JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

B. GAMBIER

Potentiels circulaires. Faisceaux de cercles; points de Poncelet

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 32 (1953), p. 185-201.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1953_9_32__185_0>

Potentiels circulaires.
Faisceaux de cercles ; points de Poncelet ;

PAR B. GAMBIER.

(Paris.)

---

1. — Dans le plan, considérons un point fixe O et une quantité constante attachée à ce point, ayant la dimension du carré d'une longueur, représentée par εR^2, où $\varepsilon = \pm 1$ et où R est une longueur donnée (pouvant être nulle); appelons *potentiel circulaire*, $(O, \varepsilon R^2)$, l'expression $MO^2 - \varepsilon R^2$, où M est un point arbitraire du plan; le lieu des points où ce potentiel a une valeur donnée (supérieure ou égale à $-\varepsilon R^2$) est un cercle de centre O; en mécanique, on obtient ainsi les courbes de niveau du potentiel dû à une force répulsive issue de O, représentée par $\overrightarrow{OM}$, appliquée au point M. Considérons un autre potentiel circulaire $(O', \varepsilon' R'^2)$: l'expression $\dfrac{\lambda(MO^2 - \varepsilon R^2) + \mu(MO'^2 - \varepsilon' R'^2)}{\lambda + \mu}$, où le rapport $\lambda : \mu$ peut varier, définira un *faisceau linéaire de potentiels circulaires*. Utilisons la relation de Stewart, qui fournit une *identité vérifiée quel que soit le point* M *du plan*

$$(1) \qquad \overline{O'O''}.MO^2 + \overline{O''O}.MO'^2 + \overline{OO'}.\overline{MO''}^2 + \overline{O'O''}.\overline{O''O}.\overline{OO'} = 0$$

(O, O′, O″ doivent être alignés); déterminons O″ par la condition

$$(2) \qquad \frac{\overline{O'O''}}{\lambda} = \frac{\overline{O''O}}{\mu} \; \frac{\overline{O'O}}{\lambda + \mu}.$$

On en déduit

$$(3)\qquad \frac{\lambda \mathrm{MO}^2+\mu \mathrm{MO}'^2}{\lambda+\mu}=\frac{\overline{\mathrm{O'O''}}.\mathrm{MO}^2+\overline{\mathrm{O''O}}.\mathrm{MO}'^2}{\overline{\mathrm{O'O}}}$$

$$=\mathrm{MO}''^2+\overline{\mathrm{O'O''}}.\overline{\mathrm{O''O}}=\mathrm{MO}''^2+\frac{\lambda\mu\overline{\mathrm{OO'}}^2}{(\lambda+\mu)^2}.$$

Par suite, un *faisceau linéaire de potentiels circulaires définit* ∞^1 *potentiels circulaires dont les centres sont alignés et remplissent toute la droite* OO′. Le calcul qui précède donne

$$(4)\ \frac{\lambda(\mathrm{MO}^2-\varepsilon \mathrm{R}^2)+\mu(\mathrm{MO}'^2-\varepsilon' \mathrm{R}'^2)}{\lambda+\mu}=\mathrm{MO}''^2+\frac{\lambda\mu\overline{\mathrm{OO'}}^2-(\lambda\varepsilon \mathrm{R}^2+\mu\varepsilon' \mathrm{R}'^2)(\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)^2}.$$

Quand ε est positif, le cercle de centre O et rayon R peut être regardé comme l'*image du potentiel circulaire* $(\mathrm{MO}^2-\mathrm{R}^2)$; de la formule (4) résulte que, *parmi les potentiels d'un faisceau linéaire donné, il y en a une infinité qui, égalés à zéro, définissent un cercle effectif*, car le terme $\lambda\mu\overline{\mathrm{OO'}}^2-(\lambda\varepsilon \mathrm{R}^2+\mu\varepsilon' \mathrm{R}'^2)(\lambda+\mu)$, est négatif quand, λ fixé, μ est voisin de $(-\lambda)$. Il peut arriver que l'équation

$$(5)\qquad \lambda\mu\overline{\mathrm{OO'}}^2-(\lambda\varepsilon \mathrm{R}^2+\mu\varepsilon' \mathrm{R}'^2)(\lambda+\mu)=0,$$

où $\lambda:\mu$ est l'inconnue, ait effectivement des racines; la condition d'existence est

$$(6)\qquad (\mathrm{OO}'^2-\varepsilon \mathrm{R}^2-\varepsilon' \mathrm{R}'^2)^2-4\varepsilon\varepsilon' \mathrm{R}^2\mathrm{R}'^2\geqq 0.$$

Elle est sûrement réalisée si $\varepsilon\varepsilon'=-1$; elle est encore réalisée si $\varepsilon=\varepsilon'=-1$, car

$$\left(\overline{\mathrm{OO'}}^2+\mathrm{R}^2+\mathrm{R}'^2\right)^2-4\mathrm{R}^2\mathrm{R}'^2=(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}'^2)^2+2\overline{\mathrm{OO'}}^2(\mathrm{R}^2+\mathrm{R}'^2)+\overline{\mathrm{OO'}}^4.$$

Mais si $\varepsilon=\varepsilon'=+1$, on a

$$(\mathrm{OO}'^2-\mathrm{R}^2-\mathrm{R}'^2)^2-4\mathrm{R}^2\mathrm{R}'^2=[\mathrm{OO}'^2-(\mathrm{R}+\mathrm{R}')^2][\mathrm{OO}'^2-(\mathrm{R}-\mathrm{R}')^2].$$

La condition d'existence des racines est bien connue : les deux cercles (O, R), (O′, R′) ne doivent pas avoir de point commun.

