JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES VALIRON

Fonctions analytiques et équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 293-303.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__293_0>

Fonctions analytiques et équations différentielles ;

Par Georges VALIRON.

Une grande partie de l'œuvre de Paul Montel est consacrée aux fonctions analytiques et aux équations différentielles et il a aussi maintes fois dans son enseignement orienté ses élèves vers ces théories. Il est donc indiqué dans ce volume qui lui est offert en hommage d'apporter une contribution à ce genre d'études.

Les propriétés des fonctions entières susceptibles d'être solutions d'équations différentielles algébriques ont été l'objet de travaux assez nombreux. Comme conséquences des relations serrées qui existent entre les valeurs d'une fonction entière $f(z)$, les valeurs de quelques-unes de ses dérivées, le rang du terme maximum de la série de Taylor définissant $f(z)$ et la variable z, lorsqu'on se place au voisinage des points du cercle $|z|=r$ en lesquels $|f(z)|$ atteint son maximum $M(r, f)$, *il a été montré qu'une fonction de la forme*

$$z^{\mu} g(z),$$

où μ est une constante, et $g(z)$ une fonction holomorphe autour du point à l'infini qu'elle admet pour point essentiel [donc $g(z)=f(z)h(z)$, où $f(z)$ est une fonction entière non polynomiale et $h(z)$ holomorphe et égale à 1 à l'infini] *ne peut être solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, ou d'une équation différentielle algébrique du premier ordre, ou d'une classe étendue d'équations algébriques d'ordre supérieur à un, que si elle est d'ordre fini rationnel positif, à croissance parfaitement régulière et de ce qu'on peut appeler un type* *exponentiel étoilé* (1). Des recherches d'un genre un peu différent, montrant qu'une fonction entière ne peut pas être solution de certaines équations différentielles non algébriques ont été également faites; les résultats obtenus dans cette voie peuvent également être rattachés à la méthode précédente (2), que j'appellerai pour simplifier, méthode de Wiman-Valiron.

La méthode de Wiman-Valiron s'applique non seulement aux fonctions entières, mais aussi aux fonctions $F(z)$ holomorphes dans le cercle $|z| < 1$ dont le maximum du module $M(r, F)$ défini comme ci-dessus, satisfait à certaines conditions de croissance. Elle ne semble pas pouvoir conduire à des résultats positifs du genre de celui rappelé ci-dessus pour les équations différentielles algébriques, mais la partie négative de ces propositions subsiste en partie. Par exemple, du résultat indiqué plus haut découle que : *une fonction entière d'ordre nul, ou une fonction entière d'ordre infini ne peut pas vérifier une équation différentielle de l'espèce envisagée* (3). La méthode de Wiman-Valiron ne s'applique pas aux fonctions $F(z)$ d'ordre nul, mais elle donne un résultat dans le cas des croissances rapides. Nous établirons ceci :

I. *Une fonction* $F(z)$ *holomorphe dans* $|z| < 1$ *et d'ordre infini dans ce cercle, c'est-à-dire telle que*

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_2 M(r, F)}{-\log(1-r)} = \infty$$

(1) Cette proposition pressentie par A. Wiman, *Acta math.*, t. **41**, 1916, p. 1-28, a été démontrée par moi-même, *C. R. Acad. Sc.*, t. **167**, 1918, p. 988-991 et *Bull. Soc. math. Fr.*, t. **51**, 1923, p. 33-45. *Voir* aussi Polya, *Acta math.*, t. **42**, 1920, p. 309-316; Valiron, *Lectures on the general theory of integral functions*, p. 106-111; Wittich, *Gött. Nachr.*, 1946, p. 71-73.

(2) *Voir* Rellich, *Math. Z.*, t. **47**, 1942, p. 153-160; Wittich, *Math. Z.*, t. **47**, 1942, p. 422-426; un article récent de Anastassiadis, *Bull. Sc. math.*, t. **76**, 1952, p. 57-64 et une Note de moi-même en cours de publication dans ce même *Bulletin*.

