JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ALEXANDRE OSTROWSKI

Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de I. Schur

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 253-292.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__253_0>

Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de I. Schur;

Par Alexandre OSTROWSKI

(Bâle).

1. Dans plusieurs travaux, M. Montel (¹) a mis en relief l'intérêt que présentent les fonctions sousharmoniques comme une généralisation naturelle des fonctions convexes d'une variable. Toutefois, pour certaines questions spéciales, d'autres généralisations des fonctions convexes au cas de plusieurs variables présentent un certain intérêt. Parmi ces généralisations celle due à I. Schur (²) est peut-être la moins connue et la plus importante.

Cependant la notion introduite par Schur peut être encore généralisée, puisque Schur s'est borné aux fonctions des variables *positives*, une condition qui devient trop restrictive dans certaines applications. D'autre part les critères établies par Schur pour les fonctions qu'il a introduites sont un peu incomplètes, puisque sa condition suffisante suppose l'existence des dérivées secondes.

2. Schur a appliqué sa théorie au problème suggéré par le célèbre théorème d'Hadamard. Soient

$$(1) \qquad H(X) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} h_{\mu\nu}\bar{x}_{\mu}x_{\nu}, \qquad X = (x_1, \ldots, x_n)$$

(¹) *Cf.* par exemple [12]. (Les numéros entre crochets se rapportent à la bibliographie à la fin du Mémoire.)

(²) *Cf.* I. Schur [18].

une forme hermitique des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ d'un vecteur X et $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les racines fondamentales de la matrice $H = (h_{\mu\nu})$, que nous supposons ordonnées en croissant

$$\omega_1 \leqq \omega_2 \leqq \ldots \leqq \omega_n. \tag{2}$$

Alors l'inégalité d'Hadamard se réduit à l'inégalité ([3])

$$h_{11} h_{22} \ldots h_{nn} \geqq \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n, \tag{3}$$

valable pour chaque forme hermitique *positive*; et le résultat principal de Schur consiste en ce qu'une fonction $G(x_1, \ldots, x_n)$ *concave* dans le sens qu'il définit, satisfait toujours l'inégalité

$$G(h_{11}, h_{22}, \ldots, h_{nn}) \geqq G(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$

pour chaque forme (1) positive.

3. Nous démontrons dans cette direction (théorème XV, n° 27) que pour chaque k, $1 \leqq k < n$, et pour chaque fonction $G(x_1, \ldots, x_k)$ concave au sens de Schur et *croissante en* $x_1, \ldots, x_k$, on a l'inégalité

$$G(h_{11}, \ldots, h_{kk}) \geqq G(\omega_1, \ldots, \omega_k). \tag{4}$$

Il existe une inégalité analogue pour chaque fonction $F(x_1, \ldots, x_k)$ convexe et croissante en $x_1, \ldots, x_k$:

$$F(h_{11}, \ldots, h_{kk}) \leqq F(\sigma_1, \ldots, \sigma_k), \tag{5}$$

où $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont les racines fondamentales de H ordonnées dans l'ordre non croissant

$$\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \ldots \geqq \sigma_n \qquad (\sigma_\nu = \omega_{n-\nu+1}). \tag{6}$$

La méthode utilisée dans la démonstration de (4) et (5) peut être aussi utilisée pour généraliser certaines inégalités établies depuis 1949 par MM. H. Weyl, Ky Fan, G. Pólya et A. Horn ([4]). Nous montrons (nos **29-33**) que les fonctions du type $\sum_{\varkappa=1}^{k} \varphi(x_\varkappa)$, utilisées par

([3]) *Cf.* E. Fischer [5].
([4]) *Cf.* [3], [8], [17] et [22] dans la bibliographie.

ces auteurs dans leurs énoncés, peuvent être remplacées par des fonctions beaucoup plus générales.

4. Le paragraphe I (nos **5-11**) de ce Mémoire est consacré à la discussion d'une classe de transformations linéaires introduite par I. Schur et que nous appelons les *transformations* S. Hardy, Littlewood et Pólya [5] ont donné une condition nécessaire et suffisante pour que deux n-tuples de nombres soient liés par une transformation S. Leur démonstration étant difficile, nous donnons dans le paragraphe I une autre démonstration de ce théorème. Ensuite nous démontrons un lemme (le théorème II) qui est fondamental pour nos développements et qui permet d'étendre la plupart des résultats connus de cette théorie aux cas essentiellement plus généraux.

Au paragraphe II (nos **12-16**) nous considérons les fonctions de plusieurs variables convexes S et concaves S et établissons différentes inégalités valables pour ces fonctions.

Dans le paragraphe III (nos **17-21**) nous établissons des critères différentiels pour la convexité S en généralisant et précisant quelques résultats de Schur. Ces critères nous permettent au paragraphe IV d'établir pour certaines classes de fonctions (nos **21-25**) de plusieurs variables le caractère de convexité S ou concavité S. La plus grande partie de ces fonctions a été déjà considérée par Schur. Nous avons dû revenir sur ces exemples pour établir aussi le *caractère de monotonie* de ces fonctions, qui joue un rôle important dans nos développements.

Enfin nous donnons au paragraphe V (nos **26-38**) les applications de la théorie générale à la généralisation des théorèmes mentionnés de Schur, Weyl, Ky Fan et A. Horn.

On peut d'ailleurs déduire nos généralisations du théorème de Schur de ce théorème même, beaucoup plus directement en appliquant un théorème important, mais apparemment un peu oublié (théorème XVII), d'après lequel les racines fondamentales des mineurs principaux d'ordre $n-1$ d'une matrice hermitique d'ordre n séparent les racines fondamentales de cette matrice.

(5) *Cf.* [7], p. 91. *Cf.* aussi *Karamata* [9].

On peut d'ailleurs obtenir, en combinant le théorème XVII avec les inégalités (4) et (5), un résultat généralisant considérablement le principe de Fischer-Courant ([6]) (théorème XIX).

I. — Les transformations S.

5. Une transformation

$$(7) \qquad y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} s_{\mu\nu} x_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

sera appelée une *transformation* S et sa matrice une *matrice* S, si elle satisfait aux trois postulats suivants :

I. *Si l'on a* $x_1 = \ldots = x_n = x$, *il en suit toujours* $y_1 = \ldots = y_n = x$.

II. $\min\limits_\mu y_\mu \geqq \min\limits_\nu x_\nu$.

III. *On a toujours* $y_1 + \ldots + y_n = x_1 + \ldots + x_n$.

Du postulat II il résulte évidemment

$$(8) \qquad s_{\mu\nu} \geqq 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n),$$

puisque si s_{kl} était < 0, on aurait une contradiction en posant $x_l = 1$, $x_\nu = 0 \, (\nu \neq l)$. Les postulats I et III donnent les conditions

$$(9) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} s_{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} s_{\mu\nu} = 1 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n),$$

et l'ensemble des conditions (8) et (9) est évidemment équivalent aux postulats I, II et III. Il résulte d'ailleurs de ces trois postulats que le produit des transformations S est toujours une transformation S.

Une matrice S conserve cette propriété si l'on permute d'une manière quelconque les lignes et les colonnes. Supposons donc que pour deux systèmes (y_μ), (x_ν), liés par (7), on ait

$$(10) \qquad x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n; \qquad y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_n.$$

On a alors le théorème suivant, dû à Hardy, Littlewood et Pólya ([7]).

([6]) *Cf.* R. COURANT [2], p. 19 et E. FISCHER [4].

([7]) *Cf.* [6] et [7], p. 91.

THÉORÈME I. — *Pour que les* $2n$ *nombres* (10) *soient liés par une transformation* S, (7), *les relations suivantes sont nécessaires et suffisantes :*

$$(11\,a)\qquad y_1+\ldots+y_n=x_1+\ldots+x_n,$$

$$(11\,b)\qquad y_1+\ldots+y_k\leqq x_1+\ldots+x_k\qquad(k=1,\ldots,n-1).$$

6. *Démonstration.* — En sommant les k premières relations (7) on obtient une identité

$$(12)\qquad \sum_{\mu=1}^{k} y_\mu=\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu x_\nu,$$

où les t_ν satisfont aux relations

$$(13)\qquad 0\leqq t_\nu\leqq 1,\qquad \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu=k.$$

En soustrayant des deux côtés de (12) $x_1+\ldots+x_k$, on a

$$(14)\qquad \sum_{\mu=1}^{k} y_\mu-\sum_{\nu=1}^{k} x_\nu=\sum_{\varkappa=1}^{k-1}(t_\varkappa-1)(x_\varkappa-x_k)+\sum_{\lambda=k+1}^{n} t_\lambda(x_\lambda-x_k),$$

et ici chaque terme de droite est $\leqq 0$ d'après (13) et (10). La nécessité des relations (11 b) est démontrée.

Supposons maintenant que les relations (10), (11 a) et (11 b) soient satisfaites. En soustrayant de chacun des x_ν, y_ν une constante C, les relations (10), (11 a) et (11 b) restent inchangées, et d'autre part, l'existence de la transformation S, (7), n'est pas influencée. Nous pouvons donc supposer que l'on a, au lieu de (11 a),

$$(15)\qquad x_1+\ldots+x_n=y_1+\ldots+y_n=0.$$

L'assertion du théorème est alors immédiate si tous les x_ν s'annulent, car dans ce cas y_1, le maximum des y_ν, est $\leqq 0$, donc en vertu de (15), chaque y_ν s'annule. Donc, en démontrant notre théorème, nous pouvons supposer que l'on a

$$x_1>0>x_n.$$

7. Pour $n=2$ la démonstration du théorème I est immédiate. Dans ce cas (15) et (11 b) se réduisent aux relations

$$(16)\qquad 0\leqq y_1\leqq x_1,\qquad y_2=-y_1,\qquad x_2=-x_1,$$

et il s'agit de trouver un ε, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, pour lequel on a

$$y_1 = (1-\varepsilon)x_1 + \varepsilon x_2, \qquad y_2 = \varepsilon x_1 + (1-\varepsilon)x_2.$$

Mais ces relations se réduisent en vertu de (16) à la relation $y_1 = (1-2\varepsilon)x_1$, qui peut être toujours satisfaite pour $0 \leqq \varepsilon \leqq \frac{1}{2}$ en vertu de la première inégalité (16).

Nous pouvons donc supposer que notre théorème soit déjà démontré pour toutes valeurs plus petites de n.

Si l'on a dans (11 b) le signe d'égalité pour $k = m$, nous dirons qu'il y a une *coïncidence* entre les x_ν et y_ν *pour l'indice* m.

L'assertion du théorème se vérifie maintenant immédiatement s'il y a une coïncidence pour un indice $m < n$. En effet, dans ce cas, les relations (11 b) et (15) se réduisent aux deux systèmes de relations

$$\begin{gathered} y_1 \leqq x_1, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ y_1 + \ldots + y_m = x_1 + \ldots + x_m, \\ y_{m+1} \leqq x_{m+1}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ y_{m+1} + \ldots + y_n = x_{m+1} + \ldots + x_n. \end{gathered}$$

Mais alors, en appliquant notre théorème pour m et $m - n$, on déduit les y_μ des x_ν par une transformation S décomposable dans deux transformations partielles S d'ordre m l'une et d'ordre $n - m$ l'autre.