Quand les racines de l'équation (5) existent, si $\lambda:\mu$ est l'une, on a

$$(7)\quad \frac{\lambda(\mathrm{MO}^2-\varepsilon \mathrm{R}^2)+\mu(\mathrm{MO}'^2-\varepsilon' \mathrm{R}'^2)}{\lambda+\mu}=\mathrm{MO}''^2,\qquad \text{avec}\quad \frac{\overline{\mathrm{O'O''}}}{\lambda}=\frac{\overline{\mathrm{O''O}}}{\mu};$$

le point O'' est appelé *point de Poncelet du faisceau*; quand les points de Poncelet du faisceau existent effectivement, l'expression analytique du faisceau linéaire de potentiels circulaires peut recevoir la forme réduite $\frac{l\,MO_1^2 + m\,MO_2^2}{l+m}$, où O_1, O_2 sont les deux points de Poncelet.

On peut remarquer que le centre O'' du potentiel

$$\frac{\lambda(MO^2 - \varepsilon R^2) + \mu(MO'^2 - \varepsilon' R'')}{\lambda + \mu}$$

est le *barycentre* O'' des points O, O' affectés des indices λ, μ respectivement, comme le montre la première égalité (2) écrite sous la forme

$$\lambda O''O + \mu O''O' = 0.$$

Il est naturel d'appeler : *puissance d'un point* M *par rapport au potentiel* $(MO^2 - \varepsilon R^2)$, précisément cette expression $MO^2 - \varepsilon R^2$; le lieu des points qui ont même puissance par rapport à deux potentiels circulaires est défini par l'équation

$$MO^2 - MO'^2 = \varepsilon R^2 - \varepsilon' R'^2 = \overrightarrow{O'O}.(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}) = 2\overrightarrow{M\omega}.\overrightarrow{O'O}$$

en appelant ω le milieu du segment OO'; c'est donc une droite définie par l'équation

$$\overrightarrow{M\omega}.\overrightarrow{O'O} = \frac{1}{2}(\varepsilon R^2 - \varepsilon' R'^2),$$

qui est appelée *axe radical du faisceau*, car tous les points de l'axe radical ont même puissance par rapport à tous les potentiels du faisceau $\frac{\lambda(MO^2 - \varepsilon R^2) + \mu(MO'^2 - \varepsilon' R'^2)}{\lambda + \mu}$.

Deux points M_1, M_2 *sont dits conjugués par rapport au potentiel* $(MO^2 - \varepsilon R^2)$ *si l'on a* $\overrightarrow{M_1O}.\overrightarrow{M_2O} - \varepsilon R^2 = 0$. Si M_1 reste fixe, le point M_2 décrit une droite qui est appelée *polaire* de M_1; le pied de la polaire sur la droite M_1O est le point m_1 tel que $\overline{M_1O}.\overline{m_1O} - \varepsilon R^2 = 0$ et cette polaire est perpendiculaire en m_1 à la droite M_1O. Si M, M_1

sont deux points quelconques, il est facile de voir que les identités

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda(MO^2 - \varepsilon R^2) + \mu(MO'^2 - \varepsilon' R'^2)}{\lambda + \mu} = MO''^2 - \varepsilon'' R''^2, \\ \dfrac{\lambda(M_1O^2 - \varepsilon R^2) + \mu(M_1O'^2 - \varepsilon' R'^2)}{\lambda + \mu} = M_1O''^2 - \varepsilon'' R''^2 \end{cases}$$

entraînent l'identité

$$(9)\quad \frac{\lambda\left(\overrightarrow{M_1O}.\overrightarrow{MO} - \varepsilon R^2\right) + \mu\left(\overrightarrow{M_1O'}.\overrightarrow{M_1O'} - \varepsilon' R'^2\right)}{\lambda + \mu} = \overrightarrow{M_1O''}.\overrightarrow{MO''} - \varepsilon'' R''^2.$$

Cela résulte de ce que, ajoutant les deux identités (8) membre à membre, puis soustrayant du résultat l'identité (supposée) (9), multipliée par 2, on obtient le résultat (lui-même identique)

$$\frac{\lambda\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{M_1O}\right)^2 + \mu\left(\overrightarrow{MO'} - \overrightarrow{M_1O'}\right)^2}{\lambda + \mu} = \left(\overrightarrow{MO''} - \overrightarrow{M_1O''}\right)^2,$$

car

$$\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{M_1O} \equiv \overrightarrow{MO'} - \overrightarrow{M_1O'} = \overrightarrow{MO''} - \overrightarrow{M_1O''} \equiv \overrightarrow{MM_1}.$$

Il en résulte que *les polaires d'un point donné* M *par rapport aux potentiels d'un faisceau linéaire de potentiels circulaires forment elles-mêmes un faisceau linéaire de droites et que les polaires d'un point donné* M *par rapport aux potentiels du faisceau passent toutes par un point* M′ *que l'on peut appeler conjugué de* M *par rapport au faisceau.*

