JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANDRÉ MARCHAUD

**Sur une classe de points singuliers des surfaces du troisième ordre de la géométrie finie**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 31 (1952), p. 319-340.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__319_0>

# *Sur une classe de points singuliers des surfaces du troisième ordre de la Géométrie finie;*

**Par André MARCHAUD.**

## Introduction.

Les belles découvertes de C. Juel étaient très peu connues en France lorsque M. Paul Montel exposa les plus remarquables d'entre elles au Séminaire de M. Hadamard au Collège de France en deux Conférences publiées ensuite au *Bulletin des Sciences mathématiques* (1). Leur lecture est à l'origine des recherches que j'ai poursuivies depuis lors sur la Géométrie finie et la Géométrie différentielle dans le sens de la suppression totale des hypothèses de commodité. En apportant ici en hommage à M. Paul Montel quelques-uns des plus récents résultats de ces recherches, je m'acquitte d'une dette de reconnaissance.

Il s'agira des points singuliers des surfaces du troisième ordre non décomposées telles que je les ai définies et étudiées dans un Mémoire antérieur (2). En réalité nous nous bornerons ici à une classe particulière : celle des points réguliers singuliers. L'étude complète des points singuliers nécessiterait l'utilisation de propriétés différentielles

(1) Paul Montel, *Sur la Géométrie finie et les travaux de M. C. Juel* (*Bull. Soc. math.*, mars 1924, p. 109).

(2) A. Marchaud, *Sur les surfaces du troisième ordre de la Géométrie finie* (*J. Math. pures et appl.*, t. 18, fasc. IV, 1939). Ce Mémoire sera désigné par [$S_3$].

qui font l'objet d'un travail en cours d'impression ([3]) ou bien obligerait à d'inutiles redites. Je préfère la réserver pour un Mémoire spécial qui traitera également des propriétés différentielles.

**1. Définitions. Points réguliers. Points irréguliers.** — Dans le Mémoire cité j'appelle : surface du troisième ordre non décomposée un ensemble fermé de l'espace projectif dont toute section plane est une courbe du troisième ordre au plus, l'une d'elles au moins étant du troisième ordre et non décomposée. Cette définition, inspirée des propriétés des surfaces algébriques, ne fait pas intervenir la notion de surface. Elle se passe même de la notion de courbe, grâce aux résultats de mon Mémoire sur les continus d'ordre borné et quelques travaux complémentaires. Je vais exposer rapidement les définitions renvoyant pour plus de détails à [ $S_3$, § 1 ].

Dans le plan projectif, un *continu* (ensemble fermé ne pouvant être décomposé en deux ensembles fermés disjoints) est dit d'*ordre* K, s'il contient K points au plus sur une droite quelconque et K exactement sur l'une au moins. Si $K = 2$, le continu est une courbe simple ouverte ou fermée. Il suffit de supposer l'absence d'extrémité pour obtenir la *courbe générale du second ordre* non décomposée : *l'ovale* (qui par une transformation homographique convenable devient la frontière d'un domaine borné convexe). Si $K = 3$, le continu est une courbe de Jordan ayant au plus un point double, ou bien la somme de deux arcs simples se croisant en un point unique. Dans les deux cas, il suffit de supposer qu'en tout point du continu aboutissent un nombre pair d'arcs pour obtenir une courbe de Jordan fermée possédant zéro ou un point double. La *courbe générale du troisième ordre* non décomposée est constituée par une telle courbe à laquelle peut s'adjoindre un ovale ou un point isolé (sans élément commun avec la première courbe).

Les courbes décomposées sont :

Pour le second ordre, deux droites distinctes ou un point isolé;

---

([3]) A. Marchaud, *Sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces d'ordre borné et plus particulièrement de celles du troisième ordre* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 4e fasc. 1952).

Pour le troisième ordre, l'ensemble d'une droite et d'une courbe du second ordre décomposée ou non.

On remarquera que les définitions précédentes conduisent à considérer un point isolé comme comptant pour deux. Cette convention est impossible à éviter [$S_3$, § **1**]; mais c'est la seule de cette nature; tout autre point (même nodal) est compté pour un.

Les courbes du troisième ordre décomposées ou non possèdent, en particulier, les propriétés suivantes dont nous ferons un usage constant :

1° Une courbe du troisième ordre a un point au moins sur toute droite du plan;

2° Si elle a trois points (seulement) sur une droite, elle la traverse en chacun d'eux;

3° Si elle traverse une droite en deux points simples, elle la traverse en un troisième [$S_3$, § **2** et **3**].

Enfin, il est bien connu qu'en tout point d'un arc simple d'ordre borné celui-ci possède une demi-tangente unique pour chaque côté (¹).

Pour donner un sens précis aux expressions : «traverse en un point», «demi-tangente en un point» lorsque le point est à l'infini, il faut par une transformation homographique convenable le ramener à distance finie. On définira, de même, les courbes dans le plan de l'infini. D'une manière générale, toutes les fois que nous considérerons simultanément les voisinages d'un nombre fini de points, nous les supposerons ramenés au besoin à distance finie par une transformation homographique en choisissant pour plan de l'infini un plan ne contenant aucun des points.

**2.** Les surfaces du second et du troisième ordre se définissent à partir des courbes planes décomposées ou non du second et du troisième ordre (la courbe du premier ordre est la droite). La *surface du second ordre non décomposée* est, par définition, un ensemble fermé

(¹) A. Marchaud, *Sur une condition nécessaire et suffisante d'existence des demi-tangentes en un point d'un arc simple* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 56, 1932).

de l'espace projectif dont toute section plane est une courbe du second ordre au plus, l'une au moins étant un ovale. J'ai montré antérieurement qu'un tel ensemble est un *ovoïde* (surface fermée convexe pouvant par une transformation homographique convenable être ramenée à la frontière d'un corps convexe) ou un cône convexe, ou bien une quadrique réglée ([5]).

De même, la *surface non décomposée du troisième ordre* est, par définition, un ensemble S, fermé dans l'espace projectif, dont chaque section plane est une courbe du troisième ordre au plus, l'une au moins étant exactement d'ordre trois et non décomposée. Cette définition, comme celle de la surface du second ordre, est très directe. Elle se passe de la notion de surface. L'étude de S se fait par l'exploitation de la notion de *point régulier* : un point M de S est dit régulier s'il existe une sécante issue de M rencontrant S en trois points et trois seulement; les points non réguliers sont appelés *irréguliers*. Une droite contenant trois points *irréguliers* est sur S et tous ses points sont irréguliers : c'est une *droite irrégulière* [$S_3$, § **9**].

Trois cas seulement sont possibles :

1° S possède deux droites irrégulières, c'est alors la somme d'un cône et d'une droite isolée passant par son sommet [$S_3$, § **13**];

2° S possède une seule droite irrégulière, c'est dans ce cas un cône augmenté éventuellement ([6]) d'un point isolé ou une surface réglée (non conique) et tout plan, sauf deux au plus, passant par une génératrice donnée coupe S suivant la génératrice et un ovale ([7]) [$S_3$, § **14** à **17**];

---

([5]) A. Marchaud, *Sur les surfaces du second ordre en Géométrie finie.* (*J. Math. pures et appl.*, t. **15**, fasc. **131**, 1936, p. 295.)

