JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. BIERNACKI

Sur quelques propriétés des fonctions de distances

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 305-318.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__305_0>

Sur quelques propriétés des fonctions de distances;

Par M. BIERNACKI.

1. En 1933 Aumann a obtenu le résultat suivant (¹) : « Si $A(z)$ et $B(z)$ sont deux polynomes de degrés m et n respectivement et si E est un continu borné, on a

$$\max_{E} |A(z)B(z)| \geq C(m, n) \max_{E} |A(z)| \max_{E} |B(z)|,$$

où la constante positive $C(m, n)$ ne dépend que de m et de n ».

En 1934 H. Kneser a précisé ce théorème (²) en montrant que

$$\prod_{k=1}^{m} \operatorname{tg}^2 \frac{2k-1}{4(m+n)} \pi$$

est la valeur exacte de la constante $C(m, n)$, atteinte lorsque

$$\cos\varphi = z \qquad \text{et} \qquad A(z)B(z) = \cos(m+n)\varphi,$$

tandis que les m zéros de plus grand module de $\cos(m+n)\varphi$ coïncident avec ceux de $A(z)$.

Le résultat cité possède une interprétation géométrique évidente : $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ étant des points fixes du plan et M un point du continu E on a

$$\max_{E} \left[\prod_{i=1}^{m} MA_i \prod_{i=1}^{n} MB_i \right] \geq C(m, n) \max_{E} \prod_{i=1}^{m} MA_i \max_{E} \prod_{i=1}^{n} MB_i.$$

(¹) *Sitzb. preuss. Akad. Wiss.*, 1933, p. 924.
(²) *Ibid.*, 1934, p. 426-431.

Dans ce travail j'obtiens d'autres théorèmes analogues, en remplaçant, par exemple, les produits par les sommes ou d'autres fonctions symétriques ou en remplaçant des points fixes par d'autres éléments géométriques et en considérant le cas de l'espace.

2. Je vais m'appuyer sur le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit* E *un ensemble borné et fermé,* PQ *son diamètre* [3], M *un point de* E *et* A *un point quelconque. On a l'inégalité*

$$\mathrm{AM} \leqq \mathrm{AP} + \mathrm{AQ} \quad (^4)$$

Ce lemme est une conséquence immédiate de la propriété suivante, établie par J. Neuberg, de Lapierre et P. Montel dans le cas où A est dans le plan du triangle MPQ et par V. Thébault dans le cas général [5] : « Soit MPQ un triangle, les nombres AM.PQ, AP.MQ, AQ.MP mesurent les longueurs des côtés d'un triangle ». Nous avons, en effet, l'inégalité

$$\mathrm{AM}.\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{AP}.\mathrm{MQ} + \mathrm{AQ}.\mathrm{MP}.$$

Je vais commencer par établir la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Soit* E *un ensemble borné et fermé et* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des points de l'espace.* M *étant un point de* E, *on a*

$$\sum_{i=1}^{n} \max_{E} \mathrm{MA}_i \leqq 2 \max_{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{MA}_i\right).$$

L'égalité a lieu lorsque n est pair, E *est le segment* PQ, $\frac{n}{2}$ *points* A_i *sont concentrés au point* P *et les autres se confondent avec le point* Q.

---

(3) J'entends par là que la distance PQ est le maximum des distances entre deux points quelconques de E.

(4) Il est évidemment impossible d'améliorer cette inégalité par une inégalité de la forme $\mathrm{AM} \leqq \lambda(\mathrm{AP} + \mathrm{AQ})$, où $0 < \lambda < 1$.

(5) Cf. *Bull. math. phys. Éc. Polyt. Roi Carol* I, Bucarest t. **9**, 1938, p. 3-7 et t. **10**, 1938-1939, p. 38-42.

Soit PQ un diamètre de E. D'après le lemme 1 on a

$$\max_{E} A_i M \leqq A_i P + A_i Q \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et d'autre part évidemment

$$\sum_{i=1}^{n} A_i P + A_i Q \leqq 2 \max_{E} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i M \right),$$

d'où l'on obtient immédiatement l'énoncé.

