JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN-JACQUES MOREAU

Bilan dynamique d'un écoulement rotationnel (suite)

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 32 (1953), p. 1-78.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1953_9_32__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Bilan dynamique d'un écoulement rotationnel

(suite)

PAR JEAN-JACQUES MOREAU.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA STRUCTURE TOURBILLONNAIRE. STRUCTURES SINGULIÈRES.

7. LA SOMME TOURBILLONNAIRE. — *a*. Étant donné, comme au paragraphe précédent, un milieu continu à champ de vitesses différentiable, nous considérons le vecteur tourbillon

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{u}.$$

Pour une portion D du milieu, l'intégrale

$$\vec{K} = \iiint_D \vec{\omega}\, d\tau$$

peut être appelée *somme tourbillonnaire* de D. La transformation d'Ostrogradsky donne, si S est la surface entière,

$$(1) \qquad \vec{K} = \frac{1}{2} \iint \vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma.$$

Nous en concluons d'abord la nullité de $\vec{K}$ lorsque $\vec{u}$ est nul sur S ou, dans le cas d'un milieu s'étendant à l'infini, si $r^2|\vec{u}|$ s'annule uniformément avec $\frac{1}{r}$. En outre on écrit

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{u} = (\vec{\alpha} \wedge \vec{u}.\vec{\nabla})\overrightarrow{\underset{*}{\mathrm{OM}}} = (\vec{\alpha} \wedge \underset{*}{\vec{u}}.\vec{\nabla})\overrightarrow{\underset{*}{\mathrm{OM}}} - (\vec{\alpha} \wedge \underset{*}{\vec{u}}.\vec{\nabla})\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$= -(\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}.\underset{*}{\vec{u}})\overrightarrow{\underset{*}{\mathrm{OM}}} + 2(\vec{\alpha}.\vec{\omega})\overrightarrow{\mathrm{OM}},$$

ce qui, pour toute surface fermée Σ, nous laisse

$$\iint_\Sigma \vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma = 2\iint_\Sigma (\vec{\alpha}.\vec{\omega})\, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\, d\sigma.$$

$\vec{\mathrm{K}}$ *est donc nul si* $\vec{\alpha}.\vec{\omega}$ *est nul sur la frontière du domaine* (*a fortiori* si $\vec{\omega}$ est nul). Nous disons en pareil cas que D constitue un *noyau tourbillonnaire* ou qu'il présente une *structure tourbillonnaire fermée*. Cette condition $\vec{\alpha}.\vec{\omega} = 0$ est vérifiée en particulier pour toute portion de surface sur laquelle $\vec{u}$ est identiquement nul.

Dans l'hypothèse d'un domaine D s'étendant en outre à l'infini, la condition usuelle pour que l'intégrale $\vec{\mathrm{K}}$ converge est que l'on ait une condition de Hölder :

$$r^3|\vec{\omega}| = \frac{\mathrm{B}}{r^\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0),$$

où B est une fonction bornée à l'infini. Pour abréger, nous dirons en pareil cas que le premier membre *s'annule régulièrement à l'infini*.

En prenant pour surface Σ une sphère de rayon indéfiniment croissant, on conclut encore à la nullité de $\vec{\mathrm{K}}$.

b. Ces remarques faites, prenons pour D une portion de milieu conservant son individualité matérielle, de sorte que S est une surface matérielle, et dérivons par rapport au temps la relation (1) :

$$\frac{d\vec{\mathrm{K}}}{dt} = \frac{1}{2}\iint_S \vec{\alpha} \wedge \frac{d\vec{u}}{d\sigma}\, d\sigma + \frac{1}{2}\iint_S [(\vec{\nabla} \wedge \vec{\alpha}) \wedge \underset{*}{\vec{u}}] \wedge \vec{u}\, d\sigma$$

en admettant l'existence de l'*accélération*

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{dt},$$

c'est-à-dire celle des dérivées partielles $\frac{\partial u_i}{\partial t}\cdot$ On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}
&\iint_S \left[\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\alpha}\right) \wedge \underset{\star}{\vec{u}}\right] \wedge \vec{u}\, d\sigma \\
&= \iint_S \left[\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\alpha} . \vec{u}\right) \underset{\star}{\vec{u}} - \left(\vec{u} . \underset{\star}{\vec{u}}\right) \vec{\nabla} \wedge \vec{\alpha}\right] d\sigma \\
&= \iint_S \left[\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\alpha} . \underset{\star}{\vec{u}}\right) \underset{\star}{u} - \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\alpha} . \underset{\star}{\vec{u}}\right) \vec{u} - \frac{1}{2} \underset{\star}{u^2} \vec{\nabla} \wedge \vec{\alpha}\right] d\sigma \\
&= \iint_S 2\left(\vec{\alpha} . \vec{\omega}\right) \vec{u}\, d\sigma.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{1}{2} \iint_S \vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma}\, d\sigma + \iint_S \left(\vec{\alpha} . \vec{\omega}\right) \vec{u}\, d\sigma. \tag{2}$$

c. Indiquons une conséquence dynamique de ce résultat, pour le cas d'un fluide parfait satisfaisant aux *conditions de Helmholtz*. Nous voulons dire par là que les forces extérieures dérivent d'un potentiel et que, d'autre part, les circonstances de l'évolution sont telles qu'il existe, dans toute l'étendue du fluide, une relation entre la pression et la densité. On sait alors former une fonction P telle que

$$\vec{\gamma} = \vec{\nabla} P;$$

donc

$$\iint_S \vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma}\, d\sigma = \iint_S \vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla} \underset{\star}{P}\, d\sigma = 0.$$

D'autre part, la seconde intégrale de l'équation (2) se transforme en intégrale de volume. Si l'on invoque les dérivées partielles de $\vec{\omega}$, il suffit d'écrire

$$\iint_S \left(\vec{\alpha} . \vec{\omega}\right) \vec{u}\, d\sigma = \iiint_D \left(\underset{\star}{\vec{\nabla}} . \vec{\omega}\right) \underset{\star}{\vec{u}}\, d\tau = \iiint_D \left(\overleftarrow{\nabla} . \vec{\omega}\right) \underset{\star}{\vec{u}}\, d\tau,$$

puisque $\vec{\nabla}_* . \vec{\omega}$ est nul. Mais ce résultat est encore valable, même si l'existence de $\vec{\nabla}_* . \vec{\omega}$ n'est pas assurée, en vertu des considérations du paragraphe **4** *a*, car pour toute surface fermée

$$\iint_\Sigma \vec{\alpha} . \vec{\omega} \, d\sigma = \frac{1}{2} \iint_\Sigma \vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla} . \vec{u}_* \, d\sigma = 0.$$