([6]) Je signale que cette présence éventuelle d'un point isolé a été omise par inadvertance dans $S_3$, § **14**. Le contexte répare de lui-même cette omission. En effet : dans l'étude du cas où S n'est pas un cône (augmenté ou non d'un point isolé), il est simplement supposé que les génératrices ne passent pas par un point fixe.

([7]) Dans ce dernier cas, S appartient à l'un ou l'autre de deux types analogues à ceux que l'on rencontre dans les surfaces réglées algébriques du troisième degré [$S_3$, § **16**]. Bien que nous ne traitions pas ici des propriétés différentielles, rappelons pourtant que S (réglée non conique) possède partout un plan tangent

3° S n'a pas de droite irrégulière; elle possède alors au plus quatre points irréguliers, non coplanaires s'ils sont quatre; dans tous les cas, un seul point irrégulier peut être point isolé de S [$S_3$, § **10**].

**5.** La propriété essentielle des points réguliers est la suivante. Soit M l'un d'eux, il existe une sécante issue de M rencontrant S en trois points : M, M', M'' et trois seulement; si ceux-ci sont à distance finie, il existe un cylindre de révolution d'axe MM'M'' tel que la portion de S comprise dans ce cylindre se compose de trois morceaux de surfaces simples de Jordan : $J_M$, $J_{M'}$, $J_{M''}$, sans points communs deux à deux, se projetant sur la section droite du cylindre d'une manière biunivoque et bicontinue et à pentes bornées par rapport à cette section droite.

Il en résulte que toute droite voisine de MM'M'' traverse $J_M$, $J_{M'}$, $J_{M''}$ et que cette droite MM'M'' est extérieure aux faisceaux des tangentes en M, M' et M'' [$S_3$, § **6**].

Je rappelle que le faisceau des tangentes en un point d'accumulation M d'un ensemble fermé est l'ensemble des droites d'accumulation de droites joignant deux points distincts de l'ensemble tendant simultanément vers M (l'un deux pouvant être confondu avec M). Le faisceau dérivé est l'ensemble des demi-droites d'accumulation de demi-droites d'origine M contenant un point de l'ensemble tendant vers M ([8]). Le faisceau des tangentes, représenté par $\mathfrak{T}(M)$ contient le faisceau dérivé, lui-même désigné par $\mathcal{D}(M)$.

Dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* datant de 1937 et plus récemment, j'ai étudié les propriétés du faisceau dérivé et du faisceau des tangentes en un point intérieur d'un morceau de surface simple de Jordan où le faisceau des tangentes ne remplit pas l'espace. Ces propriétés s'appliquent à $J_M$. Voici celles qui nous seront utiles.

1° Le complémentaire de $\mathfrak{T}(M)$ se compose de deux faisceaux

continu, sauf le long de la droite irrégulière et peut-être le long de deux génératrices limites [$S_3$, § **17**].

([8]) Le faisceau des tangentes et le faisceau dérivé sont le paratingent et le contingent de M. G. Bouligand.

symétriques de demi-droites $\theta(M)$ et $\theta'(M)$, d'origine M, ouverts symétriques sans rayons communs et *convexes*. On en déduit que $\mathfrak{T}(M)$ est un plan, un bidièdre (ensemble de deux dièdres pleins de même arête et symétrique) ou l'ensemble des droites issues de M ne pénétrant pas à l'intérieur d'un cône convexe (cône directeur des tangentes) (9).

2° $\mathcal{D}(M)$ s'obtient en prenant les demi-tangentes aux sections de $J_M$ par les plans contenant $MM'M''$. Comme chacune de ces sections est d'ordre trois au plus, elle contient de chaque côté de $MM'M''$ une seule demi-tangente, $\mathcal{D}(M)$ est un demi-cône simple (10).

3° Si $\mathcal{D}(M)$, demi-cône simple, possède un rayon $MD_1$ sur la frontière de $\theta(M)$ et un rayon non opposé $MD'_2$ sur celle de $\theta'(M)$, l'angle $D_1MD'_2$ fait partie de $\mathcal{D}(M)$ (11).

## Points singuliers.

**4.** Si l'on cherche à caractériser les points singuliers réels d'une surface réelle du troisième degré non décomposée, on voit aisément qu'un tel point est isolé, ou bien que le voisinage réel du point sur la surface est contenu dans le faisceau des tangentes en ce point, alors qu'au voisinage d'un point non singulier la surface n'est pas dans le plan tangent, qui est nécessairement le faisceau des tangentes en raison de la continuité du plan tangent. Nous sommes donc conduits à appeler *point singulier* d'une surface du troisième ordre *tout point dont le voisinage sur la surface est contenu dans le faisceau des tangentes au point considéré*. Comme je l'ai signalé plus haut, il est possible de faire le dénombrement et l'étude systématique des points singuliers et celle de leur voisinage. Je la réserve pour un autre travail, car elle utilise nécessairement les résultats d'un Mémoire : *Sur les*

---

(9) A. Marchaud, *Sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces simples de Jordan et quelques applications* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 63, fasc. 2) [§ 7].

(10) Même mémoire [§ **6**].

(11) *Ibid.*, [§ **9**, *b*].

*propriétés différentielles du premier ordre des surfaces d'ordre borné, et, plus particulièrement, de celles du troisième ordre*, qui s'imprime actuellement aux *Annales de l'École Normale Supérieure* ([12]). Je me bornerai ici aux point réguliers singuliers.

**5.** Vérifions cependant l'affirmation précédente relative aux surfaces algébriques du troisième degré. Il suffit de considérer un point singulier non isolé. Soit O un tel point : quatre cas sont à examiner suivant que le cône des tangentes en O, soit $\gamma$, est un cône réel du second degré non décomposé, un système de deux plans réels, un plan double (nécessairement réel) ou un système de deux plans imaginaires conjugués, car si le cône des tangentes est du troisième degré, il se réduit à la surface qui est bien alors dans $\mathfrak{T}(O)$. Examinons successivement les quatre cas.

1° $\gamma$ est un vrai cône réel. Soit L une droite issue de O intérieure au cône et Q un plan quelconque contenant L. La section de la surface par Q possède un point double nodal en O. Toutes les droites de Q issues de O appartiennent donc à $\mathfrak{T}(M)$ qui, par suite, remplit tout l'espace.

2° $\gamma$ est un système de deux plans réels. Si l'on prend L (passant par O) en dehors de ces plans, on abouti, à la même conclusion.

3° $\gamma$ est un plan double. Choisissons L en dehors de ce plan, toute section par un plan Q possède un rebroussement en O ou une droite de $\gamma$. Comme ceci ne peut avoir lieu que pour trois plans Q au plus (sans quoi la surface serait décomposée) $\mathfrak{T}(O)$ remplit tout plan Q, sauf peut-être trois au plus, donc tout l'espace, car c'est un ensemble fermé.

