JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JACQUELINE LELONG-FERRAND

Sur certaines classes de représentations d'un domaine plan variable

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 103-126.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__103_0>

Sur certaines classes de représentations d'un domaine plan variable ;

PAR JACQUELINE **LELONG-FERRAND**.

---

1. INTRODUCTION. — La notion de famille normale, due à M. Paul Montel [1] a notablement simplifié la démonstration du théorème fondamental concernant la représentation conforme d'un domaine plan sur le cercle [2]; le même principe constructif trouve son application dans l'étude de certaines classes plus générales de représentations.

Rappelons tout d'abord un résultat classique :

Soit Δ_n une suite non décroissante (telle que $\Delta_{n+1} \supset \Delta_n$) de domaines plans simplement connexes épuisant un domaine Δ. Si ζ_0 désigne un point commun à tous ces domaines, et si la fonction $f_n(z)$ représente conformément sur Δ_n l'intérieur D du cercle unité, avec $f_n(0) = \zeta_0$, $f'_n(0) > 0$, on sait que la suite f_n converge uniformément vers la fonction f qui représente conformément D sur Δ et satisfait à $f(0) = \zeta_0$, $f'(0) > 0$.

On obtiendrait facilement un résultat analogue pour une suite non croissante de domaines Δ_n convergeant vers un domaine Δ.

Il revient à M. Carathéodory [3] d'avoir étendu cette propriété à une suite quelconque de domaines simplement connexes bornés Δ_n

---

(1) P. MONTEL, *Sur les familles normales analytiques* (*Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. **33**, 1916, p. 223-302).

(2) *Voir* par exemple : GOURSAT, *Traité d'Analyse*, Note à la fin du tome III.

(3) C. CARATHÉODORY, *Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten* (*Math. Ann.*, t. **72**, 1912 p. 107-144).

contenant tous un même domaine circulaire de centre ζ_0. M. Carathéodory montre d'abord [propriété (a)] que si la suite f_n, déterminée comme précédemment, converge, sa limite $f(z)$ représente conformément sur D un domaine Δ bien déterminé, qu'il appelle le *noyau* de la suite Δ_n; et ce noyau Δ peut être défini directement comme le plus grand domaine connexe contenant ζ_0 et tel que tout compact contenu dans Δ soit contenu dans Δ_n pour n assez grand.

Du résultat (a) on déduit immédiatement la condition nécessaire et suffisante (b) de convergence de la suite f_n : c'est que toutes les suites partielles extraites de la suite Δ_n admettent le même noyau.

La démonstration du théorème de M. Carathéodory, comme celle de la propriété classique qu'il généralise, s'appuie sur le caractère analytique des fonctions f_n. Nous allons montrer que la propriété (a) s'étend à une classe très générale de transformations topologiques, l'hypothèse d'analyticité n'intervenant que dans l'établissement de la condition (b) pour assurer l'unicité de la limite f grâce aux conditions (c) : $[f(0)=0, f'(0)>0]$; et nous verrons aussi que les conditions (c) peuvent être remplacées par d'autres, convenablement choisies et associées. Nous étudierons d'autre part le cas, qui semble avoir été négligé par M. Carathéodory, des transformations limites dégénérées. Enfin nous montrerons rapidement les applications de ces résultats à l'étude asymptotique de certaines représentations conformes; certaines de ces applications feront l'objet d'un autre article.

Notre exposé sera divisé en deux parties. La première sera consacrée à la mise au point de notions utiles à l'étude de la représentation conforme envisagée ici d'un point de vue général, englobant en particulier les transformations quasi conformes et les transformations à intégrale de Dirichlet bornée. Dans la deuxième, nous étudierons aussi complètement que possible la convergence d'une suite de telles transformations et les propriétés de ses limites.

I. — Notions préliminaires à l'étude de la représentation conforme et de ses généralisations. Définition des classes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}'_k$.

2. Définitions relatives aux suites de domaines. — Nous rappellerons tout d'abord les notions introduites par M. Carathéodory en les étendant à des domaines généraux (domaines non bornés, d'ordre de connexion quelconque, pris dans un plan P). Nous utiliserons à cet effet la métrique sphérique, obtenue en projetant le plan P sur la sphère de Riemann, et la topologie associée à cette métrique (topologie sphérique); la distance sphérique de deux points ou de deux ensembles m, m' de P étant désignée par $[m, m']$, l'ensemble des points m de P satisfaisant à $[m_0, m] < R$, constituera le domaine circulaire de pôle m_0 et de rayon sphérique R.

Ceci étant posé, soit D_n une suite de domaines quelconques contenus dans le plan P. Nous désignerons par D_0 l'ensemble ouvert formé des points m du plan dont un voisinage V_m (nous prendrons en général un domaine circulaire de pôle m) appartient à tous les domaines de la suite à partir d'un certain rang; si D_0 n'est pas vide, nous choisirons dans D_0 un point m_0 et nous appellerons *noyau* de la suite D_n, relatif au point m_0, la plus grande composante connexe de D_0 qui contient le point m_0, soit $\Omega(m_0, D_n)$. Ce noyau peut aussi être défini comme l'ensemble des points du plan que l'on peut joindre à m_0 par un continu dont la distance sphérique à la frontière D_n^* de D_n reste bornée inférieurement, à partir d'un certain rang, par un nombre positif fixe.

Ces deux définitions coïncident entre elles et coïncident également avec celle de M. Carathéodory (dans les cas envisagés par cet auteur). Car si K désigne un compact contenu dans $\Omega(m_0, D_n)$, chaque point de K admet un voisinage contenu dans D_n pour n assez grand; K pouvant être recouvert au moyen d'un nombre fini de tels voisinage, K est lui-même contenu dans D_n pour n assez grand, et sa distance sphérique à la frontière de D_n reste bornée inférieurement, à partir d'un certain rang N_K, par un nombre positif fixe ε_K; inversement, si la propriété est vraie pour tout compact contenu dans Ω, elle est vraie en particulier pour chaque point m de Ω et pour tout continu joignant m à m_0 et contenu dans Ω.

La suite D_n sera dite *converger, autour du point* m_0, *vers le domaine* D, si toutes les suites partielles extraites de la suite D_n admettent D pour noyau relatif au point m_0. Si la suite D_n n'est pas convergente, notons que le noyau $\Omega(m_0, D_{p_n})$, relatif à une suite partielle D_{p_n}, contient le noyau $\Omega(m_0, D_n)$.

