JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

TULLIO VIOLA

Sur l'approximation des fonctions continues

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 91-101.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__91_0>

Sur l'approximation des fonctions continues;

Par Tullio VIOLA (*).

1. Dans un article publié en 1946 sous ce même titre ([1]), M. A. Ghizzetti a proposé une nouvelle méthode d'interpolation, dont il a démontré quelques propriétés fondamentales. Nous croyons reconnaître dans cette méthode beaucoup d'originalité, de simplicité, plusieurs avantages effectifs sur d'autres méthodes, même dans les applications du calcul numérique ([2]), ce qui nous encourage à poursuivre l'analyse faite par l'auteur.

En premier lieu nous rappelons brièvement les principes de cette méthode et les résultats déjà obtenus.

Soient donnés, dans le plan xy, $n+1$ points quelconques

$$P_0(x_0, y_0),\quad P_1(x_1, y_1),\quad \ldots,\quad P_n(x_n, y_n), \qquad \text{avec} \quad x_0 < x_1 < \ldots < x_n.$$

Posons $x_0 = a$, $x_n = b$ et indiquons par $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, ... une suite de fonctions absolument continues sur (a, b), nulles en a, dont les dérivées $\Phi'_0(x) = \varphi_0(x)$, $\Phi'_1(x) = \varphi_1(x)$, ... soient à carrés sommables sur (a, b), y formant un système orthogonal et complet (pour l'approximation linéaire en moyenne). Un entier $p > 0$ quelconque étant fixé, considérons la classe ∞^{n+p} de fonctions

$$g_p(x) = y_0 + \sum_{h}^{0,\, n+p-1} c_h \Phi_h(x) \tag{1}$$

(*) Travail exécuté dans l'Institut National d'Italie pour les applications du Calcul.

([1]) Voir *Atti Reale Acad. Sc. Torino,* vol. **80**, 1944-1945.

([2]) De ce dernier point de vue, nous renvoyons à la Note : *Su un nuovo procedimento di interpolazione,* publiée par l'auteur dans *Ricerca Scientifica* (*Revue du Conseil national des Recherches d'Italie*), janvier 1946.

correspondant à tout choix possible des $n+p$ constantes $c_0, c_1, \ldots, c_{n+p-1}$, de façon que la courbe $y = g_p(x)$ passe par les $n+1$ points donnés. L'existence, dans cette classe, d'une fonction $g_p(x)$ qui rende minimum l'intégrale

$$\int_a^b \left(\frac{dg_p}{dx}\right)^2 dx,$$

est bien évidente. M. Ghizzetti a démontré que, pour p suffisamment élevé, *la fonction minimante $g_p(x)$ est unique et donnée par l'équation du premier degré*

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{c|cccc} g_p(x) - y_0, & \Sigma\,\Delta\,\Phi_h(x_0)\,\Phi_h(x), & \Sigma\Delta\,\Phi_h(x_1)\,\Phi_h(x), & \ldots, & \Sigma\,\Delta\,\Phi_h(x_{n-1})\,\Phi_h(x) \\ \hline \Delta y_0 & & & & \\ \Delta y_1 & & \mathrm{D}_p & & \\ \ldots & & & & \\ \Delta y_{n-1} & & & & \end{array}\right| = 0,$$

les sommes Σ étant effectuées pour l'indice h variable de zéro à $n+p-1$, étant posé en outre :

$$\begin{array}{ll} \Delta y_0 = y_1 - y_0, & \Delta\,\Phi_h(x_0) = \Phi_h(x_1) - \Phi_h(x_0), \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1, & \Delta\,\Phi_h(x_1) = \Phi_h(x_2) - \Phi_h(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}, & \Delta\,\Phi_h(x_{n-1}) = \Phi_h(x_n) - \Phi_h(x_{n-1}) \end{array}$$

$$(h = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\mathrm{D}_p \equiv \left|\begin{array}{cccc} \sigma_{00}^{(p)} & \sigma_{01}^{(p)} & \ldots & \sigma_{0,n-1}^{(p)} \\ \sigma_{10}^{(p)} & \sigma_{11}^{(p)} & \ldots & \sigma_{1,n-1}^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sigma_{n-1,0}^{(p)} & \sigma_{n-1,1}^{(p)} & \ldots & \sigma_{n-1,n-1}^{(p)} \end{array}\right|,$$

avec

$$\sigma_{kl}^{(p)} = \sum_h^{0,\,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_k)\,\Delta\Phi_h(x_l) = \sum_h^{0,\,n+p-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_h(x)\,dx \int_{x_l}^{x_{l+1}} \varphi_h(x)\,dx$$

$$(k, l = 0, 1, \ldots, n-1).$$

On a

$$\lim_{p\to\infty} \sigma_{kl}^{(p)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l, \\ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k & \text{si } k = l, \end{cases}$$

et par suite

$$\lim_{p\to\infty} \mathrm{D}_p = \Delta x_0\,\Delta x_1 \ldots \Delta x_{n-1}.$$