Deux potentiels $MO^2 - \varepsilon R^2$ et $MO_1^2 - \varepsilon_1 R_1^2$ sont dits *orthogonaux* si l'on a

$$OO_1^2 - \varepsilon R^2 - \varepsilon_1 R_1^2 = 0;$$

cela exprime, si $\varepsilon = \varepsilon_1 = +1$ que le carré de la distance des centres O et O_1 est égal à la somme des carrés des rayons R, R_1; sans faire d'hypothèse sur ε ni ε_1, la définition revient à dire que *le centre de l'un ou l'autre potentiel a zéro pour somme de ses puissances par rapport aux potentiels.* Il résulte de là que si le potentiel $MO^2 - \varepsilon R^2$ est orthogonal à deux potentiels $MO_1^2 - \varepsilon_1 R_1^2$ et $MO_1'^2 - \varepsilon_1' R_1'^2$, le point O, centre de ce potentiel, est sur l'axe radical des deux autres, puisque $OO_1^2 - \varepsilon_1 R_1^2$ et $OO_1'^2 - \varepsilon_1' R_1'^2$ sont égales toutes deux à εR^2 : par suite, le potentiel $(MO^2 - \varepsilon R^2)$ est orthogonal à tous les potentiels du faisceau linéaire $\dfrac{\lambda_1(MO_1^2 - \varepsilon_1 R_1^2) + \mu(MO_1'^2 - \varepsilon_1' R_1'^2)}{\lambda_1 + \mu_1}$; on en déduit immédiatement que, *si un second potentiel* $(MO'^2 - \varepsilon' R'^2)$ *est orthogonal lui aussi aux potentiels* $(M_1 O_1^2 - \varepsilon_1 R_1^2)$, $(M_1 O_1'^2 - \varepsilon_1' R_1'^2)$, *chaque potentiel du faisceau* $\dfrac{\lambda(MO^2 - \varepsilon R^2) + \mu(MO'^2 - \varepsilon' R'^2)}{\lambda + \mu}$ *est orthogonal à chaque potentiel du faisceau* $\dfrac{\lambda_1(MO_1^2 - \varepsilon_1 R_1^2) + \mu(MO_1'^2 - \varepsilon_1' R_1'^2)}{\lambda_1 + \mu_1}$. On a ainsi défini deux *faisceaux orthogonaux* de potentiels circulaires. Il est naturel d'appeler *potentiel circulaire de rayon nul* une expression telle que (MO^2); si les potentiels MO^2 et $MO_1^2 - \varepsilon_1 R_1^2$ sont orthogonaux, on a $OO_1^2 - \varepsilon_1 R_1^2 = 0$, et le potentiel $MO_1^2 - \varepsilon_1 R_1^2$ ou $MO_1^2 - OO_1^2$ a pour image un cercle effectif passant au centre O du premier; donc *si un faisceau de potentiels a deux points de Poncelet effectifs*, P_1, P_2, *les potentiels du faisceau orthogonal au premier faisceau ont pour image les cercles passant par* P_1, P_2.

Inversement, si un faisceau de potentiels est dénué de points de Poncelet, c'est que les cercles-images passent tous par deux points fixes, qui sont les points de base de ce faisceau et les points de Poncelet du faisceau orthogonal.

Rappelons pour mémoire *le cas spécial où tous les potentiels du faisceau ont pour images des cercles tangents en un même point, de sorte que, par rotation de* $\frac{\pi}{2}$ *autour de ce point, le premier faisceau se transforme en le second.*

Pour les application qui vont suivre, il sera commode de rappeler que si trois potentiels $MO^2 - \varepsilon R^2$, $MO'^2 - \varepsilon' R'^2$ et $MO''^2 - \varepsilon'' R''^2$ appartiennent à un même faisceau, l'identité (4) peut s'écrire sous la forme commode

$$(4') \quad \overline{O'O''}(MO^2 - \varepsilon R^2) + \overline{O''O}(MO'^2 - \varepsilon' R'^2) + \overline{OO'}(MO''^2 - \varepsilon'' R''^2) = 0,$$

qui consiste à avoir légèrement modifié la relation de Stewart.

2. Donnons maintenant quelques applications. *Soient trois potentiels d'un même faisceau : si l'un d'eux a un cercle-image effectif (lieu des points où ce potentiel est nul), tout le long de ce cercle le rapport des deux autres potentiels reste constant.* En effet, supposons que dans l'identité

($4'$) qui précède, la quantité ε'' soit égale à $+1$: en faisant décrire au point M le cercle de centre O″ et rayon R″, on a

$$(10) \qquad \frac{MO^2 - \varepsilon R^2}{MO'^2 - \varepsilon' R'^2} = \frac{\overline{OO''}}{\overline{O'O''}}.$$

La réciproque est exacte : le lieu (s'il existe) des points dont le rapport des puissances par rapport à deux potentiels circulaires est constant, est un cercle du faisceau.

En particulier, *si les points de Poncelet* P_1 *et* P_2 *existent (et sont distincts), pour tout cercle effectif du faisceau le rapport* $\frac{MP_1}{MP_2}$ *reste constant et réciproquement;* notre théorie revient à étudier, non pas la relation $\frac{MP_1}{MP_2} = k$, mais la relation $\frac{MP_1^2}{MP_2^2} = k^2$. Pour étudier la relation

$$\frac{\lambda_1^2 MP_1^2 - \lambda_2^2 MP_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = 0,$$

nous avons appliqué l'identité

$$(11) \qquad \frac{\lambda_1^2 MP_1^2 - \lambda_2^2 MP_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = MO^2 - \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2} P_1P_2^2,$$

avec

$$(12) \qquad \frac{\overline{P_2O}}{\lambda_1^2} = \frac{\overline{OP_1}}{-\lambda_2^2} = \frac{\overline{P_2P_1}}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

Le point O *est toujours à l'extérieur du segment* P_1P_2.