Remarquons enfin que m'_0 est un point de D_0 autre que m_0, on a ou presque toute valeur de r, la mesure linéaire de $T(C_r)$ est finie pour presque toute valeur de r, et donnée par

$$\lambda(r) = \int_{C_r} \sqrt{E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2}$$
$$= \int_{C_r} \sqrt{E\sin^2\theta + 2F\sin\theta\cos\theta + G\cos^2\theta}\; r\,d\theta,$$

où l'on a posé

$$E = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2, \qquad F = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial f_i}{\partial y}, \qquad G = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)^2.$$

On en déduit l'inégalité fondamentale

$$(4b) \qquad \int_R^{R'} \lambda^2(r)\,\frac{dr}{r} < 2\pi \iint_D (E + G)\,r\,d\theta\,dr = 2\pi\,I_D(T).$$

En prenant $R' = \sqrt{\varepsilon}$, $R = \varepsilon\,(0 < \varepsilon < 1)$, l'inégalité $(4b)$ entraîne l'existence d'une valeur ρ, dépendant de ε et de m_0, satisfaisant à

$$(4c) \qquad \varepsilon < \rho < \sqrt{\varepsilon}, \qquad \lambda(\rho) < \sqrt{\frac{4\pi\,I_D(T)}{-\log\varepsilon}}.$$

Application. — *Détermination d'un module de continuité* (6). — Rappelons qu'une fonction f, définie d'un domaine D est dite *monotone* au sens de Lebesgue (7) si ses bornes relatives à un ensemble quelconque E strictement intérieur à D, sont les mêmes que celles relatives à la frontière E^* de E(8). Si les fonctions $f_i\,(i = 1, 2, \ldots, p)$

---

(6) Le principe de la détermination du module de continuité $g_k(\varepsilon)$ est implicitement contenu dans Lebesgue, *Sur le principe de Dirichlet* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. **24**, 1907, p. 371-402). Il a été retrouvé indépendamment par Wolff dans le cas des transformations conformes. *Sur la représentation conforme des bandes* (*Composition Math.*, t. **1**, 1934, p. 217-222) et souvent utilisé depuis dans l'étude de ces transformations. Il nous a paru intéressant de lui restituer ici la généralité prévue par H. Lebesgue.

(7) *Voir* Lebesgue, *loc. cit.*

(8) Dans tout cet article, la frontière d'un ensemble E sera toujours désignée par E^*.

qui définissent une transformation T sont monotones, on voit faci-(s'il en existe). Si m est un point de D, il existe un entier N_m tel que m appartienne à D_n pour $n > N_m$. Nous dirons que la suite T_n converge au point m si la suite $\mu_n = T_n(m)$ (définie pour $n > N_m$) a une limite μ. Si la suite T_n converge en tout point m de D, nous dirons qu'elle converge dans D, ou encore qu'elle converge autour de m_0, en désignant par m_0 un point de D. La transformation limite T est définie seulement dans D.

2° *Convergence uniforme ou continue.* — Nous avons déjà vu que si K est un compact contenu dans le noyau $D = \Omega(m_0, D_n)$, il existe un entier N_K tel que K soit contenu dans D_n pour $n > N_K$. Nous dirons que la suite T_n converge uniformément (resp. continûment) dans D vers une transformation T, définie dans D, si, quel que soit le compact K contenu dans D, la suite partielle T_n déterminée par $n < N_K$ converge uniformément (resp. continûment) vers T sur K.

Une légère modification du théorème cité de Vitali permet de montrer que si les transformations T forment une famille infinie et admettent toutes un même module de continuité $g(\varepsilon)$, on peut en extraire une suite T_n convergeant uniformément et continûment dans le domaine $D = \Omega(m_0, T_n)$.

4. Étude d'une classe de transformations. — Nous dirons qu'une transformation T définie par les équations $\xi_i = f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ est de classe BL dans un domaine plan D si les fonctions f_i qui la définissent sont elles-mêmes de classe BL dans D [5]; et nous poserons

$$I_D(T) = \iint_D \sum_{i=1}^{p} \operatorname{grad}^2 f_i \, dx\, dy. \tag{4a}$$

Propriétés. — Soit C_r la portion de circonférence de centre $m_0(x_0, y_0)$ fixe et de rayon r variable, contenue dans D. Les fonctions

[5] Sur la définition de ces fonctions *voir* O. Nikodym, *Sur une classe de fonctions considérées dans l'étude du problème de Dirichlet* (*Fund Math.*, t. **21**, 1933, p. 129-150), et J. Deny, *Les potentiels d'énergie finie* (*Acta. Math.*, t. **82**, 1950, p. 107-183).

$f_i(x_0+r\cos\theta,\ y_0+r\sin\theta)$ étant absolument continues en θ, pour bien

$$\Omega(m'_0,\ D_n)\equiv\Omega(m_0,\ D_n)$$

ou bien

$$\Omega(m'_0,\ D_n)\cap\Omega(m_0,\ D_n)=\emptyset.$$

Extensions. — Ces notions s'étendent à une famille quelconque de domaines D_t dépendant d'un paramètre t, et, plus généralement, à un filtre quelconque $\mathcal{F}$ défini sur un ensemble de domaines D. Nous dirons qu'un point m appartient à l'ensemble D_0 s'il existe un élément $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$, et un voisinage de m contenu dans tous les domaines de $\mathcal{E}$; m_0 étant un point de D_0 (supposé non vide) nous dirons qu'un point m appartient au noyau $\Omega(m_0,\ \mathcal{F})$ s'il existe un élément $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$, et un continu C joignant m_0 à m, tels que la distance sphérique de C à la frontière de D soit bornée inférieurement par un nombre positif fixe pour tout domaine de $\mathcal{E}$.

3. Définitions relatives aux suites de transformations. — *a.* Soit T_n une suite de transformations définies sur un même ensemble E. Nous dirons avec M. Carathéodory ([4]), que cette suite *converge continûment* sur E vers une transformation limite T, si, quelle que soit la suite m_n de points de E convergeant vers un point m de E, $T_n(m_n)$ tend vers $T(m)$.

Il est facile de voir que toute suite convergente de transformations également continues sur E est continûment convergente. On peut donc compléter ainsi un théorème bien connu de Vitali :

De toute famille infinie de transformations également et uniformément continues sur un compact, on peut extraire une suite convergeant uniformément et continûment sur ce compact.

b. Soit T_n une suite de transformations, T_n étant définie dans un domaine D_n. Si le domaine D_n dépend de l'indice n, il est nécessaire de préciser ce qu'on entend par « convergence de la suite T_n ».

([4]) C. Carathéodory, *Conformal représentation*, Cambridge Tracts, 1932.

1° *Convergence simple.* — Soit D l'un des noyaux de la suite D_n lement que le diamètre de T(E) est au plus égal au diamètre de T(E^*) multiplié par $\sqrt{p}$. On a en effet

$$|T(m) - T(m')|^2 = \sum_{i=1}^{p} |f_i(m) - f_i(m')|^2,$$

et chacune des quantités $|f_i(m) - f_i(m')|$ atteignant son maximum pour un couple de points situés sur E^* est majorée par le diamètre de T(E^*).

Définition 4 *d.* — Nous sommes maintenant conduits à la définition suivante : Nous dirons qu'une transformation T satisfait dans D à la condition $\mathcal{C}_h$ si, quel que soit l'ensemble E strictement intérieur à D, le rapport du diamètre de T(E) au diamètre de T(E^*) est borné par $\sqrt{h}\,(h \geqq 1)$.

Supposons que la transformation T, de classe BL, satisfasse à la fois à la condition $\mathcal{C}_h$ et à l'inégalité $I_D(T) \leqq k$. Si le cercle de centre m_0 et de rayon $\sqrt{\varepsilon}\,(0 < \varepsilon < 1)$ est contenu dans D, nous pouvons prendre pour E le cercle de centre m_0 de et rayon $\rho(\varepsilon, m_0)$ précédemment défini; E^* coïncide alors avec la circonférence C_ρ, et le diamètre de T(E) est majoré par $\sqrt{h}\,\lambda(\rho)$, donc par

$$g_{kh}(\varepsilon) \overline{=} \sqrt{\frac{4\pi kh}{-\log\varepsilon}}.$$

Or si le point m est à distance de m_0 inférieure à ε, les points m et m_0 appartiennent tous deux à E. Donc l'inégalité $mm_0 < \varepsilon < 1$ entraîne l'inégalité $|T(m) - T(m_0)| < g_{kh}(\varepsilon)$ pourvu que le cercle de centre m_0 et de rayon $\sqrt{\varepsilon}$ soit contenu dans D. D'où le résultat :

THÉORÈME 4 *e.* — *Toute transformation* T, *de classe* BL, *satisfaisant à la condition* $\mathcal{C}_h$ *et à l'inégalité* $I_D(T) \leqq k$, *possède en tout point* m_0 *de* D *le module de continuité uniforme* $g_{kh}(\varepsilon) = \sqrt{\frac{4\pi kh}{-\log\varepsilon}}$ *valable pour toute valeur de* ε *inférieure à la fois à l'unité et au carré de la distance de* m_0 *à* D^*.