On peut étendre ce résultat en remplaçant MA_i par MA_i^p $(p > 0)$. En profitant, en effet, des inégalités

$$(a+b)^p < a^p + b^p \qquad (0 < p < 1).$$

et

$$(a+b)^p < 2^{p-1}(a^p + b^p) \qquad (p > 1),$$

on obtient les suivantes :

$$\max_{E} (A_i M)^p \leqq (A_i P)^p + (A_i Q)^p \qquad (0 < p < 1),$$
$$\max_{E} (A_i M)^p \leqq 2^{p-1}[(A_i P)^p + (A_i Q)^p] \qquad (p > 1),$$

et en raisonnant comme dans la démonstration du théorème I on a le résultat suivant :

Théorème I *a*. — *Dans les conditions du théorème* I *on a les inégalités*

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \max_{E} (MA_i)^p}{\displaystyle\max_{E} \sum_{i=1}^{n} (MA_i)^p} \leqq 2 \qquad \text{pour } 0 < p \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad \leqq 2^p \qquad \text{pour } p > 1.$$

Lorsque $p \neq 1$ les limites ci-dessus ne semblent pas exactes; lorsque $p > 1$ la limite exacte est probablement 2, j'ai pu l'établir dans un cas particulier :

Théorème I *b*. — *Dans le cas où* $p = 2$, *on doit remplacer la limite* $2^p = 4$ *de l'énoncé* I*a par* 2, *la limite* 2 *est atteinte lorsque* E *est la surface d'une sphère dont le centre est* G *et le rayon* R, *tandis que les points* A_i *sont situés sur cette sphère et leur centre de gravité est* G.

Il suffit d'établir le théorème dans le cas particulier où E est la surface d'une sphère $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = c$ (constante) dont le centre est le centre de gravité G des points A_i, car dans le cas général on peut considérer la plus petite sphère S de centre G, qui contient E, $\max \sum_{i=1}^{n} MA_i^2$ est le même lorsque M parcourt E ou S, tandis que

$$\sum_{i=1}^{n} \max_{S} MA_i^2 \geqq \sum_{i=1}^{n} \max_{E} MA_i^2.$$

On peut supposer que G est à l'origine, en posant $OA_i = d_i$, l'équation de la sphère s'écrit

$$n(x^2+y^2+z^2) + \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = c,$$

son rayon R est donc égal à $\sqrt{\dfrac{c - \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n}}$ et l'on a

$$\sum_{i=1}^{n} \max(OA_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (R + d_i)^2.$$

L'inégalité dont il s'agit dans l'énoncé s'écrit donc

$$\sum_{i=1}^{n} (R + d_i)^2 \leqq 2\left[nR^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i^2\right] \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{n} (R - d_i)^2 \geqq 0.$$

L'égalité a lieu lorsque $d_i = R$, c'est-à dire lorsque tous les A_i sont sur la sphère dont le centre de gravité est G.

5. Si l'on remplace dans l'énoncé I les sommes par les produits, il est nécessaire de supposer que l'ensemble E est un continu, de plus la constante 2 est remplacée par un facteur qui dépend du nombre n des points A_i. On obtient, en effet, l'énoncé suivant :

Théorème II. — *Soit* E *un continu borné et* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des points de l'espace.* M *étant un point de* E *on a l'inégalité*

$$\prod_{i=1}^{n} \max_{E} MA_i \leq [8(1+\sqrt{2})]^n \max_{E}\left(\prod_{i=1}^{n} MA_i\right) \quad (^6).$$

La constante $8(1+\sqrt{2})$ n'est sans doute pas la meilleure possible, mais elle ne saurait être remplacée par un nombre plus petit que 2, car si E est un segment PQ, n pair, $\frac{n}{2}$ points A_i sont confondus en P et les autres en Q, le rapport $\dfrac{\prod_{i=1}^{n} \max MA_i}{\max \prod_{i=1}^{n} MA_i}$ est égal à 2^n. Lorsque E n'est pas un continu, le théorème n'est pas exact; il suffit, pour le voir, de prendre pour E l'ensemble des points A_i.