(3) Une fonction entière d'ordre nul peut être solution d'une équation différentielle algébrique du troisième ordre (Valiron, *C. R. Acad, Sc.*, t. **180**, 1925, p. 571-572); pour les équations du second ordre, la question ne semble pas encore résolue (*voir* Valiron, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. **53**, 1925, p. 34-42).

ne peut pas être solution d'une équation différentielle algébrique du premier ordre

$$P(z, F, F') = 0,$$

où P *est un polynome, et de certaines classes d'équations différentielles algébriques d'ordre supérieur à un.*

Il est clair que le cas des équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux n'a pas à être examiné, puisqu'il rentre dans le cas envisagé plus haut.

Pour établir la proposition I, je suivrai la méthode employée dans un Mémoire de 1921 (4), je désignerai par (V, II, x) le renvoi à la page x de ce Mémoire; je me rapprocherai ainsi davantage des idées de Wiman (5), et je compléterai aussi certains de mes résultats antérieurs sur les séries entières (6), je désignerai par (V, I, y) le renvoi à la page y de ce Mémoire. Il importe de signaler ici que A. J. Macintyre a montré en 1938 que l'on peut présenter sous une forme plus simple, plus rapide et parfois plus précise certains résultats découlant de la méthode de Wiman-Valiron (7). Mais les préoccupations de Macintyre étaient surtout relatives à la théorie du recouvrement; il avait en vue dans son premier Mémoire l'étude des *flat regions* de Whittaker ce qui le conduisait à s'intéresser seulement à la dérivée première dans le cas des fonctions entières (8); dans son second Mémoire, le but était le théorème de Bloch et ses conséquences et extensions, il n'avait pas à envisager, dans le cas des séries entières de propositions précises pour les dérivées d'ordre supérieur à un lorsque la croissance est rapide (9). Je ne chercherai pas ici à con-

---

(4) *Ann. Éc norm. sup.*, t. **38**, 1921, p. 389-429.

(5) *Voir* le Mémoire cité ci-dessus, p. 17.

(6) *Ann. Éc. norm. sup.*, t. 37, 1920, p. 219-253.

(7) *Quarterly J. Math.*, t. 9, 1938, p. 81-88; *Math. Z.*, t. 44, 1938, p. 536-540.

(8) De même, les études de la méthode de Wiman-Valiron qui se trouvent dans la *Thèse* de W. Saxer, Zurich, 1923 et *Math. Z.*, t. 17, et dans Mazurkiewicz, *C. R. Soc. sc. Varsovie*, t. 29, 1936, p. 1-6 concernent uniquement le cas des fonctions entières.

(9) Au sujet de l'application de la méthode de A. J. Macintyre au théorème de Bloch, *voir* Chi Tai Chuang, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 68, 1940, p. 11-40.

fronter les résultats des deux méthodes, sauf lorsque le résultat de cette confrontation sera immédiat.

La proposition I s'applique, en particulier, aux fonctions $F(z)$ holomorphes mais non bornées dans le cercle $|z| < 1$, dont le module reste borné sur un chemin en spirale asymptote à la circonférence $|z| = 1$. Ces fonctions sont d'ordre infini ([10]), elles ne peuvent pas être solutions d'équations différentielles du type envisagé dans l'énoncé I.

1. Considérons une série entière de rayon de convergence un :

$$F(z) = \sum_{q=0}^{\infty} c_q z^q. \tag{1}$$

Pour chaque r inférieur à un, le plus grand des nombres $|c_q| r^q$ appelé le terme maximum de $F(z)$, est une fonction non décroissante de r que nous désignerons par $m(r)$ ou $m(r, F)$; le plus grand rang du terme maximum est aussi une fonction non décroissante de r que nous appellerons $n(r, F)$ ou $n(r)$ ou n. *Nous écartons dès maintenant le cas où les $|c_q|$ seraient bornés,* cas dans lequel il existerait un nombre positif K tel que