La minimante $g_p(x)$ converge uniformément sur (a, b), pour $p \rightarrow \infty$, vers la fonction $\gamma(x)$ qui représente la polygonale $P_0 P_1 \ldots P_n$. On a de plus

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b [g'_p(x) - \gamma'(x)]^2 \, dx = 0.$$

Cette dernière formule exprime la convergence en moyenne, pour $p \rightarrow \infty$, de $g'_p(x)$ vers $\gamma'(x)$. Nous donnerons, au contraire, des conditions suffisantes pour la convergence

$$\lim_{p \rightarrow \infty} g'_p(x) = \gamma'(x)$$

en un point bien déterminé de (a, b), ou sur tout un intervalle partiel de (a, b), et nous en ferons ensuite l'application au problème indiqué dans notre titre [3].

2. Il est utile d'examiner les n sommes

$$\sum_h^{0,\, n+p-1} \Delta\Phi_h(x_l)\, \Phi_h(x) \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

rangées dans la première ligne du déterminant (2). Si l'on dérive ces sommes par rapport à x, on obtient les réduites d'ordre $n+p-1$ des séries de Fourier

$$(3) \qquad \sum_h^{0,\, \infty} \Delta\Phi_h(x_l)\, \varphi_h(x) = \sum_h^{0,\, \infty} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \varphi_h(x)\, dx \,.\, \varphi_h(x) \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

---

(3) Nous avons pris soin de choisir ces conditions, avec une généralité qui s'accorde avec celle qui a inspiré la méthode de M. Ghizzetti. On verra que les conditions choisies sont liées, en substance, aux propriétés des fonctions égales à la constante 1 dans un intervalle partiel de (a, b), à la constante 0 hors de cet intervalle. Nous pensons, si nous sommes bien informés, que ces propriétés, pour un système $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... orthonormal et complet *tout à fait général*, n'ont pas été encore suffisamment mises en relief.

Pour ce qui concerne les notations, nous précisons ici que, dans la suite, nous indiquerons toujours par le symbole $g_p(x)$ (en correspondance d'un indice p suffisamment élevé) la minimante, unique et bien déterminée, parmi les fonctions interpolatrices de la classe (1).

des n fonctions :

$$\psi_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } x \text{ de } (a, b) \text{ extérieur à } (x_l, x_{l+1}), \\ 1 & \quad \text{»} \qquad \text{intérieur} \qquad \text{»} \quad , \end{cases}$$
$$(l = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Démontrons un premier théorème fondamental.

THÉORÈME I. — *Supposons qu'en un point $\bar{x}$ de (a, b) les conditions suivantes soient satisfaites :*

1° $\Phi'_h(x) = \varphi_h(x)$ *pour chaque indice* $h = 0, 1, 2, \ldots$ ([4]);
2° *les réduites des séries* (3) *forment un ensemble numérique borné;*
3° *la fonction* $\gamma'(x)$ *soit développable en série de Fourier.*

On a, dans ces conditions,

$$\lim_{p\to\infty} g'_p(\bar{x}) = \gamma'(\bar{x}).$$

Démonstration. — Soit $\omega_{kl}^{(p)} (k, l = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ le complément algébrique de $\sigma_{kl}^{(p)}$ dans le déterminant D_p. On a

$$(4) \qquad \lim_{p\to\infty} \omega_{kl}^{(p)} = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq k, \\ \Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_{k-1} \Delta x_{k+1} \ldots \Delta x_{n-1} & \text{si } l = k. \end{cases}$$