4° $\gamma$ est un système de deux plans imaginaires conjugués. Soit $\Delta$ leur intersection, nécessairement réelle. Prenons O comme origine des coordonnées et $Oz$ sur $\Delta$. Après une transformation homographique convenable, on peut mettre l'équation de la surface sous la forme

$$x^2 + y^2 + \varphi(x, y, z) = 0,$$

([12]) Dans ce Mémoire, il s'agit d'un morceau de surface représentable par une équation $z = f(x, y)$ et qui peut contenir des segments rectilignes ou des facettes planes.

où les axes sont rectangulaires et $\varphi$ un polynome homogène du troisième degré. Soit OX un axe du plan $z = 0$ faisant l'angle $\alpha$ avec $Oz$. La section de la surface par le plan $XOz$ a pour équation dans son plan

$$X^2 + \varphi(X\cos\alpha,\, X\sin\alpha,\, z) = 0.$$

Si $\Delta$ n'est pas sur la surface, le terme en $z^3$ n'est pas nul, la section possède alors un rebroussement en O, sauf peut-être pour trois positions du plan ; le faisceau des tangentes $\mathcal{T}(O)$ remplit donc tout l'espace. Supposons $\Delta$ sur la surface. Le terme en $z^3$ est nul, $\varphi$ s'écrit alors

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) \equiv {} & Ax^3 + A'y^3 + B_1 yz^2 + B_2 y^2 z \\ & + B'_1 zx^2 + B'_2 z^2 x + B''_1 xy^2 + B''_2 x^2 y + Cxyz,\end{aligned}$$

et l'équation de la section, débarrassée du facteur X,

$$\begin{aligned}X + [ & A\cos^3\alpha + A'\sin^3\alpha + (B''_1 \sin\alpha + B''_2\cos\alpha)\sin\alpha\cos\alpha]X^2 \\ & + [B'_1\cos^2\alpha + B_2\sin^2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha]Xz \\ & + (B'_2\cos\alpha + B_1\sin\alpha)\, r^2 = 0.\end{aligned}$$

Si $B_1$ et $B'_2$ sont différents de zéro, le terme en $z^2$ s'annule pour une seule position de OX. Dans les autres cas, la section de la surface par $XOz$ se réduit à l'axe $Oz$ et une conique tangente en O à cette droite. Il en résulte encore que le faisceau $\mathcal{T}(O)$ remplit tout l'espace. Reste à examiner le cas où $B_1$ et $B'_2$ sont nuls. Alors la section comporte, en dehors de $\Delta$, une droite d'équation

$$\begin{aligned}1 + [ & A\cos^3\alpha + A'\sin^3\alpha + (B''_1\sin\alpha + B''_2\cos\alpha)\sin\alpha\cos\alpha]X \\ & + [B'_1\cos^2\alpha + B_2\sin^2\alpha + C\sin\cos\alpha]z = 0.\end{aligned}$$

On voit immédiatement que la distance de cette droite à l'origine est supérieure à une constante différente de zéro. Autrement dit, le voisinage de O sur S est un segment de $\Delta$. Le faisceau $\mathcal{T}(O)$ est la droite $\Delta$, qui contient bien le voisinage de O.

**6.** Il est donc naturel d'adopter pour les points singuliers des surfaces du troisième ordre la définition proposée au paragraphe **4**. C'est ce que nous ferons en remarquant pourtant que cette définition ne s'appliquerait pas aux surfaces du quatrième ordre. C'est là une difficulté inhérente à la Géométrie finie, qui se construit peu à peu sans disposer d'un puissant outillage comparable à celui de la Géométrie algébrique.

Considérons la surface

$$z(x^2+y^2+z^2)-(x^2+y^2)^2=0.$$

Au point de vue algébrique, l'origine est un point singulier. Au point de vue réel, le faisceau des tangentes en ce point est le plan $z=0$, lequel ne contient pas le voisinage de l'origine sur la surface.

Revenons aux surfaces du troisième ordre. Il est facile de montrer que tout point irrégulier est singulier. Je réserve la démonstration pour le Mémoire annoncé, car nous n'étudierons ici que les points qui sont à fois réguliers et singuliers. La première question qui se pose est évidemment : de tels points peuvent-ils exister? L'exemple suivant montre que la réponse est affirmative. Donnons-nous une surface de révolution engendrée par une strophoïde droite de point double O en tournant autour de son axe de symétrie, et remplaçons la partie engendrée par la boucle par une sphère intérieure. Nous obtenons une surface S du troisième ordre pour laquelle le point O est régulier. Il est, d'autre part, immédiat que le cône directeur des tangentes en O (à S) est celui engendré par les tangentes en O à la strophoïde. Le voisinage de O sur S est contenu dans $\mathfrak{T}(O)$; ce point est donc singulier.

Nous allons étudier les surfaces du troisième ordre non décomposées, définies au paragraphe **2** (c'est-à-dire celle du Mémoire $S_3$) possédant un point régulier singulier. Soit S une telle surface sur laquelle un point M est à la fois régulier et singulier. Il existe une sécante issue de M rencontrant S en trois points M, M′, M″ et trois seulement. D'autre part, et par hypothèse $J_M$, choisi assez petit, est contenu dans $\mathfrak{T}(M)$.

Désignons par Q un plan quelconque passant par MM′M″. Je vais étudier la section $Q \times S$ de S par Q et montrer qu'elle se compose de deux éléments distincts :

1° $\sigma_Q$, contenu dans $\mathfrak{T}(M)$, passant par M, mais, ni par M′ ni par M″, courbe du troisième ordre ou droite;

2° $\omega_Q$, n'ayant aucun point intérieur à $\mathfrak{T}(M)$, passant par $M'$ et $M''$ mais pas par M, ovale ou système de deux droites, ce dernier cas ne pouvant se produire que si $\mathfrak{T}(M)$ étant un bidièdre, Q en contient l'arête.

Soient $MD_1$ et $MD_2$ les demi-tangentes en M à $Q \times S$, c'est-à-dire à $Q \times J_M$. Je dis que si elles sont opposées, leur support est sur S.

En effet, supposons que l'arc $Q \times J_M$ ait un point N en dehors du support du côté de $MD_1$, par exemple; une sécante issue de M pénétrant à l'intérieur de l'angle $NMD_1$ traversera $Q \times J_M$ en M et entre M et N en un certain point $N'$, donc $Q \times S$ en un troisième point. Mais alors cette sécante est extérieure à $\mathfrak{T}(M)$ et elle contient le point $N'$ de $J_M$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut donc que $Q \times J_M$ soit un segment de droite dont le support est, par suite, sur S.

De là on déduit aisément que $\mathcal{D}(M)$ *ne peut avoir deux couples de rayons opposés situés sur la frontière de* $\mathfrak{T}(M)$.