Remarquons que toute transformation intérieure, et en particulier toute transformation topologique satisfait à la condition $\mathcal{C}_h$ avec $h = 1$.

Définition 4f. — Nous désignerons désormais par $\mathcal{C}_k$ la classe des transformations de classe BL satisfaisant à la condition $I_D(T) \leqq k$.

Cette classe $\mathcal{C}_k$ contient toutes les transformations conformes définies par une fonction holomorphe $f(z)$ décrivant une aire inférieure à $\frac{k}{2}$. Plus généralement toute transformation quasi conforme T définie par une inégalité de la forme $E + G < \rho\sqrt{EG - F^2}$ (notations déjà utilisées) appartient à la classe $\mathcal{C}_k$ si l'aire décrite par le point $T(m)$ est inférieure à $\frac{k}{\rho}$.

On remarque d'autre part que la classe $\mathcal{C}_k$ reste invariante dans une transformation conforme quelconque du domaine D; et la classe BL reste invariante dans une transformation quasi conforme quelconque de D.

5. Extensions. — *a. Correspondance entre les frontières.* — Le module de continuité que nous venons de déterminer peut être étendu à la frontière de D, dans le cas des transformations topologiques de classe BL, moyennant l'introduction de métriques appropriées dans les domaines D et $\Delta = T(D)$. Ayant choisi un couple de points correspondants m_0, $\mu_0 [\mu_0 = T(m_0)]$, on définit la *distance relative* $e_D^{m_0}(m, m')$ [resp. $e_\Delta^{\mu_0}(\mu, \mu')$] de deux points m, m' de D (resp. $\mu\mu'$ de Δ) comme la borne inférieure des diamètres des frontières propres des sous-domaines simplement connexes de D (resp. Δ) qui contiennent les deux points mm' (resp. $\mu\mu'$) et ne contiennent pas le point m_0 (resp. μ_0). On peut montrer ([9]) qu'avec ces nouvelles métriques le module de continuité $g_k(\varepsilon)$ reste valable pour toute transformation topologique de classe $\mathcal{C}_k$ dans D, et pour toute valeur de ε assez petite, en tout point de D ou de sa frontière; les éléments frontières définis par ces nouvelles métriques

([9]) La démonstration, qui généralise une étude faite par l'auteur pour la représentation conforme, (J. Ferrand, *Bull. Soc. Math. France*, t. **70**, 1942, p. 143-174) sera développée dans un Ouvrage destiné à paraître prochainement.

étant les *bouts premiers* des domaines considérés, on voit ainsi que le théorème fondamental de M. Carathéodory sur la correspondance entre frontières dans la représentation conforme s'étend aux transformations topologiques de classe BL sous la forme suivante :

Théorème 5 *a*. — *Toute transformation topologique de classe* BL *dans un domaine* D *d'ordre de connexion finie réalise une application continue de l'ensemble des bouts premiers de* D *dans l'ensemble des bouts premiers de* $\Delta = \mathrm{T}(\mathrm{D})$.

Cette correspondance devient biunivoque et bicontinue si la transformation inverse $\tau = \mathrm{T}^{-1}$ *est elle-même de classe* BL *dans* Δ.

b. Domaines non bornés. — Nous traiterons le cas où le domaine D est non borné en utilisant dans D la métrique sphérique obtenue par projection stéréographique du plan de D sur la sphère de Riemann. L'inégalité ($4b$) reste valable si l'on désigne par C_r la portion de circonférence de pôle sphérique m_0 et de rayon sphérique r contenue dans D. D'autre part, si les fonctions f_i qui définissent la transformation T ne sont pas bornées, nous poserons

$$\mathrm{I}'_{\mathrm{D}}(\mathrm{T}) = \iint_{\mathrm{D}} \frac{\Sigma \operatorname{grad}^2 f_i}{[1+\Sigma f_i^2]^2}\, da\, dx$$

et la longueur sphérique $\lambda'(r)$ de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_r)$ satisfera une inégalité analogue à ($4b$) où l'on a remplacé $\mathrm{I}_{\mathrm{D}}(\mathrm{T})$ par $\mathrm{I}'_{\mathrm{D}}(\mathrm{T})$.

Définition 5 *b*. — Nous sommes donc amenée à considérer la classe $\mathcal{C}'_k$ des transformations $\mathrm{T}[\xi_i = f_i(x, y)]$ telles que la transformation T_n définie par les fonctions $f_i^n[f_i^n = f_i$ si $|f_i| \leqq n$, $f_i^n = 0$ si $|f_i| > n]$ soit de classe BL et satisfasse à $\mathrm{I}'_{\mathrm{D}}(\mathrm{T}_n) \leqq k$ quel que soit n.

En particulier toutes les représentations conformes biunivoques planes sont de classe $\mathcal{C}'_{2\pi}$; car pour une telle transformation, l'intégrale $\mathrm{I}'_{\mathrm{D}}(\mathrm{T})$ représente le double de l'aire sphérique décrite par le point $\mathrm{T}(m)$, elle est donc inférieure ou égale au double de l'aire totale de la sphère.

Si l'on essaie d'étendre aux transformations intérieures de classe $\mathcal{C}'_k$ le module de continuité $g_k(\varepsilon)$, on rencontre une difficulté du fait que le diamètre sphérique d'un ensemble n'est pas nécessairement égal au diamètre sphérique de sa frontière, et qu'ainsi la condition $\mathcal{T}_1$ peut n'être pas vérifiée par ces transformations dans la métrique sphérique. Cependant si E est strictement intérieur à D, l'ensemble T(E) est formé de points intérieurs à T(D), et le complémentaire F de T(E) contient la frontière de T(D); or l'un au moins des ensembles complémentaires T(E) et F a son diamètre sphérique égal à celui de leur frontière commune $F^\star$, elle-même contenue dans $T(E^\star)$; donc la condition $\mathcal{T}_1$ reste vérifiée en métrique sphérique si le diamètre sphérique de $T(E^\star)$ est inférieur à celui de la frontière de T(D). On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 5 *c*. — *Toute transformation intérieure de classe $\mathcal{C}'_k$ dans* D, *admet en tout point m_0 de* D *le module de continuité sphérique $g_k(\varepsilon)$, valable pour toute valeur de ε inférieure à la fois à l'unité, au carré de la distance sphérique de m_0 à $D^\star$, et à $g_k^{-1}(\delta)$, en désignant par δ le diamètre sphérique de la frontière de* T(D) *et par $g_k^{-1}(\eta)$ la fonction inverse de $\eta = g_k(\varepsilon)$.*

Comme au paragraphe 5 *a* on étend facilement ce module de continuité à la frontière de D; il suffit, dans la définition de la distance relative de deux points de D ou de T(D), de remplacer le mot de diamètre par celui de diamètre sphérique. Le théorème 5 *a* reste valable pour les transformations topologiques de classe $\mathcal{C}'_k$. Et l'on peut montrer en particulier que l'image d'un point frontière isolé de D, dans une telle transformation, est nécessairement un point frontière isolé de $\Delta = T(D)$.