Soit PQ un diamètre de l'ensemble E, désignons par A'_i la projection du point A_i sur la droite PQ, et par N′ le point où le produit $\prod_{i=1}^{n} MA'_i$ atteint son maximum lorsque M parcourt le segment PQ. Le plan perpendiculaire à PQ et passant par N′ contient un point N du continu E, désignons par N_i la projection de N sur le plan PQA_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Supposons que, par exemple $QA_i \leq PA_i$ et désignons encore par M_i le point de E où MA_i atteint son maximum; en profitant du lemme 1 et du fait que $N_iA_i \leq NA_i$, on a

$$(1) \qquad \frac{NA_i}{M_iA_i} \geq \frac{N_iA_i}{2PA_i}.$$

Nous allons chercher maintenant le minimum du rapport

$$(*) \qquad \frac{\dfrac{N_iA_i}{PA_i}}{\dfrac{N'A'_i}{PA'_i}} = \frac{\dfrac{N_iA_i}{N'A'_i}}{\dfrac{PA_i}{PA'_i}},$$

(6) En utilisant les résultats de Kneser cités au paragraphe **1**, on pourrait obtenir un énoncé analogue, mais qui semble moins précis que le théorème II.

lorsque P, Q et A_i sont fixés. D'après sa définition, le point N_i est contenu dans le plan PQA_i, on a d'ailleurs

$$N_iP \leq NP \leq PQ, \qquad N_iQ \leq NQ \leq PQ.$$

donc N_i est contenu dans la région commune aux cercles de rayon PQ et de centres P et Q. On peut supposer que $PQ = 2$, que PQ est l'axe Ox et que l'axe Oy, contenu dans le plan PQA_i passe par le milieu de PQ. Soient (x, y) et (x_0, y_0) les coordonnées des points N_i et A_i respectivement; d'après l'hypothèse $QA_i \leq PA_i$ on a $x_0 \geq 0$, on peut évidemment supposer que $y_0 \geq 0$. Les arcs de cercle de rayon 2, de centres P et Q se coupent au point $R(0, \sqrt{3})$. Supposons que la tangente en R à l'arc de cercle PR coupe la droite $x = -1$ au point S et soit RT le prolongement du segment SR du côté des y croissants. RT fait avec la droite RV parallèle à l'axe Ox un angle de 30°. Cela posé, nous allons distinguer trois cas :

1° Le point A_i est au-dessous de la droite RV (c'est-à-dire $y_0 \leq \sqrt{3}$). Le carré du rapport (*) peut s'écrire

$$(^{**}) \qquad \frac{1 + \left(\dfrac{y_0 - y}{x_0 - x}\right)^2}{1 + \dfrac{y_0^2}{(x_0 + 1)^2}};$$

le nominateur est plus grand que 1, le dénominateur est le plus grand lorsque $y_0 = \sqrt{3}$ et $x_0 = 0$, donc le rapport (**) est au moins égal à $\frac{1}{4}$.

2° Supposons, en second lieu, que le point A_i soit contenu dans l'angle yRT. Le coefficient angulaire de N_iA_i est au moins égal, en valeur absolue, à celui de SA_i, où $S\left(-1, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ donc le rapport (**) est au moins égal à $\dfrac{(x_0+1)^2 + \left(y_0 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{(x_0+1)^2 + y_0^2}$, or $x_0 \geq 0$, donc ceci est au moins égal à $\dfrac{1 + \left(y_0 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{1 + y_0^2}$ et l'on constate sans peine que la dernière expression atteint son minimum pour $y_0 = \sqrt{3}$, ce minimum est donc égal à $\frac{1}{3}$.

3° Supposons enfin que le point A_i soit contenu dans l'angle TRV. Le coefficient angulaire de N_iA_i est au moins égal, en valeur absolue, à celui de A_iR, donc le rapport (**) est au moins égal à

$$\frac{(x_0+1)^2\left[x_0^2+(x_0-\sqrt{3})^2\right]}{x_0^2\left[(x_0+1)^2+y_0^2\right]}.$$

Or on constate sans peine que cette expression est au moins égale à $\frac{1}{4}$, car cette inégalité équivaut à l'inégalité

$$(3x_0^2+8x_0+4)y_0^2-8\sqrt{3}(x_0+1)^2y_0+3(x_0^2+4)(x_0+1)^2 \geqq 0,$$

et le discriminant de ce trinome en y_0 est négatif, sauf dans le cas où $x_0 = 0$; dans ce cas on obtient le signe d'égalité pour $y_0 = \sqrt{3}$.