Supposons qu'il y en ait deux : $MD_1$, $MD'_1$; $MD_2$, $MD'_2$. On peut choisir les notations de manière que $MD_1$ et $MD_2$ soient sur la frontière de $\theta(M)$ [§ **3**, 1°].

D'après la propriété rappelée à ce paragraphe **3**, $\mathcal{D}(M)$ contient les angles opposés $D_1DM'_1$ et $D_2DM'_2$ qui sont, par suite, sur S, ce qui exige que leur plan tout entier y soit. Ceci est impossible, puisque S n'est pas décomposée.

Ces remarques faites, venons-en à l'étude de $Q \times S$. Je distinguerai deux cas :

1° $Q \times \mathfrak{T}(M)$ se réduit à une seule tangente $\Delta$. Ceci ne peut avoir lieu que si $\mathfrak{T}(M)$ est un bidièdre et lorsque Q en contient l'arête. Les demi-tangentes en M à $Q \times J_M$ sont opposées, $Q \times S$ se compose donc de $\Delta$ et d'un ovale passant par $M'$ et $M''$ ou bien de deux droites, l'une contenant $M'$, l'autre $M''$,

2° $Q \times \mathfrak{T}(M)$ *est limité par deux tangentes*, $T_1$ et $T_2$.

*a*. Si $Q \times \mathcal{D}(M)$ se réduit à deux demi-droites opposées, leur support est sur $Q \times S$. Le reste de l'intersection est cette fois certainement un ovale. S'il en était autrement, $Q \times S$ serait un système de trois droites et toute sécante de Q, issue de M sauf deux couperait S en trois points distincts et, par suite, serait extérieure à $\mathfrak{C}(M)$, ce qui est contradictoire avec le fait que $Q \times \mathfrak{C}(M)$ est limité par deux tangentes distinctes.

Il reste à examiner le cas

*b.* où $Q \times \mathcal{D}(M)$ se compose de deux demi-tangentes, $MD_1$ et $MD_2$ non opposées.

Désignons par $MD'_1$ et $MD'_2$ les demi-droites respectivement opposées à $MD_1$ et $MD_2$. Je vais montrer que $Q \times J_M$ a tous ses points (sauf M) *intérieurs* aux angles symétriques $D_1MD'_2$ et $D_2MD'_1$. Supposons, par exemple, que $Q \times J_M$ ait un point N, du côté de $MD_1$ intérieur à l'angle $D_1MD_2$. Une sécante L du plan Q, issue de M et pénétrant à l'intérieur de l'angle $D_1MN$ traversera $Q \times J_M$ en M et en un point N′ entre N et M. L sera donc extérieur a $\mathfrak{C}(M)$ et, par suite, N′, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur $J_M$. Pour justifier notre affirmation, il faut encore constater que $Q \times J_M$ n'a pas de point sur $MD_1$ ou $MD_2$. Si l'arc tangent à $MD_1$, par exemple, avait un point $N_1$ sur $MD_1$, il faudrait que l'arc $N_1M$ soit sur $MD_1$, ce qui est impossible, puisque $MD_1$ et $MD_2$ ne sont pas opposées ou bien qu'il ait des points intérieurs à l'angle $D_1MD'_2$, mais alors une sécante convenablement choisie couperait $Q \times J_M$ en quatre points.

Il est donc bien établi que $Q \times J_M$ a tous ses points (sauf M) intérieurs aux angles $D_1MD'_2$ et $D_2MD'_1$. Le point M est ce que C. Juel appelle une *épine*. On en déduit que $Q \times S$ n'est pas décomposée. Si, en effet, elle contenait une droite, on pourrait trouver une sécante coupant $Q \times J_M$ en trois points et la droite en un quatrième. La courbe $Q \times S$ n'étant pas décomposée, est ou bien une courbe de Jordan du troisième ordre ou bien la somme d'une telle courbe et d'un ovale ne la rencontrant pas. Le premier cas est impossible, car la courbe unique devrait traverser $D_1MD'_1$ ou $D_2MD'_2$, ce qui permettrait de trouver à l'intérieur des angles opposés $D_1MD'_2$, $D_2MD'_1$, c'est-à-dire à l'intérieur de $\mathfrak{C}(M)$, une sécante issue de M traversant $Q \times S$ en trois points, ce qui est contradictoire. Nous sommes donc assurés que $Q \times S$ se compose d'une courbe du troisième ordre $\sigma_Q$ contenant M et d'un ovale $\omega_Q$.

En raisonnant comme précédemment, l'on voit que $\sigma_Q$ a tous ses points, sauf M, *intérieurs* aux angles $D_1MD'_2$ et $D_2MD'_1$ et, par conséquent, intérieurs à $\mathfrak{C}(M)$. Il en résulte que M′ et M″ sont sur $\omega_Q$, lequel ne peut pénétrer à l'intérieur de $\mathfrak{C}(M)$; comme on le voit de la même manière.

Je ferai encore deux remarques :

*a.* Soit N un point quelconque de $Q \times S$, non commun à $\sigma_Q$ et $\omega_Q$. On voit immédiatement que N est régulier; en effet, si N est sur $\sigma_Q$, on peut mener une sécante traversant $\omega_Q$ en deux points, donc $\sigma_Q$ en N [§ 1.3°]; si N est sur $\omega_Q$, on peut trouver une sécante traversant $\omega_Q$ en deux points, donc $\sigma_Q$ en un troisième.

*b.* Supposons N sur $\sigma_Q$ et celle-ci non rectiligne. Si N est distinct de M, on pourra trouver une sécante issue de N et traversant $MD_1$ et $MD_2$ au voisinage de M, cette sécante traversera alors $\sigma_Q$ en trois points.

En résumé, nous avons établi la relation

$$Q \times S = \sigma_Q + \omega_Q,$$

où $\sigma_Q$ et $\omega_Q$ possèdent les propriétés suivantes :

1° $\sigma_Q$ est dans $\mathfrak{C}(M)$, c'est une courbe du troisième ordre (à épine en M), ou une droite contenant M; $\sigma_Q$ ne passe ni par M′ ni par M″;

2° $\omega_Q$ n'a aucun point intérieur à $\mathfrak{C}(M)$, c'est un ovale passant par M′ et M″, mais pas par M ou un système de deux droites distinctes : l'une contenant M′, l'autre M″; dans ce cas, $\mathfrak{C}(M)$ est nécessairement un bidièdre et $\sigma_Q$ en est l'arête;

3° $\sigma_Q$ et $\omega_Q$ ne peuvent avoir de point commun que sur la frontière de $\mathfrak{C}(M)$, il faut alors que $\sigma_Q$ soit une droite, et ceci pour une position au plus du plan Q; lorsque $\omega_Q$ est un ovale, il a avec $\sigma_Q$ au plus un point commun, lorsque c'est un système de deux droites, $\sigma_Q$ et $\omega_Q$ peuvent en avoir deux;

4° Tout point de $S \times Q$ non commun à $\sigma_Q$ et $\omega_Q$ est régulier;

5° Si $\sigma_Q$ n'est pas une droite, on peut mener par chacun de ses points (distinct de M) une sécante le traversant en trois points.

