h(u)\Phi_{12}(u, \nu - u)\, du \\ &+ \frac{1}{\nu_0}\int_0^1 du \int_a^x d\xi \frac{e^{-(\xi - x)\psi_1(u)}}{u}\Phi_{11}(u, \nu - u)\rho_1(\xi, u) \\ &+ \frac{1}{\nu_0}\int_0^1 du \int_x^b d\xi \frac{e^{-(\xi - x)\psi_2(u)}}{u}\Phi_{12}(u, \nu - u)\rho_2(\xi, u),\end{aligned}$$

où $\rho_1(x, \nu)$ est une nouvelle fonction définie par la relation

$$(126)\quad \rho_1(x, \nu) = \int_0^1 [\varpi_1(x, u)\Phi_{11}(u, \nu - u) + \varpi_2(x, u)\Phi_{12}(u, \nu - u)\, du]$$

et $\rho_2(x, \nu)$ signifie la fonction

$$(127)\quad \rho_2(x, \nu) = \int_0^1 [\varpi_1(x, u)\Phi_{21}(u, \nu - u) + \varpi_2(x, u)\Phi_{22}(u, \nu - u)\, du].$$

Si l'on multiplie maintenant (123) par $\Phi_{21}(u, v-u)$ et (124) par $\Phi_{22}(u, v-u)$, ajoutant ensuite les deux expressions ainsi obtenues et intégrant de o à 1 par rapport à u, on arrive à l'équation suivante

$$(128)\qquad \begin{aligned}\rho_2(x, v) = &\int_0^1 e^{(a-x)\psi_1(u)} g(u)\Phi_{21}(u, v-u)\,du \\ &+\int_0^1 e^{(b-x)\psi_2(u)} h(u)\Phi_{22}(u, v-u)\,du \\ &+\frac{1}{v_0}\int_0^1 du\int_a^x d\xi\,\frac{e^{-(\xi-x)\psi_1(u)}}{u}\Phi_{21}(u, v-u)\rho_1(\xi, u) \\ &+\frac{1}{v_0}\int_0^1 du\int_x^b d\xi\,\frac{e^{-(\xi-x)\psi_2(u)}}{u}\Phi_{22}(u, v-u)\rho_2(\xi, u).\end{aligned}$$

On obtient donc un système des deux équations intégrales de Fredholm du type suivant

$$(129)\qquad \begin{aligned}\rho_1(x, v) = \mathrm{H}_1(x, v) &+\int_a^b d\xi\int_0^1 du\,\mathrm{K}_{11}(x, v;\xi, u)\rho_1(\xi, u) \\ &+\int_a^b d\xi\int_0^1 du\,\mathrm{K}_{12}(x, v;\xi, u)\rho_2(\xi, u),\end{aligned}$$

$$(130)\qquad \begin{aligned}\rho_2(x, v) = \mathrm{H}_2(x, v) &+\int_a^b d\xi\int_0^1 du\,\mathrm{K}_{21}(x, v;\xi, u)\rho_1(\xi, u) \\ &+\int_a^b d\xi\int_0^1 du\,\mathrm{K}_{22}(x, v;\xi, u)\rho_2(\xi, u),\end{aligned}$$

les noyaux respectifs étant définis dans le tableau

$$(131)\qquad \mathrm{K}_{11}(x, v;\xi, u) = \begin{cases}\dfrac{1}{u}\Phi_{11}(u, v-u)\,e^{-(\xi-x)\psi_1(u)} & (\xi < x), \\ 0 & (\xi > x);\end{cases}$$

$$(132)\qquad \mathrm{K}_{12}(x, v;\xi, u) = \begin{cases}\dfrac{1}{u}\Phi_{12}(u, v-u)\,e^{-(\xi-x)\psi_2(u)} & (\xi > x), \\ 0 & (\xi < x);\end{cases}$$

$$(133)\qquad \mathrm{K}_{21}(x, v;\xi, u) = \begin{cases}\dfrac{1}{u}\Phi_{21}(u, v-u)\,e^{-(\xi-x)\psi_1(u)} & (\xi < x), \\ 0 & (\xi > x);\end{cases}$$

$$(134)\qquad \mathrm{K}_{22}(x, v;\xi, u) = \begin{cases}\dfrac{1}{u}\Phi_{22}(u, v-u)\,e^{-(\xi-x)\psi_2(u)} & (\xi > x), \\ 0 & (\xi < x).\end{cases}$$

On réduit ensuite par la méthode connue ([15]) ce système d'équations à une seule équation de Fredholm.