En résumé *le rapport* (*) *est au moins égal à* $\frac{1}{2}$. Supposons maintenant que notre hypothèse $QA_i \leqq PA_i$ soit vérifiée pour $i = 1, 2 \ldots, s$, on aura d'après l'inégalité (1) et le résultat que nous venons d'obtenir,

$$\prod_{i=1}^{s} \frac{NA_i}{M_iA_i} \geqq \frac{1}{4^s} \prod_{i=1}^{s} \frac{N'A'_i}{PA'_i}.$$

En supposant que $QA_i > PA_i$ pour $i = s+1, \ldots, n$ on obtient de la même façon l'inégalité

$$\prod_{i=s+1}^{n} \frac{NA_i}{M_iA_i} \geqq \frac{1}{4^{n-s}} \prod_{i=s+1}^{n} \frac{N'A'_i}{QA'_i},$$

donc, en définitive,

$$(2) \qquad \prod_{i=1}^{n} \frac{NA_i}{M_iA_i} \geqq \frac{1}{4^n} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} N'A'_i}{\prod\limits_{i=1}^{s} PA'_i \prod\limits_{i=s+1}^{n} QA'_i}.$$

Désignons maintenant par x_i l'abscisse du point A'_i et posons

$$P(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-x_i),$$

z étant la variable complexe, $z=x+iy$. En utilisant l'inégalité $1+|a|\leqq 2\max(1,|a|)$ et la formule de Jensen on obtient l'inégalité suivante [7]

$$(3)\qquad \prod_{i=1}^{s}PA'_i\prod_{i=s+1}^{n}QA'_i\leqq\prod_{i=1}^{n}(1+|x_i|)\leqq 2^n\prod_{i=1}^{n}\max(1,|x_i|)$$
$$=2^n e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|P(e^{i\theta})|\,d\theta}\leqq 2^n\max_{|z|=1}|P(z)|.$$

Nous allons maintenant utiliser un théorème de S. Bernstein [8], dont on doit une démonstration très simple à P. Montel [9] : « Soit $P(z)$ un polynome de degré n et supposons que l'on a $|P(z)|\leqq M$ sur le segment $-1\leqq z\leqq +1$. Si a et b $(a>b)$ sont les demi-axes de l'ellipse dont les foyers sont les points $(-1, 0)$ et $(+1, 0)$ et qui passe par le point z on a $|P(z)|\leqq M(a+b)^n$ ». En supposant que $b=1$ on trouve que $a=\sqrt{2}$ et l'on obtient une limitation valable dans tout le cercle $|z|\leqq 1$:

$$|P(z)|\leqq M(\sqrt{2}+1)^n.$$

On déduit donc de l'inégalité (3), en vertu de la définition du point N', la suivante :

$$\prod_{i=1}^{s}PA'_i\prod_{i=s+1}^{n}QA'_i\leqq[2(\sqrt{2}+1)]^n\max_{-1\leqq z\leqq 1}|P(z)|=[2(\sqrt{2}+1)]^n\prod_{i=1}^{n}N'A'_i,$$

---

(7) *Cf.* aussi PÓLYA-SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin, J. Springer, 1925, livre II, probl. 52.

(8) *Communic. Soc Math. de Charkow*, 2e série, t. 14.

(9) *Sur les polynomes d'approximation* (*Bull. Soc. Math, France*, t. 46, 1919, p. 151-191). *Cf.* aussi PÓLYA-SZEGÖ, *loc. cit.*, livre III, probl. 70.

donc, d'après (2) :

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{NA_i}{M_i A_i} \geq \frac{1}{[8(\sqrt{2}+1)]^n}$$

et, *a fortiori*, l'énoncé II.