**7.** Considérons maintenant l'ensemble $\Sigma$ des $\sigma_Q$ et celui $\Omega$ des $\omega_Q$ pour toutes les positions de Q. On a évidemment

$$S = \Sigma + \Omega.$$

D'après ce qui précède, nous voyons que $\Sigma$ et $\Omega$ ont au plus deux points communs (nous montrerons plus loin que cette limite supérieure peut être ramenée à *un*), et de plus que tout point non commun à $\Sigma$ et $\Omega$ est régulier [§ **6**, 3° et 4°]. Je vais montrer que $\Sigma$ et $\Omega$ sont des surfaces, la première du troisième ordre, la deuxième du second : ovoïde ou cône. Pour cela, il faut établir que $\Sigma$ et $\Omega$ sont fermés et qu'ils satisfont aux définitions rappelées au paragraphe **2**. Démontrons d'abord qu'ils sont fermés et commençons par $\Omega$.

Soit N un point d'accumulation d'une suite $N_i (i = 1, 2, \ldots)$ de points de $\Omega$, il faut montrer que N est sur $\Omega$. Remarquons que N ne peut être en M, car $J_M$ ne contient aucun point de $\Omega$. Si N n'est pas sur $\Omega$, il n'est ni en M', ni en M'', le plan NMM' est, par suite, bien déterminé. Nous le désignerons par Q et, de même, par $Q_i$ le plan $N_i MM'$. N n'étant pas sur $\omega_Q$ est sur $\sigma_Q$ qui est ici une droite située sur la frontière de $\mathfrak{T}(M)$ [§ **6**]. Comme $\omega_Q$ est un ovale ou deux droites, on peut mener par N dans Q une sécante L traversant $\omega_Q$ en deux points N' et N'' extérieurs à $\mathfrak{T}(M)$, L traversera donc $\sigma_Q$ en N. Ces points N, N', N'' sont réguliers, soient $J_N$, $J_{N'}$, $J_{N''}$ leurs voisinages sur S. Lorsque $i$ est assez grand, $N_i$ est sur $J_N$ et la droite qui le joint au point d'intersection de L avec MM'M'' traverse $J_N$, $J_{N'}$ et $J_{N''}$ et, par suite, $\omega_{Q_i} + \sigma_{Q_i}$ en des points $N_i$, $N'_i$, $N''_i$. Mais le premier est sur $\omega_{Q_i}$ par hypothèse, tandis que les deux derniers y sont aussi, car pour $i$ assez grand ils sont extérieurs à $\mathfrak{T}(M)$. Nous aboutissons à une contradiction. L'ensemble $\Omega$ est donc bien fermé.

Considérons maintenant $\Sigma$ et pour cela supposons les $N_i$ sur $\Sigma$ et N étranger à cet ensemble. Le plan $Q = (NM'M'')$ est encore bien défini, car N n'est pas en M. Cette fois N est sur $\omega_Q$ et pas sur $\sigma_Q$. Dans le plan Q nous pouvons mener une sécante L traversant $\omega_Q$ en N et en un second point N'. D'après la propriété rappelée au paragraphe **1**, L traversera $Q \times S$ en un troisième point N'' situé nécessairement sur $\sigma_Q$ et, par suite, intérieur à $\mathfrak{T}(M)$, puisqu'il est distinct de N. On peut évidemment choisir L de manière que N' soit extérieur à $\mathfrak{T}(M)$;

lorsque $i$ est assez grand, $N_i$ est sur $J_N$ et la droite qui le joint au point commun à L et $MM'M''$ traverse $J_N$, $J_{N'}$, $J_{N''}$ respectivement en $N_i$, $N'_i$, $N''_i$. Le premier est sur $\sigma_{Q_i}$, le second sur $\omega_{Q_i}$ [puisque N′ est extérieur à $\mathfrak{G}(M)$]. Le troisième est sur $\sigma_{Q_i}$ comme intérieur à $\mathfrak{G}(M)$. Nous aboutissons encore à une contradiction, car la sécante traversant $\sigma_{Q_i}$ en deux points le traverse en un troisième, ce qui avec $N'_i$ sur $\omega_{Q_i}$ ferait quatre points.

En définitive, $\Sigma$ et $\Omega$ sont des ensembles fermés.

D'après une remarque faite plus haut, il ont au plus deux points communs. Lorsqu'ils sont disjoints, il est immédiat que leurs sections par un plan quelconque sont des courbes du troisième ordre au plus. Ce sont donc des surfaces du troisième ou du second ordre. Nous allons voir les choses de plus près dans le cas général. Pour cela, deux remarques préliminaires seront nécessaires.

**8.** La première concerne les sécantes coupant exactement S en trois points : je dis que l'un d'eux au moins appartient à $\Sigma$. En effet, soient N, N′, N″ les trois points. Supposons-les sur $\Omega$. Si l'un d'eux, N par exemple, est commun à $\Omega$ et $\Sigma$, nous pourrons choisir une sécante voisine traversant $J_N$, $J_{N'}$, $J_{N''}$ en $N_1$, $N'_1$, $N''_1$ de manière que le plan $MN_1N'_1$ ne contienne aucun point commun à $\Omega$ et $\Sigma$. Ceci est possible *a fortiori* lorsque ces ensembles sont disjoints. La section de S par le plan $MN_1N'_1$ donne donc deux courbes distinctes : l'une sur $\Sigma$, l'autre sur $\Omega$. La seconde est du troisième ordre, la première est donc ovale ou un point isolé. Cette dernière circonstance ne peut se produire, car le plan $MN_1N'_1$ contient des points extérieurs à $\mathfrak{G}(M)$. La première non plus, car en M l'ovale aurait des points extérieurs à $\mathfrak{G}(M)$. Comme le montre le raisonnement utilisé au paragraphe **6**.

**9.** La seconde concerne les courbes simples fermées tracées sur S. Soit $\mathcal{L}$ une telle courbe, image biunivoque et bicontinue d'une circonférence $l$. Je dis que si elle contient un point $N_0$ appartenant à $\Sigma$ et pas à $\Omega$ et un point $N'_0$ appartenant à $\Omega$ et pas à $\Sigma$, elle passe par deux points communs au moins. Les points $N_0$ et $N'_0$ partagent $\mathcal{L}$ en deux arcs simples que nous noterons (1) et (2). Considérons un point N décrivant (1) à partir de $N_0$. Il commence par être sur $\Sigma$, puisque cet ensemble est fermé et que $N_0$ n'est pas sur $\Omega$; mais il ne peut y rester, puisque $N_0$ n'est pas sur $\Sigma$. En désignant par $A_1$ la borne du côté de $N'_0$ des points N tels que l'arc partiel $N_0N$ de (1) soit sur $\Sigma$, on voit immédiatement que $A_1$ est nécessairement commun à $\Sigma$ et $\Omega$. De la même manière, on trouvera un second point $A_2$ sur (2). Ainsi $\mathcal{L}$ passe bien par deux points communs au moins.