5. Cas de la diffusion anisotrope. — Si le phénomène de diffusion n'est pas complètement isotrope, ce qui est, par exemple, le cas de la diffusion des neutrons lents à travers la paraffine, l'équation intégro-différentielle de la diffusion s'écrit, d'après M. Ageno ([16]), dans les mêmes conditions d'approximation que l'équation (4) et avec les mêmes notations, de la manière suivante

$$\frac{\partial \varpi(x, u)}{\partial x} + \frac{1}{u}\varpi(x, u) = \frac{\sigma}{2u}\int_{-1}^{+1}(1 + auu')\varpi(x, u')\,du' \tag{135}$$
$$(-1 < u < +1),$$

où a est une constante déterminée numériquement, $a \approx 0,4$. Pour simplifier l'écriture on a supposé $q(x) = 0$, ce qui particularise l'équation, mais non la méthode. Le second membre peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}&(1 + auu')\varpi(x, u')\,du' \\ &= \int_0^1 [(1 + auu')\varpi_1(x, u') + (1 - auu')\varpi_2(x, u')\,du',\end{aligned} \tag{136}$$

en utilisant les notations des chapitres précédents. L'équation (135) peut être alors remplacée par le système des deux équations intégro-différentielles

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \varpi_1(x, u)}{\partial x} + \frac{1}{u}\varpi_1(x, u) \\ &\quad = \frac{\sigma}{2u}\int_0^1 [(1 + auu')\varpi_1(x, u') + (1 + auu')\varpi_2(x, u')]\,du',\end{aligned} \tag{137}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \varpi_2(x, u)}{\partial x} - \frac{1}{u}\varpi_2(x, u) \\ &\quad = -\frac{\sigma}{2u}\int_0^1 [(1 - auu')\varpi_1(x, u') + (1 + auu')\varpi_2(x, u')]\,du',\end{aligned} \tag{138}$$

([15]) G. Kowalewski, *Integralgleichungen*, Leipzig, p. 91.
([16]) M. Ageno, *Phys. Rev.*, t. **69**, p. 241-243.

dont les formes différentielles adjointes sont

$$\frac{\partial z_1(x, u)}{\partial x} - \frac{1}{u} z_1(x, u) = 0, \tag{139}$$

$$\frac{\partial z_2(x, u)}{\partial x} + \frac{1}{u} z_2(x, u) = 0. \tag{140}$$

Avec les conditions aux limites (17), (18), les procédés employés nous conduisent cette fois aux équations

$$w_1(x, u) = e^{\frac{a-x}{u}} g(u) + \frac{\sigma}{2u} \int_a^x d\xi\, e^{\frac{x-\xi}{u}} \rho_1(\xi, u), \tag{141}$$

$$w_2(x, u) = e^{\frac{x-b}{u}} h(u) + \frac{\sigma}{2u} \int_x^b d\xi\, e^{\frac{x-\xi}{u}} \rho_2(\xi, u), \tag{142}$$

où les deux nouvelles fonctions $\rho_1(x, u)$, $\rho_2(x, u)$ sont définies par les relations

$$\rho_1(x, u) = \int_0^1 [(1 + auu')w_1(x, u') + (1 - auu')w_2(x, u')]\, du', \tag{143}$$

$$\rho_2(x, u) = \int_0^1 [(1 - auu')w_1(x, u') + (1 + auu')w_2(x, u')]\, du'. \tag{144}$$

Multiplions encore l'équation (141) par $(1 + avu)$, la seconde par $(1 - avu)$, ajoutons ensuite les deux expressions ainsi obtenues et intégrons de 0 à 1, par rapport à u; on obtient le système suivant des deux équations intégrales :

$$\begin{aligned} \rho_1(x, v) = & \int_0^1 \left[(1 + avu)e^{\frac{a-x}{u}} g(u) + (1 - avu)e^{\frac{x-b}{u}} h(u)\right] du \\ & + \int_a^x d\xi \int_0^1 du \left[\frac{(1 + avu)}{u} e^{\frac{\xi-x}{u}} \rho_1(x, u)\right] \\ & + \int_a^b d\xi \int_0^1 du \left[\frac{(1 - avu)}{u} e^{\frac{x-\xi}{u}} \rho_2(x, u)\right], \end{aligned} \tag{145}$$

$$\begin{aligned} \rho_2(x, v) = & \int_0^1 \left[(1 - avu)e^{\frac{a-x}{u}} g(u) + (1 + avu)e^{\frac{x-b}{u}} h(u)\right] du \\ & + \int_a^x d\xi \int_0^1 du \left[\frac{(1 - avu)}{u} e^{\frac{\xi-x}{u}} \rho_1(x, u)\right] \\ & + \int_a^b d\xi \int_0^1 du \left[\frac{(1 + avu)}{u} e^{\frac{x-\xi}{u}} \rho_2(x, u)\right]. \end{aligned} \tag{146}$$