3. Les considérations qui précèdent permettent de résoudre géométriquement une question que j'ai posée dans le numéro d'avril 1950 de la *Revue de Mathématiques spéciales*.

Une proposition préliminaire est utile : *deux cercles* (O), (O′) *sont coupés par une sécante, le premier en* M, *le second en* M′ (*fig.* 1); *les tangentes en* M *et* M′ *se coupent en* t; *on a, en désignant par* M_1, M'_1 *les nouveaux points communs à* MM′ *et* (O) *ou* (O′),

$$(13) \qquad \frac{tM.MM_1}{R} = \frac{tM'.M'M'_1}{R'}.$$

Le triangle $t\mathrm{MM}'$ donne, en effet,

$$(14) \qquad \frac{t\mathrm{M}}{\sin\left(t\widehat{\mathrm{M}'\mathrm{M}}\right)} = \frac{t\mathrm{M}'}{\sin\left(t\widehat{\mathrm{M}\mathrm{M}'}\right)};$$

or, $\widehat{t\mathrm{MM}'}$ $\left(\text{ou l'angle égal ou supplémentaire } \widehat{t\mathrm{MM}_1'}\right)$ est l'un des angles sous lequel la corde MM_1 de (O) est vue d'un point quelconque

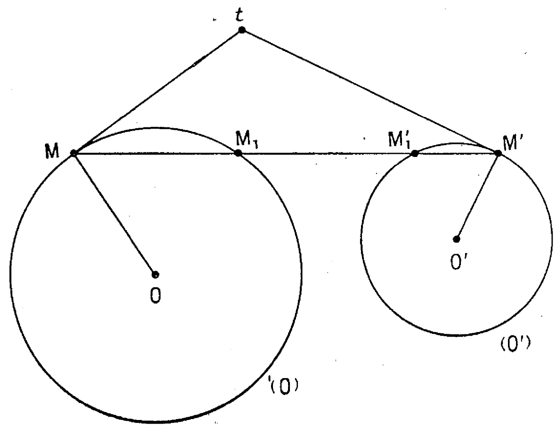

Fig. 1.

de (O), de sorte que

$$2\mathrm{R}\sin\left(t\widehat{\mathrm{MM}'}\right) = \mathrm{MM}_1$$

et, de même,

$$2\mathrm{R}'\sin\left(\widehat{t\mathrm{M}'\mathrm{M}}\right) = \mathrm{M}'\mathrm{M}_1';$$

on multiplie donc les deux termes du premier rapport (14) par $2\mathrm{R}'$, les deux termes du second par $2\mathrm{R}$ et l'on obtient l'égalité (13).

Voici une première application : *si le point t décrit un cercle du faisceau* (O), (O′), *le rapport* $\frac{t\mathrm{M}}{t\mathrm{M}'}$ *reste constant, donc aussi le rapport* $\frac{\mathrm{MM}_1}{\mathrm{M}'\mathrm{M}_1'}$, *ce qui signifie que la droite* MM′ *enveloppe une conique du faisceau tangentiel* (O), (O′) (ceci sera précisé plus loin);

inversement, si MM′ *enveloppe une telle conique, le point t décrit un cercle du faisceau ponctuel* (O), (O′), *puisque l'on a*

$$\frac{tM}{tM'} = \left(\frac{R}{MM_1}\right) : \left(\frac{R'}{M'M'_1}\right).$$

On peut remarquer que cette proposition et la réciproque sont *projectives* et *corrélatives* : voici les énoncés correspondants :

Deux coniques (O), (O′) *étant coupées par une même droite* (D), *le quadrilatère dont les côtés opposés sont les tangentes à* (O) *d'une part, les tangentes à* (O′) *d'autre part, aux points où* (D) *coupe* (O) *ou* (O′), *a ses sommets situés sur une conique du faisceau ponctuel* (O), (O′).

Corrélativement : *étant données deux coniques* (O), (O′) *et un point t arbitraire, les tangentes issues de t à* (O) *touchent* (O) *en* M *et* P ; *les tangentes issues de t à* (O′) *touchent* (O′) *en* M′ *et* P′ : *les quatre droites* MM′, MP′, PM′, PP′ *touchent une conique du faisceau tangentiel* (O), (O′).