$$M(r, F) < \frac{K}{1 - r}.$$

Alors $n(r)$ et $m(r)$ croissent à partir d'une valeur de r et croissent indéfiniment lorsque r tend vers un. Si l'on introduit la série de comparaison

$$\mathcal{F}(r) = \sum_{q=0}^{\infty} e^{q^\alpha} r^q \qquad (0 < \alpha < 1),$$

on dira qu'un nombre r compris entre zéro et un est *une valeur remarquable*, si l'on peut trouver deux nombres $k = k(r) > 0$ et $l = l(r) > 1$ tels que $F(z)$ soit majoré par

$$k\mathcal{F}(rl) \tag{2}$$

([10]) *Voir* VALIRON, *J. Math. pures et appl.*, t. 15, 1936, p. 423-435.

et que les termes maxima de (1) et (2) soient égaux et de même rang pour cette valeur r

$$m(r, \mathrm{F}) = m(r, k\mathcal{F}(rl)), \quad n(r, \mathrm{F}) = n(r, k\mathcal{F}(rl)).$$

Il existe une suite de valeurs r remarquables tendant vers un pourvu que

$$\overline{\lim_{q=\infty}}(\log|c_q| - q^\alpha) = \infty \quad (\mathrm{V, I}, 247\text{-}248). \tag{3}$$

L'hypothèse opposée à (3) conduirait à une majoration de $\mathrm{M}(r, \mathrm{F})$ de la forme

$$\log \mathrm{M}(r, \mathrm{F}) < \mathrm{H} + \log \mathrm{M}(r, \mathcal{F}),$$

où H serait fini, et il s'ensuivrait notamment que

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_2 \mathrm{M}(r, \mathrm{F})}{-\log(1-r)} \leqq \rho \qquad \left(\rho = \frac{\alpha}{1-\alpha}\right), \tag{4}$$

$\mathrm{F}(z)$ serait d'ordre fini au plus égal à ρ. Par suite, *pour toute fonction* $\mathrm{F}(z)$ *d'ordre positif* ρ, *la suite de valeurs remarquables existe*, il suffit de prendre dans la fonction de comparaison $\alpha < \frac{\rho}{\rho+1}$.

Quels que soient n, q entiers positifs, et z et z_0 tels que $z_0 \neq 0$, $|z_0| + |z - z_0| < 1$, on peut écrire $\mathrm{F}(z)$ sous la forme suivante (V, II, 392) :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \Bigg[\mathrm{F}(z_0) &+ \frac{z - z_0}{z_0} g_1(z_0) + \ldots \\ &+ \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^q g_q(z_0) + \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^{q+1} \psi(z, z_0)\Bigg].\end{aligned} \tag{5}$$

Si $|z_0| = r$ est une valeur remarquable telle que $n = n(r, \mathrm{F})$ soit assez grand et si D' étant une constante convenable dépendant seulement de α et q,

$$|z - z_0| < |z_0| \mathrm{D}' n^{\frac{\alpha}{2} - 1}, \tag{6}$$

on a (V, II, 395) [11]

$$|\psi(z, z_0)| < \mathrm{DM}(r, \mathrm{F})\, n^{(q+2)\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{7}$$

---

[11] Page 394, il faut lire $n_1|\nu| < \mathrm{B}_2$ au lieu de $n_2|\nu| < \mathrm{B}_2$ et n_1^{q+2} au lieu de n_1^{q+1} dans la formule de la 5e ligne en remontant.

D étant une constante dépendant de α et q seulement. On notera que la valeur de n est fournie à une unité près par l'égalité

$$\alpha n^{\alpha-1} = -\log(rl) < -\log r \sim 1 - r,$$

d'où il découle que

$$n^{\frac{\alpha}{2}-1} < \left(\frac{1-r}{\alpha}\right)^{\gamma}(1+o(1)) \qquad \left(\gamma = \frac{2-\alpha}{2-2\alpha} > 1\right)$$

et, par suite,

$$|z - z_0| < K'(1-r)^{\gamma};$$

la condition relative à z et z_0 est bien vérifiée.

