JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

S. MANDELBROJT

Quelques théorèmes de composition

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 79-90.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__79_0>

Quelques théorèmes de composition ;

PAR S. MANDELBROJT.

Dans un Mémoire récent [1], que j'ai écrit en collaboration avec H. Brunk, le théorème suivant (théorème 2 du Mémoire) a été démontré :

THÉORÈME A. — *Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1° *Les fonctions* $F(z)$, $\Phi(z)$, $z = x + iy$, *sont holomorphes dans le demi-plan* $x > 0$ *et continues sur le demi-plan fermé* $x \geqq 0$.

2° *Il existe une constante positive* δ *telle que*

$$|F(z)| = O(|z|^{\delta}), \qquad |\Phi(z)| = O(|z|^{\delta})$$

lorsque $z \to 0$.

3° *Les nombres* $\{M_n\}$, $\{M'_n\}$ *étant positifs,* $\log M_n$ et $\log M'_n$ *étant fonctions convexes de* n, *et les nombres* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *étant réels ou complexes, on a pour* $x > 0$, $n \geqq 1$:

$$\left| F(z) - \sum_{1}^{n} a_\nu z^{-\nu} \right| < M_n |z|^{-n}, \tag{1}$$

$$\left| \Phi(z) - \sum_{1}^{n} b_\nu z^{-\nu} \right| < M'_n |z|^{-n}. \tag{2}$$

4°

$$a_{2\nu-1} = b_{2\nu-1} = 0 \qquad (\nu \geqq 1).$$

5°

$$a_{2\nu} b_{2\nu} = 0 \qquad (\nu \geqq 1).$$

---

[1] S. MANDELBROJT et H. BRUNK, *A composition theorem for asymptotic series* (*Duke Math. J.*, vol. 18, n° 2, 1951, p. 297).

6°

$$\sum \frac{M_n M'_n}{M_{n+1} M'_{n+1}} = \infty\,;$$

alors l'une des deux fonctions F, Φ *est identiquement nulle. Si* $F(z) \equiv 0$, *on a aussi* $a_\nu = 0\ (\nu \geqq 1)$, *et si* $\Phi(z) \equiv 0$, *on a aussi* $b_\nu = 0\ (\nu \geqq 1)$.

La démonstration de ce théorème est essentiellement basée sur les trois lemmes suivants que j'aurai à utiliser plus loin. Leur démonstration se trouve dans le Mémoire cité :

Lemme 1. — *Soient* $f(s)$, $\varphi(s)$ *deux fonctions holomorphes dans la bande* $|t| < \frac{\pi}{2}$ $(s = \sigma + it)$ *et continues sur la bande fermée. Définissons ces fonctions pour tout* s, *avec* $t \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, *par périodicité, avec la période* πi.

Supposons qu'il existe deux constantes positives M, M′ *telles que* $|f(s)| < M$, $|\varphi(s)| < M'$ *lorsque* $|t| < \frac{\pi}{2}$; *c étant une constante réelle, posons*

$$H_c(w) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_{c(w)}} f(s)\,\varphi(w - s)\,ds, \qquad w = u + iv, \tag{3}$$

où le chemin d'intégration $\Gamma_c(w)$ *est la ligne polygonale partant du point* $c - \frac{\pi}{2}i$, *ayant comme sommets les points* $u - c - \frac{\pi}{2}i$, $u - c + \frac{\pi}{2}i$ *et aboutissant au point* $c + \frac{\pi}{2}i$.

La fonction $H_c(w)$ *est holomorphe dans la bande* $0 < v < \pi$; *elle est aussi définie par l'intégrale*

$$H_c(w) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_{c(w)}} f(w - s)\,\varphi(s)\,ds. \tag{4}$$

Lemme 2. — *Les fonctions* $f(s)$ *et* $\varphi(s)$ *satisfaisant aux mêmes conditions que dans le lemme* 1, *supposons qu'on ait en plus :*

$$\left| f(s) - \sum_1^n a_\nu e^{-\nu s} \right| < M_n e^{-n\sigma}, \tag{5}$$

$$\left| \varphi(s) - \sum_1^n a_\nu e^{-\nu s} \right| < M'_n e^{-n\sigma} \tag{6}$$

pour $|t| < \frac{\pi}{2}$, *avec* $a_{2\nu-1} = b_{2\nu-1} = 0 \, (\nu > 1)$, $\log M_n$, $\log M'_n$ *étant fonctions convexes n.*