8. Nous pouvons donc supposer qu'il n'y a de signe d'égalité en (11 b) pour aucun $k < n$.

Soient maintenant x_p le plus petit x_ν *positif* et x_q le plus grand x_ν *négatif* : $x_p > 0 > x_q$. Formons n nombres $z_1, \ldots, z_n$:

$$(17) \qquad z_p = x_p - \varepsilon, \qquad z_q = x_q + \varepsilon, \qquad z_\nu = x_\nu \qquad (\nu \neq p, q).$$

Ces n nombres sont ordonnés en décroissant pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et en tout cas pour $0 \leqq \varepsilon \leqq \min(x_p, -x_q)$, et l'on a alors assurément

$$(18) \qquad \begin{cases} z_1 + \ldots + z_k \leqq x_1 + \ldots + x_k \qquad (k = 1, \ldots, n-1), \\ z_1 + \ldots + z_n = 0. \end{cases}$$

Je dis que *les* z_ν *se déduisent des* x_ν *par une transformation* S. En effet, il y a dans les relations (18) une égalité pour $k=1$ si p est >1 et pour $k=n-1$ si q est $<n$. Il suffit donc de considérer le cas $p=1$, $q=n$, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$x_1>0, \qquad x_2=\ldots=x_{n-1}=0, \qquad x_n=-x_1,$$
$$z_1=x_1-\varepsilon\geqq 0, \qquad z_2=\ldots=z_{n-1}=0, \qquad z_n=-z_1.$$

Mais alors, il suffit de démontrer qu'on peut exprimer z_1, z_n par x_1, x_n moyennant une transformation S binaire, et ceci résulte immédiatement du théorème I pour $n=2$,

Donnons maintenant à ε dans (17) la plus petite valeur positive pour laquelle ou bien il y a une coïncidence pour un indice $m<n$ entre les z_ν et les y_ν, ou bien $z_p z_q$ s'annule. Dans le premier cas les y_ν peuvent être exprimés par les z_ν moyennant S et l'assertion du théorème I est démontrée.

Dans le second cas nous avons remplacé les x_ν par les n nombres z_ν, où le nombre des zéros parmi les z_ν est plus grand que le nombre des zéros parmi les x_ν.

En itérant le même procédé on remplace finalement les x_ν par un système de n nombres consistant en zéros et le théorème I est démontré.

9. On déduit du théorème I très facilement un critère analogue, relatif au cas où les nombres (10) sont ordonnés en croissant :

$$(10\,a) \qquad x_1\leqq x_2\leqq\ldots\leqq x_n; \qquad y_1\leqq y_2\leqq\ldots\leqq y_n.$$

THÉORÈME Ia. — *Pour que les* $2n$ *nombres* (10 a) *soient liés par une transformation* S, (7), *les relations suivantes sont nécessaires et suffisantes :*

$$(11\,a) \qquad x_1+\ldots+x_n=y_1+\ldots+y_n,$$
$$(11\,c) \qquad x_1+\ldots+x_k\leqq y_1+\ldots+y_k \qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1).$$

Démonstration. — Posons

$$\xi_\nu=-x_\nu, \qquad \eta_\nu=-y_\nu \qquad (\nu=1,\ \ldots,\ n).$$

Les relations (11 a) et (11 c) sont alors équivalentes avec les relations

$$\eta_1+\ldots+\eta_n=\xi_1+\ldots+\xi_n,$$
$$\eta_1+\ldots+\eta_k\leqq\xi_1+\ldots+\xi_k \qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1),$$

qui, d'après le théorème I, sont nécessaires et suffisantes pour que les η_ν soient représentables par les ξ_ν moyennant une transformation S. Mais une telle représentation est équivalente à un système de formules (7).

10. Nous aurons à utiliser dans la suite le lemme suivant :

Théorème II. — *Supposons que les* $2n$ *nombres* x_ν, y_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ *satisfont les relations* (10) *et*

$$(19) \qquad y_1 + \ldots + y_k \leqq x_1 + \ldots + x_k \qquad (k = 1, \ldots, n-1, n).$$

Alors on peut trouver n *nombres* $z_1, \ldots, z_n$ *satisfaisant aux relations*

$$(20) \qquad y_\nu \leqq z_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$(21) \qquad z_1 \geqq z_2 \geqq \ldots \geqq z_n,$$

$$(22) \qquad \begin{cases} z_1 + \ldots + z_n = x_1 + \ldots + x_n, \\ z_1 + \ldots + z_k \leqq x_1 + \ldots + x_k \qquad (k = 1, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Démonstration. — Nous allons faire croître les y_ν de sorte que les relations (10) subsistent et dans les inégalités (19) on obtient le signe d'égalité pour l'indice k de plus en plus grand. Faisons d'abord croître y_1 jusqu'à ce qu'on ait le signe d'égalité dans une des relations (19) et soit $k = m$ le plus grand indice pour lequel on a le signe d'égalité. Alors on peut écrire les inégalités (19)

$$(23) \qquad \begin{cases} y_1 + \ldots + y_k \leqq x_1 + \ldots + x_k & (k < m), \\ y_1 + \ldots + y_m = x_1 + \ldots + x_m, \\ y_1 + \ldots + y_l < x_1 + \ldots + x_l & (l > m), \end{cases}$$

où m est $\geqq 1$. Soit $m < n$, on a assurément

$$(24) \qquad y_m \geqq x_m \geqq x_{m+1} > y_{m+1}.$$

Pour $m = 1$ c'est évident, pour $m > 1$ on obtient la première et la dernière relation (24) en comparant les relations (23) relatives à $k = m-1, m, m+1$.

De (24) il résulte que si l'on remplace y_{m+1} par x_{m+1}, on aurait le signe d'égalité dans la relation (23) pour $k = m+1$, tandis que les inégalités (10) subsistent. Donc, en faisant croître y_{m+1}, on obtient pour la première fois le signe d'égalité en (23) pour un indice $l > m$, tandis que (10) subsiste, c'est-à-dire, on parvient à remplacer l'indice m par un indice plus grand. En répétant le même procédé, on obtient enfin le signe d'égalité dans la relation (19) pour $k=n$, et le théorème II est démontré.

11. Dans le travail déjà cité, Hardy, Littlewood et Pólya ([8]) ont démontré le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *La possibilité de satisfaire aux relations* (10), (11 a) *et* (11 b), *après un changement de numérotage convenable, est nécessaire et suffisante pour que l'inégalité*

$$\varphi(y_1)+\ldots+\varphi(y_n)\leqq\varphi(x_1)+\ldots+\varphi(x_n) \tag{25}$$

soit valable pour toute fonction $\varphi(x)$ *continue et convexe.*

Nous allons démontrer ce théorème ensemble avec le théorème suivant, analogue au théorème III :

THÉORÈME III a. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que la relation* (25) *soit satisfaite pour chaque fonction* $\varphi(x)$ *continue, convexe et croissante, consiste en ceci, qu'après un changement convenable de numérotage, les relations suivantes sont satisfaites :*

$$x_1\geqq\ldots\geqq x_n;\qquad y_1\geqq\ldots\geqq y_n, \tag{10}$$

$$y_1+\ldots+y_k\leqq x_1+\ldots+x_k\qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1,\ n). \tag{19}$$

Démonstration de la nécessité des conditions des théorèmes III *et* III a. — Supposons que dans l'hypothèse (10) la relation (25) soit satisfaite pour chaque fonction $\varphi(x)$ continue, convexe et *croissante*. Appliquons (25) à la fonction donnée par

$$\varphi(x)=\begin{cases} x-x_k & (x\geqq x_k),\\ 0 & (x\leqq x_k),\end{cases} \tag{26}$$

où k est un des nombres $1,\ \ldots,\ n$. On a évidemment pour ce $\varphi(x)$:

$$\varphi(y)\geqq y-x_k,\qquad \varphi(y)\geqq 0. \tag{27}$$

([8]) *Cf.* [6] et [7], p. 89. *Cf.* aussi *Karamata* [9].

L'expression de droite en (25) devient alors égale à $x_1+\ldots+x_k-kx_k$. D'autre part, on a, d'après (27),

$$\varphi(y_1)+\ldots+\varphi(y_k)\geqq y_1+\ldots+y_k-kx_k, \qquad \varphi(y_{k+1})+\ldots+\varphi(y_n)\geqq 0,$$

et l'expression de gauche en (25) est $\geqq y_1+\ldots+y_k-kx_k$, de sorte qu'on a

$$y_1+\ldots+y_k-kx_k\leqq x_1+\ldots+x_k-kx_k,$$

et la $k^{\text{ième}}$ inégalité (19) est démontrée ($k=1, \ldots, n$).

Si l'inégalité (25) est aussi valable pour les fonctions convexes, continues et *décroissantes*, on obtient en l'appliquant à $-x$:

$$-y_1-\ldots-y_n\leqq -x_1-\ldots-x_n,$$

ce qui, pris ensemble avec l'inégalité (19) pour $k=n$, donne l'égalité (11 *a*).

Le fait, que les conditions des théorèmes III et III *a* sont *suffisantes*, résultera dans la suite des théorèmes V *a* et IV, en les combinant avec le théorème XII.

II. — Convexité S et concavité S.

12. Soit J un intervalle ouvert quelconque sur l'axe des x, fini ou infini dans une ou deux directions. L'intervalle symétrique à J par rapport à l'origine sera désigné par $-J$, celui obtenu de J en remplaçant chaque point x de J par $x+C$, sera désigné par $J+C$.

Pour un entier $k\geqq 1$ nous désignons par D_J le domaine

$$(28) \qquad (D_J) \quad x_1 \prec J, \quad \ldots, \quad x_k\prec J$$

dans l'espace à k dimensions. Nous écrirons parfois au lieu de D_J, $D_J^{(k)}$, pour indiquer le nombre des dimensions de l'espace en question. Par D nous désignons dans la suite D_J où J est l'intervalle $x>0$.

Soit

$$(29) \qquad y_\mu=\sum_{\nu=1}^{k} s_{\mu\nu}x_\nu \qquad (\mu=1, \ldots, k)$$

une transformation S quelconque, c'est-à-dire satisfaisant aux relations

$$(30)\qquad s_{\mu\nu} \geqq 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{k} s_{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^{k} s_{\mu\nu} = 1 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, k).$$

Si le point $x_1, \ldots, x_k$ est situé dans un domaine D_J, il en est de même pour le point $y_1, \ldots, y_k$.

Une fonction $F(x_1, \ldots, x_k)$, $k > 1$, sera désignée comme *convexe* S *dans* D_J, si pour chaque système $x_1, \ldots, x_k$ satisfaisant à (28) on a l'inégalité

$$(31)\qquad F(y_1, \ldots, y_k) \leqq F(x_1, \ldots, x_k),$$

où les y_μ sont liés aux x_ν par une transformation S quelconque, (29). Évidemment, chaque permutation des variables x_μ est une transformation S et il en est de même pour l'inverse de cette permutation. Il résulte qu'une fonction $F(x_1, \ldots, x_k)$ convexe S en D_J y est *symétrique*.

Nous appelons en particulier une fonction F *convexe* S *au sens étroit dans* D_J, si pour chaque point de D_J et pour chaque transformation S, (29), on a

$$(32)\qquad F(y_1, \ldots, y_k) < F(x_1, \ldots, x_k),$$

sauf si $y_1, \ldots, y_k$ sont une permutation des $x_1, \ldots, x_k$.