En résolvant l'équation (2) par rapport à $g_p(x)$ (p étant suffisamment élevé), on obtient

$$g_p(x) = y_0 + \frac{1}{D_p} \sum_{k,l}^{0,\,n-1} \omega_{kl}^{(p)} \Delta y_k \sum_h^{0,\,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_l)\, \Phi_h(x)$$

et, en dérivant par rapport à x au point $\bar{x}$,

$$g'_p(\bar{x}) = \frac{1}{D_p} \sum_{k,l}^{0,\,n-1} \omega_{kl}^{(p)} \Delta y_k \sum_h^{0,\,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_l)\, \varphi_h(\bar{x})$$
$$= \sum_k^{0,\,n-1} \Delta y_k \sum_l^{0,\,n-1} \frac{\omega_{kl}^{(p)}}{D_p} \left\{ \sum_h^{0,\,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_l)\, \varphi_h(\bar{x}) \right\}.$$

([4]) La continuité absolue des $\Phi_h(x)$ (*voir* § 1) nous assure, *a priori*, que cette première condition est vérifiée presque partout en (a, b).

La troisième condition nous assure que

$$(5) \qquad \gamma'(\bar{x}) = \sum_h^{0,\infty} \int_a^b \gamma'(x)\, \varphi_h(x)\, dx.\, \varphi_h(\bar{x}) = \sum_h^{0,\infty} \left\{ \sum_k^{0,n-1} \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \Delta\Phi_h(x_k) \right\} \varphi_h(\bar{x}).$$

Un nombre $\varepsilon > 0$ arbitraire étant fixé, il est donc possible de déterminer un entier $\mu = \mu(\varepsilon) > 0$ tel que, pour chaque $p > \mu$, l'on ait

$$\left| \sum_h^{n+p,\infty} \left\{ \sum_k^{0,n-1} \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \Delta\Phi_h(x_k) \right\} \varphi_h(\bar{x}) \right| < \varepsilon.$$

Déterminons ensuite [*cf.* les relations (4)] un entier $\nu = \nu(\varepsilon) > 0$ tel que, pour chaque $p > \nu$, l'on ait

$$\left| \frac{\Delta y_k \omega_{kl}^{(p)}}{D_p} \right| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad l \neq k,$$
$$\left| \frac{\Delta y_k \omega_{kl}^{(p)}}{D_p} - \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \right| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad l = k.$$

Pour $p > \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix} \right.$, on aura alors

$$\begin{aligned}
|g'_p(\bar{x}) - \gamma'(\bar{x})| &< \varepsilon + \left| \sum_k^{0,n-1} \Delta y_k \sum_l^{0,n-1} \frac{\omega_{kl}^{(p)}}{D_p} \right\} \sum_h^{0,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_l)\, \varphi_h(\bar{x}) \Bigg\} \\
&\quad - \sum_k^{0,n-1} \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \left\{ \sum_h^{0,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_k)\, \varphi_h(\bar{x}) \right| \Bigg\} \\
&\leqq \varepsilon + \sum_k^{0,n-1} \left\{ \left| \frac{\Delta y_k \omega_{kk}^{(p)}}{D_p} - \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \right| \left| \sum_h^{0,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_k)\, \varphi_h(\bar{x}) \right| \right. \\
&\quad + \sum_{l \neq k}^{0,n-1} \left| \frac{\Delta y_k \omega_{kl}^{(p)}}{D_p} \right| \left| \sum_h^{0,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_l)\, \varphi_h(\bar{x}) \right| \Bigg\} \\
&< \varepsilon \left[1 + n \sum_l^{0,n-1} \left| \sum_h^{0,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_l)\, \varphi_h(\bar{x}) \right| \right].
\end{aligned}$$

La deuxième condition nous permet enfin de déduire le résultat annoncé.

Observation. — Il est sous-entendu, dans ce qui précède (*cf.* la troisième condition), que $x \neq x_l (l = 1, 2, \ldots, n-1)$, du moins si les valeurs $\gamma'(x_l)$ $(l = 1, 2, \ldots, n-1)$ n'existent pas (ce qui est le cas, en général). Mais si, en posant $\overline{x} = x_l$ (pour un certain l tel que $1 \leqq l \leqq n-1$), la série de Fourier écrite au deuxième membre de (5) converge et si S est sa somme (ce qui arrive par exemple pour les séries trigonométriques pour lesquelles $S = \frac{1}{2}[\gamma'(x_l^+) + \gamma'(x_l^-)]$), alors le raisonnement précédent peut être évidemment imité, pour démontrer (les conditions 1° et 2° étant conservées) que

$$\lim_{p \to \infty} g'_p(x_l) = S.$$

3. Cherchons ensuite des conditions suffisantes pour la *convergence uniforme*

$$\lim_{p \to \infty} g'_p(x) = \gamma'(x),$$

dans un intervalle (u, v) partiel de (a, b), supposé $x_l < u < v < x_{l+1}$ pour un certain $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. A ce propos, le théorème suivant peut être facilement démontré.