On a dès lors

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_D \frac{\vec{\omega}}{\rho} \rho \, d\tau = \iiint_D \left(\vec{\nabla} . \vec{\omega} \right) \vec{u}_* \, d\tau.$$

quel que soit D, ce qui entraîne, d'après le paragraphe **4** *c*, l'*existence* de la dérivée

$$(3) \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \vec{\omega} \right) = \frac{1}{\rho} \left(\vec{\nabla} . \vec{\omega} \right) \vec{u}_* .$$

Par passage aux composantes on obtient les *équations de Helmholtz* que nous établissons ainsi sous des hypothèses notablement plus larges que dans l'exposition classique. Les considérations cinématiques du paragraphe **5** *b* donnent à ce résultat une forme particulièrement frappante ; (3) équivaut en effet à

$$\varpi \left(\frac{1}{\rho} \vec{\omega} \right) = 0.$$

Le vecteur $\frac{1}{\rho} \vec{\omega}$ attaché à un élément matériel est lié au fluide [1].

---

[1] On trouve déjà dans : Vessiot, *Sur les transformations infinitésimales et la cinématique des milieux continus* (*Bull. Sc. math.*, t. 35, 1911, p. 233) l'énoncé suivant : *Le vecteur obtenu en divisant par la densité le vecteur tourbillon se comporte pendant le mouvement comme un élément linéaire du fluide. Voir* également : Kelvin, *On vortex motion* (*Mathematical and physical papers*, vol. 4).

Il est plus imagé d'ailleurs de considérer une portion infinitésimale de fluide : la masse *dm* étant invariante, on voit que la *somme tourbillonnaire élémentaire* $d\vec{K} = \vec{\omega} \, d\tau = \frac{1}{\rho} \vec{\omega} \, dm$ *est liée au fluide.*

C'est dire qu'on peut trouver dans le fluide une suite $M(\lambda)$ d'éléments matériel tels que

$$\frac{1}{\rho}\vec{\omega} = \frac{d\vec{M}}{d\lambda}.$$

Dès lors, si l'on a fait choix, au sein du fluide d'un réseau de *coordonnées matérielles a, b, c* (usuellement : les coordonnées des positions qu'occupaient les divers éléments à tel instant origine t_0), on aura

$$\frac{d\vec{M}}{d\lambda} = \frac{\partial\vec{M}}{\partial a}\frac{da}{d\lambda} + \frac{\partial\vec{M}}{\partial b}\frac{db}{d\lambda} + \frac{\partial\vec{M}}{\partial b}\frac{dc}{d\lambda},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\rho}\vec{\omega} = p_0\frac{\partial\vec{M}}{\partial a} + q_0\frac{\partial\vec{M}}{\partial b} + r_0\frac{\partial\vec{M}}{\partial c},$$

où p_0, q_0, r_0 sont des constantes vis-à-vis de t. Par passage aux composantes on reconnaît les *équations de Cauchy*.

Signalons ici que cette loi d'évolution du champ vectoriel tourbillon peut, dans le cas d'un fluide parfait incompressible, être mise en relation avec *le principe de moindre contrainte de Gauss*. Considérons une portion de milieu matériel incompressible à champ de vitesse $\vec{u}$ différentiable, limitée par une surface matérielle S. Soit défini dans D un champ vectoriel $\vec{v}$ tel que

$$\text{div}\,\vec{v} = 0 \tag{4}$$

et

$$\vec{\alpha}.\vec{v} = \varphi \qquad \text{(fonction donnée sur S)}. \tag{5}$$

De telles conditions ne sauraient demeurer satisfaites au cours du temps si le champ $\vec{v}$ est simplement transporté sans altération par le milieu, c'est-à-dire si la dérivée séquente $\frac{d\vec{v}}{dt}$ est nulle. Un ajustement est à chaque instant nécessaire; nous dirons que la répartition vectorielle $\vec{v}$ est transportée en *moindre contrainte* par le milieu si l'intégrale

$$\mathrm{A} = \iiint_{\mathrm{D}} \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2 d\tau$$

présente, à chaque instant, le minimum compatible avec les conditions (4) et (5). Or on peut montrer qu'alors le *champ* rot $\vec{v}$ *est lié au milieu*. Le cas de l'hydrodynamique rentre dans ce cadre, en prenant pour $\vec{v}$ le champ de vitesse $\vec{u}$ lui-même : A est à ce moment (au facteur ρ près) l'*énergie d'accélération* d'Appell, minima d'après le principe de Gauss.

d. Revenons à la cinématique pure. Si l'on admet l'existence du rotationnel de $\vec{\gamma}$ la relation (2) nous donne

$$\frac{d\vec{\mathrm{K}}}{dt} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathrm{D}} \left[\vec{\nabla} \wedge \vec{\gamma} + (\vec{\nabla}.\vec{\omega})\,\underset{*}{\vec{u}}\right] d\tau,$$

d'où, comme tout à l'heure,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\vec{\omega}\right) = \frac{1}{2\rho}\vec{\nabla} \wedge \vec{\gamma} + \frac{1}{\rho}(\vec{\nabla}.\vec{\omega})\,\underset{*}{\vec{u}}$$

ou

$$\mathcal{D}\left(\frac{1}{\rho}\vec{\omega}\right) = \frac{1}{2\rho}\vec{\nabla} \wedge \vec{\gamma}. \tag{6}$$

On met immédiatement en évidence à partir de là un résultat classique de Kelvin (¹) :

Pour que les lignes tourbillons conservent dans le temps leur individualité matérielle, il faut et suffit que $\vec{\omega}$ soit partout colinéaire au rotationnel de $\vec{\gamma}$.

En effet, la direction de $\vec{\omega}$ doit alors être une direction matérielle

(¹) *Cf.* Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, 3e édition, p. 599.

invariante, c'est-à-dire qu'il doit exister un scalaire k tel que $\frac{k}{\rho}\vec{\omega}$ soit lié au milieu :

$$\varpi\left(\frac{k}{\rho}\vec{\omega}\right)=\frac{dk}{dt}\,\frac{1}{\rho}\vec{\omega}+k\,\varpi\left(\frac{1}{\rho}\vec{\omega}\right)=0.$$

Il faut et suffit pour cela que

$$\frac{1}{\rho}\vec{\omega}\wedge\varpi\left(\frac{1}{\rho}\vec{\omega}\right)=0 \qquad \text{ou} \qquad \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{\gamma}\right)=0.$$

8. Interprétation tourbillonnaire des surfaces de glissement. — *a*. Supposons maintenant qu'il y ait dans le milieu une *surface de glissement;* nous entendons par là une surface séparant deux portions E' et E'' du milieu qui glissent l'une sur l'autre en conservant dans le temps leur individualité matérielle. En général cette surface Σ se meut dans l'espace. A chaque instant elle est le siège d'une discontinuité pour le champ des vitesses, mais on montre que cette discontinuité est purement tangentielle [1], c'est-à-dire que

$$\left(\vec{u}'-\vec{u}''\right).\vec{\alpha}=0.$$

Les discontinuités de vitesses rencontrées en hydrodynamique sont toujours de cette sorte.