D'une manière analogue, une fonction $G(x_1, \ldots, x_k)$ sera appelée *concave* S *dans* D_J, si l'on a pour chaque point de D_J et pour chaque transformation S, (29),

$$(33)\qquad G(y_1, \ldots, y_k) \geqq G(x_1, \ldots, x_k).$$

G sera appelée *concave* S *au sens étroit en* D_J, si le signe d'égalité dans (33) n'est possible que si $y_1, \ldots, y_k$ sont une permutation des $x_1, \ldots, x_k$. On obtient évidemment d'une fonction convexe S (au sens étroit), en la multipliant par -1, une fonction concave S (au sens étroit) en D_J et vice versa [9].

Il résulte des définitions données que si $F(x_1, \ldots, x_k)$ est une

---

[9] I. Schur, qui a introduit ces notions, ne considère [18] que les fonctions *concaves* et le domaine D.

fonction convexe en D_J, pour chaque constante C,

$$F(x_1+C,\ x_2+C,\ \ldots,\ x_k+C)$$

est convexe dans D_{J-C}. Une remarque analogue s'applique aux fonctions concaves aussi bien qu'aux fonctions convexes et concaves au sens étroit.

Il résulte des définitions (31) et (33) que si $F(x_1, \ldots, x_k)$ est convexe S dans D_J la fonction $F(-x_1, \ldots, -x_k)$ est convexe S dans D_{-J}. Le fait analogue subsiste pour les fonctions concaves S dans D_J.

La fonction $x_1+\ldots+x_k$ est évidemment convexe et concave à la fois dans tout l'espace.

13. Théorème IV. — *Soit* $F(x_1, \ldots, x_k)$ *pour* $k>1$, *croissante* (10) *en* $x_1, \ldots, x_k$ *et convexe* S *dans* D_J.

Soient $x_1, \ldots, x_k$; $y_1, \ldots, y_k$ $2k$ *nombres situés en* J, *et satisfaisant aux relations*

$$(34)\qquad y_1\geqq\ldots\geqq y_k;\qquad x_1\geqq\ldots\geqq x_k,$$

$$(35)\qquad y_1+\ldots+y_\varkappa\leqq x_1+\ldots+x_\varkappa\qquad (\varkappa=1,\ \ldots,\ k).$$

Alors on a l'inégalité (31) (11).

Si F *est convexe au sens étroit dans* D_J, *le signe d'égalité en* (31) *n'est possible que si l'on a*

$$y_\varkappa=x_\varkappa\qquad(\varkappa=1,\ \ldots,\ k).$$

Démonstration. — D'après le théorème II, il existe k nombres $z_1, \ldots, z_k$ satisfaisant aux relations

$$(34\,a)\qquad \begin{gathered} y_\varkappa\leqq z_\varkappa\qquad(\varkappa=1,\ \ldots,\ k),\\ z_1\geqq z_2\geqq\ldots\geqq z_k,\\ z_1+\ldots+z_\varkappa\leqq x_1+\ldots+x_\varkappa\qquad(\varkappa=1,\ \ldots,\ k-1),\\ z_1+\ldots+z_k=x_1+\ldots+x_k.\end{gathered}$$

(10) Nous disons ici et dans la suite : « croissant » au lieu de « non décroissant » et « décroissant » au lieu de « non croissant ». S'il s'agit des fonctions *strictement* croissantes ou *strictement* décroissantes, nous ajoutons les mots : « au sens étroit ».

(11) La Note [17] de M. Pólya contient ce résultat pour le cas où $F(x_1, \ldots, x_k)$ a la forme particulière $\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_k)$. Mais l'artifice par lequel M. Pólya démontre son résultat ne paraît pas être généralisable au cas général.

On a donc

$$(36) \qquad F(y_1, \ldots, y_k) \leqq F(z_1, \ldots, z_k).$$

D'après le théorème I, les $z_\varkappa$ se déduisent des $x_\varkappa$ par une transformation S. Les $z_\varkappa$ sont donc situés dans J et l'on a

$$(37) \qquad F(z_1, \ldots, z_k) \leqq F(x_1, \ldots, x_k).$$

(31) est démontré.

Si F est *convexe au sens étroit* dans D_J et l'on a le signe d'égalité dans (31), on a le signe d'égalité dans (36) et (37). Mais alors, F étant croissante au sens étroit [12], on a

$$y_\varkappa = z_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

et il résulte de l'égalité en (37) et de (34), (34 *a*) que l'on a en effet

$$y_\varkappa = x_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

Le théorème IV est démontré.

14. Comme corollaire on obtient facilement :

Théorème IV *a*. — *Soient* $x_1 \geqq \ldots \geqq x_n$; $y_1 \geqq \ldots \geqq y_n$ $2n$ *nombres situés en* J *et satisfaisant aux relations*

$$(38) \qquad y_1 + \ldots + y_\varkappa \leqq x_1 + \ldots + x_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n-1),$$

$$(39) \qquad y_1 + \ldots + y_n = x_1 + \ldots + x_n.$$

Alors, si pour un k, $k = 2, \ldots, n$, $G(x_1, \ldots, x_k)$ *est concave* S *dans* D_J *et pour* $k < n$ *croissante en* $x_1, \ldots, x_k$, *on a*

$$(40) \qquad G(y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k+1}) \geqq G(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k+1}).$$

Démonstration. — D'après le théorème I, il résulte de nos hypothèses que les $y_\varkappa$ se déduisent des $x_\varkappa$ par une transformation S. Donc en posant

$$-y_{n-\varkappa+1} = \eta_\varkappa, \qquad -x_{n-\varkappa+1} = \xi_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n),$$

[12] En effet, si F était constante en x_1 dans un sous-intervalle J_1 de J pour un système des valeurs constantes $x_2, \ldots, x_k$, on aurait évidemment le signe d'égalité dans (31) pour des valeurs constantes des $x_1, \ldots, x_k$; $y_2, \ldots, y_k$ et pour une valeur variable de y_1, ce qui serait en contradiction avec la convexité au sens étroit.

les $\eta_\varkappa$ se déduisent des $\xi_\varkappa$ par une transformation S et l'on a, $\eta_\varkappa$ et $\xi_\varkappa$ étant dans l'ordre décroissant, les relations

$$\eta_1+\ldots+\eta_n=\xi_1+\ldots+\xi_n,$$
$$\eta_1+\ldots+\eta_\varkappa\leqq\xi_1+\ldots+\xi_\varkappa \qquad (\varkappa=1, \ldots, n-1).$$

D'autre part, la fonction $-G(-x_1, \ldots, -x_k)$ est convexe S dans D_{-J} et pour $k<n$ croissante en $x_1, \ldots, x_k$. Donc, puisque $\eta_1, \ldots, \eta_k$; $\xi_1, \ldots, \xi_k$ sont situés dans $-J$, on a par le théorème IV.

$$-G(-\eta_1, \ldots, -\eta_k)\leqq -G(-\xi_1, \ldots, -\xi_k),$$
$$G(y_n, \ldots, y_{n-k+1})\geqq G(x_n, \ldots, x_{n-k+1}).$$

13. Indiquons maintenant les énoncés correspondant aux théorèmes IV et IV *a* dans le cas où les inégalités (35) sont valables, les y_ν et les x_ν étant *ordonnés dans le sens croissant.*

Théorème V. — *Soit* $G(x_1, \ldots, x_k)$ *pour* $k>1$, *croissante en* $x_1, \ldots, x_k$ *et concave* S *dans* D_J. *Soient*

(41) $$y_1\leqq\ldots\leqq y_k; \qquad x_1\leqq\ldots\leqq x_k$$

$2k$ *nombres situés en* J *et ordonnés dans le sens croissant. Alors si l'on a*

$$y_1+\ldots+y_\varkappa\leqq x_1+\ldots+x_\varkappa \qquad (\varkappa=1, \ldots, k),$$

il résulte l'inégalité

(42) $$G(y_1, \ldots, y_k)\leqq G(x_1, \ldots, x_k).$$

Si G *est concave au sens étroit dans* D_J, *le signe d'égalité en* (42) *n'est possible que si l'on a*

$$y_\varkappa=x_\varkappa \qquad (\varkappa=1, \ldots, k).$$

En effet, posons $-x_\nu=\eta_\nu$, $-y_\nu=\xi_\nu$ $(\nu=1, \ldots, k)$,

$$-G(-x_1, \ldots, -x_k)=F(x_1, \ldots, x_k).$$

Alors on a

$$\eta_1+\ldots+\eta_\varkappa\leqq\xi_1+\ldots+\xi_\varkappa \qquad (\varkappa=1, \ldots, k),$$

F est convexe et croissante en D_J, de sorte qu'on a, d'après le théorème IV,

$$F(\eta_1, \ldots, \eta_k)\leqq F(\xi_1, \ldots, \xi_k),$$

ce qui est identique avec (42).

THÉORÈME V *a*. — *Soient*

$$(43)\qquad x_1 \leqq \ldots \leqq x_n; \qquad y_1 \leqq \ldots \leqq y_n,$$

$2n$ *nombres situés en* J *et satisfaisant aux relations* (38) *et* (39). *Alors, si pour un* k, $k = 2, \ldots, n$, $F(x_1, \ldots, x_k)$ *est convexe* S *dans* D_J *et pour* $k < n$ *croissante en* $x_1, \ldots, x_k$, *on a*

$$(44)\qquad F(y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k+1}) \geqq F(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k+1}).$$

On déduit (44) immédiatement du théorème IV *a* en appliquant ce théorème à la fonction $G(x_1, \ldots, x_k) = -F(-x_1, \ldots, -x_k)$ et aux nombres $\eta_\nu = -x_\nu$, $\xi_\nu = -y_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, k)$, qui satisfont aux conditions du théorème IV *a*.

16. THÉORÈME VI. — *Soient pour* $k > 1$, $G(x_1, \ldots, x_k)$ *croissante en* $x_1, \ldots, x_k$ *et concave* S *dans* D_J, *et* $F(x_1, \ldots, x_k)$ *croissante en* $x_1, \ldots, x_k$ *et convexe* S *dans* D_J.

Soient pour $n > k$ *les* $x_1, \ldots, x_n$ *situés en* J. *Désignons les* x_ν *ordonnés en croissant par*

$$(2)\qquad \omega_1 \leqq \ldots \leqq \omega_n,$$

et ordonnés en décroissant par

$$(6)\qquad \sigma_1 \geqq \ldots \geqq \sigma_n \qquad (\sigma_\nu = \omega_{n-\nu+1}).$$

Alors, si les $y_1, \ldots, y_n$ *se déduisent des* $x_1, \ldots, x_n$ *par une transformation* S, (7), *on a les inégalités*

$$(45)\qquad G(y_1, \ldots, y_k) \geqq G(\omega_1, \ldots, \omega_k),$$
$$(46)\qquad F(y_1, \ldots, y_k) \leqq F(\sigma_1, \ldots, \sigma_k).$$

Dans le cas où F *est convexe au sens étroit dans* D_J, *le signe d'égalité en* (46) *n'est possible que si* $y_1, \ldots, y_k$ *sont une permutation des* $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$. *Le fait analogue subsiste pour* $G(x_1, \ldots, x_k)$.