Il existe alors une constante K *indépendante de c, telle que, pour* $u < c$, $0 < v < \pi$, *la fonction* $H_c(w)$, *définie par* (4), *satisfait aux inégalités*

$$\left| H_c(w) - \sum_{1}^{n} a_\nu b_\nu e^{-\nu s} \right| < K M_{n+1} M'_{n+1} e^{-n\sigma} \qquad (n \geqq 1). \tag{7}$$

Lemme 3. — *Si les fonctions* $f(s)$ *et* $\varphi(s)$ *satisfaisant aux conditions du lemme* 1 *et si, en plus, il existe une constante positive* δ *telle que pour* $|t| < \frac{\pi}{2}$ *on ait*

$$|f(s)| \leqq M e^{-\delta|\sigma|}, \qquad |\varphi(s)| \leqq M' e^{-\delta|\sigma|},$$

la limite

$$H(w) = \lim_{c=\infty} \int_{\Gamma_c(w)} f(s) \, \varphi(w - s) \, ds \tag{8}$$

existe, et la fonction $H(w)$ *est holomorphe et bornée pour* $0 < v < \pi$. *Et si* $H(w) \equiv 0$, *l'une des fonctions* $f(s)$ *ou* $\varphi(s)$ *est identiquement nulle.*

Dans ce travail je me propose, tout d'abord, de généraliser le théorème A. Je rappelle que $\{\nu_n\}$ étant une suite de nombres positifs, en posant $N(t) = \sum_{\nu_n < t} 1 \; (t > 0)$ (le nombre des ν_n inférieurs à t), $D(t) = \frac{N(t)}{t}$, on appelle fonction de densité inférieure de la suite $\{\nu_n\}$ la fonction $D_{\cdot}(t) = \underline{\text{borne}}_{x \geq t} D(x)$. La quantité $D_{\cdot} = \lim_{t=\infty} D_{\cdot}(t) = \varliminf_{t=\infty} D(t)$ est appelée densité inférieure de $\{\nu_n\}$. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 1. — *Supposons que les conditions* 1°, 2°, 3° *du théorème* A *soient satisfaites, et soit* $\{\nu_n\}$ *une suite d'entiers positifs contenant tous les entiers impairs, dont la densité inférieure est supérieure à* $\frac{1}{2}$ *et dont la fonction de densité inférieure est* $D_{\cdot}(t)$. *Posons*

$$C(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} [n\sigma - \log(M_n M'_n)].$$

Si

$$(\alpha) \qquad a_{\nu_n} b_{\nu_n} = 0 \quad (n \geqq 1), \qquad a_{2\nu-1} = b_{2\nu-1} = 0 \quad (\nu \geqq 1).$$

$$(\beta) \qquad \int^{\infty} C(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{d\tau}{2D_{\bullet}[C(\tau)]-1}} d\sigma = \infty,$$

l'une des deux fonctions $F(z)$, $\Phi(z)$ *est identiquement nulle. Si* $F(s) \equiv 0$, *on a aussi* $a_n = 0 (n \geqq 1)$, *si* $\Phi(z) = 0$, *on a aussi* $b_n = 0 (n \geqq 1)$.

Remarquons que la condition 6° du théorème A est équivalente à la condition ([2])

$$(\beta') \qquad \int^{\infty} C(\sigma)\, e^{-\sigma} d\sigma = \infty.$$

On voit aussi que l'ensemble des conditions 4°, 5° du théorème A équivaut à la condition (α) avec $\nu_n = n (n \geqq 1)$. Comme $\lim_{\sigma=\infty} \frac{C(\sigma)}{\sigma} = \infty$, et comme, pour le cas où $\nu_n = n$, $D_{.}(t) = \frac{n}{n+1}$ si $n < t \leqq n+1$, on voit facilement que, dans le cas où $\nu_n = n$, la condition (β) est équivalente à la condition (β'), c'est-à-dire à la condition 6° du théorème A. Ainsi donc le théorème 1 contient bien le théorème A comme cas particulier.