**10.** Nous avons vu lors de la définition de $\Omega$ que cet ensemble peut contenir des droites. Examinons pour commencer le cas où il en est ainsi. Supposons donc qu'une droite $D_0$ soit tout entière sur $\Omega$. Comme cet ensemble n'a aucun point intérieur à $\mathcal{T}(M)$, il faut nécessairement que celui-ci soit un bidièdre. Si, en effet, le cône directeur des tangentes était un vrai cône convexe, $D_0$ ne pourrait s'y trouver tout entière sans passer par son sommet M, ce qui est impossible puisque M est sur $\Sigma$ et pas sur $\Omega$. Mais si $\mathcal{T}(M)$ est un bidièdre d'arête $\Delta$, $D_0$ étant contenu dans la fermeture du complémentaire doit nécessairement rencontrer $\Delta$ en un point $A_0$. Enfin, on a vu au paragraphe **6** que $\Delta$ est sur $\Sigma$. Le point $A_0$ est donc commun à $\Sigma$ et $\Omega$. Considérons un plan $Q_0$ ne contenant pas $\Delta$; il ne contiendra pas non plus le second point commun à $\Sigma$ et $\Omega$ s'il existe, car il est dans ce cas sur $\Delta$. Nous obtenons un ovale $\omega_0$ et une courbe $\sigma_0$, le premier sur $\Omega$, le second sur $\Sigma$ et n'ayant aucun point commun. La droite $D_0$ tout entière sur $\Omega$ rencontre $\omega_0$ en un point $N_0$. Soit alors N un point de $\omega_0$ distinct de $N_0$, la droite $N_0N$ traverse $\omega_0$ en deux points, donc $\sigma_0$ en un troisième point $N'$. Le plan $(D_0, N)$ contient la droite $D_0$ et passe par N et $N'$, le reste de l'intersection est donc un ovale ou un système de deux droites. La première circonstance est impossible en raison de la remarque faite au paragraphe précédent, car N est sur $\Omega$ et pas sur $\Sigma$, tandis que $N'$ est sur $\Sigma$ et pas sur $\Omega$. La section de S par le plan $(D_0, N)$ se compose donc de trois droites. Celle contenant N est tout entière sur $\Omega$, elle passe donc par $A_0$. Il en résulte immédiatement que $\Omega$ se réduit au cône du second ordre $[A_0, \omega_0]$. En effet, tout point du cône est sur $\Omega$; si cet ensemble possédait d'autres points, on pourrait par l'un quelconque d'entre eux mener une sécante coupant S en trois points situés sur $\Omega$, ce qui est impossible [§ **8**]. Il est facile de voir que $\Sigma$ est aussi un cône de sommet $A_0$. Nous pouvons choisir $D_0$ de telle manière que la droite $MD_0$ traverse $\omega_0$ en $N_0$ et, de plus, que les demi-tangentes en ce point soient opposées. Ainsi le plan $A_0N_0N$ balayera tout l'espace quand N décrira $\omega_0$. Lorsque la droite $N_0N$ ne passe pas par M, le plan $A_0N_0N$ rencontre $\Delta$ seulement en $A_0$. La troisième droite du plan, située sur $\Sigma$, donc appartenant à un bidièdre d'arête $\Delta$, doit rencontrer celle-ci, par suite, en $A_0$. Lorsque $N_0N$ passe par M, la troisième droite est $\Delta$. Reste à voir ce qui se passe dans le plan tangent $R_0$ à $[A_0, \omega_0]$ le long de $A_0N_0$. L'ensemble $\Sigma$ étant fermé, ce plan contient sur $\Sigma$ la limite $A_0N'_0$ de $A_0N'$ quand N tend vers $N_0$.

Il ne contient pas d'autre point de S. En effet, supposons qu'il existe un tel point $N_1$. La droite $N_1N_0$ traverse la section $R \times S$ en $N_0$ et sur $A_0N'_0$, donc en $N_1$. La droite $N_0N$ est, par suite, extérieure à $\mathscr{C}(N_0)$, ce qui est impossible puisque $\mathscr{O}(N_0)$ n'est autre que R.

En définitive, nous pouvons assurer que si $\Omega$ contient une droite :

1° Le faisceau des tangentes en M est un bidièdre;

2° $\Omega$ et $\Sigma$ sont deux cônes ayant pour sommet commun un point de l'arête du bidièdre, le premier est du second ordre, le second du troisième et ils n'ont pas de génératrice commune ([13]).

$\Sigma$ ne pourrait être du second ordre, sans quoi certaines droites couperaient S en quatre points.

**11.** La démonstration s'achèvera aisément. Il reste à considérer le cas où $\Omega$ ne contient aucune droite. Nous savons qu'il a un point au plus en commun avec $\Sigma$ [§ **6**].

Supposons d'abord qu'il n'en ait pas, et soit R un plan quelconque. Les sections $R \times \Omega$ et $R \times \Sigma$ sont disjointes. Si la première n'est pas vide, c'est une courbe du second ordre. En effet, $\Omega$ ne contient pas de droite et ne peut être coupée par une sécante en trois points [§ **8**].

([13]) Il est facile de donner des exemples de ce cas. En voici un. Considérons une strophoïde de point double O et remplaçons la boucle par un ovale intérieur $\omega$. Il suffit de prendre pour S le cône ayant pour base la courbe ainsi obtenue et pour sommet un point A extérieur au plan de la strophoïde.

Quant à $R \times \Sigma$, si elle n'est pas vide, c'est une courbe du troisième ordre au plus ([14]). D'autre part, il existe par hypothèse un plan $R_0$ tel que $R_0 \times S$ soit une courbe du troisième ordre non décomposée, ceci exige que $R_0 \times \Sigma$ soit du troisième ordre et non décomposée. $\Omega$ est donc une surface du second ordre (nécessairement un ovoïde), et $\Sigma$ est une surface du troisième ordre [§ **2**].

Supposons enfin que $\Omega$ et $\Sigma$ aient un point commun A. Il suffira d'étudier les sections par les plans contenant ce point, soit R l'un d'eux. Le point A appartient à $R \times \Omega$; si celle-ci ne renferme pas d'autre point, elle se réduit au point isolé A et $R \times \Sigma$ n'est autre que $R \times S$ : courbe du troisième ordre au plus. Étudions le cas où $R \times \Omega$ contient un second point N. Ce point est régulier [§ **6**, 4°] et il ne peut être sur une droite de $R \times S$, car une telle droite serait sur $\Omega$ [§ **9**]. Je dis qu'il n'est pas isolé pour $R \times S$. Dans ce cas, en effet, $J_N$ choisi assez petit serait d'un même côté de R au sens strict. Il suffit, pour le voir, de considérer les sections de $J_N$ par les plans parallèles à une droite $Nz$, extérieure à $\mathfrak{T}(N)$ et à R. En coupant S par le plan $ANz$, nous obtiendrons sur $J_N$ un arc simple pouvant être traversé en deux points par une sécante issue de A et voisine de AN. Comme $J_N$, choisi assez petit est sur $\Omega$, on aboutit à une contradiction [§ **8**]. Si donc $R \times \Omega$ contient un point N; distinct de A, ce point n'est pas isolé pour $R \times S$ et n'est pas sur une droite de cette section; il n'en est pas non plus un point double. On en déduit que, quelle que soit la nature de $R \times S$, le point N est nécessairement sur un ovale, soit que $R \times S$ se compose d'un ovale et d'une droite ou d'une courbe du troisième ordre sans point commun avec l'ovale, soit que $R \times S$ soit une courbe de Jordan à point double (le point double d'une telle courbe partage celle-ci en un ovale et une courbe du troisième ordre) [§ **8**]. Mais cet ovale passe nécessairement par A, $R \times \Omega$ contient donc un ovale et rien de plus, toujours pour la raison que $\Omega$ est un ensemble d'ordre deux; $R \times \Sigma$ est dans les deux cas une courbe du troisième ordre au plus. Ainsi, comme lorsque A