6. Pour l'étude des suites de transformations de classe $\mathcal{C}'_k$, nous utiliserons, outre les modules de continuité précédemment définis, le résultat suivant :

Lemme 6. — *Si la transformation topologique* T *est de classe $\mathcal{C}'_k$ dans le domaine* D, *si Λ est un continu passant par un point μ_0 de $\Delta = T(D)$ et si la distance sphérique de Λ à $\Delta^\star$ est un nombre $\eta > 0$, alors l'image réciproque $L = T^{-1}(\Lambda)$ est un continu dont la distance sphérique à $D^\star$ est au moins égale au plus petit des quatre nombres* 1, $\left(\frac{\pi}{2} - R_0\right)^2$,

r_0^2 et $g_k^{-1}(\eta)$ en désignant par R_0 le rayon sphérique maximum d'un domaine circulaire contenu dans D, par r_0 la distance sphérique à D^* du point $m_0 = T^{-1}(\mu_0)$ et par $g_k^{-1}(\eta)$ la fonction inverse de $\eta = g_k(\varepsilon)$.

Démonstration. — Supposons la distance sphérique de L à D^* inférieure à ε; on peut déterminer un point m_1 de L et un point a de D^* tels que l'on ait $[a, m_1] < \varepsilon$.

Si de plus le nombre ε est inférieur à la fois à l'unité et à r_0^2, toute circonférence C_r de pôle sphérique a et de rayon sphérique r compris entre ε et $\sqrt{\varepsilon}$, laisse m_0 à son extérieur et contient les deux points a, m_1 à son intérieur; le continu L joignant m_0 à m_1 rencontre donc C_r. On sait d'autre part [inégalité (4 c)] qu'il existe une valeur $\rho\,[\varepsilon < \rho < \sqrt{\varepsilon}]$ telle que l'image de la portion de C_ρ contenue dans D ait une longueur sphérique totale inférieure à $g_k(\varepsilon)$. Nous distinguerons deux cas selon que la circonférence C_ρ rencontre D^*, ou qu'elle est tout entière intérieure à D.

Dans le premier cas, il existe un arc q de C_ρ ayant ses extrémités sur D^* et rencontrant L; l'image de q est un arc γ ayant ses extrémités sur Δ^*, rencontrant Λ, et de longueur sphérique inférieure à $g_k(\varepsilon)$: la distance sphérique η de Λ à Δ^* est donc inférieure à $g_k(\varepsilon)$ et l'on a $\varepsilon > g_k^{-1}(\eta)$.

Dans le second cas, la circonférence C_ρ partage le plan en deux domaines D_ρ, D'_ρ dont aucun n'est contenu dans D si l'on suppose $\varepsilon < \left(\frac{\pi}{2} - R_0\right)^2$. Car le domaine intérieur [10] D_ρ contient le point a de D^*; et le domaine extérieur [10] D'_ρ ne peut être contenu dans D car il constitue lui-même un domaine circulaire de rayon sphérique $\frac{\pi}{2} - \rho > R_0$. Donc le continu $\Gamma_\rho = T(C_\rho)$ partage le plan de Δ en deux domaines dont aucun n'est contenu dans Δ; d'autre part l'un au moins de ces domaines a son diamètre sphérique égal à celui de Γ_ρ, donc inférieur à $g_k(\varepsilon)$. Ce domaine Δ_ρ contient des points de Δ^*;

---

[10] Nous désignons par intérieur (resp. extérieur) de la circonférence de pôle sphérique a et de rayon sphérique r l'ensemble des points m satisfaisant à $[a, m] < r$ (resp. $[a, m] > r$).

il contient aussi l'un des points μ_0, μ_1. Donc la distance sphérique à Δ^* du continu Λ qui joint ces deux points est elle-même inférieure à $g_k(\varepsilon)$. L'hypothèse supplémentaire $\varepsilon < \left(\frac{\pi}{2} - R_0\right)^2$ entraîne donc $\eta < g_k(\varepsilon)$, c'est-à-dire $\varepsilon > g_k^{-1}(\eta)$.

Dans aucun des cas le nombre ε ne peut inférieur à la fois aux quatre nombres 1, r_0^2, $\left(\frac{\pi}{2} - R_0\right)^2$ et $g_k^{-1}(\eta)$.

II. — Convergence des suites de transformations topologiques de classe $\mathcal{C}_k$ ou $\mathcal{C}'_k$.

7. Soit D_n une suite de domaines plans, T_n une transformation topologique de classe $\mathcal{C}'_k$ dans D_n (k étant indépendant de n). Nous supposerons que le rayon sphérique maximum d'un domaine circulaire contenu dans D_n ou Δ_n reste inférieur à un nombre positif fixe $R_0 < \frac{\pi}{2}$, et que chaque domaine $\Delta_n = T_n(D_n)$ contient un domaine circulaire de rayon sphérique ρ_0 fixe, dont nous désignerons le pôle sphérique, en général variable, par μ_n^0.

Nous allons faire une étude exhaustive des divers cas possibles, puis nous énoncerons les résultats que l'on peut en déduire avec des hypothèses plus précises.

Premier cas. — *La distance sphérique à* D_n^* *du point* $m_n^0 = T_n^{-1}(\mu_n^0)$ *reste supérieure à un nombre positif fixe* r_0.

Soit m_0 l'un des points d'accumulation de la suite m_n^0. On peut déterminer une suite d'entiers p_n telle que $m_{p_n}^0$ converge vers m_0; pour n assez grand, le domaine D_{p_n} contient le domaine circulaire de pôle sphérique m_0 et de rayon sphérique $\frac{r_0}{2}$. Le noyau $\Omega(m_0, D_{p_n})$ n'est donc pas vide. La suite T_{p_n} étant formée de transformations également et uniformément continues, de toute suite d'entiers extraite de la suite p_n, on peut extraire une suite q_n telle que la suite D_{q_n} converge, autour du point m_0, vers son noyau D, et que T_{q_n} converge uniformément et continûment à l'intérieur du noyau $D = \Omega(m_0, D_{q_n})$ vers une transformation limite T, définie dans ce noyau. C'est cette limite T que nous allons étudier.

La convergence continue de la suite T_{q_n} entraîne la convergence de la suite $\mu^0_{q_n} = T_{q_n}(m^0_{q_n})$ vers le point $\mu_0 = T(m_0)$. Dès que n est assez grand pour que l'on ait $[\mu_0, \mu_0^{q_n}] < \frac{\rho_0}{2}$, le domaine Δ_{q_n} contient le domaine circulaire de pôle sphérique μ_0 et de rayon sphérique $\frac{\rho_0}{2}$: donc le noyau $\Omega(\mu_0, \Delta_{q_n})$ n'est pas vide; soit μ un point de ce noyau.

