JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WALTER SAXER

Sur les domaines de normalité des fonctions méromorphes de plusieurs variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 49-53.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__49_0>

Sur les domaines de normalité des fonctions méromorphes de plusieurs variables ;

Par Walter SAXER.

Dans le présent Mémoire nous utiliserons les conventions suivantes : nous désignerons par $B_{w,z}$ un domaine borné, simple (en allemand « schlicht ») dans les plans des deux variables complexes $w = u + iv$ et $z = x + iy$. Par $f(w, z)$ nous entendrons une fonction méromorphe dans l'intérieur d'un tel domaine. Si $f(w, z)$ ne peut être prolongé, tout en restant méromorphe au delà de ce domaine, nous dirons que $B_{w,z}$ est son *domaine d'holomorphie*. Pour les fonctions holomorphes, on définira d'une manière analogue leur *domaine de régularité*.

Soit donnée une famille de fonctions, qui toutes soient méromorphes dans le domaine $B_{w,z}$. Il semble probable qu'il existe un domaine partiel $B^{\star}_{w,z} < B_{w,z}$, tel que la famille de fonctions soit régulière dans ce domaine partiel. Le plus grand de ces domaines $B^{\star}_{w,z}$ sera dit *domaine de normalité*.

D'après les recherches classiques de F. Hartogs et E. E. Levi, les points-frontières d'un domaine vérifient certaines conditions, si le domaine doit être un domaine de régularité ou d'holomorphie. On dit que l'hypersurface $\varphi(x, y, u, v) = 0$ peut être, du côté $\varphi < 0$ tout au plus, frontière d'un domaine de régularité, ou d'un domaine d'holomorphie, si elle est *pseudoconvexe* du côté $\varphi > 0$. Voici ce qu'on entend par là : $\varphi = 0$ est dit pseudoconvexe du côté $\varphi > 0$, si toute surface analytique passant par un point P de $\varphi = 0$, possède, dans tout voisinage U(P), d'autres points pour lesquels $\varphi \geqq 0$ (¹).

En l'année 1932, j'ai montré [2] que les domaines de normalité des fonctions méromorphes doivent remplir les mêmes conditions aux frontières que les domaines de régularité et de méromorphie, si à l'intérieur des domaines en question la famille admet aussi des points irréguliers non essentiels. Des points irréguliers non essentiels, au contraire des points singuliers essentiels, ne se présentent qu'isolément. Dans le voisinage U(P) d'un tel point singulier non essentiel, la famille se comporte encore comme normale. Les fonctions limites des suites qui convergent uniformément dans U(P), peuvent posséder en P des singularités non essentielles de seconde espèce.

En terminant le travail que nous rappelons ici j'avais posé une question concernant la *réciproque* des théorèmes en cause. Peut-on, de la pseudoconvexité d'un domaine, conclure que ce domaine peut être considéré comme un domaine de normalité d'une famille de fonctions holomorphes ou méromorphes? Grâce aux recherches de H. Cartan et P. Thullen, et de K. Oka, publiées depuis 1932, on peut aujourd'hui répondre affirmativement à cette question. Par une combinaison simple des théorèmes des auteurs cités, on peut démontrer, comme conséquence de leurs résultats, le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Tout domaine simple* (*schlicht*), *fini et pseudoconvexe dans l'espace des deux variables complexes, peut être considéré comme un domaine de normalité pour une famille de fonctions holomorphes ou méromorphes.*

Démonstration. — En 1942, K. Oka [3] a démontré le lemme ci-dessous, et en même temps il a résolu une question complexe, demeurée sans réponse depuis les recherches de Hartogs et E. E. Levi: *Dans l'espace de deux variables complexes tout domaine simple, fini et pseudoconvexe, constitue un domaine de régularité.*

(¹) *Cf.* bibliographie [1 *a*, 1 *b*, 1 *c*]. Je remercie M. Behnke qui a bien voulu m'envoyer le Mémoire [1 *c*], non encore paru, et me donner d'autres précieuses indications bibliographiques.

De par notre théorème combiné avec le lemme d'Oka, il résulte qu'un domaine de normalité d'une famille de fonctions méromorphes doit être, comme domaine pseudoconvexe, un domaine de régularité de fonctions holomorphes. Ici ne joue aucun rôle le fait que, dans le domaine, il se trouve ou non des points irréguliers non essentiels de la famille de fonctions méromorphes.