Posons $f(s) = F(e^s)$, $\varphi(s) = \Phi(e^s)$. Il est clair que les fonctions f et φ satisfont aux hypothèses des lemmes 1, 2, 3, la constante δ intervenant dans le lemme correspondant 3 n'étant pas nécessairement la même que celle qui intervient dans l'énoncé du théorème. Si l'on désigne par $\{\lambda_n\}$ la suite d'entiers complémentaire à la suite $\{\nu_n\}$ par rapport à l'ensemble de tous les entiers positifs, on voit, d'après les lemmes 1, 2, 3, que la fonction $H(w)$ définie par (8) est holomorphe et bornée dans la borne $0 < v < \pi$, et, dans cette bande, on a, quel que soit $n \geqq 1$:

$$(9) \qquad \left| H(w) - \sum_{1}^{n} d_p e^{-\lambda_p w} \right| \leqq m_q e^{-qu} (\lambda_n \leqq q < \lambda_{n+1}),$$

([2]) *Voir*, par exemple, S. MANDELBROJT, *Anatlytic Functions and classes of infinitely differentiable Functions* (*The Rice Institute Pamphlet*, vol. 29, 1942).

où

$$d_p = a_{\lambda_p} b_{\lambda_p}, \qquad m_q = \mathrm{K} \mathrm{M}_{q+1} \mathrm{M}'_{q+1}.$$

Si l'on désigne par $\mathrm{D}^*_\lambda(t)$, D^*_λ respectivement la fonction de densité supérieure de la suite $\{\lambda_n\}$ et la densité supérieure de $\{\lambda_n\}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{D}^*_\lambda(t) = \overline{\mathrm{borne}}_{x \geq t}\, \mathrm{D}_\lambda(x), \quad \text{où} \quad \mathrm{D}_\lambda(t) = \frac{\mathrm{N}_\lambda(t)}{t},$$

avec

$$\mathrm{N}_\lambda(t) = \sum_{\lambda_n < t} 1 \qquad (t > 0), \qquad \mathrm{D}^*_\lambda = \lim_{t=\infty} \mathrm{D}^*_\lambda(t) = \overline{\lim_{t=\infty}}\, \mathrm{D}_\lambda(t),$$

on voit facilement que la condition (β) est équivalente à la condition

$$(10) \qquad \int^\infty \mathrm{C}_1(\sigma)\, e^{-\int^\sigma \frac{d\tau}{1-2\mathrm{D}^*_\lambda[\mathrm{C}_1(\tau)]}}\, d\sigma = \infty,$$

où

$$\mathrm{C}_1(\sigma) = \overline{\mathrm{borne}}_{n \geq 1}\, (n\sigma - \log m_n).$$

On a d'ailleurs $\mathrm{D}^*_\lambda < \frac{1}{2}$. Il suffit alors d'appliquer un cas très particulier du théorème fondamental du Mémoire que j'ai publié en 1947 ([3]) pour voir que de (9) (dans la bande $0 < v < \pi$), de (10) et du fait que $|\mathrm{H}(w)| \leq \mathrm{L} < \infty$ résulte que, quel que soit u_0, on a

$$|d_p| < \mathrm{A} \lambda_p \Lambda_p e^{\lambda_p u_0},$$

où la suite $\{\Lambda_n\}$, définie dans le Mémoire que je viens de citer, ne dépend que de la suite $\{\lambda_n\}$. En faisant alors tendre u_0 vers $-\infty$, on voit que $d_p = 0$ $(p \geq 1)$. On peut alors écrire (9) sous la forme

$$(11) \qquad |\mathrm{H}(w)| \leq m_q e^{-qu} \qquad (q \geq \lambda_1;\ 0 < v < \pi).$$

Il résulte, d'autre part, de (10), que

$$\int^\infty \mathrm{C}_1(\sigma)\, e^{-\sigma}\, d\sigma = \infty,$$

c'est-à-dire

$$(12) \qquad \sum \frac{m_q}{m_{q+1}} = \infty.$$

([3]) S. MANDELBROJT, *Sur une inégalité fondamentale* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 63, 1946, p. 351).