Démonstration. — Dans les hypothèses du théorème $-G(-x_1, \ldots, -x_k)$ est croissante en $x_1, \ldots, x_k$ et convexe S dans D_{-J}. Il suffit donc dans la démonstration du théorème de se borner à la démonstration de (46).

On peut évidemment supposer que l'on ait $y_1 \geqq \ldots \geqq y_k$, F étant une fonction symétrique. Désignons les y_ν ordonnés en décroissant par $\eta_1 \geqq \ldots \geqq \eta_n$. On a alors assurément

$$(47) \qquad y_1 \leqq \eta_1, \quad y_2 \leqq \eta_2, \quad \ldots, \quad y_k \leqq \eta_k.$$

D'autre part, (7) peut être écrite après des permutations convenables des lignes et des colonnes dans la forme

$$\eta_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} s'_{\mu\nu}\sigma_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

où la matrice $(s'_{\mu\nu})$ est une matrice S. On a donc, d'après le théorème I,

$$\eta_1 + \ldots + \eta_\varkappa \leqq \sigma_1 + \ldots + \sigma_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

et d'après (47),

$$y_1 + \ldots + y_\varkappa \leqq \sigma_1 + \ldots + \sigma_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

Mais alors le théorème IV est applicable et (46) résulte de (31). Le théorème VI est démontré.

III. — Critères de convexité S et concavité S.

17. Théorème VII. — *Pour qu'une fonction* $F(x_1, \ldots, x_k)$ *symétrique et douée des dérivées partielles continues du premier ordre dans* D_J, *y soit convexe* S, *il est nécessaire et suffisant que l'on ait pour chaque point* $x_1, \ldots, x_k$ *de* D_J :

$$(48) \qquad (x_2 - x_1)\left(\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial x_1}\right) \geqq 0 \quad (^{13}).$$

Démonstration. — Supposons que $F(x_1, \ldots, x_k)$ soit convexe S dans D_J. On a alors pour la transformation S :

$$y_1 = (1-\varepsilon)x_1 + \varepsilon x_2, \quad y_2 = \varepsilon x_1 + (1-\varepsilon)x_2, \quad y_3 = x_3, \quad \ldots, \quad y_k = x_k,$$

$$(49) \qquad \frac{F(x_1, \ldots, x_k) - F(y_1, \ldots, y_k)}{\varepsilon} \geqq 0 \qquad (0 < \varepsilon < 1).$$

---

[13] Dans le Mémoire de Schur [**18**], p. 11 la condition analogue à (48) pour les fonctions concaves ne se trouve indiquée que comme une condition *nécessaire*.

Pour $\varepsilon \downarrow 0$ l'expression de gauche en (49) tend vers l'expression de gauche en (48), et *la nécessité* de notre condition est démontrée.

Notre démonstration que la condition (48) est *suffisante*, repose sur le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *Si une fonction* $F(x_1, \ldots, x_k)$ *symétrique continue et douée des dérivées partielles continues du premier ordre en* D_J *jouit de la propriété que l'on ait dans* D_J :

$$(50) \qquad (x_2 - x_1)\left(\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial x_1}\right) > 0 \qquad (x_2 \neq x_1),$$

chaque fois que $x_2 \lesseqgtr x_1$, F *est convexe* S *au sens étroit dans* D_J [14].

18. *Démonstration du théorème* VIII. — F étant symétrique, il résulte évidemment de (50) que chaque fois que l'on a $x_\varkappa < x_\lambda$, on a aussi

$$(51) \qquad F'_{x_\varkappa} < F'_{x_\lambda} \qquad (x_\varkappa < x_\lambda).$$

Soit $x_1, \ldots, x_k$ un système de variables situées dans J, que nous supposons ordonnées dans l'ordre croissant

$$(52) \qquad x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_k.$$

Quand est-il possible, que dans les conditions du théorème VIII, on ait

$$(53) \qquad F(y_1, \ldots, y_k) \geqq F(x_1, \ldots, x_k),$$

où les $y_\varkappa$ se déduisent des x_λ par une transformation S, (29) ?

L'expression de gauche en (53) étant une fonction continue des coefficients $s_{\mu\nu}$ de la transformation (29), qui forment un ensemble fermé, il existe une transformation S, (29), S_0, pour laquelle l'expression de gauche en (53) atteint son *maximum*.

Nous pouvons donc supposer que $F(y_1, \ldots, y_k)$ ait déjà la valeur maximum. On peut faire évidemment l'hypothèse

$$(54) \qquad y_1 \leqq y_2 \leqq \ldots \leqq y_k.$$

---

[14] Dans le Mémoire [18], p. 12-14 de Schur, on trouve une condition *suffisante* pour les fonctions concaves au sens étroit qui implique l'existence des dérivées secondes.

Si l'on a $x_1 = \ldots = x_k$, les $y_1, \ldots, y_k$ ont la même valeur et l'assertion du théorème VIII est évidente. Supposons donc que l'on ait dans (52)

$$x_1 = \ldots = x_p < x_{p+1} \leqq \ldots \leqq x_k, \qquad 1 \leqq p < k;$$

l'assertion du théorème VIII se réduit maintenant à ce qu'on a

$$y_\nu = x_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, k).$$

19. Soient $\varkappa$ un des nombres $1, \ldots, p$ et λ un des nombres $p+1, \ldots, k$, de sorte que

$$(55) \qquad \varkappa \leqq p, \qquad \lambda \geqq p+1, \qquad x_\lambda - x_\varkappa > 0.$$

Soient d'autre part, α et β deux indices, avec

$$(56) \qquad 1 \leqq \alpha < \beta \leqq k$$

et supposons que l'ont ait

$$s_{\alpha\lambda} s_{\beta\varkappa} \neq 0.$$

Alors, pour chaque $\varepsilon \geqq 0$ suffisamment petit, on peut déduire de la transformation (29) une autre transformation, S_ε, en posant

$$(S_\varepsilon) \begin{cases} s'_{\alpha\varkappa} = s_{\alpha\varkappa} + \varepsilon, & s'_{\alpha\lambda} = s_{\alpha\lambda} - \varepsilon; \\ s'_{\beta\varkappa} = s_{\beta\varkappa} - \varepsilon, & s'_{\beta\lambda} = s_{\beta\lambda} + \varepsilon \end{cases}$$

et en laissant les autres coefficients de (29) inchangés. S_ε est, pour ε suffisamment petit, encore une transformation S. En désignant par $y'_1, \ldots, y'_k$ les valeurs obtenues des $x_1, \ldots, x_k$ par la transformation S_ε, on a

$$y'_\alpha = y_\alpha + \varepsilon(x_\varkappa - x_\lambda), \qquad y'_\beta = y_\beta - \varepsilon(x_\varkappa - x_\lambda), \qquad y'_\sigma = y_\sigma \qquad (\sigma \neq \alpha, \beta),$$
$$y'_\beta - y'_\alpha = (y_\beta - y_\alpha) + 2\varepsilon(x_\lambda - x_\varkappa).$$

Posons

$$F(y'_1, \ldots, y'_k) = \varphi(\varepsilon),$$

on a alors

$$\varphi'(\varepsilon) = (x_\lambda - x_\varkappa)\left(\frac{\partial}{\partial y'_\beta} - \frac{\partial}{\partial y'_\alpha}\right) F(y'_1, \ldots, y'_k)$$

et d'après (55) et (51)

$$\operatorname{sign} \varphi'(\varepsilon) = \operatorname{sign}[y_\beta - y_\alpha + 2\varepsilon(x_\lambda - x_\varkappa)].$$

Mais alors il résulte de (54), (55) et (56) que l'on a $\varphi'(\varepsilon) > 0$ pour toutes $\varepsilon > 0$ suffisamment petites, et ceci est en contradiction avec l'hypothèse que la valeur de $F(y_1, \ldots, y_k)$ est déjà maximum. On a donc

$$s_{\alpha\lambda} s_{\beta\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa \leqq p < \lambda,\ \alpha < \beta). \tag{57}$$

20. Écrivons maintenant la matrice S_0 sous la forme

$$S_0 = \begin{pmatrix} P_p & R_1 \\ R_2 & Q_{k-p} \end{pmatrix},$$

où P_p et Q_{k-p} sont des matrices quadratiques d'ordre p, $k-p$; je dis que *les matrices* R_1, R_2 *ne consistent qu'en zéros*. En effet, supposons qu'un élément de R_1, $s_{\alpha\lambda}(\alpha \leqq p, \lambda > p)$, ne soit pas zéro. Alors il résulte de (57) que l'on a

$$s_{\beta\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa \leqq p,\ \beta > \alpha),$$

de sorte qu'en particulier tous les éléments de R_2 s'annulent.

En appliquant maintenant les relations (30) aux p premières colonnes de S_0, on obtient

$$\sum_{\alpha,\pi=1}^{p} s_{\alpha\pi} = p. \tag{58}$$

Mais alors, en appliquant les relations (30) aux p premières lignes de S_0, il résulte de (30) et (58) que tous les éléments de R_1 s'annulent, contrairement à l'hypothèse.

La démonstration que $R_2 \equiv 0$ se fait d'une manière symétrique, de sorte que la matrice S_0 est *complètement décomposable* :

$$S_0 = \begin{pmatrix} P_p & 0 \\ 0 & Q_{k-p} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

L'assertion du théorème VIII résulte maintenant immédiatement pour $k = 2$, puisque alors d'après (55), on a $p = k - p = 1$ et d'après (30) S_0 devient la *matrice unité* d'ordre 2.

Nous pouvons donc supposer que le théorème VIII soit démontré pour les valeurs plus petites de k. D'après (59), (55) et (30) on a maintenant

$$y_1 = \ldots = y_p = x_1 = \ldots = x_p,$$

de sorte que la relation (53) devient

$$F(x_1, \ldots, x_p; y_{p+1}, \ldots, y_k) \geqq F(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_k).$$

Il s'agit donc maintenant d'une fonction de $k-p$ variables et de la matrice Q_{k-p}, qui est naturellement aussi une matrice S. Mais alors le théorème VIII est applicable à cette fonction, on obtient

$$y_{p+1} = x_{p+1}, \quad \ldots, \quad y_k = x_k,$$

et le théorème VIII est démontré.

21. Retournons maintenant au théorème VII du n° **17**, et supposons que la condition (48) soit satisfaite. Considérons la fonction

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_k^2).$$

Ici on a évidemment

$$(x_2 - x_1)(f'_{x_2} - f'_{x_1}) = (x_2 - x_1)^2 > 0 \qquad (x_2 \neq x_1).$$

Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ la fonction

$$F^*(x_1, \ldots, x_k) = F(x_1, \ldots, x_k) + \varepsilon f(x_1, \ldots, x_k)$$

satisfait la condition (50) du théorème VIII, de sorte qu'il en résulte l'inégalité générale

$$(60) \quad F(y_1, \ldots, y_k) + \varepsilon f(y_1, \ldots, y_k) \leqq F(x_1, \ldots, x_k) + \varepsilon f(x_1, \ldots, x_k)$$

et pour $\varepsilon \downarrow 0$ il résulte de (60) que F est en effet une fonction convexe S. Le théorème VII est démontré.