Il est facile de remplacer le rapport $\frac{MM'}{M'M'_1}$ ou le rapport $\left(\frac{tM'}{R'}\right) : \left(\frac{tM}{R}\right)$, égal au précédent, par des expressions ayant un sens projectif. D'abord

$$\frac{MM_1}{R} = 2 \sin\left(\frac{\widehat{MOM_1}}{2}\right);$$

il suffit donc de faire intervenir le birapport sur (O) des points (I, J, M, M_1), où I, J sont les points cycliques communs aux cercles (O), (O′). Par suite, pour deux coniques quelconques, on prend le birapport (I, J, M, M_1), où I, J sont deux des points communs à (O), (O′); les deux birapports (I, J, M, M_1), (I, J, M′, M'_1) ont un *rapport* ou un *produit* constant quand la droite (MM′) enveloppe une conique du faisceau *tangentiel* (O), (O′). On voit alors apparaître, pour deux cercles, la nécessité de faire intervenir le *signe* du rapport $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{M'M'_1}}$, c'est-à-dire d'indiquer, quand les noms des points où la droite $MM'M_1M'_1$ coupe (O) et (O′) sont choisis, la relation précise que M et M′ (ou M et M'_1) ont entre eux quand la droite enveloppe une conique du faisceau *tangentiel* (O), (O′). Le résultat précis est le suivant : *sur la droite* (D), ($MM'M_1M'_1$), *nous considèrons l'involution dont* (M, M'), (M_1, M'_1) *sont deux couples correspondants; soient* H, H_1 *les points doubles de cette involution : les points* H, H_1 *décrivent, quand la droite* (D) *touche la conique* (γ) *annoncée du faisceau tangentiel* (O), (O'), *une conique* (Γ) *du faisceau ponctuel* (O), (O') : ici (Γ) est un cercle, en restant dans le cas métrique où (O), (O') sont des cercles, de sorte que la démonstration sera aisée, tout en gardant son caractère de généralité. En considérant ensuite les points doubles K, K_1 de l'involution, où (M, M'_1) et (M_1, M') sont des couples homologues [au lieu de (M, M') et (M_1, M'_1)], nous obtenons une autre conique (Γ') du faisceau ponctuel (O), (O') et tout revient à démontrer le résultat suivant :

Soient deux coniques (O), (O') *et* (Γ) *une conique du faisceau ponctuel* (O), (O'); *on prend sur* (O) *un point variable* M *et l'on coupe* (O') *par la polaire de* M *relativement à* (Γ); M' *étant l'un des points d'intersection, les tangentes à* (O) *et* (O') *en* M, M' *se coupent en un point* t, *dont le lieu, quand* M *décrit* (O), *est une conique* (Ω) *du faisceau ponctuel* (O), (O'). *On remarquera que la relation entre* M *et* M' *est réciproque, de sorte que* (O), (O') *jouent le même rôle dans cet énoncé,* (Γ) *ni* (Ω) *ne changeant; d'autre part, la droite* MM' *enveloppe une conique* (γ) *du faisceau tangentiel* (O), (O'); MM' *recoupe* (O) *en* M_1, (O') *en* M'_1 *et* (M_1, M'_1) *forment aussi un couple conjugué par rapport à* (Γ). On doit remarquer que *les tangentes à* (O) *et* (O') *aux points* M *et* M'_1 *ou aux points* M_1 *et* M' *se coupent sur la conique* (Ω) *déjà trouvée, tandis que* M *et* M'_1, *ou* M_1 *et* M' *forment deux couples conjugués par rapport à une autre conique fixe* (Γ') *du faisceau ponctuel* (O), (O'). [Au cas où les points de Poncelet existent, on peut comme cas particulier, supposer que (Γ) est le potentiel (MA^2), où A est un point de Poncelet : les deux droites AM, AM' sont perpendiculaires, mais alors (Γ') est un cercle effectif].

On voit se réaliser le fait curieux suivant : si l'on définit le point t par l'intermédiaire de (O), (O') et de la nouvelle conique (Γ) du faisceau ponctuel (O), (O'), *la conique* (Ω), *lieu de* t, *est obtenue deux fois seulement :* t ayant été obtenu par les tangentes à (O) et (O') en M et M′, les nouvelles tangentes à (O) et (O′), issues de t, touchent ces coniques en des points P, P′ qui sont conjugués aussi par rapport à (Γ). Si l'on définit le point t par l'intermédiaire de (O), (O′) et de la conique (γ) du faisceau tangentiel (O), (O′), enveloppe de la droite $MM'M_1M'_1$, *le point t est obtenu quatre fois :* de t l'on mène les tangentes à (O), (O′) et l'on peut associer de quatre façons différentes une tangente à (O) avec une tangente à (O′) : les quatre droites réunissant les points de contact correspondants enveloppent la conique (γ) du faisceau tangentiel : on voit que les diverses

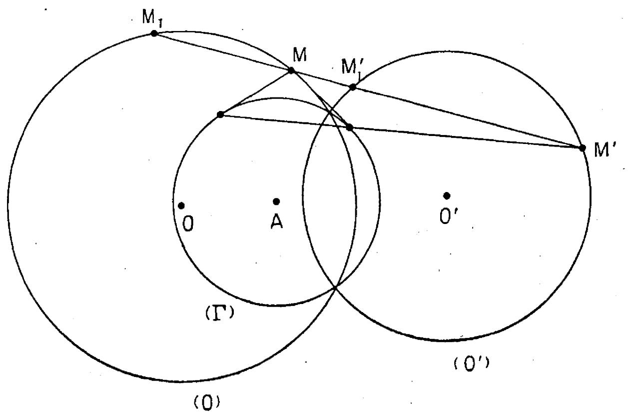

Fig. 2.

propositions où entrent (O), (O′), (γ), (Ω) ont un caractère dualistique.