4. Nous allons compléter les résultats précédents en remplaçant les sommes et les produits des MA_i par d'autres fonctions symétriques élémentaires de ces quantités. On a l'énoncé suivant :

Théorème III. — *Soit* E *un continu borné et* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des points de l'espace. Si* $1 < p < n$ *on a,* M *étant un point de* E, *l'inégalité*

$$\sum \max_{E} MA_{i_1} \ldots MA_{i_p} \leq (p+1)(48\, e^2 \sqrt{2})^p \max_{E} \left(\sum MA_{i_1} \ldots MA_{i_p} \right).$$

(*Les deux sommes sont étendues à toutes les combinaisons* p *à* p *des nombres* $1, 2, \ldots, n$). *Lorsque le continu* E *et les points* $A_1, \ldots, A_n$ *sont contenus dans un même plan, on peut remplacer le nombre* $(p+1)(48\, e^2 \sqrt{2})^p$ *par le nombre* $(p+1)(8e)^p$.

Dans cet énoncé le facteur $(p+1)$ est probablement inutile, il serait intéressant de montrer qu'il pourrait être supprimé.

Nous commencerons par le cas plus simple où E est un continu plan et les points A_i appartiennent au plan qui contient E. En introduisant dans ce plan une variable complexe z on peut supposer que l'origine appartient à E, que E est contenu dans le cercle $|z| < 1$ et possède un point sur la circonférence $|z| = 1$. En désignant par x_i les affixes des A_i on établit tout pareillement comme l'inégalité (3) du paragraphe 3 l'inégalité

$$(4) \quad \sum \max MA_{i_1} \ldots MA_{i_p} \leq \sum (1+|x_{i_1}|) \ldots (1+|x_{i_p}|) \leq 2^p \sum \max_{|z| \leq 1} |P_{i_1 \ldots i_p}(z)|,$$

où l'on a posé

$$P_{i_1 \ldots i_p}(z) = (z - x_{i_1}) \ldots (z - x_{i_p})$$

et où les sommes sont étendues à toutes les combinaisons p à p des nombres $1, 2, \ldots, n$. Or sur chacune des $(p+1)$ circonférences $|z| = \frac{s}{p}$

($s=0, 1, \ldots, p$) il y a un point u_s appartenant à $E(u_0=0)$, on peut donc écrire, d'après la formule d'interpolation de Lagrange :

$$(5) \qquad P_{i_1\ldots i_p}(z)=\sum_{s=0}^{p} \frac{P_{i_1\ldots i_p}(u_s)(z-u_0)\ldots(z-u_{s-1})(z-u_{s+1})\ldots(z-u_p)}{(u_s-u_0)\ldots(u_s-u_{s-1})(u_s-u_{s+1})\ldots(u_s-u_p)}.$$

En profitant de l'inégalité $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$ on trouve sans peine que tous les dénominateurs du second membre de (5) sont plus grands que $(2e)^{-p}$ en module; or $|z| \leqq 1$, on aura donc aussi $|z-u_i| \leqq 2$, et (4) et (5) fournissent par conséquent l'inégalité

$$\sum \max_E MA_{i_1}\ldots MA_{i_p} \leqq (8e)^p \sum_{s=0}^{p} \sum |P_{i_1\ldots i_p}(u_s)|$$

(la dernière somme est étendue à toutes les combinaisons p à p des nombres $1, 2, \ldots, n$) qui conduit immédiatement à l'inégalité de l'énoncé.

Passons au cas de l'espace. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2. — *Considérons un plan* P, *un point* O *de ce plan et un point* A *de l'espace. Décrivons du point* O *comme centre, dans le plan passant par* OA *et perpendiculaire à* P, *la circonférence* C *de rayon* OA. *Soit* A' *le point où cette circonférence* C *coupe le plan* P, *point choisi de manière que l'angle* AOA' *ne dépasse pas* 90°. N *étant un point quelconque de* P, *on a l'inégalité*

$$\frac{NA'}{NA} \leqq \sqrt{2}.$$

L'égalité a lieu lorsque l'angle AOA' = 90° *et le point* N *est le point de* C *diamétralement opposé à* A'.