Pour n assez grand, on peut joindre μ à $\mu^0_{q_n}$ par un continu Λ_n dont la distance sphérique à $\Delta^*_{q_n}$ reste supérieure à un nombre positif fixe η. D'après le lemme 6 le continu $L_n \equiv T^{-1}_{q_n}(\Lambda_n)$, qui joint le point $m_{q_n} \equiv T^{-1}_{q_n}(\mu)$ au point $m^0_{q_n} \equiv T^{-1}_{q_n}(\mu^0_{q_n})$, reste à une distance sphérique de $D^*_{q_n}$ supérieure à ε, en désignant par ε le plus petit des quatre nombres 1, r_0^2, $\left(\frac{\pi}{2} - R_0\right)^2$ et $g_k^{-1}(\eta)$. Il en résulte que tous les points d'accumulation de la suite m_{q_n} appartiennent au noyau $\Omega(m_0, D_{q_n})$; et si m désigne l'un de ces points limites, la convergence continue de la suite T_{q_n} entraîne $T(m) = \lim T_{q_n}(m_{q_n}) = \mu$. Autrement dit, l'ensemble $T[\Omega(m_0, D_{q_n})]$ contient le noyau $\Omega(\mu_0, \Delta_{q_n})$.

Deuxième cas. — *La distance sphérique de m^0_n à D^*_n tend vers zéro.*

Désignons par μ_0 l'un des points d'accumulation de la suite μ^0_n, par m_0 l'un des points d'accumulation de la suite m^0_n et par p_n une suite d'entiers telle que $\mu^0_{p_n}$ converge vers μ_0 et $m^0_{p_n}$ vers m_0. Nous allons montrer que la suite des transformations inverses $T^{-1}_{p_n}$ converge dans le noyau $\Omega(\mu_0, \Delta_{p_n})$ vers la transformation dégénérée T qui, à tout point μ de ce noyau, fait correspondre le point fixe m_0.

Il résulte tout d'abord des hypothèses faites, que le noyau $\Omega(\mu_0, \Delta_{p_n})$ n'est pas vide. Si μ désigne un point de ce noyau, il existe pour les valeurs suffisamment grandes de n, un continu Λ_n joignant μ à $\mu^0_{p_n}$ et dont la distance sphérique à $\Delta^*_{p_n}$ reste supérieure à un nombre positif fixe η. Si les points $m_{p_n} = T^{-1}_{p_n}(\mu)$ ne convergeaient pas vers le point m_0, on pourrait déterminer une suite ε_n convergeant vers zéro, et extraire de la suite p_n une suite partielle q_n telle que l'on ait simultanément

$$[m^0_{q_n}, D^*_{q_n}] < \varepsilon_n, \qquad [m^0_{q_n}, m_{q_n}] > \sqrt{\varepsilon_n} \qquad \text{quel que soit } n.$$

Or ε_n étant donné, il existe un nombre $\rho_n [\varepsilon_n < \rho_n < \sqrt{\varepsilon_n}]$ tel que la longueur sphérique $T_{q_n}[C_n \subset D_{q_n}]$ soit inférieure à $g_k(\varepsilon_n)$, en désignant par C_n la circonférence de pôle sphérique $m_{q_n}^0$ et de rayon sphérique ρ_n. Nous distinguerons deux nouveaux cas selon que cette circonférence C_n rencontre $D_{q_n}^*$ ou qu'elle est contenue dans D_{q_n}.

a. Si C_n rencontre $D_{q_n}^*$, il existe un arc de circonférence k_n, porté par C_n, ayant ses extrémités sur $D_{q_n}^*$ et rencontrant le continu $L_n = T_{q_n}^{-1}(\Lambda_n)$. Car le continu L_n joignant le point $m_{q_n}^0$ intérieur à C_n au point $m_{q_n} = T_{q_n}^{-1}(\mu)$, extérieur à C_n, doit rencontrer C_n. Le continu Λ_n rencontre l'arc $\gamma_n = T_{q_n}(k_n)$ et sa distance sphérique à $\Delta_{q_n}^*$ est majorée par la longueur sphérique de γ_n, donc inférieure $g_k(\varepsilon_n)$ ce qui est impossible dès que $\varepsilon_n < g_k^{-1}(\eta)$.

b. Si C_n est intérieure à D_{q_n}, nous pouvons supposer n assez grand pour que l'on ait $\varepsilon_n < \left(\frac{\pi}{2} - R_0\right)^2$. Alors aucun des domaines circulaires en lesquels C_n partage le plan ne peut être contenu dans D_{q_n}. Car d'une part le domaine intérieur à C_n contient des points frontières de D_{q_n}, puisque la distance sphérique de $m_{q_n}^0$ à $D_{q_n}^*$ est inférieure à ε_n; d'autre part le domaine extérieur à C_n constitue un domaine circulaire de rayon sphérique $\frac{\pi}{2} - \rho_n > R_0$. Donc chacun des domaines en lesquels la courbe $\Gamma_n = T_{q_n}(C_n)$ partage le plan de Δ_{q_n} contient à la fois des points $\Delta_{q_n}^*$ et des points de Λ_n; l'un au moins de ces domaines ayant un diamètre sphérique inférieur à $g_k(\varepsilon_n)$, la distance sphérique de Λ_n à $\Delta_{q_n}^*$ est inférieure à $g_k(\varepsilon_n)$ ce qui est impossible dès que $\varepsilon_n < g_k^{-1}(\eta)$. La contradiction à laquelle on aboutit ainsi, établit la convergence de la suite m_{p_n} vers le point m_0.

8. Nous obtiendrons le théorème fondamental en appliquant les résultats du paragraphe **7** aux deux suites de transformations inverses T_n et $\tau_n = T_n^{-1}$, en supposant que les transformations τ_n appartiennent aussi à une classe $\mathcal{C}'_h$ fixe. Nous remarquerons que si la suite T_n converge continûment vers T et si la suite τ_n converge vers τ, τ est l'inverse de T. Car si μ désigne un point du domaine de convergence de la suite τ_n et si l'on pose $m_n = \tau_n(\mu)$, $m = \tau(\mu)$, la suite

$T_n(m_n) = \mu$ doit converger vers $T(m)$. Autrement dit, on a $T(m) = \mu$, c'est-à-dire $\tau^{-1} \equiv T$. On en déduit que si les deux transformations limites T et τ sont continues, elles sont topologiques, puisque biunivoques. Si l'on suppose seulement que la suite T_n converge continûment vers T et que la suite τ_n est normale, toute suite partielle convergente extraite de la suite τ_n converge vers T^{-1}, donc la suite τ_n tout entière converge vers T^{-1}.

En associant ces remarques avec les résultats du paragraphe **7**, on obtient facilement les résultats suivants :

Théorème 8 *a*. — *Soit T_n une représentation topologique d'un domaine plan D_n sur un domaine plan Δ_n. Supposons réalisées les hypothèses suivantes :*

1° *Il existe un nombre k, indépendant de n, tel que T_n soit de classe $\mathcal{C}_k$ dans D_n.*

2° *Il existe un nombre h, indépendant de n, tel que τ_n soit de classe $\mathcal{C}'_h$ dans Δ_n.*

3° *D_n ne contient aucun domaine circulaire de rayon sphérique supérieur à $R_0 \left(R_0 < \frac{\pi}{2}\right)$.*

4° *Δ_n ne contient aucun domaine circulaire de rayon sphérique supérieur à $\rho_0 \left(\rho_0 < \frac{\pi}{2}\right)$.*

5° *Chaque domaine Δ_n contient un domaine circulaire de rayon sphérique au moins égal à $\delta_0 > 0$, dont le pôle sphérique sera désigné par μ_n^0.*

6° *La distance sphérique du point $m_n^0 = \tau_n(\mu_n^0)$ à D_n^* reste supérieure à un nombre $r_0 > 0$.*

Alors, de toute suite infinie croissante d'entiers p_n, on peut extraire une suite q_n telle que la suite $m_{q_n}^0$ converge vers un point m_0, la suite $\mu_{q_n}^0$ vers un point μ_0, et que la suite T_{q_n} converge, autour du point m_0, vers une représentation topologique T du noyau $\Omega(m_0, D_{q_n})$ sur le noyau $\Omega(\mu_0, \Delta_{q_n})$. Et la suite $\tau_n \equiv T_n^{-1}$ converge, autour du point μ_0, vers $\tau = T^{-1}$.