Il n'y a plus qu'à donner la démonstration en supposant que (O), (O′) sont des cercles : la figure 2 indique deux cercles (O), (O′) de centres respectifs O, O′; nous imaginons un nouveau potentiel circulaire Γ de centre A, appartenant à leur faisceau, représenté par $\Gamma \equiv MA^2 - \varepsilon\rho^2$; la polaire du point M, pris sur (O), relativement à (Γ) perce (O′) en M′ et la droite MM′ recoupe (O) en M_1, (O′) en M'_1. Nous écrivons l'identité valable pour tout point $\mathfrak{M}$ du plan

$$\overline{O'A}(\mathfrak{M}O^2 - R^2) + \overline{AO}(\mathfrak{M}O'^2 - R'^2) + \overline{OO'}(\mathfrak{M}A^2 - \varepsilon\rho^2) = 0,$$

R, R′ désignant les rayons respectifs de (O), (O′).

Faisons venir $\mathfrak{M}$ en M, puis en M′, on a

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{AO}(\overline{MM'}.\overline{MM'_1}) + \overline{OO'}(MA^2 - \varepsilon\rho^2) = 0,\\ &\overline{O'A}(\overline{M'M}.\overline{M'M_1}) + \overline{OO'}(M'A^2 - \varepsilon\rho^2) = 0.\end{aligned}\right.$$

L'identité $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AM}$ fournit par élèvation au carré

$$MM'^2 = AM'^2 + AM^2 - 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'};$$

puisque M et M′ sont conjugués par rapport au potentiel $(MA^2 - \varepsilon\rho^2)$, on a

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} - \varepsilon\rho^2 = 0$$

et, par suite,

$$(AM'^2 - \varepsilon\rho^2) + (AM^2 - \varepsilon\rho^2) = \overline{MM'}^2.$$

En ajoutant les égalités (15) et tenant compte de la relation que nous venons de former, nous avons une relation où $\overline{MM'}$ se met en facteur et peut se supprimer; nous obtenons ainsi, *en grandeur et signe* la relation (faisant intervenir les mesures algébriques de segments portés sur la ligne des centres d'une part, sur la sécante d'autre part)

$$(16)\qquad \overline{AO}.\overline{MM'_1} + \overline{O'A}.\overline{M_1M'} + \overline{OO'}.\overline{MM'} = 0.$$

En remplaçant $\overline{MM'_1}$ par $\overline{MM'} + \overline{M'M'_1}$, $\overline{M_1M'}$ par $\overline{MM'} - \overline{MM_1}$, nous obtenons

$$(17)\qquad \overline{MM'}(\overline{AO} + \overline{OO'} + \overline{O'A}) + \overline{AO}\,\overline{M'M'_1} - \overline{O'A}\,\overline{MM_1} = 0$$

et comme le multiplicateur de $\overline{MM'}$ est nul, il reste

$$(18)\qquad \frac{\overline{MM_1}}{\overline{M'M'_1}} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{O'A}}.$$

La relation (18) a été obtenue par une série de calculs *rationnels* pouvant être effectués en sens inverse à partir de cette relation (18): on retrouvera donc la relation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} - \varepsilon\rho^2 = 0$, qui prouve que M et M′ sont conjugués par rapport au potentiel $(AM^2 - \varepsilon\rho^2)$. Mais alors, cette même relation (18) peut être écrite sous la forme

$$(18')\qquad \frac{\overline{M_1 M}}{\overline{M'_1 M'}} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{O'A}},$$

ce qui prouve que M_1 et M'_1 sont aussi conjugués par rapport au même potentiel; une vérification de ce résultat peut d'ailleurs s'obtenir par le théorème de Desargues : (M, M_1), (M', M'_1) sont deux couples de l'involution déterminée sur la droite MM' par les coniques du faisceau ponctuel (O), (O'); le potentiel $(MA^2 - \varepsilon\rho^2)$ fournit un autre couple (H, H_1) de cette involution (couple réel ou imaginaire conjugué), de sorte que le birapport $(MM'HH_1)$ est égal au birapport $(M_1 M'_1 H_1 H)$: or le premier est égal à (-1). L'égalité

$$(19)\qquad \frac{tM'}{tM} = \frac{OA}{R} : \frac{O'A}{R'}$$

dérive du lemme initial; mais cette fois tM', tM n'ont pas le même support, de sorte que nous ne pouvons plus considérer que des valeurs absolues et c'est justement cette indifférence de la relation (19) vis-à-vis des signes qui prouve que (M, M'_1) et (M_1, M') *sont conjugués par rapport à un autre cercle* (Γ_1) *du faisceau ponctuel* (O), (O') et que la droite MM', qui est donnée *deux fois* par les relations (18), (18'), est donnée deux fois encore par un autre point A_1 tel que

$$(20)\qquad \frac{\overline{M_1 M}}{\overline{M' M'_1}} = -\frac{\overline{OA_1}}{\overline{O'A_1}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{O'A}}.$$