Supposons que le plan P est le plan Oxy, l'axe positif Ox passant par A'. Soient $(x, y, 0)$ les coordonnées du point N, posons $OA = R$ et désignons par θ l'angle $AOA'(0 < \theta \leqq 90°)$. L'inégalité du lemme équivaut à l'inégalité

$$R^2 + x^2 + y^2 + 2Rx(1-2\cos\theta) \geqq 0.$$

En posant $y=0$ on trouve que le discriminant du trinome en x est égal à $4R^2\cos\theta(\cos\theta-1)$, il est donc négatif, sauf dans les cas ou $\theta=0$ et $\theta=90°$, qui fournissent le signe d'égalité pour $x=+R$ et $x=-R$ respectivement.

Passons à la démonstration du théorème, on peut supposer que l'ensemble E est contenu dans la sphère de centre à l'origine et de rayon 1, et qu'il contient l'origine et un point sur la périphérie de la sphère en question. Il en résulte que E contient des points sur la périphérie de toute sphère de centre à l'origine et de rayon moindre que 1. Considérons un plan P quelconque passant par O et désignons par A'_i des points de P obtenus à l'aide des A_i par le procédé décrit dans le lemme 2, et par $x'_1, \ldots, x'_n$ les affixes des points $A'_1, \ldots, A'_n$ dans le plan complexe P. On établit tout pareillement comme l'inégalité (3) du paragraphe 3, en tenant compte du fait que les distances des points A'_i à l'origine sont les mêmes que celles des points A_i, l'inégalité

$$\begin{aligned}(6)\qquad \sum \max_{E} MA_{i_1}\ldots MA_{i_p} &\leqq \sum (1+|x'_{i_1}|)\ldots(1+|x'_{i_p}|)\\ &\leqq 2^p \sum \max_{|z|\leqq 1} |(z-x'_{i_1})\ldots(z-x'_{i_p})|,\end{aligned}$$

où les sommes sont toujours étendues à toutes les combinaisons p à p des nombres $1, 2, \ldots, n$.

Remarquons maintenant que le maximum du module, dans le cercle $|z|\leqq 1$, d'un polynome $P(z)$ de degré p ne dépasse pas le maximum du module du même polynome dans le cercle $|z|<\frac{1}{2}$ multiplié par 2^p (¹⁰). En profitant de cette remarque et du lemme 2 on déduit de l'inégalité (6), *a fortiori*, la suivante :

$$(7)\qquad \sum \max MA_{i_1}\ldots MA_{i_n} \leqq (4\sqrt{2})^p \sum \max_{OM\leqq\frac{1}{2}} MA_{i_1}\ldots MA_{i_p}.$$

Or lorsque M varie dans un domaine quelconque de l'espace, le

---

(¹⁰) Il suffit, pour le voir, d'appliquer le principe du maximum de module au domaine $|z|\geqq\frac{1}{2}$ et à la fonction $z^{-p}P(z)$.

produit $MA_{i_1}\ldots MA_{i_p}$ atteint son maximum sur la frontière du domaine, cela résulte de suite du fait connu que, A étant fixé, $\log MA$ est une fonction sous-harmonique du point M. Il en résulte que dans la somme du membre droit de (7) on peut remplacer, *a fortiori*, la condition $OM \leqq \frac{1}{2}$ par $OM \leqq k$, où k est un nombre quelconque supérieur à $\frac{1}{2}$.

Nous allons maintenant utiliser le résultat connu suivant (11) : « Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des entiers, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Chaque polynome de la forme $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ prend aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des valeurs dont l'une au moins est plus grande ou égale, en module, à $n!\,2^{-n}$ ». On déduit immédiatement de cette propriété le lemme suivant :

Lemme 3. — *Chaque polynome* $P(x)$ *de la forme*

$$P(x) = x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \ldots + a_0$$

prend aux points $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2p}, \ldots, \frac{1}{2} + p\frac{1}{2p}$, *où* $p \geqq q$, *des valeurs dont l'une au moins est plus grande ou égale, en module, à* $\frac{q!}{(4p)^q}$.