IV. — Exemples des fonctions convexes S et concaves S.

22. Dans ce qui suit nous utilisons le symbole

$$(61) \qquad \bar{\Delta} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right).$$

Nous désignons les fonctions élémentaires symétriques des variables

$x_1, \ldots, x_k$ par $c_1, \ldots, c_k$, de sorte que l'on a

$$c_\varkappa = \Sigma x_1 \ldots x_\varkappa. \tag{62}$$

De même nous désignons pour $k > 2$ les fonctions élémentaires symétriques des $x_3, x_4, \ldots, x_k$ par $d_1, \ldots, d_{k-2}$ ([15]) et les fonctions élémentaires symétriques des $x_2, \ldots, x_k$ par $D_1, \ldots, D_{k-1}$. Nous posons en outre

$$d_0 = D_0 = 1; \qquad d_{-1} = d_{k-1} = d_k = D_k = 0.$$

Alors on a

$$c_\varkappa = x_1 x_2 d_{\varkappa-2} + (x_1 + x_2) d_{\varkappa-1} + d_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k), \tag{63}$$

$$c_\varkappa = x_1 D_{\varkappa-1} + D_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k). \tag{64}$$

Rappelons les inégalités connues valables dans le domaine D_0, c'est-à-dire pour les $x_\varkappa$ positives,

$$c_1 > \frac{c_2}{c_1} > \ldots > \frac{c_k}{c_{k-1}}, \tag{65}$$

$$\frac{c_1}{k} \geqq \sqrt{\frac{c_2}{\binom{k}{2}}} \geqq \ldots \geqq \sqrt[\varkappa]{\frac{c_\varkappa}{\binom{k}{\varkappa}}} \geqq \ldots \geqq \sqrt[k]{c_k}. \tag{66}$$

Théorème IX. — *Les fonctions*

$$c_2, \quad \ldots, \quad c_k; \qquad \frac{c_2}{c_1}, \quad \frac{c_3}{c_2}, \quad \ldots, \quad \frac{c_k}{c_{k-1}} \tag{67}$$

sont concaves au sens étroit, ainsi que croissantes au sens étroit dans D ([16]).

La *concavité* resulte des formules qu'on déduit immédiatement de (63) :

$$\left\{ \begin{aligned} \bar\Delta c_\varkappa &= (x_1 - x_2) d_{\varkappa-2} \qquad (\varkappa = 2, \ldots, k), \\ c_\varkappa^2 \bar\Delta \frac{c_{\varkappa+1}}{c_\varkappa} &= (x_1^2 - x_2^2)(d_{\varkappa-1}^2 - d_{\varkappa-2} d_\varkappa) + (x_1 - x_2)(d_{\varkappa-1} d_\varkappa - d_{\varkappa-2} d_{\varkappa+1}), \end{aligned} \right. \tag{68}$$

([15]) *Cf.* Schur [**18**], p. 15.

([16]) La concavité des fonctions (67) au sens étroit se trouve démontrée dans Schur [**18**], p. 15.

puisque $d_{\varkappa-2}(k \geqq 2)$ et, d'après les inégalités (65) appliquées aux $d_\varkappa$, les expressions $(d_{\varkappa-1}^2 - d_{\varkappa-2}\, d_\varkappa)$, $(d_{\varkappa-1}\, d_\varkappa - d_{\varkappa-2}\, d_{\varkappa+1})$ sont >0 en D.

En utilisant (64), on a

$$\frac{\partial c_\varkappa}{\partial x_1} = \mathrm{D}_{\varkappa-1}, \qquad c_\varkappa^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{c_{\varkappa+1}}{c_\varkappa} = \mathrm{D}_\varkappa^2 - \mathrm{D}_{\varkappa-1}\mathrm{D}_{\varkappa+1},$$

et la *monotonie* des fonctions (67) est démontrée.

23. Théorème X. — *Les fonctions*

$$g_{\varkappa,\lambda}(x_1, \ldots, x_k) = c_1^\varkappa c_{\lambda+2} - \gamma_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa+\lambda+2} \tag{69}$$

sont pour

$$\gamma_{\varkappa,\lambda} \leqq (k-2)^\varkappa \frac{\binom{k-2}{\lambda}}{\binom{k-2}{\varkappa+\lambda}} \qquad (\varkappa > 0,\ \varkappa + \lambda + 2 \leqq k) \tag{70}$$

concaves au sens étroit et croissantes en $x_1, \ldots, x_k$ dans D ([17]).

Démonstration. — On obtient, d'après (68),

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1 - x_2} \bar{\Delta} g_{\varkappa,\lambda} &= c_1^\varkappa\, d_\lambda - \gamma_{\varkappa,\lambda}\, d_{\varkappa+\lambda} > d_1^\varkappa\, d_\lambda - \gamma_{\varkappa,\lambda}\, d_{\varkappa+\lambda} \\ &= d_1^{\varkappa+\lambda}[d_\lambda\, d_1^{-\lambda} - \gamma_{\varkappa,\lambda}\, d_{\varkappa+\lambda}\, d_1^{-\varkappa-\lambda}], \end{aligned}$$

et ici l'expression entre crochets est $\geqq 0$, puisqu'on a en appliquant les inégalités (66) aux $d_1, \ldots, d_k$:

$$d_\lambda\, d_1^{-\lambda} \geqq (k-2)^\varkappa \frac{\binom{k-2}{\lambda}}{\binom{k-2}{\varkappa+\lambda}} d_{\varkappa+\lambda}\, d_1^{-\varkappa-\lambda}.$$

Donc $g_{\varkappa,\lambda}$ est concave en D au sens étroit. D'autre part, on obtient en vertu de (64)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g_{\varkappa,\lambda} > \varkappa\, \mathrm{D}_1^{\varkappa-1}\, \mathrm{D}_{\lambda+2} + \mathrm{D}_1^\varkappa\, \mathrm{D}_{\lambda+1} - \gamma_{\varkappa,\lambda}\, \mathrm{D}_{\varkappa+\lambda+1},$$

$$\mathrm{D}_1^{-\varkappa-\lambda-1} \frac{\partial}{\partial x_1} g_{\varkappa,\lambda} > \mathrm{D}_{\lambda+1}\, \mathrm{D}_1^{-\lambda-1} - \gamma_{\varkappa,\lambda}\, \mathrm{D}_{\varkappa+\lambda+1}\, \mathrm{D}_1^{-\varkappa-\lambda-1}. \tag{71}$$

([17]) La concavité des fonctions (69), dans le cas $\varkappa + \lambda + 2 = k$, se trouve démontrée dans Schur [**18**], p. 16.

Mais il résulte des inégalités (66) appliquées aux D_ν :

$$\begin{aligned} D_{\lambda+1}\,D_1^{-\lambda-1} &\geqq (k-1)^{\varkappa}\frac{\binom{k-1}{\lambda+1}}{\binom{k-1}{\varkappa+\lambda+1}}\,D_{\varkappa+\lambda+1}\,D_1^{-\varkappa-\lambda-1} \\ &= (k-1)^{\varkappa}\frac{\binom{k-2}{\lambda}}{\binom{k-2}{\varkappa+\lambda}}\,\frac{\varkappa+\lambda+1}{\lambda+1}\,D_{\varkappa+\lambda+1}\,D_1^{-\varkappa-\lambda-1} \\ &\geqq (k-1)^{\varkappa}\frac{\binom{k-2}{\lambda}}{\binom{k-2}{\varkappa+\lambda}}\,D_{\varkappa+\lambda+1}\,D_1^{-\varkappa-\lambda-1}, \end{aligned}$$

et l'on voit que l'expression de gauche en (71) est > 0, de sorte que $g_{\varkappa,\lambda}$ est croissante en $x_1, \ldots, x_k$ dans D.

THÉORÈME XI. — *Les expressions*

$$s_\rho = x_1^\rho + \ldots + x_k^\rho \tag{72}$$

sont convexes au sens étroit dans D *pour* $\rho > 1$ *et* $\rho < 0$. s_ρ *est convexe au sens étroit dans tout l'espace, si* ρ *est un entier pair positif.*

Cela résulte immédiatement de l'identité $\bar{\Delta} s_\rho = \rho(x_2^{\rho-1} - x_1^{\rho-1})$.

24. THÉORÈME XII. — *Soit* $\varphi(x)$ *continue et convexe pour* $x \prec \mathrm{J}$. *Alors*

$$\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_k) \tag{73}$$

est convexe S *dans* D_{J} (18).

En effet, il résulte de (29), d'après (30), que l'on a pour chaque μ :

$$\varphi(y_\mu) \leqq \sum_{\nu=1}^{k} s_{\mu\nu}\,\varphi(x_\nu),$$

(18) *Cf.* SCHUR [18], p. 16.

et en sommant par rapport à μ on obtient

$$\varphi(y_1)+\ldots+\varphi(y_k) \leqq \varphi(x_1)+\ldots+\varphi(x_k).$$

En appliquant à (73) les théorèmes IV et Va (pour $k=\varkappa$), on voit immédiatement que les conditions des théorèmes IIIa et III sont suffisantes, ce qui achève la démonstration de ces deux théorèmes.

THÉORÈME XIII. — *Soit* $\varphi(x)$ *pour* $x \prec J$ *positive, douée de la dérivée première et convexe ainsi que* $\log\varphi(x)$. *Posons,* $c_\varkappa$ *étant définie par* (62),

$$T_\varkappa(x_1, \ldots, x_k) = c_\varkappa[\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)] \qquad (\varkappa > 1). \tag{74}$$

Alors $T_\varkappa$ *est convexe dans* D_J, *et même convexe dans* D_J *au sens étroit si* $\varphi(x)$ *n'est constante dans aucun sous-intervalle de* J. $T_\varkappa$ *est croissante si* $\varphi(x)$ *est croissante.*

Démonstration. — On a en différentiant

$$\frac{\partial T_\varkappa}{\partial x_1} = [\varphi(x_2)\, d_{\varkappa-2} + d_{\varkappa-1}]\varphi'(x_1),$$

où dans $d_{\varkappa-1}$ et $d_{\varkappa-2}$ on a remplacé $x_3, \ldots, x_k$ par $\varphi(x_3), \ldots, \varphi(x_k)$. En soustrayant on obtient

$$\bar{\Delta} T_\varkappa = d_{\varkappa-1}[\varphi'(x_2)-\varphi'(x_1)] + \varphi(x_1)\varphi(x_2)\, d_{\varkappa-2}\left[\frac{\varphi'(x_2)}{\varphi(x_2)} - \frac{\varphi'(x_1)}{\varphi(x_1)}\right] \tag{75}$$

et l'on voit que pour $x_2 > x_1$ $\bar{\Delta} T_\varkappa$ est $\geqq 0$, puisque, d'après les hypothèses, les expressions entre crochets sont $\geqq 0$.

Supposons maintenant que $\varphi(x)$ n'est constante dans aucun sous-intervalle de J. Alors, si $\varphi(x)$ est linéaire dans un intervalle (u, v), $\varphi(x) = ax+b$, $a \neq 0$, on a

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{a}{ax+b},$$

et cette fonction étant croissante d'après les hypothèses dans (u, v), y est *croissante au sens étroit.* Mais alors la deuxième partie du théorème s'obtient de (75) immédiatement.