H. Cartan et P. Thullen [4] ont obtenu un progrès essentiel en introduisant la notion de *convexité régulière* et en montrant son importance dans l'application à la question, de la réciproque des théorèmes de Hartogs et E. E. Levi. En conséquence de ces recherches, tout domaine simple de régularité doit être convexe-régulier. Cela vaut, en particulier, pour les domaines de normalité des familles de fonctions méromorphes. Pour les domaines de normalité des familles de fonctions holomorphes, cela a déjà été remarqué par H. Cartan et P. Thullen.

Maintenant, chaque domaine convexe régulier B se laisse approximer par un polyèdre analytique (²). Nous disons d'un polyèdre qu'il est analytique lorsque les coordonnées de ses points intérieurs satisfaisant aux inégalités

$$|f_j(w, z)| < 1 \qquad (j = 1, \ldots).$$

les f_j sont réguliers dans B.

Conformément aux résultats de K. Oka [5], on a le suivant :

THÉORÈME FONDAMENTAL D'APPROXIMATION. — *Soit* B *un domaine fini de régularité dans l'espace des w, z. En outre soit le polyèdre analytique*

$$\text{(C)} \qquad |f_j(w, z)| \leqq a_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, l),$$

un domaine partiel tout entier contenu dans B *et fermé. Supposons les f_i réguliers dans* B. *Alors toute fonction régulière dans le domaine fermé* C *est susceptible d'être approchée, uniformément dans* C, *par des fonctions qui sont des polynomes en z, w et f_j.*

De ce théorème il résulte immédiatement que B doit être aussi un domaine de normalité. Pour démontrer cette assertion, considérons

(²) *Cf.* par exemple [1 *c*], p. 64.

une fonction $f(w, z)$ régulière dans B, et approximons B par une suite de polyèdres $C_1 < C_2 < \ldots \to B$. $f(w, z)$ peut être, dans C_n, approchée par une fonction $f_n(w, z)$ régulière dans B, de telle manière que dans C_n les inégalités

$$|f_n(w, z) - f(w, z)| < \frac{1}{n}$$

soient satisfaites. La suite $f_1(w, z)$, $f_2(w, z)$, ... converge par suite uniformément vers $f(z)$ dans tout domaine partiel intérieur à B. B peut donc être considéré comme domaine de normalité d'une suite de fonctions holomorphes. Il est alors évidemment possible, de cette suite convergente de fonctions holomorphes, d'extraire une suite convergente de fonctions méromorphes avec un nombre arbitrairement grand de points singuliers non essentiels.

Et par suite le théorème énoncé plus haut est démontré dans toutes ses parties.

Selon une courte communication par lettre de M Dehnke (23 juillet 1951), Hitotumatu [6] et H. Bremermann ont montré dans une « Dissertation » de l'Université de Munich (non encore publiée), que le lemme fondamental de K. Oka est encore valable dans le cas d'un nombre arbitrairement grand de variables complexes. Le théorème dont il est question dans le présent Mémoire devrait par suite pouvoir être étendu de même dans le cas d'un espace de n variables complexes.

Bibliographie.

[1 *a*] H. Behnke et P. Thullen, *Theorie der Functionen mehrerer Variablen* (*Ergeb. der Math. und ihrer Grenzgebiete*, Berlin, Verlag v. J. Springer, 1934).

[1 *b*] H. Behnke et K. Stein, *Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen* (*Mitt. Math. Ges. in Hamburg*, Bd. **8**, Festschrift Teil II, 1940, p. 34-81).

[1 *c*] H. Behnke et K. Stein, *Die Singularitäten der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen* (*Nw. Archief v. Wiskunde*, 1951) (non encore publié lors de la rédaction du présent Mémoire).

[2] W. Saxer, *Ueber die normalen Scharen meromorpher Functionen mehrerer Variablen* (*Comment. Math. Helv.*, vol. 4, 1932, p. 256-267).

[3] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.* Mémoire VI : *Domaines pseudoconvexes* (*Tôhoku Math. J.*, vol. **49**, Part **1**, 1942, p. 15-52).

[4] H. Cartan und P. Thullen, *Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Regularitäts und Konvergenzbereiche* (*Math. Ann.*, Bd. **106**, 1932).

[5] K. Oka, *Domaines d'holomorphie* (*J. Sc. Hirosima Univ*, (A), t. **7**, n° **2**, 1937).

[6] Hitotumatu, *On integral formulæ of analytic functions of several complex variables and some related problems* (*Kodai Math. Sem.*, Reports nos 5-6, 1949).