---

(1) En effet, les frontières des portions E' et E'' sont deux surfaces matérielles Σ' et Σ'' qui glissent l'une sur l'autre. Faisons choix dans Σ' d'un réseau de *coordonnées matérielles* λ et μ, de sorte que, à chaque instant, la surface Σ admet la représentation paramétrique

$$\vec{M}=\vec{F}(\lambda,\mu,t), \qquad \vec{u}'=\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}.$$

Les différents éléments de Σ'', se déplaçant dans Σ', ont des coordonnées λ, μ fonctions de t

$$\vec{u}''=\frac{\partial\vec{F}}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial\mu}\frac{d\mu}{dt}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial t},$$

d'où

$$\vec{u}''-\vec{u}'=U\frac{\partial\vec{F}}{\partial\lambda}+V\frac{\partial\vec{F}}{\partial\mu},$$

vecteur qui est bien tangent à Σ.

Il est classique d'assimiler une telle surface à une répartition tourbillonnaire, chaque élément $d\sigma$ de la surface devant être considéré comme équivalent à une cellule tourbillonnaire spatiale

$$\vec{\omega}\, d\tau \sim \frac{1}{2}\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{u}' - \vec{u}''\right) d\sigma$$

$\big(\vec{\alpha}$ représente le vecteur unité normal à $d\sigma$, *orienté de la région* P″ *vers la région* P′$\big)$. On peut dire qu'il s'agit d'une *couche tourbillonnaire*, de densité superficielle

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{u}' - \vec{u}''\right).$$

Du point de vue strictement descriptif, cette équivalence apparaît intuitive si l'on envisage l'élément $d\sigma$ comme limite d'une couche d'épaisseur infiniment petite, dans laquelle $\vec{u}$ varierait linéairement.

De façon plus précise, l'assimilation est légitime pour toute transformation intégrale de la forme

$$\iiint_{\mathrm{D}} \left(2\,\vec{\mathrm{A}}.\vec{\omega} + \underset{\star}{\vec{\mathrm{A}}} \wedge \vec{\nabla}.\vec{u}\right) d\tau = \iint_{\mathrm{S}} \vec{\mathrm{A}}.\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma,$$

où $\vec{\mathrm{A}}$ représente un champ vectoriel quelconque, à dérivées partielles continues. En supposant en effet, pour fixer les idées, que la surface Σ partage le domaine D en deux portions D′ et D″ (soit Σ_0 la cloison commune) et la surface frontière S en deux portions S′ et S″, il suffit d'écrire

$$\iiint_{\mathrm{D}'} \left(2\,\vec{\mathrm{A}}.\vec{\omega} + \underset{\star}{\vec{\mathrm{A}}} \wedge \vec{\nabla}.\vec{u}\right) d\tau = \iint_{\mathrm{S}'} \vec{\mathrm{A}}.\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma - \iint_{\Sigma_0} \vec{\mathrm{A}}.\vec{\alpha} \wedge \vec{u}'\, d\sigma,$$

$$\iiint_{\mathrm{D}''} \left(2\,\vec{\mathrm{A}}.\vec{\omega} + \underset{\star}{\vec{\mathrm{A}}} \wedge \vec{\nabla}.\vec{u}\right) d\tau = \iint_{\mathrm{S}''} \vec{\mathrm{A}}.\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma + \iint_{\Sigma_0} \vec{\mathrm{A}}.\vec{\alpha} \wedge \vec{u}''\, d\sigma$$

et d'ajouter, pour obtenir

$$\iiint_{\mathrm{D}} \left(2\,\vec{\mathrm{A}}.\vec{\omega} + \underset{\star}{\vec{\mathrm{A}}} \wedge \vec{\nabla}.\vec{u}\right) d\tau + \iint_{\Sigma_0} \vec{\mathrm{A}}.\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{u}' - \vec{u}''\right) d\sigma = \iint_{\mathrm{S}} \vec{\mathrm{A}}.\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma.$$

On peut de même étendre la transformation stokienne

$$\iint_{\mathrm{S}} \left(2\varphi\,\vec{\omega} + \underset{\star}{\varphi}\,\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right).\vec{\alpha}'\, d\sigma = \int_{\mathrm{C}} \varphi\,\vec{u}.\overrightarrow{d\mathrm{M}}$$

(φ champ scalaire à dérivées partielles continues), au cas où la cloison S est coupée, selon une courbe Γ, par la surface de discontinuité Σ. On doit poser que chaque élément ds de Γ apporte à l'intégrale double la contribution d'un élément superficiel dégénéré

$$\vec{\omega}.\vec{\alpha}'\, d\sigma \sim \frac{1}{2}\left(\vec{u}' - \vec{u}''\right).\overrightarrow{dM}.$$

En d'autres termes, le flux de la couche tourbillonnaire Σ à travers un élément de surface $d\sigma$ ne dépend que de l'élément de courbe ds selon lequel Σ coupe $d\sigma$ et s'exprime par

$$\frac{1}{2}\left(\vec{u}' - \vec{u}''\right).\overrightarrow{dM} = \vec{\mu}.\vec{n}\, ds$$

($\vec{n}$ vecteur unité normal à l'élément linéaire ds, tangent à la couche Σ, dans le sens pris pour sens positif de flux). Cela est bien conforme au principe d'assimilation.