En effet, les raisonnements, faits plus haut pour remonter de (18) à la découverte du point A et du potentiel (Γ), $(MA^2 - \varepsilon\rho^2)$ correspondant, permettent, par le même procédé, d'arriver au nouveau point A_1 centre du potentiel (Γ_1), $(MA_1^2 - \varepsilon_1\rho_1^2)$; A *et* A_1 *sont conjugués harmoniques par rapport à* (O) *et* (O') *et sont les foyers de la conique* (γ) *enveloppe des droites* $MM_1M'M'_1$. Pour démontrer *géométriquement* ce dernier résultat, remarquons que A est sur l'axe radical des deux cercles de diamètres MM', $M_1M'_1$ qui sont tous deux orthogonaux au potentiel (Γ); en projetant A en α sur la droite $MM_1M'M'_1$, on a donc

$$\overline{\alpha M}.\overline{\alpha M'} = \overline{\alpha M_1}.\overline{\alpha M'_1}, \qquad \text{où} \quad \frac{\overline{\alpha M}}{\overline{\alpha M'_1}} = \frac{\overline{\alpha M_1}}{\overline{\alpha M'}};$$

si ω et ω' sont les milieux des segments MM_1 et $M'M'_1$, en ajoutant terme à terme ces deux rapports égaux, on a le rapport égal $\frac{\overline{\alpha\omega}}{\overline{\alpha\omega'}}$ ou encore $\frac{\overline{AO}}{\overline{AO'}}$; donc le produit $\frac{\overline{\alpha M}.\overline{\alpha M_1}}{\overline{\alpha M'_1}.\overline{\alpha M'}}$ de ces deux rapports égaux est égal à la constante $\frac{AO^2}{AO'^2}$ et, par suite, *le point α décrit le cercle du faisceau ponctuel* (O), (O') *caractérisé par ce rapport constant des puissances de α par rapport à* (O) *et* (O'); le centre a de ce cercle est fourni par l'égalité

$$\frac{\overline{AO}^2}{\overline{AO'}^2} = \frac{\overline{aO}}{\overline{aO'}},$$

ce qui prouve que a est le centre du cercle lieu des points dont le rapport des distances à O et O' est égal à $\left|\frac{AO}{AO'}\right|$; par suite, *l'autre foyer* A_1 *de la conique* (γ) *est le conjugué de* A *par rapport à* O *et* O', ce qui donne une nouvelle démonstration du résultat signalé grâce à l'égalité (20). Il est clair que les relations (18) ou (20) sont satisfaites par les tangentes communes aux cercles (O), (O'), de sorte que *les coniques* (γ) *appartiennent au faisceau tangentiel* (O), (O').

On remarquera un grand nombre de propositions élémentaires retrouvées, en passant, par notre étude. Par exemple, *la conique* (γ) *peut dégénérer en deux points, les centres de similitude de* (O), (O'), *par exemple, le cercle* (Ω) *correspondant devenant l'axe radical, complété par la droite de l'infini; les cercles* (Γ), (Γ) *ont alors leur centre en l'un des centres de similitude de* (O), (O').

Dans le cas où chaque cercle (O), (O') est extérieur à l'autre, on peut concevoir la conique (γ) dégénérée en deux ombilics situés sur la perpendiculaire à la ligne des centres menée par un point de Poncelet, mais alors, si une corde issue d'un tel ombilic coupe effectivement l'un des cercles, elle ne coupe pas l'autre.

Un cas particulier des propositions trouvées est le suivant : les pieds des perpendiculaires abaissées sur les tangentes communes à partir d'un point pris (au hasard) sur la ligne des centres sont évidemment, par raison de symétrie, sur un même cercle : *ce cercle appartient au faisceau ponctuel des deux cercles donnés.*

4. Il est intéressant de montrer comment, *dans le cas de deux coniques quelconques*, un calcul simple permet de retrouver tous les résultats. En fait, ramener la question à l'étude de deux cercles revient à indiquer une *forme réduite*, profitant de ce que la transformation générale, homographique ou dualistique, n'altère pas l'énoncé des propositions; cela revient, par homographie, à avoir changé la position des coniques par rapport au triangle de référence; on arrive évidemment au même résultat en changeant la position du triangle de référence, par exemple, en rapportant les deux coniques à leur triangle conjugué commun. Nous prendrons donc les équations réduites

$$(\mathrm{O})\quad x^2+y^2+z^2=0, \qquad (\mathrm{O}')\quad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0.$$

Le triangle conjugué est réel quand les quatre points d'intersection sont ou tous réels ou tous imaginaires (deux à deux conjugués); le triangle conjugué n'a qu'un côté réel, si deux points communs sont réels et les deux autres imaginaires conjugués; dans ce cas y et z, par exemple, ainsi que b et c, sont imaginaires conjuguées et les notations adoptées n'ont pour but que de donner des calculs parfaitement symétriques.

Considérons une droite (D) d'équation $ux+vy+wz=0$; les équations

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} (u^2+v^2+w^2)(x^2+y^2+z^2)-(ux+vy+wz)^2=0,\\ (au^2+bv^2+cw^2)\left(\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}\right)-(ux+vy+wz)^2=0 \end{array}\right.$$

réprésentant manifestement l'ensemble des tangentes à (O) ou (O′) aux points où (D) les rencontre (c'est, si l'on veut, une belle occasion d'appliquer l'identité de Lagrange). Supposons que (D) enveloppe la conique

$$(\gamma)\qquad au^2+bv^2+cw^2-h(u^2+v^2+w^2)=0,$$

qui appartient au faisceau tangentiel (O), (O′). La soustraction des équations (21) donne, tenu compte de l'équation (γ), l'équation

$$(22)\qquad (u^2+v^2+w^2)\left[x^2+y^2+z^2-h\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)\right]=0$$

vérifiée par les points d'intersection du premier couple de tangentes (21) avec le second couple : si $u^2+v^2+w^2$ est nul, la droite (u, v, w) est partie commune des deux faisceaux; ce cas écarté, on voit que la conique (Ω) du faisceau ponctuel (O), (O')

$$(\Omega) \qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-\frac{1}{h}(x^2+y^2+z^2)=0$$

est le lieu des points où les tangentes à (O) et (O') aux points de rencontre avec (D) se coupent mutuellement. On a ainsi mis en évidence *une correspondance homographique entre une conique du faisceau tangentiel* (O), (O') *et une conique du faisceau ponctuel* (O), (O').