THÉORÈME II. — *Supposons que, dans l'intervalle (u, v), les conditions suivantes soient satisfaites :*

1° $\Phi'_h(x) = \varphi_h(x)$ *pour chaque* $h = 0, 1, 2, \ldots$;

2° *les réduites des séries* (3) *soient également bornées* ([5]);

3° *la fonction $\gamma'(x)$ soit développable en série de Fourier uniformément convergente.*

On a, dans ces conditions :

$$\lim_{p \to \infty} g'_p(x) = \gamma'(x)$$

uniformément sur (u, v).

([5]) Cette condition est sans doute vérifiée, par exemple si les fonctions dites de Lebesgue :

$$L_n(t) = \int_a^b \left| \sum_h^{0, n} \varphi_h(t) \varphi_h(x) \right| dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

sont également bornées en (u, v) (*voir* S. KACZMARZ et H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa, 1935, p. 154 et suiv.).

La démonstration de ce théorème est tout à fait semblable à celle du théorème précédent, étant entendu que $\bar{x}$ varie sur (u, v). Il suffit d'observer que les limitations trouvées pour $|g'_p(\bar{x}) - \gamma'(\bar{x})|$ subsistent (dans les conditions actuelles) indépendamment de $\bar{x}$ sur (u, v). Ceci est une conséquence de la possibilité de choisir maintenant $\mu(\varepsilon)$ indépendant de $\bar{x}$, et de borner les termes

$$\left| \sum_h^{0,\, n+p-1} \Delta \Phi_h(x_l)\, \varphi_h(\bar{x}) \right|$$

indépendamment de p et de $\bar{x}$.

4. Il est intéressant d'étudier le problème de l'approximation d'une fonction continue, ainsi que M. Ghizzetti lui-même l'a proposé dans son article.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b). En décomposant (a, b) en parties suffisamment petites, par un nombre fini de points x_l ($l = 0, 1, 2, \ldots, n$; $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$), la ligne polygonale ayant les points $P_l[x_l, f(x_l)]$ pour sommets, représentera une certaine fonction continue $\gamma(x)$: et l'on pourra toujours obtenir que cette fonction $\gamma(x)$ s'approche de $f(x)$, sur tout (a, b), à ε près (ε étant une quantité positive, arbitrairement donnée à l'avance). La possibilité d'approcher uniformément une fonction continue $f(x)$, arbitrairement donnée en (a, b), par une suite de fonctions minimantes, c'est-à-dire de fonctions du type $g_p(x)$ étudié par M. Ghizzetti, est donc évidente.

Nous nous demandons maintenant s'il est possible, étant supposé de plus que $f(x)$ soit douée, sur tout (a, b), d'une dérivée continue, d'approcher même $f'(x)$ par une suite de dérivées de fonctions minimantes $g'_p(x)$, et cela uniformément, du moins à l'intérieur de (a, b), c'est-à-dire du moins dans chaque intervalle (a', b') intérieur à (a, b).

Pour aborder cette question, il est convenable d'introduire certaines *hypothèses préjudicielles* [en les choisissant naturellement parmi les moins restrictives ([6])] à propos du système complet $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$.

([6]) Celles que nous allons faire, sont largement satisfaites par exemple par les séries trigonométriques.

Nous supposerons précisément que :

α. L'on ait $\Phi'_h(x) = \varphi_h(x)$ partout à l'intérieur de (a, b) et pour chaque $h = 0, 1, 2, \ldots$;

β. Pour chaque intervalle (u, v) partiel de (a, b), la fonction

$$\psi(x;\, u,\, v) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } x \text{ de } (a,\, b) \text{ extérieur à } (u,\, v), \\ 1 & \quad \text{»} \qquad\qquad \text{intérieur} \quad \text{»} \quad , \end{cases}$$

soit développable en série de Fourier uniformément convergente sur tout intervalle (r, s) intérieur à (a, b), pourvu que les points u, v soient extérieurs à (r, s);

γ. Un intervalle (a', b') intérieur à (a, b) étant arbitrairement donné, il existe un nombre $H = H(a', b') > 0$ tel que, quel que soit l'intervalle (u, v) partiel de (a, b), les réduites de la série de Fourier de la fonction $\psi(x; u, v)$ restent en tout (a', b') et à partir d'un certain ordre (7), plus petites que H en valeur absolue.