Substituons ensuite à la variable u la nouvelle variable $\frac{-1}{\eta}$. Le système des deux équations intégrales devient

$$
\begin{aligned}
(147) \quad \rho_1(x, \eta) = & \int_1^\infty \frac{d\eta'}{\eta'}\left[\left(1+\frac{a}{\eta\eta'}\right)e^{(a-x)\eta'}g(\eta') + \left(1-\frac{a}{\eta\eta'}\right)e^{(x-b)\eta'}h(\eta')\right] \\
& + \int_a^x d\xi \int_1^\infty \frac{d\eta'}{\eta'}\left(1+\frac{a}{\eta\eta'}\right)e^{(\xi-x)\eta'}\rho_1(x, \eta') \\
& + \int_x^b d\xi \int_1^\infty \frac{d\eta'}{\eta'}\left(1-\frac{a}{\eta\eta'}\right)e^{(x-\xi)\eta'}\rho_2(x, \eta'),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(148) \quad \rho_2(x, \eta) = & \int_1^\infty \frac{d\eta'}{\eta'}\left[\left(1-\frac{a}{\eta\eta'}\right)e^{(a-x)\eta'}g(\eta') + \left(1-\frac{a}{\eta\eta'}\right)e^{(x-b)\eta'}h(\eta')\right] \\
& + \int_a^x d\xi \int_1^\infty \frac{d\eta'}{\eta'}\left(1-\frac{a}{\eta\eta'}\right)e^{(\xi-x)\eta'}\rho_1(x, \eta') \\
& + \int_x^b d\xi \int_1^\infty \frac{d\eta'}{\eta'}\left(1+\frac{a}{\eta\eta'}\right)e^{(x-\xi)\eta'}\rho_2(x, \eta').
\end{aligned}
$$

où $\rho_1(x, \eta)$, $\rho_2(x, \eta)$, $g(\eta)$, $h(\eta)$ signifient bien entendu de nouvelles fonctions des variables x et η.

On introduit les nouveaux noyaux définis par le tableau

$$
(149) \qquad K_{11}(x, \eta; \xi, \eta') = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta'}\left(1+\dfrac{a}{\eta\eta'}\right)e^{(x-\xi)\eta'} & (\xi < x), \\ 0 & (\xi > x); \end{cases}
$$

$$
(150) \qquad K_{12}(x, \eta; \xi, \eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta'}\left(1-\dfrac{a}{\eta\eta'}\right)e^{(\xi-x)\eta'} & (\xi > x), \\ 0 & (\xi < x); \end{cases}
$$

$$
(151) \qquad K_{21}(x, \eta; \xi, \eta') = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta'}\left(1+\dfrac{a}{\eta\eta'}\right)e^{(x-\xi)\eta'} & (\xi < x), \\ 0 & (\xi > x); \end{cases}
$$

$$
(152) \qquad K_{22}(x, \eta; \xi, \eta') = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta'}\left(1-\dfrac{a}{\eta\eta'}\right)e^{(\xi-x)\eta'} & (\xi > 0), \\ 0 & (\xi < x). \end{cases}
$$

et avec les nouvelles fonctions connues $H_1(x, v)$, $H_2(x, v)$, ce qui donne le système d'équations de Fredholm

$$(153)\qquad \begin{aligned} \rho_2(x, \eta) = H_1(x, \eta) &+ \int_a^b d\xi \int_0^1 d\eta' K_{11}(x, \eta; \xi, \eta') \rho_1(\xi, \eta') \\ &+ \int_a^b d\xi \int_a^1 d\eta' K_{12}(x, \eta; \xi, \eta') \rho_2(\xi, \eta'), \end{aligned}$$

$$(154)\qquad \begin{aligned} \rho_2(x, \eta) = H_2(x, \eta) &+ \int_a^b d\xi \int_0^1 d\eta' K_{21}(x, \eta; \xi, \eta') \rho_1(\xi, \eta'), \\ &+ \int_a^b d\xi \int_0^1 d\eta' K_{22}(x, \eta; \xi, \eta') \rho_2(\xi, \eta'), \end{aligned}$$

qu'on réduit ensuite par le procédé déjà mentionné à une seule équation de Fredholm.