Il suffit d'appliquer le théorème classique de Watson [en posant, pour revenir à une forme plus connue de ce théorème, $H_1(z) = H(w)$, $z = e^{iw}$], pour voir que $H(w) \equiv 0$. On arrive à la conclusion que l'une des deux fonctions f ou φ (c'est-à-dire F ou Φ) est identiquement nulle en appliquant la fin du lemme 3. Supposons alors, par exemple, que $F(z) \equiv 0$. Il résulte alors de (1) que (du fait que $a_{2p+1} = 0$) :

$$\left| \sum_1^{2p} a_\nu z^{-\nu} \right| \leqq M_{2p+1} \, | z |^{-2p-1} \qquad (p \geqq 1)$$

et, en faisant tendre $|z|$ vers l'infini, on voit que $a_\nu = 0 \, (\nu \geqq 1)$. Le théorème est ainsi complètement démontré.

Nous allons maintenant établir quelques nouveaux lemmes qui nous permettront d'appliquer le théorème 1.

LEMME 4. — *Si* $\{ q_n \}$ *est une suite d'entiers positifs tels que*

$$\sum \frac{1}{q_n} < \infty, \tag{13}$$

il existe une fonction non identiquement nulle $f(x) \, (-\infty < x < \infty)$ *telle que* $f(0) = f^{(q_n)}(0) = 0 \, (n \geqq 1)$, $f^{(m)} \neq 0 \, (m \neq q_n, n \geqq 1, m \neq 0)$, $|f^{(n)}(x)| \leqq 1 \, (n \geqq 0, -\infty < x < \infty)$.

Le produit

$$A(\zeta) = \prod \frac{\zeta - q_n}{\zeta + q_n} \qquad (\zeta = \xi + i\eta) \tag{14}$$

représente une fonction méromorphe, et l'on a

$$\left\{ \begin{aligned} &\overline{\text{borne}}_{\eta} \, | A(a + i\eta) | = 1 \qquad \text{pour} \quad a \geqq 0, \\ &\overline{\text{borne}}_{\eta} \, | A(a + i\eta) | \leqq | A(a) | \qquad \text{pour} \quad a \leqq 0. \end{aligned} \right. \tag{15}$$

Posons pour $-q_1 < a < 0$:

$$f_1(x) = \int_0^1 e^{iux} \left[\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} u^{-\zeta-1} A(\zeta) \frac{d\zeta}{(q_1 + \zeta)^2} \right] du. \tag{16}$$

D'après (15) on a, pour $\zeta = a + i\eta$, $-q_1 < a < 0$:

$$\left| u^{-\zeta-1} A(\zeta) \frac{1}{(q_1 + \zeta)^2} \right| \leqq u^{-a-1} \, | A(a) | \, | (q_1 + a)^2 + \eta^2]^{-1}. \tag{17}$$

La valeur de $f_1(x)$ est donc indépendante du choix de $a(-q_1 < a < 0)$. On le voit en appliquant le théorème de Cauchy à la fonction $u^{-\zeta-1}A(\zeta)(q_1+\zeta)^{-2}$, le chemin d'intégration étant le rectangle des sommets $a_1 - iT, a_2 - iT, a_2 + iT, a_1 + iT, -q_1 < a_1 < a_2 < 0$, $T > 0$, et en faisant tendre T vers $+\infty$. On voit aussi de cette inégalité que

$$(18)\qquad |f_1^{(n)}(x)| \leqq 2\,|A(a)| \int_0^1 u^{n-a-1}\,du \int_0^\infty \frac{dy}{(q_1+a)^2+y^2} = \frac{1}{n-a}\,\frac{\pi}{q_1+a}\,|A(a)| \qquad (n \geqq 0).$$