En résumé, on peut dire que l'assimilation de la discontinuité à une couche tourbillonnaire est légitime dans les considérations intégrales où la structure cinématique intervient *linéairement*. Ces considérations se prêtent d'ailleurs à un symbolisme uniforme, suggéré par la notion d'intégrale de Stieltjes, qui englobe lés répartitions tourbillonnaires spatiales et superficielles (¹). A toute portion infinitésimale d'espace, on associera l'élément vectoriel $\overrightarrow{dK}$, somme tourbillonnaire propre ou assimilée, et à toute portion infinitésimale de surface, l'élément scalaire $d\Phi$, flux de tourbillon propre ou assimilé. Et il vient en toute généralité

$$\iiint_D 2\,\vec{A}.\overrightarrow{dK} + \iiint_D \underset{\star}{\vec{A}} \wedge \vec{\nabla}.\vec{u}\, d\tau = \iint_S \vec{A}.\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma,$$

$$\iint_S 2\varphi\, d\Phi + \iint_S \underset{\star}{\varphi}\, \vec{\nabla} \wedge \vec{u}.\vec{\alpha}'\, d\sigma = \int_C \varphi\, \vec{u}.\overrightarrow{dM}.$$

Il importe toutefois de noter que les relations intégrales ainsi obtenues ne peuvent être utilisées qu'à titre instantané. On ne pourra

(¹) Et aussi les répartitions curvilignes, comme nous l'indiquons au paragraphe **12** *d*.

pas, comme dans le paragraphe précédent, leur faire subir de *dérivation séquente,* parce qu'un domaine d'intégration ainsi traversé par une surface de glissement se trouve scindé lorsque le milieu évolue (*cf.* § **21** *a*).

b. Passons maintenant à un autre type de transformations intégrales, non linéaires par rapport à la structure cinématique, et vis-à-vis desquelles pourtant l'assimilation tourbillonnaire de la discontinuité reste légitime.

L'intégrale, étendue à la surface fermée S,

$$\iint_{S}\left[\frac{1}{2}u^{2}\vec{\alpha}-\left(\vec{u}.\vec{\alpha}\right)\vec{u}\right]d\sigma$$

se transforme en une intégrale étendue au domaine intérieur D, portant sur la quantité

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\underset{*}{u^{2}}\vec{\nabla}-\left(\underset{*}{\vec{u}}.\vec{\nabla}\right)\underset{*}{\vec{u}}&=\left(\vec{u}.\underset{*}{\vec{u}}\right)\vec{\nabla}-\left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)\underset{*}{\vec{u}}-\left(\underset{*}{\vec{u}}.\vec{\nabla}\right)\vec{u}\\&=\vec{u}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\underset{*}{\vec{u}}\right)-\left(\underset{*}{\vec{u}}.\vec{\nabla}\right)\vec{u},\end{aligned}$$

d'où

$$\iint_{S}\left[\frac{1}{2}u^{2}\vec{\alpha}-\left(\vec{u}.\vec{\alpha}\right)\vec{u}\right]d\sigma=\iiint_{D}\left(2\,\vec{u}\wedge\vec{\omega}-\theta\,\vec{u}\right)d\tau,$$

θ désignant la dilatation $\vec{\nabla}.\underset{*}{\vec{u}}$.

Cette relation a d'ailleurs une portée *torsorielle,* c'est-à-dire qu'on a pour les moments

$$\begin{aligned}&\iint_{S}\overrightarrow{OM}\wedge\left[\frac{1}{2}u^{2}\vec{\alpha}-\left(\vec{u}.\vec{\alpha}\right)\vec{u}\right]d\sigma\\&=\iiint_{D}\left\{\frac{1}{2}u^{2}\,\underset{*}{\overrightarrow{OM}}\wedge\vec{\nabla}-\left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)\underset{*}{\overrightarrow{OM}}\wedge\vec{u}+\overrightarrow{OM}\wedge\left[\frac{1}{2}\underset{*}{u^{2}}\vec{\nabla}-\left(\underset{*}{\vec{u}}.\vec{\nabla}\right)\underset{*}{\vec{u}}\right]\right\}d\tau\\&=\iiint_{D}\overrightarrow{OM}\wedge\left(2\,\vec{u}\wedge\vec{\omega}-\theta\,\vec{u}\right)d\tau.\end{aligned}$$

Supposons alors le domaine D partagé par une surface de glissement Σ; en écrivant séparément la relation pour les deux parties et en ajoutant, on obtient

$$\begin{aligned}\iint_S &\left[\frac{1}{2}u^2\vec{\alpha} - \left(\vec{u}.\vec{\alpha}\right)\vec{u}\right]d\sigma \\ &= \iiint_D \left(2\vec{u}\wedge\vec{\omega} - \theta\vec{u}\right)d\tau \\ &\quad + \iint_\Sigma \left[\frac{1}{2}u'^2\vec{\alpha} - \left(\vec{u'}.\vec{\alpha}\right)\vec{u'} - \frac{1}{2}u''^2\vec{\alpha} + \left(\vec{u''}.\vec{\alpha}\right)\vec{u''}\right]d\sigma.\end{aligned}$$

Or, eu égard à la condition

$$\vec{u'}.\vec{\alpha} = \vec{u''}.\vec{\alpha},$$

on écrit l'élément différentiel de la dernière intégrale

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&\left[\left(\vec{u'}-\vec{u''}\right).\left(\vec{u'}+\vec{u''}\right)\right]\vec{\alpha}\,d\sigma - \frac{1}{2}\left[\left(\vec{u'}+\vec{u''}\right).\vec{\alpha}\right]\left(\vec{u'}-\vec{u''}\right)d\sigma \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{u'}+\vec{u''}\right)\wedge\left[\vec{\alpha}\wedge\left(\vec{u'}-\vec{u''}\right)\right]d\sigma \\ &= \left(\vec{u'}+\vec{u''}\right)\wedge\vec{\mu}\,d\sigma = 2\,\vec{u}^{\star}\wedge d\vec{K},\end{aligned}$$

en introduisant la *vitesse médiane*

$$\vec{u}^{\star} = \frac{1}{2}\left(\vec{u'}+\vec{u''}\right).$$

On devra considérer cette valeur $\vec{u}^{\star}$ comme définissant la vitesse dans la surface Σ elle-même, conception qui va s'imposer dans la suite avec une force particulière. La relation des moments s'étend de la même façon.

Signalons encore que les relations intégrales en question, *quadratiques* par rapport à la structure cinématique, engendrent des *relations polaires*. En prenant en effet pour $\vec{u}$ une expression de la forme

$$\lambda\,\vec{u}_1 + \mu\,\vec{u}_2,$$

où $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux champs vectoriels, λ et μ deux paramètres, on obtient, par identification des termes rectangles en λ, μ,

$$\iint_S \left[(\vec{u}_1 . \vec{u}_2)\vec{\alpha} - (\vec{u}_1 . \vec{\alpha})\vec{u}_2 - (\vec{u}_2 . \vec{\alpha})\vec{u}_1 \right] d\sigma$$
$$= \iiint_D \left[2\vec{u}_1 \wedge \vec{\omega}_2 + 2\vec{u}_2 \wedge \vec{\omega}_1 - \theta_1 \vec{u}_2 - \theta_2 \vec{u}_1 \right] d\tau$$

et résultat analogue pour les moments. Nous verrons, au paragraphe **11** *a*, cette relation polaire jouer un rôle assez semblable à celui des *relations de réciprocité* dans les théories harmoniques.

c. Abordons maintenant, de ce même point de vue de l'assimilation tourbillonnaire, la *dynamique* d'une surface de glissement dans un *fluide parfait helmholtzien* (1).