25. THÉORÈME XIV. — *Soit* $S(x_1, \ldots, x_k)$ *croissante en* $x_\varkappa$ *et convexe* S *dans* D_J. *Soit* $\varphi(x)$ *convexe dans* J_1 *et telle que la valeur* *de $\varphi(x)$ en J_1 appartient à J. Alors $S[\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)]$ est convexe en D_{J_1}. Cet énoncé reste vrai, si l'on y remplace partout convexité par concavité.*

En effet, on a en vertu de (29) et (30)

$$\varphi(y_\mu) \leqq \sum_{\nu=1}^{k} s_{\mu\nu}\varphi(x_\nu),$$

donc, S étant croissante et convexe S,

$$S[\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_k)] \leqq S\left[\sum_{\nu=1}^{k} s_{1\nu}\varphi(x_\nu), \ldots, \sum_{\nu=1}^{k} s_{k\nu}\varphi(x_\nu)\right] \leqq S[\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)].$$

Le raisonnement pour le cas de concavité est complètement analogue.

En multipliant S par -1, on obtient deux énoncés analogues :

Si $S(x_1, \ldots, x_k)$ est décroissante en $x_1, \ldots, x_k$ et si l'une des fonctions S, $\varphi(x)$ est convexe S et l'autre concave S', $S[\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)]$ présente le même caractère que $S(x_1, \ldots, x_k)$.

V. — Applications des théorèmes IV et V.

26. Les inégalités (4) et (5) peuvent être exprimées d'une façon un peu plus générale en introduisant un système « *orthonormé* » de vecteurs

$$(76) \qquad X_1, \quad \ldots, \quad X_n, \qquad X_\mu X_\nu = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & (\mu \neq \nu), \\ 1 & (\mu = \nu). \end{cases}$$

Par une transformation unitaire orthogonale, qui ne change pas les ω_ν, on peut faire les éléments de la diagonale principale de H égaux aux

$$(77) \qquad H(X_1), \quad \ldots, \quad H(X_n).$$

Les inégalités (4) et (5) se transforment alors dans les inégalités

$$(78) \qquad G[H(X_1), \ldots, H(X_k)] \geqq G(\omega_1, \ldots, \omega_k),$$

$$(79) \qquad F[H(X_1), \ldots, H(X_k)] \leqq F(\sigma_1, \ldots, \sigma_k).$$

27. Théorème XV. — *Soit* (1) *une forme hermitique aux racines fondamentales que nous désignons en les ordonnant en croissant par* (2) *et en les ordonnant en décroissant par* (6). *Soient pour un* k, $1 \leqq k \leqq n$, $F(x_1, \ldots, x_k)$, $G(x_1, \ldots, x_k)$ *deux fonctions en* $x_1, \ldots, x_k$ *croissantes pour* $k < n$, *dont la première est convexe* S *et la seconde concave* S *dans* D_J *où* $\omega_1 \prec J$, $\omega_n \prec J$. *Alors, si* $X_1, \ldots, X_k$ *sont* k *vecteurs orthonormés, on a* (78) *et* (79) ([19]).

Démonstration. — Désignons les coordonnées des vecteurs X_μ du système orthonormé (76) par

$$X_\mu(x_1^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}) \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

alors on a

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu^{(\mu)}|^2 = \sum_{\mu=1}^{n} |x_\nu^{(\mu)}|^2 = 1 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n).$$

Donc, en posant $|x_\nu^{(\mu)}|^2 = s_{\mu\nu}$, on obtient une matrice S.

On peut écrire la forme hermitique $H(X)$ dans la forme

$$H(X) = \omega_1 |x_1|^2 + \ldots + \omega_n |x_n|^2,$$

après une transformation préalable unitaire orthogonale dans l'espace des x_ν. Les expressions des $H(X_\mu)$ deviennent alors

$$H(X_\mu) = \sum_{\nu=1}^{n} s_{\mu\nu}\omega_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

et les inégalités (78) et (79) découlent pour $k < n$ immédiatement des formules (45) et (46) du théorème VI et pour $k = n$ des formules (31) et (33). Le théorème XV est démontré.

On déduit comme un corollaire immédiat du théorème XV les relations

$$(80) \qquad \min G[H(X_1), \ldots, H(X_k)] = G(\omega_1, \ldots, \omega_k),$$

$$(81) \qquad \max F[H(X_1), \ldots, H(X_k)] = F(\sigma_1, \ldots, \sigma_k),$$

où $X, \ldots, X_k$ parcourent tout système de k vecteurs orthonormés (76).

([19]) Pour $k = n$, $D_J = D$, ce théorème se trouve chez Schur [18], p. 17.

On peut remplacer en particulier dans les relations (80) et (81) les fonctions $F(x_1, \ldots, x_k)$, $G(x_1, \ldots, x_k)$ par la somme $x_1 + \ldots + x_k$, et l'on obtient alors deux relations trouvées il y a un an par M. Ky Fan ([20]).

28. En appliquant (78) à $c_k = x_1 \ldots x_k$, on obtient dans le cas d'une forme hermitique *positive* l'inégalité

$$H(X_1) \ldots H(X_k) \geqq \omega_1 \ldots \omega_k \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{82}$$

qui permet évidemment une interprétation géométrique très simple. Considérons par exemple pour $n = 3$, $k = 2$ l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a \geqq b \geqq c) \tag{83}$$

et soient P, Q deux points sur cet ellipsoïde tels que l'on ait $OP \perp OQ$; alors on a

$$OP \times OQ \leqq ab. \tag{84}$$

On obtient dans les mêmes hypothèses, du théorème IX :

$$c_\nu[H(X_1), \ldots, H(X_k)] \geqq c_\nu(\omega_1, \ldots, \omega_k) \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1), \tag{85}$$

une inégalité qui admet évidemment une interprétation géométrique très élégante.

Il résulte du théorème IX que

$$\frac{c_k}{c_{k-1}} \frac{c_{k-1}}{c_{k-2}} \cdots \frac{c_2}{c_1} = \frac{c_k}{c_1} \tag{86}$$

est une fonction croissante et concave en D ([21]). On a donc de (78),

---

([20]) *Cf.* [3], la première note, p. 653.

([21]) Ceci résulte en particulier de la propriété suivante qu'on déduit immédiatement des définitions (31), (33) : Si $\varphi_\mu(x_1, \ldots x_n)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ sont tous convexes S ou tous concaves S dans D_J et si $f(z_1, \ldots, z_m)$ est croissante pour les valeurs z_μ que les fonctions φ_μ prennent indépendamment dans D_J, alors $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est dans D_J, convexe S dans le premier cas et concave S dans le second.

pour une forme H *positive*,

$$\frac{H(X_1)\ldots H(X_k)}{\omega_1\ldots\omega_k} \geqq \frac{H(X_1)+\ldots+H(X_k)}{\omega_1+\ldots+\omega_k} \geqq 1. \tag{87}$$

En appliquant (79) aux expressions (72) du théorème XI, on obtient pour une forme H *positive* les inégalités

$$H(X_1)^\rho+\ldots+H(X_k)^\rho \leqq \sigma_1^\rho+\ldots+\sigma_k^\rho \qquad (\rho>1). \tag{88}$$

Dans le cas général, où H n'est pas supposée nécessairement positive, on obtient en ajoutant à H la forme $u(|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2)$ pour $u>-\omega_1$, l'inégalité

$$(h_{11}+u)^\rho+\ldots+(h_{kk}+u)^\rho \leqq (\sigma_1+u)^\rho+\ldots+(\sigma_k+u)^\rho \qquad (\rho>1,\ u>-\omega_1). \tag{89}$$

D'après le théorème XII la fonction $e^{px_1}+\ldots+e^{px_k}$ est convexe et croissante dans tout l'espace pour chaque constante positive p. On obtient donc de (79)

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} e^{pH(X_k)} \leqq \sum_{\varkappa=1}^{k} e^{p\sigma_k}. \tag{90}$$

D'autre part, pour $p>0$, $\varphi(x)=e^{px}$, $\varphi(x)$ et $\log\varphi(x)$ sont convexes et croissantes dans tout l'espace. On obtient donc en appliquant les théorèmes XV et XIII par exemple à $\varkappa=2$ et $k=3$, l'inégalité

$$e^{p[H(X_1)+H(X_2)]}+e^{p[H(X_2)+H(X_3)]}+e^{p[H(X_3)+H(X_1)]} \leqq e^{p(\sigma_1+\sigma_2)}+e^{p(\sigma_2+\sigma_3)}+e^{p(\sigma_3+\sigma_1)}. \tag{91}$$

29. Soit A une matrice quadratique *non singulière* d'ordre n. Désignons les racines fondamentales de A, c'est-à-dire des racines de l'équation $|xE-A|=0$, par $\lambda_\nu (\nu=1, \ldots, n)$ dans l'ordre décroissant des modules :

$$|\lambda_1| \geqq \ldots \geqq |\lambda_n|. \tag{92}$$

Le produit AA^* de A avec la matrice renversée conjuguée A^* de A a, comme on sait, les racines fondamentales positives que nous désignons par $\rho_1^2, \ldots, \rho_n^2$, où

$$\rho_1 \geqq \ldots \geqq \rho_n > 0. \tag{93}$$

On doit à Aitken et Turnbull (22) d'un côté et à H. Weyl (23) d'un autre les relations

$$(94) \qquad |\lambda_1|\ldots|\lambda_\nu| \leqq \rho_1\ldots\rho_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

où l'on a naturellement le signe d'égalité pour $\nu = n$. On peut évidemment écrire

$$(95) \qquad \sum_{\nu=1}^{k} \log|\lambda_\nu| \leqq \sum_{\nu=1}^{k} \log\rho_\nu \qquad (k = 1, \ldots, n-1),$$

$$(96) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \log|\lambda_\nu| = \sum_{\nu=1}^{n} \log\rho_\nu.$$

Nos inégalités (31) et (40) sont donc applicables et l'on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME XVI. — *Soient pour* $1 \leqq k \leqq n$, $\Phi(x_1, \ldots, x_k)$ *et* $\Gamma(x_1, \ldots, x_k)$ *définies pour* $x_1, \ldots, x_k$ *positifs, et telles que la première des fonctions*

$$(97\,a) \qquad \Phi(e^{x_1}, \ldots, e^{x_k}) = F(x_1, \ldots, x_k),$$

$$(97\,b) \qquad \Gamma(e^{x_1}, \ldots, e^{x_k}) = G(x_1, \ldots, x_k)$$

est convexe S *et la seconde concave* S *dans tout l'espace. Alors on a, si pour* $k < n$, Φ, Γ *sont en outre croissantes en* $x_1, \ldots, x_k$,

$$(98\,a) \qquad \Phi(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_k|) \leqq \Phi(\rho_1, \ldots, \rho_k),$$

$$(98\,b) \qquad \Gamma(|\lambda_n|, \ldots, |\lambda_{n-k+1}|) \geqq \Gamma(\rho_n, \ldots, \rho_{n-k+1}).$$

En effet, il suffit d'appliquer aux fonctions (97 *a*) et (97 *b*) les inégalités (31) du théorème IV et (40) du théorème IV *a*. Dans les cas où l'on a

$$(99\,a) \qquad \Phi(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\varkappa=1}^{k} \varphi(x_\varkappa),$$

$$(99\,b) \qquad \Gamma(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\varkappa=1}^{k} \psi(x_\varkappa),$$

---

(22) Dans le livre [1], p. 110, exemple 17.