On peut aussi écrire, en changeant l'ordre d'intégration :

$$(19)\qquad f_1^{(n)}(0) = i^n \int_0^1 u^n \left[\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} u^{-\zeta-1} A(\zeta) \frac{d\zeta}{(q_1+\zeta)^2}\right] du$$
$$= i^n \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[A(\zeta)\frac{1}{(q_1+\zeta)^2}\int_0^1 u^{n-\zeta-1}\,du\right] d\zeta$$
$$= i^n \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} A(\zeta)\frac{1}{(q_1+\zeta)^2}\,\frac{d\zeta}{n-\zeta} = i^n K(a, n) \qquad (n \geqq 0).$$

La valeur de $K(a, n)$ est indépendante de a lorsque $-q_1 < a < n$; et si $-\lambda_1 < a_1 < n < a_2$ on peut écrire

$$(19)\qquad K(a_2, n) - K(a_1, n) = 2\pi i \left[\underset{\zeta=n}{\text{Résidu}} \frac{A(\zeta)}{(q_1+\zeta)^2(n-\zeta)}\right] = \frac{2\pi i A(n)}{(q_1+n)^2}.$$

Mais, d'après (15), on a

$$|K(a_2, n)| = \left|\int_{a_2-i\infty}^{a_2+i\infty} A(\zeta)\frac{d\zeta}{(q_1+\zeta)^2(n-\zeta)}\right| \leqq \frac{2}{a_2-n}\int_0^\infty \frac{d\eta}{(q_1+a)^2+\eta^2} = \frac{\pi}{(q_1+a_2)(a_2-n)},$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{a_2=\infty} K(a_2, n) = 0$, et d'après (19), on a

$$K(a_1, n) = -\frac{2\pi i A(n)}{(q_1+n)^2}.$$

Il résulte alors de (18) que

$$f_1^{(q_n)}(0) = 0 \qquad (n \geqq 1),$$
$$f_1^{(m)}(0) \neq 0 \quad \text{si} \quad m \neq q_n \qquad (n \geqq 1).$$

En multipliant $f_1(x) - f_1(0)$ par une constante convenable, on obtient la fonction voulue $f(x)$.

LEMME 5. — *Si dans le lemme 4, les quantités q_n sont supposées paires, il existe une fonction paire non identiquement nulle $f(x)$, telle que*

$$f(0) = f^{(q_n)}(0) = 0 \quad (n \geqq 1), \qquad |f^{(n)}(x)| \leqq 1 \quad (n \geqq 0).$$

Si $f_0(x)$ est une fonction non identiquement nulle sur $(-\infty, \infty)$ telle que

$$f_0(x) = f_0^{(q_n)}(0) = 0, \quad f_0^{(m)}(0) \neq 0 \quad (m \neq q_n, n \geqq 1),$$
$$|f_0^{(n)}(x)| \leqq 1 \quad (n \geqq 0)$$

(une telle fonction existe en vertu du lemme 4), la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}[f_0(x) + f_0(-x)]$$

est la fonction voulue.

LEMME 6. — *Soit $\{q_n\}$ une suite d'entiers positifs, croissants, pairs. Il existe une fonction $f(x)$, non identiquement nulle, paire, bornée, telle que*

$$f(0) = f^{(m)}(0) = 0 \quad (m \neq q_n; n \geqq 1), \qquad |f^{(n)}(x)| \leqq q_1 q_2 \ldots q_n.$$

Ce lemme a été démontré dans le Mémoire déjà cité ([4]). Dans ce Mémoire, on ne suppose pas que les q_n sont pairs et l'on démontre l'existence d'une fonction f satisfaisant aux conditions de l'énoncé sur $[0, \infty)$. Mais, si les q_n sont pairs, on peut prolonger la fonction par symétrie $[f(x) = f(-x)]$.

LEMME 7. — *Si les hypothèses du lemme 5 sont satisfaites, il existe une fonction paire $g(x)$, non identiquement nulle, telle que*

$$g(0) = g^{(q_n)}(0) = 0 \quad (n > 1), \qquad g^{(m)}(0) \neq 0 \quad (m \neq 0, m \neq q_n, n \geqq 1),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx \leqq 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g^{(n)}(x)|\, dx \leqq 1.$$

([4]) *Voir* la note ([3]).