Cette hypothèse implique l'existence d'une relation entre p et ρ, et par suite, une expression de la fonction $P(p)$ valable de part et d'autre de Σ. La pression p doit rester continue à la traversée de Σ, donc aussi la fonction P. Il en résulte que la composante tangentielle de $\underset{*}{\nabla P}$ doit être la même de part et d'autre, d'où finalement

$$\vec{\alpha} \wedge (\vec{\gamma}' - \vec{\gamma}'') = 0.$$

Tel est notre argument dynamique.

Outre les couches frontières Σ' et Σ'' nous imaginons une *couche médiane* Σ^*, qui glisse également sur elles et caractérisée par la vitesse (2)

$$\vec{u}^* = \frac{1}{2}(\vec{u}' + \vec{u}'').$$

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. **228**, 1949, p. 1923.

(2) La possibilité cinématique d'une telle couche se montre immédiatement en reprenant les notations de la page 22, note (1). En effet, le système d'équations différentielles

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} U(\lambda, \mu, t), \qquad \frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{2} V(\lambda, \mu, t)$$

définit bien le mouvement d'une couche matérielle glissant sur Σ'. Or la vitesse d'un élément de cette couche est

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{1}{2} U \frac{\partial \vec{F}}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} V \frac{\partial \vec{F}}{\partial \mu} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \frac{1}{2}(\vec{u}'' - \vec{u}') + \vec{u}' = \frac{1}{2}(\vec{u}' + \vec{u}'').$$

Nous considérons alors un élément tourbillonnaire superficiel

$$\vec{K} = \vec{\mu}\, d\sigma = \frac{1}{2}\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{u}' - \vec{u}''\right) d\sigma$$

dont nous allons étudier l'évolution, en supposant l'élément de surface *$d\sigma$ entraîné dans le mouvement de la couche médiane*. Cela, en vue d'une analogie avec les équations de Helmholtz, lesquelles définissent l'évolution d'une cellule tourbillonnaire

$$\frac{1}{\rho}\vec{\omega}\, dm = \vec{\omega}\, d\tau,$$

lorsque l'élément de volume $d\tau$ est entraîné dans le mouvement du fluide.

En posant, pour abréger,

$$\vec{\alpha}\, d\sigma = \vec{\sigma}, \qquad \frac{1}{2}\left(\vec{u}' - \vec{u}''\right) = \vec{\delta},$$

nous écrivons [1]

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \wedge \vec{\delta} + \vec{\sigma} \wedge \frac{d\vec{\delta}}{dt},$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}\right) \wedge \vec{u}^{\star}_{\star},$$

$$(1) \qquad \begin{aligned} 2\frac{d\vec{\delta}}{dt} = \frac{d\vec{u}'}{dt} - \frac{d\vec{u}''}{dt} &= \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \left(\vec{u}^{\star}.\vec{\nabla}\right)\vec{u}'_{\star} - \frac{\partial \vec{u}''}{\partial t} - \left(\vec{u}^{\star}.\vec{\nabla}\right)\vec{u}''_{\star} \\ &= \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \left(\vec{u}'.\vec{\nabla}\right)\vec{u}'_{\star} - \frac{\partial \vec{u}''}{\partial t} - \left(\vec{u}''.\vec{\nabla}\right)\vec{u}''_{\star} \\ &\quad + \left[\left(\vec{u}^{\star} - \vec{u}'\right).\vec{\nabla}\right]\vec{u}'_{\star} + \left[\left(\vec{u}'' - \vec{u}^{\star}\right).\vec{\nabla}\right]\vec{u}''_{\star} \\ &= \vec{\gamma}' - \vec{\gamma}'' - 2\left(\vec{\delta}.\vec{\nabla}\right)\vec{u}^{\star}_{\star}, \end{aligned}$$

[1] L'équation (1) invoque des dérivées partielles de $\vec{u}^{\star}$ par rapport aux trois coordonnées; la suite des calculs montre ce que nous entendons par là : $\vec{u}'$ possède des dérivées partielles continues dans E′, définies jusque sur la surface Σ, de même que les dérivées partielles de $\vec{u}''$ sont définies dans E″ et jusque sur Σ. Ce sont alors les demi-sommes qui constituent les dérivées partielles de $\vec{u}^{\star}$. Mais

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{K}}{dt} &= \left[\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}\right) \wedge \vec{\underset{*}{u^*}}\right] \wedge \vec{\delta} + \left(\vec{\delta}.\vec{\nabla}\right) \vec{\underset{*}{u^*}} \wedge \vec{\sigma} \\ &= \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}.\vec{\delta}\right) \vec{\underset{*}{u^*}} - \left(\vec{\delta}.\vec{\underset{*}{u^*}}\right) \vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma} + \left(\vec{\delta}.\vec{\nabla}\right) \vec{\underset{*}{u^*}} \wedge \vec{\sigma} \\ &= \left(\vec{\nabla}.\vec{K}\right) \vec{\underset{*}{u^*}} + \left[\vec{\delta} \wedge \left(\vec{\underset{*}{u^*}} \wedge \vec{\nabla}\right)\right] \wedge \vec{\sigma}.\end{aligned}$$

D'ailleurs

$$\left[\vec{\delta} \wedge \left(\vec{\underset{*}{u^*}} \wedge \vec{\nabla}\right)\right] \wedge \vec{\sigma} = \left(\vec{\sigma}.\vec{\delta}\right)\left(\vec{\underset{*}{u^*}} \wedge \vec{\nabla}\right) - \left(\vec{\sigma}.\vec{\underset{*}{u^*}} \wedge \vec{\nabla}\right)\vec{\delta} = 2\left(\vec{\sigma}.\vec{\omega}^*\right)\vec{\delta}.$$

puisque

$$\vec{\sigma}.\vec{\delta} = 0$$

et que

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\underset{*}{u^*}} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\underset{*}{u'}} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\underset{*}{u''}} = \vec{\omega}' + \vec{\omega}'' = 2\,\vec{\omega}^*,$$