Sous ces hypothèses préjudicielles, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Théorème III. — *Soit $f(x)$ une fonction dérivable en (a, b), et soit $f'(x)$ continue sur (a, b). Un intervalle (a', b') intérieur à (a, b) et un nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitrairement donnés, il existe un autre nombre $\delta > 0$ tel que, quelle que soit la décomposition de (a, b) effectuée par les points x_l ($l = 0, 1, 2, \ldots, n$; $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$) avec $\Delta x_l < \delta$, l'on ait*

$$(6) \qquad |g_p(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad |g'_p(x) - f'(x)| < \varepsilon \qquad \text{sur tout } (a',\, b'),$$

pour chaque indice $p < \bar{p}$, $\bar{p}$ étant un entier convenable (8) et $g_p(x)$ étant la fonction minimante d'indice p (construite selon les règles données).

Démonstration. — L'existence d'un nombre $\delta > 0$ et ensuite d'un entier $\bar{p}$, de façon que la première des limitations (6) soit satisfaite, n'a pas besoin d'être prouvée, après ce qui a été démontré par M. Ghizzetti.

(7) Cet ordre dépendra, en général, de a', b', u, v.

(8) Dépendant, en général, de la décomposition effectuée.

Il suffit donc de s'occuper de la deuxième limitation (6), et pour cela nous diviserons notre démonstration en trois parties :

a. Considérons d'abord une décomposition de (a, b) tout à fait générale, et indiquons par

$$S_{n+p-1}(x) = \sum_h^{0,\, n+p-1} \left\{ \sum_k^{0,\, n-1} \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \Delta\, \Phi_h(x_k) \right\} \varphi_h(x)$$

une réduite, d'ordre $n+p-1$, de la série de Fourier de $\gamma'(x)$. Choisissons ensuite, avec une loi arbitraire, n points $\bar{x}_l$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$, chacun à chacun à l'intérieur des n intervalles (x_{l-1}, x_l).

Par rapport à un quelconque des $n-1$ intervalles $(\bar{x}_l, \bar{x}_{l+1})$ $(l = 1, 2, \ldots, n-1)$, la série de Fourier de $\gamma'(x)$ peut être envisagée comme la somme, terme par terme, de deux autres séries de Fourier, c'est-à-dire :

1° de celle de la fonction

$$\gamma'_{1l}(x) = \begin{cases} \gamma'(x) & \text{pour tout } x \text{ de } (a, b) \text{ extérieur à } (x_{l-1}, x_{l+1}), \\ \gamma'(\bar{x}_l) & \quad \text{»} \qquad\qquad \text{intérieur} \qquad \text{»} \quad ; \end{cases}$$

2° de celle de la fonction

$$\gamma'_{2l}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } x \text{ de } (a, b) \text{ extérieur à } (x_l, x_{l+1}), \\ \gamma'(x) - \gamma'(\bar{x}_l) & \quad \text{«} \qquad\qquad \text{intérieur} \qquad \text{»} \quad . \end{cases}$$

$\gamma'_{1l}(x)$ est une combinaison linéaire de fonctions $\psi(x;\, u, v)$ se rapportant à des couples de points u, v, dont chacun est extérieur à $(\bar{x}_l, \bar{x}_{l+1})$: sa série de Fourier, en vertu de l'hypothèse préjudicielle β, converge donc uniformément sur $(\bar{x}_l, \bar{x}_{l+1})$ vers la constante $\gamma'(\bar{x}_l)$. La série de Fourier de $\gamma'_{2l}(x)$, en vertu de l'hypothèse préjudicielle γ, a ses réduites plus petites que $H\sigma$, en valeur absolue, sur tout (a', b') et à partir d'un certain ordre, σ étant la discontinuité de $\gamma'(x)$ en x_l.

b. La continuité uniforme de $f'(x)$ sur (a, b) nous donne la possibilité de choisir δ suffisamment petit pour que, une décomposition quelconque de (a, b) en parties Δx_l toutes $< \delta$ étant effectuée, l'on ait d'abord

$$|f'(\bar{x}) - \gamma'(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{4},$$

pour chaque valeur $\bar{x}$ de x différent des x_l; en outre, une quelconque de telles valeurs étant fixée, soit par exemple x intérieure à (x_l, x_{l+1}) $(l = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, l'on ait

$$|f'(\bar{x}) - f'(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

pour tout x appartenant à (x_l, x_{l+2}) (si $l < n-1$), et pour tout x appartenant à (x_{l-1}, x_{l+1}) (si $l > 0$); enfin la discontinuité de $\gamma'(x)$, en chacun des $n-1$ points $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, soit $< \frac{\varepsilon}{4\mathrm{H}}$, avec $\mathrm{H} = \mathrm{H}(a', b')$.