Nous pouvons appliquer la méthode de majoration des $|g_j(z_0)|$ (V, II, 395-396); q étant pris assez grand pour que

$$\beta = \frac{q+2}{q+1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

soit inférieur à un, nous supposons $|z| = |z_0| = r$ et

$$|z - z_0| = |z_0|\, D' \frac{\lambda}{q} n^{-\beta} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, q)$$

et, en résolvant les équations obtenues en portant dans (5), nous obtenons

$$|g_j(z_0)|\, n^{-j\beta} < KM(r, F) \qquad (j = 1, 2, \ldots, q), \tag{8}$$

pour toute valeur z_0, $|z_0| = r$, pourvu que r soit une valeur remarquable assez voisine de un. K est une constante dépendant seulement de α et q.

Les fonctions $g_j(z_0)$ s'expriment linéairement au moyen de $F(z_0)$ et de ses dérivées au point z_0. Il suffit d'appliquer la formule du binome à

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)^n$$

et la formule de Taylor à

$$F(z) = F(z_0 + (z - z_0)).$$

pour obtenir

$$g_j(z_0) + n g_{j-1}(z_0) + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-j+2)}{(j-1)!} g_1(z_0) \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{j!} F(z_0) = \frac{z_0^j}{j!} F^{(j)}(z_0).$$

Tenant compte des inégalités (8), on voit que, pour $j = 1, 2, \ldots, q$,

$$\begin{aligned}
&|z_0^j F^{(j)}(z_0) - n(n-1)\ldots(n-j+1)F(z_0)| \\
&\quad < (j!)[|g_j(z_0)| + n|g_{j-1}(z_0)| + \ldots + n^{j-1}|g_1(z_0)|] \\
&\quad < (j!)\,KM(r, F)(n^{j\beta} + n^{1+(j-1)\beta} + \ldots + n^{j-1+\beta}) < j(j!)\,KM(r, F)\,n^{j+\beta-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, sur toute la circonférence $|z| = r$, r étant une valeur remarquable assez voisine de un, on a

$$(9) \qquad |z^j F^{(j)}(z) - n(r)^j F(z)| < K' M(r, F)\, n^{j+\beta-1}.$$

On déduit de là, en prenant z pour que

$$|F(z)| = M(r, F)$$

ou pour que

$$|F^{(j)}(z)| = M(r, F^{(j)})$$

que la partie du théorème XV (V, I, 250) relative aux dérivées, qui avait été établie en supposant que l'ordre inférieur de $F(z)$ était supérieur à un est valable pour les valeurs remarquables des fonctions d'ordre positif. D'une façon précise on a cet énoncé :

II. *Si la fonction* $F(z)$ *est d'ordre positif, il existe une suite de valeurs remarquables* r *tendant vers un, telles que, en tout point de la circonférence* $|z| = r$, *en lequel l'une des quantités*

$$|F(z)|, \quad \left|\frac{z}{n} F'(z)\right|, \quad \ldots, \quad \left|\frac{z^q}{n^q} F^{(q)}(z)\right| \qquad [n = n(r, F)]$$

est supérieure à $M(r, F)\, n^{-\beta'}$, *où* β' *est un nombre compris entre zéro et un, dépendant de* q *et de l'indice de la fonction de comparaison, on a*

$$(10) \qquad F^{(j)}(z) = [1 + \varepsilon_j(z)]\left(\frac{n}{z}\right)^j F(z) \qquad (j = 1, 2, \ldots, q),$$

$\varepsilon_j(z)$ *tendant uniformément vers zéro lorsque* $r = |z|$ *tend vers un.*

Pour ces valeurs r, *on a d'ailleurs*

$$M(r, F) > m(r, F),$$

$$(11) \qquad \log m(r, F) > \gamma' n^\alpha, \qquad n > \frac{\gamma''}{(1-r)^\delta}, \qquad \delta = \frac{1}{1-\alpha},$$

où γ' *et* γ'' *sont des nombres positifs indépendants de* r.