$\vec{\omega}^*$ étant ce qu'on peut appeler le *tourbillon de la couche médiane*. Et l'on écrit alors

$$\left(\vec{\sigma}.\vec{\omega}^*\right)\vec{\delta} = \left(\vec{\alpha}.\vec{\omega}^*\right)\vec{\delta}\,d\sigma = \left(\vec{\alpha}.\vec{\omega}^*\right)\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\delta}\right)d\sigma = \vec{\omega}_n^* \wedge \vec{K},$$

car

$$\left(\vec{\alpha}.\vec{\omega}^*\right)\vec{\alpha} = \vec{\omega}_n^*$$

représente la *composante normale* de $\vec{\omega}^*$. Donc, en définitive,

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \left(\vec{\nabla}.\vec{K}\right)\vec{\underset{*}{u^*}} + 2\,\vec{\omega}_n^* \wedge \vec{K}$$

---

il importe de noter que, même en l'absence de cet artifice, et bien que $\vec{u}^*$ ne soit défini que dans Σ, on peut donner un sens à l'expression

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}\right) \wedge \vec{u}^* = -\left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}\right) \wedge \vec{u}^*\,d\sigma,$$

parce que l'opérateur $\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}$ est, comme nous l'avons fait remarquer au chapitre I, *purement superficiel*.

ou, en introduisant une *dérivée cinématique* relativement à la couche médiane,

$$\mathcal{D}.\vec{K} = 2\,\vec{\omega}_n^\star \wedge \vec{K}.$$

Ainsi, lorsque $\vec{\omega}_n^\star = 0$, *soit usuellement lorsque* $\vec{\omega}$ *est tangentiel ou nul de part et d'autre de* Σ, *le vecteur élémentaire* $\vec{K}$ *est lié à la couche médiane.*

Alors, mais dans ce cas seulement, où $\vec{\omega}_n^\star$ est nul [1], apparaît une analogie profonde entre la dynamique de la discontinuité et la théorie classique des structures tourbillonnaires helmholtziennes de l'espace.

On remarque d'abord que les *lignes tourbillon* de Σ, c'est-à-dire les lignes intégrales du champ $\vec{\mu}$ (ou lignes orthogonales au vecteur de discontinuité $\vec{\delta}$), *peuvent être considérées comme matériellement liées à la couche médiane*, puisque, en chaque élément de cette couche, la direction de $\vec{\mu}$ est aussi celle d'un vecteur $\vec{K}$ lié à la couche.

La portion de couche médiane comprise entre deux de ces lignes constitue une *bande tourbillon*, dont les propriétés s'assimilent à celles des tubes tourbillons de la théorie classique : le flux de la bande à travers une surface de section s'exprime, selon le principe du paragraphe **8** *a*, par une intégrale curviligne étendue à la courbe de section AB,

$$\Phi = \int_{AB} \vec{\mu}.\vec{n}\,ds = \pm\frac{1}{2}\int_{AB}\left(\vec{u}' - \vec{u}''\right).\overrightarrow{dM}$$

et cette valeur reste constante dans le temps lorsque l'arc AB *est entraîné dans le mouvement de la couche médiane.* Il suffit pour le voir de constater l'invariance de

$$\frac{1}{2}\left(\vec{u}' - \vec{u}''\right).\overrightarrow{dM} = \pm\,\vec{\alpha} \wedge \vec{\mu}.\overrightarrow{dM},$$

---

[1] Condition qui peut s'interpréter en disant que $\vec{u}^\star.\overrightarrow{dM}$ est dans Σ une différentielle exacte.

où $d\vec{M}$ est un vecteur lié à la couche. Or, si l'on introduit un élément de surface $d\sigma$ avoisinant M, le scalaire

$$\left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\mu} . d\vec{M}\right) d\sigma = \vec{\alpha} . \vec{K} \wedge d\vec{M}$$

représente, d'après ce qui précède, l'aire d'un parallélogramme construit sur deux vecteurs liés, et évolue donc selon la même loi de dilatation que l'élément de surface $d\sigma$ lui-même, d'où l'invariance annoncée.

Il est à noter que le flux Φ de la bande n'est indépendant du choix de la section que si

$$\left(\vec{\omega}' - \vec{\omega}''\right) . \vec{\alpha} = 0,$$

c'est-à-dire, d'après l'hypothèse antérieure, si

$$\vec{\omega}' . \vec{\alpha} = \vec{\omega}'' . \vec{\alpha} = 0.$$

Dans ce cas (¹), on voit que le vecteur de discontinuité

$$2\vec{\delta} = \vec{u}' - \vec{u}''$$

est tel que

$$\left(\vec{u}' - \vec{u}''\right) . d\vec{M}$$

soit dans Σ la différentielle exacte d'une fonction φ, que nous appellerons le *potentiel de discontinuité*. Il résulte alors de ce qui précède que *le potentiel de discontinuité est défini dans la conche médiane d'une manière indépendante du temps*.

9. Cas bidimensionnel. — *a*. Les considérations des paragraphes préeédents se transposent avec quelques modifications pour le cas d'un milieu évoluant dans le plan. La signification usuelle de ce concept est de décrire un mouvement tridimensionnel dans lequel le champ des vitesses, partout perpendiculaire à l'axe des z, est indé-

(¹) Cela revient à dire qu'il n'y a pas de *fuites tourbillonnaires* entre Σ et l'espace ambiant.

pendant de la coordonnée z. Le vecteur tourbillon est alors partout colinéaire au vecteur unitaire de cet axe :

$$\vec{\omega} = \zeta \vec{z},$$

de sorte que la structure tourbillonnaire est décrite par la donnée du champ scalaire ζ dans le plan.

On note d'abord une différence essentielle avec le cas de l'espace : l'intégrale de ζ, pour un noyau tourbillonnaire isolé du plan, n'est pas nécessairement nulle.

Soit D une aire du plan, limitée par une courbe fermée C, qu'on oriente consécutivement au sens de $\vec{z}$, de manière à permettre l'application du théorème de Stokes :

$$\begin{aligned} K' = \iint_D \zeta\, d\sigma &= \frac{1}{2} \iint_D \vec{z} \wedge \vec{\nabla} . \vec{\underset{*}{u}}\, d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \oint_C \vec{u} . \overrightarrow{dM}. \end{aligned}$$

Dérivons en supposant que l'aire D conserve son individualité matérielle :

$$\frac{dK'}{dt} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{\gamma} . \overrightarrow{dM} + \frac{1}{2} \oint_C \left(\vec{u} . \vec{\underset{*}{u}} \right) \left(\vec{\nabla}_{*} . \overrightarrow{dM} \right);$$

la seconde intégrale est nulle, puisqu'elle s'écrit

$$\frac{1}{4} \oint \underset{*}{u^2} \vec{\nabla} . \overrightarrow{dM}.$$

b. On en tire une première conclusion : si le milieu est *helmholtzien*, non pas forcément dans toute l'aire D, mais seulement *au voisinage de la frontière* C, $\vec{\gamma}$ se trouve être tout le long de C le gradient d'une fonction uniforme, d'où

$$\frac{dK'}{dt} = 0.$$

La somme tourbillonnaire du milieu intérieur reste constante [1] :

[1] Ce qui revient évidemment au théorème d'invariance de la circulation de Lagrange-Kelvin.

le fluide helmholtzien apparaît ainsi comme *non conducteur* du tourbillon ζ.