LEMME 8. — *Si les hypothèses du lemme* 6 *sont satisfaites, il existe une fonction paire $g(x)$, non identiquement nulle, telle que*

$$g(0) = g^{(m)}(0) = 0 \qquad (m \neq q_n,\ n \geqq 1),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx \leqq 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g^{(n)}(x)|\,dx \leqq q_1 q_2 \ldots q_{n+8} \qquad (n \geqq 1).$$

Les lemmes 7 et 8 résultent respectivement des lemmes 5 et 6 d'une manière semblable, et nous allons donner une démonstration commune des deux derniers lemmes.

Soit $\{M_n\}$ une suite positive croissante, et soit $\varphi(x)$ une fonction paire, non identiquement nulle, telle que

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi^{(p_n)}(0) = 0, \qquad \varphi^{(m)}(0) \neq 0 \quad \text{si} \quad m \neq 0, 2, p_n \qquad (n \geqq 1),$$

$\{p_n\}$ étant une suite d'entiers positifs pairs ($p_1 > 2$). Supposons que

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqq M_n \qquad (n \geqq 0).$$

Posons

$$\psi(x) = \frac{\varphi''(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\int_0^x (x-t)\,\varphi^{(4)}(t)\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x dy \int_0^y \varphi^{(4)}(u)\,du.$$

La fonction $\psi(x)$ est paire et non identiquement nulle. On a aussi

$$\psi^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x (x-t)\,\varphi^{(n+4)}(t)\,t^n\,dt. \tag{20}$$

En supposant cette égalité pour n, on la retrouve, après dérivation et intégration par parties pour $n+1$. On voit aussi immédiatement que

$$\psi^{(n)}(0) = [(n+1)(n+2)]^{-1}\,\varphi^{(n+4)}(0).$$

A partir de (20), par plusieurs intégrations par parties, on obtient facilement l'inégalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^{(n)}(x)|\,dx \leqq 2\,M_{n+4} + 2\int_0 |\psi^{(n)}(x)|\,dx < AB^n\,M_{n+4},$$

où A et B sont des constantes. On voit maintenant facilement comment on passe des lemmes 5 et 6 respectivement aux lemmes 7 et 8. Ainsi, par exemple, pour avoir le lemme 7, à partir du lemme 5, il suffit de choisir $p_n = q_n + 4$, $M_n = 1$, $g(x) = A^{-1}\psi(B^{-1}x)$. Le passage du lemme 6 au lemme 8 est aussi évident.

LEMME 9. — *Soit $\{q_n\}$ une suite d'entiers positifs pairs tels que $\sum \frac{1}{q_n} < \infty$. Il existe une fonction $\Phi(z)$, non identiquement nulle, holomorphe dans le demi-plan $x > 0$, continue sur le demi-plan fermé $x \geq 0$, et une suite $\{b_n\}$ telle que $b_{2\nu-1} = 0\ (\nu \geq 1)$, $b_{q_n} = 0\ (n \geq 1)$, les relations suivantes étant satisfaites pour $x > 0$:*

$$\left|\Phi(z) - \sum_1^n b_\nu z^{-\nu}\right| \leq \frac{1}{|z|^n} \qquad (n \geq 1),$$

$$|\Phi(z)| = O(|z|) \qquad (z \to 0).$$

Soit $g(x)$ la fonction du lemme 7, et posons

$$\Phi_1(z) = \int_0^\infty e^{-tz} g(t)\, dt.$$

En intégrant cette expression $n+1$ fois par parties, on obtient

$$\Phi_1(z) = g(0)z^{-1} + g'(0)z^{-2} + \ldots + g^{(n)}(0)z^{-n-1} + \frac{1}{z^{n+1}}\int_0^\infty e^{-tz} g^{(n+1)}(t)\, dt,$$

ce qui permet d'écrire pour $x > 0$:

$$\left|z\Phi_1(z) - \sum_1^n g^{(\nu)}(0) z^{-\nu}\right| \leq \frac{1}{|z|^n}\int_0^\infty |g^{(n+1)}(t)|\, dt \leq \frac{1}{|z|^n} \qquad (n \geq 1).$$

Et, pour $n = 1$, la même inégalité donne

$$|z\Phi_1(z)| \leq \frac{1}{|z|}.$$

Il est clair que la fonction $\Phi(z) = z\Phi_1(z)$ et les quantités $b_n = g^{(n)}(0)$ satisfont à la conclusion du lemme.