(23) Dans la Note [22].

on retombe sur le résultat donné par H. Weyl, avec une certaine restriction relative au comportement de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ pour $x \downarrow 0$, qui a été levée par M. G. Pólya ([24]).

30. En démontrant (98 *a*) et (98 *b*), nous n'avons évidemment utilisé que les relations (92), (93) et (94). Or, les systèmes des relations analogues ont été déduits par MM. Ky Fan ([25]) et A. Horn ([26]) dans quelques problèmes apparentés à celui traité par M. Weyl.

M. Ky Fan a montré que si l'on considère pour $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\alpha + \beta = 1$ les racines fondamentales de $\alpha AA^* + \beta A^*A$ et les désigne dans l'ordre décroissant par $\rho_1'^2, \ldots, \rho_n'^2$ avec $\rho_1', \ldots, \rho_n'$ positives, on a les relations

$$|\lambda_1| \ldots |\lambda_\nu| \leqq \rho_1' \ldots \rho_\nu' \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{100}$$

$$\rho_1'^2 + \ldots + \rho_\nu'^2 \leqq \rho_1^2 + \ldots + \rho_\nu^2 \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{101}$$

On voit d'ailleurs immédiatement, les traces des matrices AA^* et $\alpha AA^* + \beta A^*A$ étant égales, qu'on a en (101) *l'égalité* pour $\nu = n$:

$$\rho_1'^2 + \ldots + \rho_n'^2 = \rho_1^2 + \ldots + \rho_n^2. \tag{102}$$

Il résulte de (100), par le théorème IV, les relations

$$\Phi(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_k|) \leqq \Phi(\rho_1', \ldots, \rho_k') \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{103}$$

où Φ est définie comme dans le théorème XVI et est supposée *croissante pour $k = n$ aussi.*

Des relations (101) et (102) on obtient les inégalités

$$F(\rho_1'^2, \ldots, \rho_k'^2) \leqq F(\rho_1^2, \ldots, \rho_k^2) \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{104 a}$$

$$G(\rho_n'^2, \ldots, \rho_{n-k+1}'^2) \geqq G(\rho_n^2, \ldots, \rho_{n-k+1}^2) \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{104 b}$$

Ici on suppose F, G croissantes pour $k < n$, F convexe S et G concave S dans D_J, où $\rho_1^2 \prec J$, $\rho_n^2 \prec J$. On trouve les inégalités (103) et (104 *a*) dans le cas (99 *a*) chez M. Ky Fan.

([24]) Dans la Note [**17**].
([25]) Dans [**3**], la seconde note.
([26]) Dans [**8**].

31. D'autre part, M. A. Horn ([26]) a démontré que si A, B et AB = C sont des matrices quadratiques non singulières d'ordre n et les racines fondamentales de AA^*, BB^*, CC^* sont désignées respectivement, écrites dans l'ordre décroissant, par α_ν, β_ν, $\gamma_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ on a

$$\gamma_1 \ldots \gamma_\nu \leqq (\alpha_1\beta_1) \ldots (\alpha_\nu\beta_\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{105}$$

Ici on a naturellement le signe d'égalité pour $\nu = n$. On obtient donc en faisant sur $\Phi(x_1, \ldots, x_k)$, $\Gamma(x_1, \ldots, x_k)$, les mêmes hypothèses que dans le théorème XVI,

$$\Phi(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \leqq \Phi(\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_k\beta_k) \qquad (1 \leqq k \leqq n), \tag{106 a}$$

$$\Gamma(\gamma_n, \ldots, \gamma_{n-k+1}) \geqq \Gamma(\alpha_n\beta_n, \ldots, \alpha_{n-k+1}\beta_{n-k+1}) \qquad (1 \leqq k \leqq n). \tag{106 b}$$

On trouve (106 a) dans le cas (99 a) chez M. A. Horn.

32. Pour $A = (a_{\mu\nu})$ et le vecteur $X = (x_1, \ldots, x_n)$ l'expression

$$A(X) \equiv \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu \tag{107}$$

sera désignée comme *la valeur de* A *pour le vecteur* X. D'après O. Tœplitz ([27]), chaque racine fondamentale λ de A est la valeur de A pour un vecteur unimodulaire, X.

D'après un théorème connu de I. Schur, il existe une matrice unitaire $U = (u_{\mu\nu})$ telle que l'on a

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{108}$$

où tous les éléments de la matrice de droite au-dessus de la diagonale principale s'annulent. Désignons le vecteur formé par les éléments de la $s^{\text{ième}}$ colonne de U par

$$X_s = (u_{1s}, \ldots, u_{ns}) \qquad (s = 1, \ldots, n). \tag{109}$$

([27]) [**21**], p. 190.

Les vecteurs X_s forment un système orthonormé de vecteurs. D'autre part, on obtient de (108), en calculant l'expression d'un élément λ_s de la diagonale principale dans la matrice de droite

$$\lambda_s = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \bar{u}_{\mu s} u_{\nu s},$$

$$\lambda_s = A(X_s) \qquad (s = 1, \ldots, n). \tag{110}$$

On voit que *l'ensemble des racines fondamentales de* A *peut être représenté comme l'ensemble des valeurs de* A *pour un système orthonormé de vecteurs* ([28]).

33. D'après Tœplitz ([29]), A peut être décomposée d'une manière unique dans la forme

$$A = H + iK, \tag{111}$$

où H et K sont des matrices hermitiques, et l'on a en particulier

$$H = \frac{A + A^*}{2}, \qquad K = \frac{A - A^*}{2i}. \tag{112}$$

Il résulte de (110) et (111)

$$\mathcal{R}\lambda_s = H(X_s), \qquad \mathcal{J}\lambda_s = K(X_s).$$

Désignons les racines fondamentales de H et K, ordonnées dans le

---

([28]) On obtient de (110), (107) et (109),

$$\lambda_s = \sum_{\mu=1}^{n} u_{\mu s} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} u_{\nu s};$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\lambda_s|^2 \leqq \sum_{\mu=1}^{n} \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} u_{\nu s} \right|^2 = |AX_s|^2,$$

où $|AX_s|$ est la longueur du vecteur AX_s. Les inégalités $|\lambda_s| \leqq |AX_s|$ $(s = 1, \ldots, n)$ ont été indiquées par M. Ky Fan [3], la première note, p. 655.

([29]) [21], p. 189.

sens décroissant, respectivement par σ_ν, σ'_ν :

$$(113) \qquad (\mathrm{H}) \quad \sigma_1 \geqq \ldots \geqq \sigma_n, \qquad (\mathrm{K}) \quad \sigma'_1 \geqq \ldots \geqq \sigma'_n.$$

Alors on a, en appliquant le théorème XV, les inégalités

$$(114\,a) \quad \mathrm{F}(\mathcal{R}\lambda_1, \ldots, \mathcal{R}\lambda_k) \leqq \mathrm{F}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \qquad (k=1, \ldots, n),$$
$$(114\,b) \quad \mathrm{G}(\mathcal{R}\lambda_1, \ldots, \mathcal{R}\lambda_k) \geqq \mathrm{G}(\sigma_n, \ldots, \sigma_{n-k+1}) \qquad (k=1, \ldots, n),$$
$$(115\,a) \quad \mathrm{F}(\mathcal{J}\lambda_1, \ldots, \mathcal{J}\lambda_k) \leqq \mathrm{F}(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_k) \qquad (k=1, \ldots, n),$$
$$(115\,b) \quad \mathrm{G}(\mathcal{J}\lambda_1, \ldots, \mathcal{J}\lambda_k) \geqq \mathrm{G}(\sigma'_n, \ldots, \sigma'_{n-k+1}), \qquad (k=1, \ldots, n).$$

Dans (114 a) et (115 a) F est supposée convexe S et pour $k < n$ croissante dans $\mathrm{D_J}$ où J contient σ_1 et σ_n pour (114 a) et σ'_1 et σ'_n pour (115 a). G est supposée concave S et pour $k < n$ croissante dans $\mathrm{D_J}$ où J contient σ_1 et σ_n pour (114 b) et σ'_1 et σ'_n pour (115 b).

M. Ky Fan (30) donne les inégalités correspondant à (114 a) dans le cas où F a la forme (99 a), $\varphi(x)$ étant supposée convexe et croissante, et indique l'existence des inégalités analogues pour $\mathcal{J}\lambda_s$.

34. Les relations (78) et (79) du théorème XV qui se trouvent pour $k=n$ déjà chez I. Schur ont été démontrées ici pour $k<n$ en utilisant le théorème II. On peut aussi déduire ces résultats pour $k<n$ du cas considéré par Schur, en appliquant le théorème suivant :

THÉORÈME XVII. — *Désignons les racines fondamentales de la forme hermitique*

$$(116) \qquad \mathrm{H}_1(\mathrm{X}) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n-1} h_{\mu\nu}\bar{x}_\mu x_\nu,$$

section $(n-1)^{ième}$ *de la forme hermitique* (1), *par*

$$(117) \qquad \omega'_1 \leqq \omega'_2 \leqq \ldots \leqq \omega'_{n-1}.$$

Ces racines « séparent » les racines fondamentales (2) *de la forme* H(X) :

$$(118) \qquad \omega_1 \leqq \omega'_1 \leqq \omega_2 \leqq \omega'_2 \leqq \ldots \leqq \omega_{n-1} \leqq \omega'_{n-1} \leqq \omega_n.$$

---

(30) [3], la seconde note, p. 34.

Ce théorème ([31]) peut être démontré de différentes manières. Voici une démonstration par un calcul algébrique assez rapide :

Les racines (117) et (2) restent évidemment invariables si l'on exerce sur les variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$ une transformation unitaire, en laissant inchangé x_n. Nous pouvons donc supposer dès le commencement que l'on a

$$(119)\quad \begin{cases} H_1(X) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \omega'_\nu \, |x_\nu|^2, \\ H(X) = H_1(X) + x_n \sum_{\mu=1}^{n-1} h_\mu \bar{x}_\mu + \bar{x}_n \sum_{\mu=1}^{n-1} \bar{h}_\mu x_\mu + h_n |x_n|^2, \end{cases}$$

où h_n est réel. Il suffit de considérer le cas où dans (119) les ω'_ν sont différents entre eux et tous les h_μ sont $\neq 0$. On en déduit le théorème dans le cas général par un passage à la limite.

Les polynomes fondamentaux de H_1 et H sont respectivement

$$D_{n-1}(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{n-1} (\lambda - \omega'_\nu),$$

$$(120)\quad D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \omega'_1 & 0 & \ldots & 0 & -h_1 \\ 0 & \lambda - \omega'_2 & \ldots & 0 & -h_2 \\ \cdot & \cdots\cdots & \ldots & \cdot & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda - \omega'_{n-1} & -h_{n-1} \\ -\bar{h}_1 & -\bar{h}_2 & \ldots & -\bar{h}_{n-1} & \lambda - h_n \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant on obtient

$$(121)\quad D_n(\lambda) = D_{n-1}(\lambda) \left[\lambda - h_n - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{|h_\nu|^2}{\lambda - \omega'_\nu} \right] \quad ([32]).$$

Or, l'expression entre crochets change évidemment le signe entre $-\infty$

([31]) I. Schur utilise ce théorème par exemple dans [**19**], p. 289 et [**20**], sans donner des indications bibliographiques précises. *Cf.* aussi G. Julia [**10**], p. 200.