2. Remarquons que, dans les travaux cités de A. J. Macintyre, la fonction $n(r, \mathrm{F})$ est remplacée par

$$\frac{d \log \mathrm{M}(r, \mathrm{F})}{d \log r}, \tag{12}$$

lorsqu'on suppose que r est un des points où cette dérivée existe, ce que l'on peut toujours supposer en modifiant r assez peu pour que ce nombre reste valeur remarquable, ce qui est loisible. La fonction $n(r, \mathrm{F})$ est la dérivée

$$\frac{d \log m(r, \mathrm{F})}{d \log r}.$$

Les points r en lesquels les deux méthodes s'appliquent simultanément sont donc des points en lesquels ces deux dérivées logarithmiques sont asymptotiquement égales. Ces points existent certainement dans le cas des fonctions entières $f(z)$, puisque les deux méthodes s'appliquent alors à l'extérieur d'intervalles dans lesquels la variation totale de $\log r$ est finie. Il semble qu'il doive en être encore de même pour les fonctions $\mathrm{F}(z)$ lorsque l'ordre inférieur est positif.

Comme de (10) on déduit des égalités de la forme

$$\mathrm{F}^{(j)}(z) \sim \left[\frac{n(r)}{z}\right]^{j-q} \mathrm{F}^{(q)}(z),$$

dans lesquelles s'introduirait directement $n(r, \mathrm{F}^{(q)})$ au lieu de $n(r, \mathrm{F})$, ces fonctions $n(r, \mathrm{F})$ et $n(r, \mathrm{F}^{(j)})$ sont asymptotiquement égales pour les r remarquables, proposition que je devais montrer directement dans mon ancienne méthode (V, I, 235-236). De même, les dérivées logarithmiques (12) relatives à une fonction et à ses dérivées doivent sans doute être asymptotiquement égales moyennant certaines hypothèses.

3. Lorsque $\mathrm{F}(z)$ est d'ordre ρ infini, on peut prendre α aussi proche de un que l'on veut. Cherchons si une telle fonction $y = \mathrm{F}(z)$ peut être solution d'une équation différentielle algébrique du premier ordre, équation qui peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{P}\left(y, z, \frac{y'}{y} z\right) = 0,$$

où P est un polynome. Si λ est le degré du terme de plus haut degré en y, l'équation peut s'écrire après mise en facteur de y^λ

$$\mathrm{Q}\left(z, \frac{y'}{y} z\right) = \frac{1}{y} \mathrm{R}\left(\frac{1}{y}, z, \frac{y'}{y} z\right), \tag{13}$$

Q étant un polynome à deux variables et R un polynome à trois variables qui peut être identiquement nul. Donnons à z une valeur telle que $|\mathrm{F}(z)| = \mathrm{M}(r, \mathrm{F})$, $r = |z|$ étant une valeur remarquable que l'on fera tendre vers un. Nous aurons

$$\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{\mathrm{M}(r, \mathrm{F})}, \qquad |z| < 1, \qquad \left|\frac{y'}{y} z\right| < 2n(r, \mathrm{F}),$$

donc, d'après (11),

$$\left|\mathrm{R}\left(\frac{1}{y}, z, \frac{y'}{y} z\right)\right| < n(r, \mathrm{F})^{\mathrm{C}},$$