THÉORÈME. — 8 *b*. — *Si les hypothèses* 1°, 3° et 5° *du théorème* 8 *a sont réalisées, et si la distance sphérique du point* m_n^0 *à* D_n^* *tend vers zéro, alors, de toute suite infinie croissante d'entiers* p_n, *on peut extraire une suite* q_n *telle que la suite* μ_{q_n} *converge vers un point* μ_0 *et que la suite* τ_{q_n} *converge vers une transformation dégénérée* τ, *faisant correspondre, à tout point* μ *de* $\Omega(\mu_0, \Delta_{q_n})$, *un même point* m_0.

THÉORÈME 8 *c*. — *Si l'hypothèse* 2° *du théorème* 8 *a est réalisée et si le rayon sphérique maximum d'un domaine circulaire contenu dans* Δ_n *tend vers zéro, alors, de toute suite infinie croissante d'entiers* p_n, *on peut extraire une suite* q_n *telle que la suite* $m_{q_n}^0$ *converge vers un point* m_0 *et que la suite* T_n, *converge autour de* m_0, *vers une tranrformation dégénérée* T, *faisant correspondre à tout point m de* $\Omega(m_0, D_{q_n})$ *un même point* μ_0.

Cas particulier. — Les résultats obtenus s'appliquent en particulier au cas où le domaine D_n est indépendant de n; nous le désignerons alors par D. Si les hypothèses du théorème 8 *a* sont réalisées et si la suite μ_n^0 converge vers un point μ_0, toute suite partielle convergente T_{p_n} extraite de la suite T_n a pour limite une représentation topologique de D sur le noyau $\Omega(\mu_0, \Delta_{p_n})$. Il est facile de comprendre dans ce cas le mécanisme de la convergence de la suite τ_{p_n} : à l'intérieur de $\Omega(\mu_0, \Delta_{p_n})$ la suite τ_{p_n} converge vers $\tau = T^{-1}$. A l'intérieur des autres noyaux de la suite Δ_{p_n} (s'il en existe), toutes les suites convergentes extraites de la suite τ_{p_n} ont pour limites des transformations dégénérées qui font correspondre, à tout point de chacun de ces noyaux, un même point frontière de D. On peut traduire ce fait sous une forme plus imagée (mais plus vague), en disant que les portions des domaines Δ_{p_n} qui convergent vers l'un des noyaux autres que celui relatif à μ_0, correspondent à des portions de D qui s'applatissent sur la frontière.

9. Les démonstrations se simplifient si, au lieu de considérer deux suites de domaines D_n, Δ_n quelconques, on se borne au cas de domaines n'admettant pas le point à l'infini pour point intérieur, et si l'on suppose que T_n est de classe $\mathcal{C}_k$ et τ_n de classe $\mathcal{C}_h$. Il est alors possible d'utiliser la métrique euclidienne, et l'on obtient des résultats analogues à ceux des théorèmes 8 (a, b, c), la métrique sphérique étant remplacée par la métrique euclidienne, et les hypothèses 3° et 4° disparaissent. Nous remarquons que les résultats obtenus épuisent alors tous les cas possibles.

Il n'en est plus de même dans le cas général et nous devons, pour compléter la discussion, examiner les cas où l'une des hypothèses 3° ou 4° n'est pas vérifiée.

Supposons donc seulement l'hypothèse 1° vérifiée, mais l'hypothèse 3° non vraie; par extraction d'une suite partielle, nous pouvons nous ramener au cas où le rayon sphérique maximum d'un domaine circulaire contenu dans D_n tend vers $\frac{\pi}{2}$; alors le diamètre sphérique de D_n^* tend vers zéro, et par extraction d'une nouvelle suite partielle, nous pouvons nous ramener au cas où la frontière de D_n tend vers un point m_0 déterminé. Alors la suite D_n converge vers le domaine D constitué par le plan privé du point m_0. Nous désignerons par m, m' deux points quelconques de D.

Quel que soit $\varepsilon > 0$ donné assez petit, il existe un entier N tel que pour $n > N$, la frontière de D_n soit intérieure au cercle de pôle sphérique m_0 et de rayon sphérique ε, les points m, m' étant extérieurs au cercle de même pôle et de rayon sphérique $\sqrt{\varepsilon}$. Or il existe [inégalité ($4c$)] une circonférence C_n de pôle sphérique m_0 et de rayon sphérique $\rho_n(\varepsilon < \rho_n < \sqrt{\varepsilon})$ dont l'image $\gamma_n = T_n(C_n)$ a une longueur sphérique inférieure à $g_k(\varepsilon)$; la courbe γ_n partage le plan de Δ_n en deux régions δ_n, δ'_n dont l'une au moins, soit δ_n, a son diamètre sphérique inférieur à $g_k(\varepsilon)$. D'autre part l'une de ces régions contient les deux points $\mu_n = T_n(m)$ et $\mu'_n = T_n(m')$, tandis que l'autre contient la frontière de Δ_n. Deux cas de figure sont possibles selon que les points μ_n, μ'_n sont tous deux contenus dans δ_n ou dans δ'_n; dans le premier cas, on a $[\mu_n, \mu'_n] < g_k(\varepsilon)$; dans le second cas, c'est le diamètre sphérique de Δ_n^* qui est inférieur à $g_k(\varepsilon)$. Nous éliminerons provisoirement ce dernier cas en supposant que le sphérique rayon maximum d'un domaine circulaire contenu dans Δ_n reste inférieur à un nombre fixe $\rho_0 < \frac{\pi}{2}$; alors le diamètre sphérique de Δ_n^* reste supérieur à $\frac{\pi}{2} - \rho_0$

et l'inégalité $g_k(\varepsilon) < \frac{\pi}{2} - \rho_0$ entraîne $[\mu_n, \mu'_n] < g_k(\varepsilon)$. Le nombre ε étant arbitrairement petit, on a ainsi établi que toutes les transformations limites de la suite T_n sont nécessairement dégénérées, si l'hypothèse 4° du théorème 8 *a* est vérifiée, l'image de D dans l'une de ces transformations se réduisant à un point μ_0.

THÉORÈME 9 *a*. — *Soit* D_n *une suite de domaines telle que le rayon sphérique maximum d'un domaine circulaire contenu dans* D_n *tende vers* $\frac{\pi}{2}$. *Si* T_n *est une transformation topologique de classe* $\mathcal{C}'_k$ *dans* D_n *telle que le rayon sphérique maximum d'un domaine circulaire contenu dans* $\Delta_n = T_n(D_n)$ *reste inférieur à un nombre* $\rho_0 < \frac{\pi}{2}$, *alors toutes les transformations limites de la suite* T_n *sont dégénérées, et de la forme* $T(m) \equiv \mu_0$.