([32]) L'expression entre crochets est une fonction rationnelle « à termes entrelacés » au sens de M. Montel, *cf.* [**13**] et [**14**].

et ω'_1, entre ω'_1 et ω'_2, ..., entre ω'_{n-1} et l'infini, et le théorème XVII est démontré.

35. Voici un corollaire du théorème XVII. Nous posons pour la matrice $A = (a_{\mu\nu})$:

(122) $$\Delta_2(A) = \left[\sum_{\mu,\nu=1}^{n} |a_{\mu\nu}|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Alors on a, d'après une formule bien connue,

(123) $$\Delta_2(A)^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu^2,$$

où ρ_ν^2 sont les racines fondamentales de la matrice AA^*. Si, en particulier, A est hermitique et positive, les ρ_ν en (123) sont les racines fondamentales de A.

Théorème XVIII. — *On a pour les matrices hermitiques* (1) *et* (116), *supposées définies positives*

(124) $$\Delta_2(H^{-1}) > \Delta_2(H_1^{-1}).$$

En effet, en exprimant les deux côtés de (124) moyennant les racines fondamentales (2) et (117) de H, H_1, (124) résulte de l'inégalité

(125) $$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\omega_\nu^2} > \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\omega_\nu^2} \geq \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\omega_\nu'^2},$$

et cette inégalité résulte immédiatement de (118) ([33]).

36. Pour déduire maintenant les inégalités (78) et (79) pour $k < n$, en les supposant connues pour $k = n$, considérons la forme hermitique

$$H^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) = H(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0),$$

([33]) Pour une application de cette inégalité, *cf.* la Note [15] de M. M. Parodi.

qui s'obtient de (1) en posant $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$. Désignons les racines fondamentales de la matrice de $H^{(k)}$ par

$$\omega_1^* \leqq \ldots \leqq \omega_k^* \quad \text{et} \quad \sigma_1^* \geqq \ldots \geqq \sigma_k^*.$$

Il résulte en appliquant (118) successivement à H, $H^{(n-1)}, \ldots, H^{(k)}$:

$$\omega_\varkappa^* \geqq \omega_\varkappa, \qquad \sigma_\varkappa^* \leqq \sigma_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k). \tag{126}$$

Mais alors on obtient les inégalités

$$F(h_{11}, \ldots, h_{kk}) \leqq F(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_k^*),$$
$$G(h_{11}, \ldots, h_{kk}) \geqq G(\omega_1^*, \ldots, \omega_k^*)$$

valables pour la forme $H^{(k)}$ et (78) et (79) s'obtiennent en observant que d'après (126) on a

$$F(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_k^*) \leqq F(\sigma_1, \ldots, \sigma_k), \qquad G(\omega_1^*, \ldots, \omega_k^*) \geqq G(\omega_1, \ldots, \omega_k).$$

37. En appliquant plusieurs fois le théorème XVII, on en déduit facilement :

THÉORÈME XVII *a*. — *Soit*

$$H_l(X) = \sum_{\mu, \nu = l+1}^{n} h_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu \tag{127}$$

une section $l^{\text{ième}}$ *de* (1) *et*

$$\sigma_1^{(l)} \geqq \ldots \geqq \sigma_{n-l}^{(l)} \tag{128}$$

ses racines fondamentales. Alors on a

$$\sigma_\varkappa \geqq \sigma_\varkappa^{(l)} \geqq \sigma_{\varkappa+l} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n-l). \tag{129}$$

En effet, ce théorème est déjà démontré pour $l = 1$ et en le supposant démontré pour $H_{l-1}(X)$ on obtient

$$\sigma_\varkappa \geqq \sigma_\varkappa^{(l-1)} \geqq \sigma_\varkappa^{(l)} \geqq \sigma_{\varkappa+1}^{(l-1)} \geqq \sigma_{\varkappa+l} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n-l).$$

En utilisant (129), on peut déduire des inégalités (78) et (79) les relations suivantes, généralisant le principe de Fischer-Courant [34] :

([34]) *Cf.* R. COURANT [**2**], p. 19 et E. FISCHER [**4**].

THÉORÈME XIX. — *On a, dans les hypothèses du théorème* XV, *pour* $m+k \leqq n$:

$$\min_{C_\mu} \max_{X_k C_\mu = 0} F[H(X_1), \ldots, H(X_k)] = F(\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_{m+k}), \tag{130 a}$$

$$\max_{C_\mu} \min_{X_k C_\mu = 0} G[H(X_1), \ldots, H(X_k)] = G(\omega_{m+1}, \ldots, \omega_{m+k}). \tag{130 b}$$

Ici, $X_1, \ldots, X_k$ *parcourent le système général des k vecteurs orthonomés qui sont orthogonaux sur m vecteurs donnés* $C_1, \ldots, C_m$. *On prend alors le maximum de* F *en* (130 *a*) *et le minimum de* G *en* (130 *b*) *pour chaque système de m vecteurs* $C_1, \ldots, C_m$ *et considère alors en* (130 *a*) *le minimum de tous les maxima de* F *et en* (130 *b*) *le maximum de tous les minima de* G *en variant* $C_1, \ldots, C_m$ *arbitrairement.*

Le principe de Fischer-Courant s'obtient en prenant $k=1$ et $F(x)=G(x)=x$.

38. *Démonstration.* — Considérons d'abord la relation (130 *a*) et commençons par montrer que pour un certain choix des vecteurs C_μ on a :

$$\max_{C_\mu X_k = 0} F[H(X_1), \ldots, H(X_k)] = F(\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_{m+k}). \tag{131}$$

A cet effet, supposons H dans la forme

$$H(X) = \sigma_1 |x_1|^2 + \ldots + \sigma_n |x_n|^2$$

et posons

$$C_\mu = (\delta_{1\mu}, \ldots, \delta_{n\mu}) \qquad (\mu = 1, \ldots, m), \tag{132}$$

$\delta_{\nu\mu}$ étant le symbole de Kronecker. Pour ce choix des C_μ l'expression de gauche en (131) se réduit à

$$F[H_m(X_1), \ldots, H_m(X_k)], \qquad H_m(X) = \sigma_{m+1} |x_{m+1}|^2 + \ldots + \sigma_n |x_n|^2$$

et la relation (131) s'obtient en appliquant (81) à la forme $H_m(X)$.

Nous avons maintenant à montrer que pour chaque choix des vecteurs $C_1, \ldots, C_m$ on a

$$\max_{C_\mu X_k = 0} F[H(X_1), \ldots, H(X_k)] \geqq F(\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_{m+k}). \tag{133}$$

Or on peut évidemment, en orthogonalisant $C_1, \ldots, C_m$, les supposer comme formant un système orthonormé de l vecteurs pour $l \leqq m$, et l'on peut donc, après une transformation unitaire, supposer que l'on ait

$$C_\mu = (\delta_{1\mu}, \ldots, \delta_{n\mu}) \qquad (\mu = 1, \ldots, l).$$

Les relations d'orthogonalité $X_\varkappa C_\mu = 0$ se réduisent donc en ceci que dans chacun des vecteurs $X_\varkappa$ les l premières coordonnées s'annulent. Désignons la forme qui s'obtient de $H(X)$ en y posant $x_1 = \ldots = x_l = 0$ par $H_l(X)$.

La relation (133) se réduit alors à la relation

$$\max F[H_l(X_1), \ldots, H_l(X_k)] \geqq F(\sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_{l+k}),$$

Or, en désignant les racines fondamentales de $H_l(X)$ par

$$\sigma_1^{(l)} \geqq \ldots \geqq \sigma_{n-l}^{(l)},$$

on a en appliquant (81) à $H_l(X)$:

$$\max F[H_l(X_1), \ldots, H_l(X_k)] = F(\sigma_1^{(l)}, \ldots, \sigma_k^{(l)}),$$

donc, d'après (129),

$$\max F[H_l(X_1), \ldots, H_l(X_k)] \geqq F(\sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_{l+k}) \geqq F(\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_{m+k}).$$

(130 a) est démontré.

La démonstration de (130 b) s'obtient maintenant en appliquant (130 a) à la fonction

$$F(x_1, \ldots, x_k) = -G(-x_1, \ldots, -x_k)$$

et à la forme $-H(X)$, dont les racines fondamentales sont

$$-\omega_1 \geqq -\omega_2 \geqq \ldots \geqq -\omega_n.$$

Bibliographie.

[1] Aitken et Turnbull, *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, London and Glasgow, 1948.

[2] R. Courant, *Ueber die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik* (*Math. Z.*, t. **7**, 1920, p. 1-57).

[3] Ky Fan, *On a Theorem of Weyl Concerning Eigenvalues of Linear Transformations* I, II (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. **35**, 1949, p. 652-655; t. **36**, 1950, p. 31-35).

[4] E. Fischer, *Ueber quadratische Formen mit reellen Koeffizienten* (*Monatsh. Math. Phys.*, t. **16**, 1905, p. 234-249).

[5] E. Fischer, *Ueber den Hadamardschen Determinantensatz* (*Arch. Math. Phys.*, (3), t. **13**, 1908, p. 32-40).

[6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Pólya, *Some Simple Inequalities Satisfied by Convex Functions* (*Mess. Math.*, t. **58**, 1929, p. 145-152).

[7] G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, 1934.

[8] A. Horn, *On the Singular Values of a Product of Completely Continuous Operators* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. **36**, 1950, p. 374-375).

[9] J. Karamata, *Sur une inégalité relative aux fonctions convexes* (*Publ. Math. Univ. Belgrade*, t. **1**, 1932, p. 145-148).

[10] G. Julia, *Introduction mathématique aux théories quantiques*, 1re partie, 1949.

[11] J. E. Littlewood, *cf.* Hardy, Littlewood et Pólya.

[12] P. Montel, *Fonctions convexes et sousharmoniques* (*J. Math.*, (9), t. **7**, 1928, p. 29-60).

[13] P. Montel, *Sur les fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles à termes entrelacés* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. **50**, 1933, p. 171-196).

[14] P. Montel, *Sur les fractions rationnelles à termes entrelacés* (*Mathematica*, t. **5**, 1931, p. 110-129).

[15] M. Parodi, *Sur la formation de matrices définies positives* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **232**, 1951, p. 2390-2392).

[16] G. Pólya, *cf.* Hardy, Littlewood et Pólya.

[17] G. Pólya, *Remark on Weyls Note « Inequalities Between the Two Kinds of Eigenvalues of a Linear Transformation »* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. **36**, 1950, p. 49-51).

[18] I. Schur, *Ueber eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf die Determinantentheorie* (*Sitzb. Berl. Math. Ges.*, 1923, p. 9-20).

[19] I. Schur, *Ein Beitrag zur Hilbertschen Theorie der vollstetigen quadratischen Formen* (*Math. Z.*, t. **12**, 1922, p. 287-297).

[20] I. Schur, *Ueber einige Ungleichungen im Matrizenkalkül* (*Prace Matematyczno-fisyczne*, t. **44**, 1936, p. 353-370).

[21] O. Tœplitz, *Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér* (*Math. Z.*, t. **2**, 1918, p. 187-197).

[22] H. Weyl, *Inequalities Between the Two Kinds of Eigenvalues of a Linear Transformation* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. **35**, 1949, p. 408-411).

[23] Turnbull, *cf.* Aitken et Turnbull.