Du point de vue local on rejoint ce résultat classique : si le fluide est helmholtzien au voisinage d'un élément, la dérivée séquente $\frac{d}{dt}\frac{\zeta}{\rho}$ y est nulle. A l'élément considéré s'attache une valeur de $\frac{\zeta}{\rho}$ constante dans le temps.

c. Considérons maintenant un milieu quelconque emplissant tout le plan, dans lequel les contraintes intérieures sont décrites par une pression hydrostatique p, superposée à un tenseur d'efforts T_{ik}. On pose

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \varphi_i.$$

Bornons-nous, pour simplifier, au cas d'un milieu incompressible; parmi les forces qui sont appliquées dans la masse, on sépare celles qui dérivent d'une fonction de forces U, des autres, soit $\vec{F}\,d\sigma$ pour un élément de surface (et pour une tranche d'épaisseur unité). L'équation de la dynamique s'écrit alors

$$\rho\vec{\gamma} = \vec{\nabla}(U - p) + \vec{F} + \vec{\varphi}.$$

D'où

$$(1) \qquad \frac{dK'}{dt} = \frac{1}{2\rho}\oint(\vec{F} + \vec{\varphi}).d\vec{M}.$$

Si $r^2\zeta$ s'annule régulièrement à l'infini, l'intégrale K' converge sur le plan entier. Et si l'on suppose l'annulation uniforme de rF et $r\varphi$, il reste (¹)

$$\frac{dK'}{dt} = 0.$$

(¹) De façon plus précise, on supposera que les majorations impliquées par les annulations en question sont uniformes non seulement vis-à-vis de r, mais aussi vis-à-vis de t. A cette condition, en étendant K' à un cercle de rayon r, on pourra montrer

$$\lim_{r\to\infty}\frac{dK'}{dt} = \frac{d}{dt}\lim_{r\to\infty} K'.$$

La démonstration est d'ailleurs facilitée par une transformation du type de celles du paragraphe 18 *b*, ramenant à un domaine fixe.

La somme tourbillonnaire du milieu reste alors constante. En particulier elle est nulle si le milieu est parti du repos.

d. Les considérations du paragraphe **8** se transposent également sans difficulté dans le cas bidimensionnel. Une *ligne de glissement* peut être assimilée à une répartition tourbillonnaire, chaque élément $d\overrightarrow{\mathrm{M}}$ de la ligne étant équivalent à une cellule tourbillonnaire superficielle

$$d\mathrm{K}' = \frac{1}{2}\left(\vec{u}' - \vec{u}''\right).d\mathrm{M}.$$

Pour l'exactitude des signes on pourra distinguer le *côté intérieur* et le *côté extérieur* de l'élément vectoriel $d\overrightarrow{\mathrm{M}}$, selon la même règle que pour le théorème de Stokes $\left(\text{le côté intérieur est indiqué par l'orientation du vecteur } \vec{z}\wedge d\overrightarrow{\mathrm{M}}\right)$: les régions discriminées correspondent respectivement à l'intérieur et à l'extérieur d'une courbe fermée dont $d\overrightarrow{\mathrm{M}}$ serait un élément dirigé selon le sens trigonométrique. *$\vec{u}'$ doit alors être la vitesse du côté extérieur de $d\overrightarrow{\mathrm{M}}$, $\vec{u}''$ la vitesse du côté intérieur.*

Comme dans le cas de l'espace, cette interprétation tourbillonnaire sauvegarde la validité des relations intégrales linéaires par rapport à $\vec{u}$. Il en va de même pour les relations quadratiques

$$\oint_{\mathrm{C}}\left[\left(\vec{u}.d\overrightarrow{\mathrm{M}}\right)\vec{u} - \frac{u^2}{2}d\overrightarrow{\mathrm{M}}\right] = \iint_{\mathrm{D}}\left[2\zeta\vec{u} - \theta\vec{z}\wedge\vec{u}\right]d\sigma,$$

$$\oint_{\mathrm{C}}\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\left[\left(\vec{u}.d\overrightarrow{\mathrm{M}}\right)\vec{u} - \frac{u^2}{2}d\overrightarrow{\mathrm{M}}\right] = \iint_{\mathrm{D}}\mathrm{OM}.\left[2\zeta\vec{u} - \theta\vec{z}\wedge\vec{u}\right]d\sigma,$$

à condition de prendre comme vitesse dans la couche de glissement la *vitesse médiane*

$$\vec{u}^{*} = \frac{1}{2}\left(\vec{u}' + \vec{u}''\right).$$

C'est, là encore, la notion de couche médiane qui permet d'adapter au cas d'une ligne de glissement la propriété de conservation du tourbillon dans un fluide helmholtzien : étant donnée une ligne de glissement dans un tel fluide, la quantité scalaire

$$2\,dK' = (\vec{u}' - \vec{u}'').\,\overrightarrow{dM}$$

est invariante dans le temps si l'élément vectoriel $\overrightarrow{dM}$ *est lié à la couche médiane*. Il en résulte notamment que le *potentiel de discontinuité* est invariant par rapport à la couche médiane.

10. Milieu non helmholtzien. — *a*. Envisageons d'abord le cas bidimensionnel. Nous venons de voir au paragraphe **9** *b* que la somme tourbillonnaire K' d'un îlot non helmholtzien se conserve. On peut donc dire que les actions extérieures sans potentiel et les tensions non normales, qui se manifestent dans un milieu non helmholtzien, ne créent ni ne détruisent de *quantité tourbillonnaire*, mais en produisent seulement le déplacement.