Nous verrons plus loin que la limite d'une suite uniformément convergente de transformations de classe $\mathcal{C}'_k$ est encore de classe $\mathcal{C}'_k$. Le résultat obtenu correspond au fait qu'il n'existe aucune transformation topologique de classe $\mathcal{C}'_k$, non dégénérée, qui fasse correspondre au plan privé d'un point, un domaine dont la frontière ne se réduise pas à un point.

10. Il nous reste à étudier le cas, écarté au paragraphe précédent, où la suite D_n converge vers le domaine D constitué par le plan privé d'un point m_0 tandis que la suite Δ_n converge vers un domaine analogue Δ constitué par le plan privé d'un point μ_0. Le cas où le diamètre sphérique de Δ^*_n tend vers zéro se ramène en effet à celui-là par extraction d'une suite partielle p_n telle que $\Delta^*_{p_n}$ converge vers un point μ_0.

Si, quel que soit le point μ de Δ, la suite $m_n = \tau_n(\mu)$ converge vers le point m_0, la suite τ_n converge vers la transformation dégénérée $\tau(\mu) \equiv m_0$. Sinon, il existe au moins un point μ_1 de Δ et une suite d'entiers q_n tels que $m^1_{q_n} = \tau_{q_n}(\mu_1)$ converge vers un point m_1 distinct de m_0. Désignons par $D^1_{q_n}$ le domaine obtenu en retranchant de D_{q_n} le point $m^1_{q_n}$ et par $\Delta^1_{q_n}$ le domaine obtenu en retranchant de Δ_{q_n} le point μ_1.

La suite $D^1_{q_n}$ converge vers le domaine D_1 constitué par le plan privé des points m_0, m_1 et la suite $\Delta^1_{q_n}$ vers le domaine Δ_1 constitué par le plan privé des points μ_0, μ_1. La transformation T_{q_n} peut être considérée comme une représentation de $D^1_{q_n}$ sur $\Delta^1_{q_n}$ satisfaisant aux hypothèses 1°, 2°, 3°, 4° et 5° du théorème 8 *a*. Nous pouvons donc leur appliquer les résultats du paragraphe **7**. Et nous obtenons ainsi les résultats suivants :

THÉORÈME 10 *a*. — *Soit* D_n *une suite de domaines convergeant vers le domaine* D *constitué par le plan privé d'un point* m_0. *Si* T_n *est une transformation topologique de classe* $\mathcal{C}'_k$ *dans* D_n (k *étant indépendant de* n) *et si la suite des domaines* $\Delta_n = T_n(D_n)$ *converge vers le domaine constitué par le plan privé d'un point* μ_0, *alors, de toute suite infinie croissante d'entiers on peut extraire une suite* q_n *telle que* :

ou bien T_{q_n} *converge vers une transformation* T *telle que* $T(D) \equiv \Delta$;

ou bien la suite $\tau_{q_n} = T^{-1}_{q_n}$ *converge vers une transformation dégénérée* $\tau(\mu) \equiv m_1$ (m_1 *pouvant être confondu avec* m_0);

ou bien la suite τ_{q_n} *converge vers une transformation dégénérée* τ *de la forme*

$$\tau(\mu) = m_0 \quad \text{pour} \quad \mu \neq \mu_1, \qquad \tau(\mu_1) = m_1.$$

Remarquons que le théorème (10 *a*) peut s'appliquer dans les deux sens si l'on suppose que la transformation inverse τ_n est aussi de classe fixe $\mathcal{C}'_h$ dans Δ_n. Alors la dégénérescence de la limite de la suite τ_{q_n} entraîne celle de la limite de la suite T_{q_n}; et la convergence de la suite T_{q_n} vers une transformation non dégénérée T entraîne celle de la suite τ_{q_n} vers la transformation $\tau = T^{-1}$.

L'exemple des transformations conformes T_n définies par $\zeta = nz$ dans le domaine D constitué par le plan privé du point à l'infini, permet de saisir le mécanisme de la dégénérescence.

11. ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS LIMITES. — On sait [11] que l'intégrale de Dirichlet $I_D(f) = \iint_D \operatorname{grad}^2 f \, dx \, dy$ est une fonctionnelle semi-

---

[11] *Voir* par exemple : RADÓ, *Length and area*, New York, 1948, p. 481-482.

continue inférieurement, c'est-à-dire que si f_n tend vers f uniformément, on a

$$\mathrm{I}_{\mathrm{D}}(f) \leq \varliminf_{n \to \infty} \mathrm{I}_{\mathrm{D}}(f_n).$$

Il en est de même pour l'intégrale

$$\mathrm{I}'_{\mathrm{D}}(f) = \iint_{\mathrm{D}} \frac{\operatorname{grad}^2 f}{[1+f^2]^2}\, dx\, dy.$$

Donc la limite uniforme d'une suite de transformations de classe $\mathcal{C}'_k$ est encore de classe $\mathcal{C}'_k$.

Mais une transformation topologique T, de classe $\mathcal{C}'_k$ dans un domaine D donné, n'est pas déterminée par la donnée du domaine $\Delta = \mathrm{T}(\mathrm{D})$. Pour assurer l'unicité de T, il faut des conditions beaucoup plus restrictives; soit (C) un ensemble de conditions telles qu'il n'existe qu'une transformation T de classe $\mathcal{C}'_k$, satisfaisant à (C) et représentant biunivoquement D sur Δ. Si dans le théorème ($8\,a$) chaque transformation T_n est assujettie à des conditions (C_n) telle que toute transformation limite satisfasse à (C), alors l'unicité des noyaux $\Omega(\mu_0, \Delta_{q_n})$ et $\Omega(m_0, \mathrm{D}_{q_n})$ assure l'unicité de cette limite. Autrement dit, si T_n est assujettie à de telles conditions (C_n), la convergence des suites D_n, Δ_n autour des points m_0, μ_0 respectivement, entraîne la convergence de la suite T_n. En particulier, si D_n est indépendant de n, et si μ_0 est donné, la convergence de la suite T_n est équivalente à celle de la suite Δ_n autour du point μ_0.

Si l'on remarque que toute représentation conforme plane est de classe $\mathcal{C}'_{2\pi}$ et qu'une représentation conforme d'un domaine simplement connexe D sur un domaine Δ est déterminée par les conditions (C_0) : $f(z_0) = \zeta_0$, $f'(z_0) > 0$ (z_0 et ζ_0 étant donnés) on retrouve le théorème de M. Carathéodory. Mais on peut, même dans le cas de représentations conformes, utiliser d'autres groupes de conditions que (C_0) assurant l'unicité; le passage à la limite sera facile si ces conditions portent sur les propriétés de la représentation en des points intérieurs au domaine; il sera plus délicat si elles font intervenir des points frontières et il faut au préalable préciser ce qu'on entend par « convergence » d'une suite de bouts premiers appartenant à des domaines D_n distincts.

12. *Définition. — Soit* D_n *une suite de domaines telle que le noyau* $\Omega(m_0, D_n)$ *soit non vide; soit a un élément de* $\overline{D}$ [1] *(point au bout premier),* a_n *un élément de* $\overline{D}_n$. *Nous dirons que la suite* a_n *converge vers* a *si à tout* $\varepsilon < 0$ *on peut associer un entier* N *et un point m de* D *tels que l'on ait simultanément* $e_D^{m_0}(a, m) < \varepsilon$ $e_{D_n}^{m_0}(a_n, m) < \varepsilon$ [2] pour tout $n > N$.