---

([14]) En fait, j'ai montré dans [$S_3$, § **8**] que S ne peut être coupée suivant un ovale ou un point isolé. Mais, comme on le voit, il n'est pas nécessaire d'utiliser ce résultat.

n'existe pas, $R \times \Omega$ est vide, ou bien c'est un ovale ou un point isolé, tandis que $R \times \Sigma$ est soit vide, soit une courbe d'ordre trois au plus. Enfin, nous savons qu'il existe un plan $R_0$ tel que $R_0 \times S$ soit une courbe du troisième ordre non décomposée. Si $R_0$ ne passe pas par A, on est ramené au cas où ce point n'existe pas. Si $R_0$ passe par A, $R_0 \times \Sigma$ est forcément d'ordre trois, autrement $R_0 \times S$ serait décomposée.

En définitive, si $\Omega$ ne contient aucune droite : $R \times \Omega$ est, quel que soit R, un ensemble vide ou bien un ovale ou un point isolé, $R \times \Sigma$ est un ensemble vide ou une courbe du troisième ordre au plus; les sections $Q \times \Sigma$ sont des ovales, une section $R_0 \times \Sigma$ est du troisième ordre. Il en résulte que $\Omega$ et $\Sigma$ sont respectivement un ovoïde et une surface du trosième ordre.

Lorsque $\Omega$ contient une droite, nous avons vu que c'est un cône du second ordre de sommet A, et que $\Sigma$ est un cône du troisième ordre de même sommet. A est le seul point commun aux deux cônes : il est unique point irrégulier pour S [§ **6**, 3°]. Je vais montrer que lorsque $\Omega$ est un ovoïde, le point commun à $\Omega$ et $\Sigma$, s'il existe, est encore le *seul* point irrégulier de S. D'après le résultat qui vient d'être rappelé, il suffit de voir qu'il est effectivement irrégulier. Supposons le contraire, on pourra trouver une sécante issue de A et coupant S exactement en trois points : A, N′, N″. Considérons $J_A$, $J_{N'}$, $J_{N''}$. Le premier contient des points de $\Omega$ et des points de $\Sigma$ aussi voisins qu'on veut de A, les deux autres, s'ils sont assez petits, sont sur $\Sigma$ ou sur $\Omega$, mais l'un d'eux au moins, $J_{N''}$ par exemple, est sur, $\Sigma$, autrement des sécantes voisines de AN′N″, issues d'un point de $\Omega$ sur $J_A$ couperaient $\Omega$ en trois points distincts [§ **8**]. D'autre part, si une sécante analogue part d'un point de $J_A$ situé sur $\Sigma$, elle traversera $\Sigma$ sur $J_A$ et $J_{N''}$; donc aussi sur $J_{N'}$, ce qui exige que $J_{N'}$ soit sur $\Sigma$. Menons alors une sécante $N_1$, $N'_1$, $N''_1$, assez voisine de AN′N″ pour traverser $J_A$, $J_{N'}$ et $J_{N''}$, $N_1$ étant choisi sur $\Omega$. Le voisinage de $N_1$ sur $J_A$ est sur $\Omega$ qui est ainsi traversé en $N_1$ et, par suite, en un second point qui ne peut être ni $N'_1$. ni $N''_1$. Nous sommes conduits à une contradiction. Le point A est donc irrégulier pour S et c'est le seul. Le raisonnement montre que A est également irrégulier pour $\Sigma$.

Je terminerai le présent paragraphe par une remarque sur les points irréguliers de $\Sigma$ *considérée seule*.

On vient de voir que si A existe, il est de ces points. $\Sigma$ ne peut avoir deux droites irrégulières, car l'une d'elle devant être isolée [§ **2**], on aboutirait à une impossibilité à cause de $\Omega$. Si elle en a une, $\Sigma$ ne peut être une vraie surface réglée. En effet, les plans passant par une génératrice donnée, sauf peut-être deux, coupent $\Sigma$ suivant cette génératrice et un ovale [§ **2**], il suffirait de choisir le plan de manière qu'il coupe $\Omega$ pour aboutir à une contradiction. Si donc $\Sigma$ considérée seule possède une droite irrégulière, elle se réduit à un cône. L'existence d'un point isolé est écarté par la présence de $\Omega$.

**12.** Nous avons vu qu'à tout point régulier singulier correspond (au moins) une décomposition

$$S = \Sigma + \Omega.$$

En raison des propriétés de celle-ci, il est à peu près évident qu'elle est unique. Je vais néanmoins le démontrer. Supposons que le même point ou un autre conduise à la décomposition

$$S = \Sigma_1 + \Omega_1,$$

je dis que $\Sigma$ et $\Sigma_1$ d'une part, $\Omega$ et $\Omega_1$ d'autre part sont identiques. Désignons par O et $O_1$ des points respectivement intérieurs à $\Omega$ et $\Omega_1$ ([15]), par A le point commun à $\Omega$ et $\Sigma$ s'il existe et, de même, par $A_1$ le point commun à $\Omega_1$ et $\Sigma_1$ s'il existe. Ceci posé, soit N un point de S distinct de A et de $A_1$ (s'ils existent). On peut évidemment choisir O et $O_1$ de manière qu'ils définissent avec N un plan R ne contenant ni A ni $A_1$. Dans ces conditions, les sections $R \times \Sigma$, $R \times \Omega$, d'une part et $R \times \Sigma_1$, $R \times \Omega_1$, d'autre part, sont disjointes. De plus, d'après la manière dont O et $O_1$ ont été choisis,

([15]) Un point intérieur à un ovoïde ou à un cône non décomposé du second ordre est un point tel que toute droite issue de ce point rencontre la surface en deux points et deux seulement. Pour un ovoïde à distance finie, c'est un point intérieur au domaine convexe qu'il limite; pour un cône, c'est un point intérieur à une section plane non décomposée et qu'on peut supposer à distance finie, c'est-à-dire intérieur au domaine convexe plan que limite cette section.