Supposons maintenant que M étant pris sur la conique

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

nous construisions sa polaire par rapport à la conique (Γ) du faisceau ponctuel (O), (O')

$$(\Gamma) \qquad \frac{X^2}{a}+\frac{Y^2}{b}+\frac{Z^2}{c}-h(X^2+Y^2+Z^2)=0$$

et que nous formions le faisceau des droites joignant M aux points où la polaire en jeu coupe (O') : ce faisceau a une équation de la forme

$$(23) \qquad \frac{X^2}{a}+\frac{Y^2}{b}+\frac{Z^2}{c}+\left[\frac{xX}{a}+\frac{yY}{b}+\frac{zY}{c} -h(Xx+Yy+zZ)\right][uX+vY+wZ]=0,$$

où u, v, w sont à déterminer, de sorte que le point (x, y, z) soit point double de la conique (23); posons

$$(24) \qquad P\equiv ux+vy+wz.$$

Nous obtenons les trois conditions à vérifier par (x, y, z) en tenant compte de $x^2+y^2+z^2=0$,

$$(25) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{2x}{a}+x\left(\frac{1}{a}-h\right)P+u\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)=0,\\ &\frac{2y}{b}+y\left(\frac{1}{b}-h\right)P+v\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)=0,\\ &\frac{2z}{c}+z\left(\frac{1}{c}-h\right)P+w\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)=0,\\ &ux+vy+wz-P=0.\end{aligned}\right.$$

Nous considérons P comme une nouvelle inconnue, de façon à avoir quatre équations en u, v, w, P. Les trois premières équations donnent u, v, w en fonction de P : portant dans la dernière, on trouve sans difficulté $P = -1$, puis

$$(26)\quad u = \frac{-x\left(\frac{1}{a}+h\right)}{\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}},\qquad v = \frac{-y\left(\frac{1}{b}+h\right)}{\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}},\qquad w = \frac{-z\left(\frac{1}{c}+h\right)}{\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}}.$$

Le faisceau annoncé a l'équation très simple

$$(27)\quad \left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)\left(\frac{X^2}{a}+\frac{Y^2}{b}+\frac{Z^2}{c}\right)-\left(\frac{xX}{a}+\frac{yY}{b}+\frac{zZ}{c}\right)^2 + h^2(xX+yY+zZ)^2 = 0$$

qui confirme nos résultats géométriques, *car la conique*

$$(\Gamma')\quad \frac{X^2}{a}+\frac{Y^2}{b}+\frac{Z^2}{c}+h(X^2+Y^2+Z^2)=0$$

aurait conduit au même faisceau : si M′ est un point où la polaire (M, Γ) coupe (O′), le nouveau point M'_1 où la droite MM′ coupe (O′) appartient à la polaire (M, Γ′); le changement de signe de h correspond à ce fait, découvert géométriquement, que, si (O), (O′) sont des cercles, les centres des cercles (Γ), (Γ′) sont conjugués par rapport à O et O′.

Il s'agit maintenant de prouver que chacune des deux droites (27) est tangente à une conique (γ) du faisceau tangentiel (O), (O′),

$$(\gamma)\quad au^2+bv^2+cw^2-k(u^2+v^2+w^2)=0 \quad \text{ou} \quad \frac{X^2}{a-k}+\frac{Y^2}{b-k}+\frac{Z^2}{c-k}=0.$$

Exprimons donc que le faisceau (27) coïncide avec le nouveau faisceau

$$(28)\quad \left(\frac{x^2}{a-k}+\frac{y^2}{b-k}+\frac{z^2}{c-k}\right)\left(\frac{X^2}{a-k}+\frac{Y^2}{b-k}+\frac{Z^2}{c-k}\right) - \left(\frac{Xx}{a-k}+\frac{Yy}{b-k}+\frac{Zz}{c-k}\right)^2=0.$$

Comme les deux faisceaux ont le même sommet, *il suffit de deux conditions* pour assurer leur coïncidence; nous les obtenons en écrivant la proportionnalité des termes en YZ, ZX, XY, ce qui donne

$$(29)\qquad \frac{h^2 - \frac{1}{bc}}{a-k} = \frac{h^2 - \frac{1}{ca}}{b-k} = \frac{h^2 - \frac{1}{ab}}{c-k}$$

et, finalement, l'unique relation $k = abch^2$ (on vérifie sans peine que les faisceaux en jeu coïncident effectivement moyennant cette unique relation). L'équation définitive de (γ) est

$$(\gamma)\qquad au^2 + bv^2 + cw^2 - abch^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Inversement, si γ est donnée *a priori*, la relation $k = abch^2$ donne pour (Γ) et (Γ') l'une ou l'autre des équations

$$(\Gamma) \text{ et } (\Gamma')\qquad \frac{X^2}{a} + \frac{Y^2}{b} + \frac{Z^2}{c} \pm \sqrt{\frac{k}{abc}}(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0,$$

et toutes nos prévisions sont vérifiées.