Cette définition permet d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Supposons les hypothèses suivantes réalisées :*

α. *la suite de domaines* D_n *converge, autour de* m_0, *vers un domaine* D.

β. *la suite de transformations topologiques* T_n, *de classe* $\mathcal{D}'_k$ *dans* D_n, *converge dans* D *vers une représentation topologique de* D *sur un domaine* Δ.

γ. *l'élément* a_n de D_n *converge vers l'élément a de* D.

Alors l'élément $\alpha_n = T_n(a_n)$ *de* $\Delta_n = T_n(D_n)$ *converge vers l'élément* $\alpha = T(a)$ *de* Δ.

Soit, en effet, m un point de D satisfaisant à $e_D^{m_0}(a, m) < g_k^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ $e_{D_n}^{m_0}(a, m) < g_k^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ pour tout $n > N$. Le point $\mu = T(m)$ étant intérieur à Δ, il existe un domaine circulaire de pole sphérique μ et de rayon sphérique $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$ contenu dans Δ_n pour n assez grand.

A partir d'un certain rang, le point $\mu_n = T_n(m)$ est contenu dans ce domaine circulaire et l'on a : $e_{\Delta_n}^{\mu_0}(\mu, \mu_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, quel que soit le point μ_0.

Or si l'on prend $\mu_0 = T(m_0)$ l'inégalité $e_D^{m_0}(a, m) < g_k^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ entraîne $e_\Delta^{\mu_0}(\alpha, \mu) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'après l'extension du module de continuité $g_k(\varepsilon)$ exposé au paragraphe 5. Et l'inégalité $e_{D_n}^{m_0}(a, m) < g_k^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ entraîne $e_{\Delta_n}^{\mu_n^0}(\alpha_n, \mu_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ en posant $\mu_n^0 = T_n(m_0)$. Mais puisque le point μ_n^0 tend

---

[1] Nous désignerons par $\overline{D}$ la réunion de D et de ses bouts premiers.

[2] $e_D^{m_0}(a, m)$ est la distance relative définie au paragraphe 5.

vers μ_0, les distances relatives dans Δ_n avec μ_0 ou μ_0^n pour origine coïncident pour les valeurs assez petites. Et l'on a

$$e_{\Delta_n}^{\mu_0}(\alpha_n, \mu_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad e_{\Delta_n}^{\mu_0}(\mu, \mu_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc $e_{\Delta_n}^{\mu_0}(\alpha_n, \mu) < \varepsilon$ ce qui montre que $\alpha_n \to \alpha$ puisqu'on a déjà $e_{\Delta}^{\mu_0}(\alpha, \mu) < \frac{\varepsilon}{2}$ C. Q. F. D.

Ce résultat s'applique en particulier aux suites de transformations conformes T_n satisfaisant aux hypothèses du théorème 8 *a* et permet d'assurer l'unicité de la représentation limite T, en imposant par exemple à T_n les conditions suivantes :

α. D_n converge autour de m_0, vers un domaine donné D.

β. Le point $\mu_0 = T_n(m_0)$ est indépendant de n, et la suite Δ_n converge, autour de μ_0, vers un domaine donné Δ.

γ. Le bout premier a_n de D_n converge vers le bout premier a de D, et le bout premier $\alpha_n = T_n(a_n)$ de Δ_n converge vers un bout premier donné α de Δ.

Dans le cas de domaines d'ordre de connexion multiple, le problème se simplifie du fait qu'une représentation conforme d'un domaine D, d'ordre de connexion au moins égal à 3, est déterminée par la connaissance du domaine $\Delta = T(D)$.

Enfin, au lieu de considérer des représentations conformes, on pourrait envisager des représentations satisfaisant à des équations aux dérivées partielles susceptibles d'en assurer l'unicité quand on connaît les domaines D et T(D).

Applications. — Soit $f(z)$ une représentation conforme du demi-plan $D(x > 0)$ sur un domaine Δ du plan de la variable $\zeta = \xi + i\eta$. Pour étudier le comportement de $f(z)$ à l'infini, nous considérerons, pour $R \to +\infty$, la famille des représentations conformes $f_R(z) = \frac{f(Rz)}{|f(R)|}$ qui, au domaine D, font correspondre les domaines Δ_ρ homothétiques de Δ dans le rapport $\rho = |f(R)|^{-1}$ et satisfont à $|f_R(1)| = 1$. Toute fonction limite f_0 se réduit à une constante ou réalise la représentation conforme de D sur un noyau de la suite Δ_R.

Supposons de plus que le domaine Δ contienne un secteur angulaire de la forme $|\text{Arg}\,\zeta| < \psi_0$, $|\zeta| > R_0$, et qu'au point $z = \infty$ de D corresponde le bout premier de Δ contenant le point accessible à l'infini de ce secteur. Alors le noyau, pour $\rho \to \infty$, de la famille Δ_ρ, relatif au point $\zeta_0 = 1$, est non vide car il contient l'angle $|\text{Arg}\,\zeta| < \psi_0$; et l'on peut montrer, par utilisation du module de continuité $g_k(\varepsilon)$ (paragraphe **5**) que toute fonction f_0, limite d'une suite convergente f_{R_n}, satisfait à :

α. $f_0^{-1}(r) \to 0$ quand r(réel) $\to 0$

β. $f_0^{-1}(r) \to \infty$ quand r(réel) $\to +\infty$.

Ces conditions jointes à la condition (γ) : $|f_0(1)| = 1$, montrent que la fonction f_0 ne peut se réduire à une constante et qu'elle est entièrement déterminée par la connaissance du noyau $\Omega(\zeta_0, \Delta_{R_n})$. Donc si la famille Δ_ρ converge autour du point $\zeta_0 = 1$, vers un domaine Δ, la famille f_R converge vers une fonction f_0 qui représente conformément D sur ce domaine Δ, et satisfait aux conditions (α, β, γ); et les dérivées de tous ordres de f_R convergent vers les dérivées correspondantes de f_0. En faisant $z = e^{i\theta}$ on obtient ainsi le comportement asymptotique de $f(R\,e^{i\theta})$.

Nous avons déjà appliqué cette méthode ([12]) à la démonstration du théorème fondamental de M. Ostrowski sur la conservation des angles dans la représentation conforme, ainsi qu'au premier théorème sur les plis du même auteur. Le problème de M. Ostrowski correspond au cas où $f_0(z)$ est de la forme $A\,z^\lambda$ (A et λ étant des constantes réelles). Pour que ce cas soit réalisé, il faut et il suffit que la famille Δ_ρ converge autour du point μ_0 vers l'angle $|\arg \zeta| < \lambda \frac{\pi}{2}$.

On peut appliquer la même méthode à l'étude asymptotique de la fonction $f(z)$ qui représente conformément la bande D du plan de la

---

([12]) J. FERRAND, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. **59**, 1942, p. 78 et suiv.

variable $z=x+iy$ définie par $|y|<a$, sur un domaine Δ : il suffit de considérer la famille des fonctions $f_R(z)=f(z+R)-f(R)$ qui représentent conformément D sur le domaine Δ_R déduit de Δ par la translation $-f(R)$.

L'étude de ce cas fera l'objet d'un travail ultérieur.