LEMME 10. — *Soit $\{q_n\}$ une suite d'entiers positifs, pairs, croissants. Il existe une fonction $\Phi(z)$, non identiquement nulle, holomorphe dans le demi-plan $x > 0$, continue sur le demi-plan fermé $x \geq 0$, et une suite*

$\{b_n\}$ avec $b_m = 0$ pour $m \neq q_n (n \geqq 1)$, les relations suivantes étant satisfaites :

$$\left| \Phi(z) - \sum_{1}^{n} b_\nu z^{-\nu} \right| \leqq q_1 q_2 \ldots q_{n+8} |z|^{-n} \qquad (n \geqq 1),$$

$$|\Phi(z)| = O(|z|) \qquad (z \to 0).$$

Le passage du lemme 8 au lemme 10 se fait exactement de la même manière que celui du lemme 7 au lemme 9.

En combinant le théorème 1 avec le lemme 9, on obtient immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit $F(z)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $x > 0$ et continue sur le demi-plan fermé $x \geqq 0$. Supposons qu'il existe une constante positive δ telle qu'on ait*

$$F(z) = O(|z|^\delta) \qquad (z \to 0).$$

Supposons qu'il existe une suite positive $\{M_n\}$, telle que $\log M_n$ soit une fonction convexe de n, et une suite $\{a_n\}$ satisfaisant à la condition

$$\left| F(z) - \sum_{1}^{n} a_\nu z^{-\nu} \right| \leqq M_n |z|^{-n} \qquad (n \geqq 1,\ x \geqq 0)$$

et aux conditions suivantes :

1° *Il existe une suite d'entiers positifs $\{\nu_n\}$ contenant tous les entiers positifs impairs, la fonction de densité inférieure de $\{\nu_n\}$ étant $D_*(t)$, sa densité inférieure étant $D_* > \frac{1}{2}$. Pour tout m de $\{\nu_n\}$, sauf peut-être pour $m = q_n (n \geqq 1)$, où $\{q_n\}$ est une suite d'entiers pairs tels que $\sum \frac{1}{q_n} < \infty$, on a $a_m = 0$.*

2° *En posant*

$$C(\sigma) = \overline{\text{borne}}\,(n\sigma - \log M_n),$$

on a

$$\int^{\infty} C(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{d\tau}{2D_*[C(\sigma)]-1}} d\sigma = \infty.$$

Dans ces conditions $F(z) \equiv 0$ et $a_\nu = 0 (\nu \geqq 1)$.

En combinant, par contre, le théorème 1 avec le lemme 10, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *La conclusion du théorème 2 subsiste si l'on remplace les conditions* 1° *et* 2° *de ce théorème par les conditions* 1° *et* 2° *suivantes :*

1° *Il existe une suite* $\{\nu_n\}$ *contenant tous les entiers positifs impairs, la fonction de densité inférieure de* $\{\nu_n\}$ *étant* $D_.(t)$, *sa densité inférieure étant* $D_. > \frac{1}{2}$, *et une suite d'entiers positifs croissants pairs* $\{q_n\}$ *tels que pour tout* m, *de* $\{\nu_n\}$ *sauf, peut-être, pour* m *appartenant à la suite d'entiers positifs complémentaire à la suite* $\{q_n\}$, *on a* $a_m = 0$.

2° *En posant*

$$C(\sigma) = \overline{\text{borne}}\,[n\sigma - \log(q_1 q_2 \ldots q_n M_n)],$$

on a

$$\int^{\infty} C(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{d\tau}{2D_.[C(\tau)]-1}}\, d\sigma = \infty.$$

Pour démontrer, par exemple, le théorème 2, il suffit d'appliquer le théorème 1 aux fonctions $F(z)$ de l'énoncé du théorème 2 et à la fonction $\Phi(z)$ de l'énoncé du lemme 9. Comme, d'après le lemme 9, $\Phi(z) \not\equiv 0$, on a, d'après le théorème 1, $F(z) \equiv 0$. Le passage du théorème 1 et du lemme 10 au théorème 3 est identique.