Nous supposerons, de plus, $\delta < a' - a$, $\delta < b - b'$.

c. Supposons effectués le choix de δ et la décomposition de (a, b) selon les indications énoncées en *b*, enfin le choix des points $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ (*voir a*). Il en résulte, pour x sur (a', b'),

$$\begin{aligned} |g'_p(x) - f'(x)| \leqq |g'_p(x) - \gamma'(\bar{x}_l)| + |\gamma'(\bar{x}_l) - f'(\bar{x}_l)| \\ + |f'(\bar{x}_l) - f'(x)| < |g'_v(x) - \gamma'(\bar{x}_l)| + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

$\bar{x}_l = \bar{x}_l(x)$ étant, parmi les points $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}$, celui tel que $\bar{x}_l \leqq x < \bar{x}_{l+1}$.

Nous obtiendrons une limitation favorable pour $|g'_p(x) - \gamma'(\bar{x}_l)|$, en rattachant la démonstration du théorème I à ce qui a été observé en *a*. La convergence de la série de Fourier de $\gamma'(x)$ aux points $\bar{x}_l$, nous assure que pour p suffisamment élevé, on a d'abord

$$\left| \sum_h^{n+p,\infty} \left\{ \sum_k^{0,\, n-1} \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \Delta\, \Phi_h(x_k) \right\} \varphi_h(\bar{x}_l) \right| < \frac{\varepsilon}{8},$$

pour chaque $l = 1, 2, \ldots, n$. On en déduira ensuite, sur tout (a', b'), la limitation suivante :

$$
\begin{aligned}
|g'_p(x)-\gamma'(\bar{x}_l)| < \frac{\varepsilon}{8} + |S_{n+p-1}(x) - S_{n+p-1}(\bar{x}_l)| \\
+ \left| \sum_k^{0,\,n-1} \Delta y_k \sum_l^{0,\,n-1} \frac{\omega_{kl}^{(p)}}{D_p} \left\{ \sum_h^{0,\,n+p-1} \Delta\,\Phi_h(x_l)\,\varphi_h(x) \right\} \right. \\
\left. - \sum_k^{0,\,n-1} \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \left\{ \sum_h^{0,\,n+p-1} \Delta\,\Phi_h(x_k)\,\varphi_h(x) \right\} \right|.
\end{aligned}
$$

Toujours pour p suffisamment élevé, on aura, sur tout (a', b') (*cf.* *a*)

$$|S_{n+p-1}(x) - S_{n+p-1}(\bar{x}_l)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

et

$$
\begin{aligned}
(7) \qquad & \left| \sum_k^{0,\,n-1} \Delta y_k \sum_l^{0,\,n-1} \frac{\omega_{kl}^{(p)}}{D_p} \left\{ \sum_h^{0,\,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_l)\,\varphi_h(x) \right\} \right. \\
& \left. - \sum_k^{0,\,n-1} \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \left\{ \sum_h^{0,\,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_k)\,\varphi_h(x) \right\} \right| \\
& < \eta n \sum_l^{0,\,n-1} \left| \sum_h^{0,\,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_l)\,\varphi_h(x) \right|
\end{aligned}
$$

en vertu du raisonnement du paragraphe **2**, η étant un nombre positif auxiliaire, arbitrairement petit. Enfin, en vertu de l'hypothèse préjudicielle γ, la somme écrite au deuxième membre de (7) est inférieure, pour x sur (a', b'), à un certain nombre fixe M (pourvu que p soit suffisamment élevé). Si nous supposons donc $\eta < \frac{\varepsilon}{8Mn}$, l'inégalité (7) donne (pour p plus grand qu'un certain entier $\bar{p}$),

$$|g'_p(x) - \gamma'(\bar{x}_l)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{donc} \quad |g'_p(x) - f'(x)| < \varepsilon$$

sur tout (a', b'). C. Q. F. D.

Observation. — Avec des retouches très petites, la démonstration peut être reprise, en supposant, plus généralement, que $f(x)$ soit dérivable seulement à l'intérieur de (a, b), $f'(x)$ y étant continue.