C étant un nombre positif indépendant de r; le second membre de (13) sera infiniment petit, borné en module par

$$\frac{n(r, \mathrm{F})^{\mathrm{C}}}{\mathrm{M}(r, \mathrm{F})}. \tag{14}$$

Considérons le premier membre de (13) et ordonnons-le par rapport à $\frac{y'}{y} z$, soit

$$\left(\frac{y'}{y} z\right)^{\mu} \mathrm{Q}_\mu(z) + \ldots + \mathrm{Q}_0(z), \tag{15}$$

où les $\mathrm{Q}_j(z)$ sont des polynomes. On a, d'après (11),

$$\left|\frac{y'}{y} z\right| > \frac{1}{2} n(r, \mathrm{F}) > \frac{\gamma''}{2(1-r)^{\delta}},$$

où δ est aussi grand que l'on veut, tandis que dans le cas le plus défavorable où $\mathrm{Q}_\mu(z)$ s'annulerait en quelques points de la circonférence $|z| = 1$,

$$|\mathrm{Q}_\mu(z)| > \mathrm{A}_\mu (1-r)^{\nu},$$

A_μ et ν étant indépendants de r. Le premier terme de (15) est donc supérieur à

$$\left|\frac{y'}{y} z\right|^{\mu - \frac{1}{2}},$$

tandis que la somme des autres termes est moindre que

$$B\left|\frac{y'z}{y}\right|^{\mu-1}, \qquad B = M(1, Q_{\mu-1}) + \ldots + M(1, Q_0).$$

C'est donc le premier terme qui l'emporte et le premier membre de (13) est infiniment grand si $\mu > 0$; l'équation (13) est impossible. Pour $\mu = 0$,

$$|Q_0(z)| > A_0(1-r)^{\tau},$$

est encore infiniment grand par rapport à la borne (14). Le théorème I est ainsi établi dans le cas des équations du premier ordre.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une équation différentielle algébrique d'ordre supérieur à un,

$$P(z, y, y', \ldots, y^{(q)}) = 0.$$

Remplaçons chaque $y^{(j)}(j = 1, 2, \ldots, q)$ par $y\left(\frac{n}{z}\right)^j$ et sans faire aucune réduction ordonnons en y. Le terme de plus haut degré, λ, en y, est, après multiplication par une puissance convenable de z, un polynome $G(n, z)$ en n et z. En divisant les deux membres de l'équation par y^{λ}, on voit que, pour qu'une solution $F(z)$ d'ordre infini puisse exister, il faut que $G(n, z)$ soit de l'ordre de $M(r, F)^{-1+\varepsilon}$ au plus, $1-\varepsilon$ étant positif. Dans $G(n, z)$, n est très grand et $|z|$ voisin de un. Ordonnons $G(n, z)$ en n et effectuons les réductions de termes lorsqu'elles n'entraînent pas de disparitions [par exemple, n^p et $-n^p$ ne se réduiront pas, mais n^p et kn^p, $1+k \neq 0$ seront remplacés par $(1+k)n^p$]. Si, ces opérations étant faites, il ne reste qu'un seul terme de degré le plus élevé, soit $n^q Q(z)$, on voit comme ci-dessus que l'équation ne peut pas être vérifiée.

Il est clair que si le polynome P est arbitraire, c'est-à-dire si ses termes sont donnés avec des coefficients numériques arbitraires, les circonstances envisagées se présenteront sauf pour certains choix des coefficients. On peut donc dire *qu'une équation différentielle algébrique générale n'a pas de solution du type envisagé.*

Il est évidemment aisé de construire des fonctions $F(z)$ d'ordre infini en se donnant les coefficients c_q tels que

$$\log|c_q| = q\,\varepsilon(q),$$

$\varepsilon(q)$ tendant vers zéro assez lentement pour que $\varepsilon(q)\,q^{1-\alpha}$ tende vers l'infini quel que soit $0 < \alpha < 1$.

On voit aussi que la méthode suivie permettra dans certains cas d'affirmer que certaines équations ne peuvent pas non plus admettre de solution d'ordre fini inférieur à un certain nombre.

Revenant à l'ordre infini, on voit que le théorème I s'applique aux fonctions signalées dans l'introduction; on peut se demander si les fonctions analogues qui restent bornées sur une courbe asymptote à tous les points d'un arc du cercle sans rester bornées dans le voisinage de cet arc jouissent des mêmes propriétés vis-à-vis des équations différentielles.