$R \times \Omega$ et $R \times \Omega_1$ sont des ovales; on a vu, en effet, que $R \times \Omega$ ne peut contenir une droite que si R passe par A [§ **10**]. Il en résulte que ni $R \times \Sigma$ ni $R \times \Sigma_1$ ne sont du second ordre, autrement $R \times S$ serait d'ordre supérieur à trois. Les sections $R \times \Omega$ et $R \times \Omega_1$ sont donc confondues et, par suite, $R \times \Sigma$ et $R \times \Sigma_1$. On en déduit que tout point de S, distinct de A et de $A_1$, appartient à $\Omega$ et $\Omega_1$ ou bien $\Sigma$ et $\Sigma_1$. Comme ces ensembles sont fermés, $\Omega$ et $\Omega_1$ d'une part, $\Sigma$ et $\Sigma_1$ d'autre part sont identiques. Il en résulte immédiatement que $\Sigma$ contient tous les points réguliers singuliers.

**13.** Étudions pour terminer l'ensemble de ces points que je désignerai par la lettre M, affectée ou non d'indice. Ils sont tous sur $\Sigma$ et irréguliers pour celle-ci considérée seule. Il suffit de vérifier que M l'est, ce qui a bien lieu puisque, quel que soit Q, $\sigma_Q$ ne peut être coupée en trois points par une droite issue de M. Soit alors $M_1$ un second point régulier singulier. La section $\sigma_{Q_1}$ contenue dans le plan $M_1MM'M''$ ne peut avoir de point irrégulier pour $\Sigma$ considérée seule que si elle se réduit à une droite [§ **6**, 5°]. Il en résulte que la droite $MM_1$ est sur $\Sigma$. Nous avons vu, d'autre part, que si $\Sigma$ et $\Omega$ ont un point commun A, la droite AM est sur $\Sigma$ [§ **6**, 3°]. En résumé : tous les points réguliers singuliers sont sur $\Sigma$, ils sont irréguliers pour $\Sigma$ considérée seule; la droite qui joint deux d'entre eux est sur cette surface, de même que les droites les joignant à A s'il existe.

Je distinguerai deux cas suivant que A existe ou non :

1° $\Sigma$ et $\Omega$ ont un point commun A. Supposons l'existence de deux points irréguliers singuliers M et $M_1$. Si les trois points A, M, $M_1$ sont alignés, la droite $AMM_1$ est irrégulière pour $\Sigma$ [§ **2**] et celle-ci est un cône dont le sommet O est sur la droite irrégulière [§ **11**].

On peut toujours supposer que O n'est pas en M. Considérons alors un point $M_i$ de la droite irrégulière distinct de O, de A et de M. Le faisceau des tangentes en $M_i$ et le voisinage de S en $M_i$ se déduisent des mêmes éléments pour M par homothétie de centre O qui transforme M et $M_i$. Il en résulte que tous les points de AM, sauf peut-être A et O sont réguliers et singuliers. Mais si O est distinct de A, il est régulier et singulier. Nous pouvons donc affirmer que si S possède deux points réguliers singuliers alignés avec A, $\Sigma$ est un cône dont le sommet est sur la droite, laquelle ne contient en dehors de A que des points réguliers singuliers. Ceux-ci sont évidemment les seuls, autrement $\Sigma$ contiendrait un plan ([16]).

Considérons maintenant le cas où M, $M_1$ et A ne sont pas alignés. Les côtés du triangle MMA sont sur $\Sigma$. Si S possède un troisième point régulier singulier $M_2$, ce point ne peut être dans le plan $MM_1A$. Il forme donc avec M, $M_1$ et A un tétraèdre. Coupons alors S par un plan contenant $MM_1$, ne passant pas par A et contenant un point I intérieur à $\Omega$, il donnera comme section : une droite, un ovale et un point n'appartenant ni à l'un ni à l'autre. Comme ceci est impossible, $M_2$ ne peut exister.

2° $\Sigma$ et $\Omega$ n'ont pas de point commun. On voit immédiatement, en raisonnant comme dans le cas précédent, que si S possède trois points réguliers singuliers alignés, tous les points de la droite le sont et qu'il n'y en a pas d'autres et, de plus, que $\Sigma$ est un cône.

De même, on voit que si M, $M_1$, $M_2$ ne sont pas alignés, ce sont les seuls.

En réunissant les résultats obtenus jusqu'ici, nous obtenons la proposition suivante :

*Soit* S *une surface du troisième ordre non décomposée possédant un point régulier singulier :*

1° S *est la somme d'une surface du troisième ordre* $\Sigma$ *et d'une surface du second ordre* $\Omega$ *ayant au plus un point commun, lequel s'il existe est le seul point irrégulier de* S, *lorsque* $\Sigma$ *et* $\Omega$ *sont disjoints tous les points de* S *sont réguliers;*

2° $\Omega$ *est un ovoïde à moins que* $\Sigma$ *et* $\Omega$ *ne soient des cônes de même sommet, seul point commun;*

---

([16]) La surface définie en note au paragraphe **10** donne un exemple de ce cas où le sommet du cône est en A. En prenant pour $\Sigma$ le cône ayant pour sommet un point O et pour directrice la strophoïde amputée de sa boucle, il suffira de prendre un point A distinct de O, sur la droite joignant ce point au point double de la strophoïde et de prendre pour $\Omega$ un ovoïde ayant tous ses points, sauf A, intérieurs au cône défini par O et la boucle pour obtenir un autre exemple.

3° *Tous les points réguliers singuliers sont sur* $\Sigma$, *la droite joignant deux quelconques d'entre eux est sur* $\Sigma$ *de même que celles les joignant au point commun à* $\Omega$ *et* $\Sigma$ *s'il existe;*

4° *Si* $\Omega$ *et* $\Sigma$ *ont un point commun* A, S *possède : ou bien au plus deux points réguliers singuliers, non alignés avec* A, *ou bien une droite passant par* A *dont tous les points, sauf* A, *sont réguliers singuliers, dans ce cas* $\Sigma$ *est un cône dont le sommet est sur la droite;*

5° *Si* $\Omega$ *et* $\Sigma$ *sont disjoints,* S *possède : ou bien au plus trois points non alignés réguliers singuliers, ou bien une droite de points réguliers singuliers, dans ce cas* $\Sigma$ *est un cône dont le sommet est sur la droite et* $\Omega$ *est un ovoïde.*

Si l'on admet (ce qui est exact) qu'un point irrégulier est singulier, on peut condenser les deux dernières conclusions en une seule et dire :

S possède, soit trois points singuliers au plus et non alignés, soit une droite de points singuliers, dans ce cas $\Sigma$ est un cône.

**14.** Les résultats précédents peuvent être complétés par des propriétés différentielles très précises, que nous développerons dans le Mémoire annoncé. En voici une assez remarquable :

Si en un point régulier singulier ne passe aucune droite de la surface, celle-ci admet partout au voisinage du point et sauf en ce point *un plan tangent continu*, de plus S possède au plus un autre point irrégulier, nécessairement isolé.