Considérons maintenant une combinaison déterminée, soit $i_1, i_2, \ldots, i_p$ des nombres $1, 2, \ldots, n$ et supposons que parmi ces p nombres il y en a $q(0 \leqq q \leqq p)$ tels que les distances OA_{i_s} correspondantes ne dépassent pas 2, supposons, pour simplifier l'écriture, que ce sont les distances $OA_{i_1} = a_1$, $OA_{i_2} = a_2, \ldots, OA_{i_q} = a_q$. Posons

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_q).$$

D'après le lemme 3, le polynome $P(x)$ prend en un point

$$x = \delta_j = \frac{2}{1} + j\frac{1}{2p}$$

une valeur plus grande ou égale à $q!(4p)^{-q}$ en valeur absolue (j est égal à l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, p$, il dépend en général de la

(11) Pólya-Szegö, *loc. cit.*, livre VI, probl. 70.

combinaison $i_1, i_2, \ldots, i_p$ choisie). Sur la sphère de centre O et de rayon δ_j il y a un point N_j du continu E. M étant un point quelconque situé sur cette sphère, on a donc

$$\prod_{s=1}^{q} \frac{MA_{i_s}}{N_j A_{i_s}} \leq \frac{\prod_{s=1}^{q}(\delta_j + a_s)}{\left|\prod_{s=1}^{q}(\delta_j - a_s)\right|} \leq \frac{3^q}{q\,!(4p)^{-q}} \leq (12\,e)^q e^p. \tag{8}$$

La dernière inégalité de droite résulte de l'inégalité $q\,! > (qe^{-1})^q$ et du fait que $\left(\frac{p}{q}\right)^q \leq e^p$ lorsque $q = 1, 2, \ldots, p$. Considérons maintenant les $A_{i_s} (s = q+1, \ldots, p)$, pour lesquels $OA_{i_s} > 2$, puisque $MA_{i_s} < 1 + OA_{i_s}$, $N_j A_{i_s} > OA_{i_s} - 1$ et le rapport $\frac{1 + OA_{i_s}}{OA_{i_s} - 1} < 3$, on aura

$$\prod_{s=q+1}^{p} \frac{MA_{i_s}}{N_j A_{i_s}} < 3^{p-q}$$

donc, en tenant compte de (8),

$$\prod_{s=1}^{n} \frac{MA_{i_s}}{N_j A_{i_s}} < (12\,e^2)^p.$$

L'inégalité (7) fournit donc maintenant la suivante :

$$\sum \max_{E} MA_{i_1} \ldots MA_{i_p} \leq (48\,e^2\sqrt{2})^p \sum N_j A_{i_1} \ldots N_j A_{i_p},$$

où l'indice j ($j = 0, 1, 2, \ldots, p$) varie d'un terme de la somme à l'autre et où les $(p+1)$ points N_j appartiennent à E. De cette inégalité on déduit de suite celle de l'énoncé.

5. On peut chercher à étendre les considérations précédentes en remplaçant les distances entre les points de E et les points A_i par les distances entre les points de E et des ensembles Z_i ou, plus généralement, par des fonctionnelles positives des points de E et des ensembles Z_i (par exemple le maximum de la distance entre un point de E et l'ensemble Z_i, ou, lorsque E et les Z_i sont dans un même plan, l'angle sous lequel on voit l'ensemble Z_i d'un point de E, etc.). J'ai obtenu, dans cet ordre d'idées, les résultats suivants :

THÉORÈME IV. — *Soient* $D_1, D_2, \ldots, D_n$ *des droites situées dans un même plan* P *et* E *un ensemble borné et fermé, contenu dans* P. *Désignons par* d_i *la distance d'un point* E *de la droite* D_i. *On a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{n} \max_{E} d_i^2 \leq 3 \max_{E}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right);$$

l'égalité a lieu lorsque $n = 3$ *et* D_1, D_2, D_3 *sont les côtés d'un triangle équilatéral et* E *est ce triangle.*

THÉORÈME V. — *Si les conditions du théorème* IV *sont vérifiées et si les droites* D_i *passent toutes par le même point, on a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{n} \max_{E} d_i^2 \leq 2 \max_{E}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right);$$

l'égalité a lieu lorsque E *est l'ellipse, le long de laquelle* $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ *est constante.*

La démonstration, d'ailleurs élémentaire, des théorèmes IV et V, paraîtra dans un autre recueil. Il est probable que les énoncés IV et V subsistent (avec les mêmes constantes) lorsqu'on y remplace d_i^2 par d_i. J'ai pu l'établir, en ce qui concerne le théorème V, dans les cas où $n = 2$ et $n = 3$.