Précisons cette notion dans le cas d'un *fluide visqueux* incompressible, régi par les équations de Navier

$$\rho\vec{\gamma} = \vec{\nabla}(U - p) + \vec{F} + \mu\Delta\vec{u}.$$

La relation (1) du paragraphe **9** *c* engendre alors l'équation locale

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\mu}{\rho}\Delta\zeta + \frac{1}{2\rho}\vec{z}\wedge\vec{\nabla}.\vec{F}$$

(en postulant l'existence des dérivées invoquées). Dans des régions où $\vec{F}$ est nul on retrouve, comme il est bien connu, une *loi de diffusion* identique à celle de la chaleur, le rôle de coefficient de conductibilité étant tenu par la *viscosité cinématique*

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Nous posons ainsi qu'un élément de courbe matérielle *ds* (soit $\vec{\alpha}$ un vecteur unité normal) est traversé par un flux de quantité tourbillonnaire, à raison d'un *débit*

$$df = -\nu\frac{d\zeta}{d\alpha}ds = -\nu\vec{\alpha}.\vec{\nabla}\zeta\,ds.$$

Les quantités tourbillonnaires tendent donc, au sein du fluide, à se déplacer dans le sens de décroissance de ζ.

La présence de forces extérieures ne dérivant pas d'un potentiel contrarie cette évolution, on a cette fois

$$df = \left(\vec{z} \wedge \vec{F} - \nu \vec{\nabla}\zeta\right) . \vec{\alpha}\, ds,$$

ce qui superpose à la tendance précédente celle d'un *déplacement des tourbillons dans la direction perpendiculaire à la force* (¹).

Les forces sans potentiel ont une action motrice sur la structure tourbillonnaire, au sein du fluide : elles engendrent en quelque sorte une *polarisation tourbillonnaire*. C'est une idée qui sera précisée au chapitre II.

b. Soit alors un fluide visqueux bidimensionnel illimité, initialement au repos. Les forces extérieures qui viennent le mettre en mouvement (²) produisent un déplacement tourbillonnaire, une polarisation, qui se traduit par l'apparition de régions où ζ est positif compensant des régions où ζ est négatif. Ce déséquilibre se diffuse alors au sein du fluide, tout comme un déséquilibre thermique. Le fluide est en mouvement, mais se confond asymptotiquement à l'infini avec un milieu au repos. On conçoit donc que l'allure à l'infini de ce phénomène de diffusion soit la même que pour un milieu entièrement au repos, ce qui conduit à une structure asymptotique de la forme

$$\zeta = \frac{d}{d\vec{A}}\left(\frac{1}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right) = \frac{1}{2\nu t^2}\left(\vec{A}.\overrightarrow{OM}\right) e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.$$

Une étude rigoureuse de cette question délicate sortirait de notre programme. Retenons seulement que dans un fluide visqueux illimité, tiré du repos par des actions localisées à distance finie, ζ, à tout

---

(¹) On se rappellera cependant, pour éviter toute illusion à ce sujet, que le champ des « forces ne dérivant pas d'un potentiel » n'est défini qu'à un gradient près.

(²) Des solides immergés peuvent être considérés comme des portions où la conductibilité ν est infinie, ce qui conserve qualitivement nos conclusions.

instant, s'annule à l'infini comme une fonction exponentielle de r^2. Il en résulte, en particulier, que $r^m\zeta$ s'annule à l'infini quel que soit l'exposant positif m.

c. Ces idées se retrouvent dans le cas tridimensionnel. Pour un fluide visqueux, régi par les équations de Navier, on obtient l'équation locale [1]

$$\mathcal{D}\vec{\omega} = \nu\,\Delta\vec{\omega} + \frac{1}{2\rho}\vec{\nabla}\wedge\vec{F},$$

formellement analogue, lorsque $\vec{F}$ est nul, à l'équation de diffusion de la chaleur, mais d'une exploitation moins aisée, parce que la quantité $\vec{\omega}$ sujette à la diffusion est ici vectorielle et que sa dérivée relativement au temps est prise *par un opérateur lié au fluide*. Il semble toutefois que l'on puisse en tirer des conclusions analogues aux précédentes en se référant à une configuration initiale du fluide. La diffusion est alors définie par une équation de la forme

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = \nu\,\mathrm{L}(\vec{\omega}),$$

où L est un opérateur différentiel du second ordre (dépendant du temps), de type elliptique, qui, à l'infini, se réduit asymptotiquement au laplacien.

Plutôt que d'envisager la diffusion d'une quantité vectorielle ainsi associée à chaque point du fluide, il paraît plus fructueux d'imaginer la structure tourbillonnaire décomposée en filets infinitésimaux, qui se déplacent au sein du fluide en conservant leur intensité. On constate alors une diffusion, traduite localement dans chaque section droite par une loi analogue à la loi bidimensionnelle. Il s'y superpose une tendance motrice dans la direction du vecteur $\vec{\omega}\wedge\vec{F}$. La *polarisation* qui en résulte sera étudiée dans les chapitres III et IV.

---

(1) Cf. *Sur la notion de système de référence fluide* (*Congrès national de l'Aviation française de* 1945, rapport n° 368).

11. Structures asymptotiques. — *a*. Nous nous bornons encore au cas d'un milieu *incompressible*, dont le champ de vitesses $\vec{u}$ est pourvu de dérivées partielles continues par rapport aux variables d'espace. Soit un tel milieu emplissant tout l'espace; supposons que $\vec{u}$ *s'annule uniformément à l'infini*.

Appliquons la relation polaire du paragraphe **8** *b* en accouplant le champ vectoriel $\vec{u}(\mathrm{M})$ avec le champ newtonien

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \frac{1}{l^3}\overrightarrow{\mathrm{PM}} \qquad (l = \mathrm{PM}).$$

On remarque

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0, \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{v} = 0,$$
$$\vec{\nabla}.\vec{u} = 0, \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{u} = 2\vec{\omega}.$$

On prend comme domaine d'intégration le domaine compris entre une sphère Σ de centre P, de rayon ε qui tendra vers zéro, et une sphère concentrique Σ' dont le rayon R tendra vers l'infini. Il vient alors

$$\iiint_{\mathrm{D}} 2\vec{v}\wedge\vec{\omega}\,d\tau = \iint_{\Sigma+\Sigma'} \left[(\vec{u}.\vec{v})\vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\vec{v} - (\vec{v}.\vec{\alpha})\vec{u}\right]d\sigma.$$

Or sur Σ'

$$\vec{v} = \frac{1}{\mathrm{R}^2}\vec{\alpha},$$

de sorte que la contribution de Σ' se réduit à

$$-\frac{1}{\mathrm{R}^2}\iint_{\Sigma'}\vec{u}\,d\sigma,$$

qui tend vers zéro lorsque R augmente indéfiniment, d'après l'hypothèse d'annulation uniforme de u. D'autre part, sur Σ,

$$\vec{v} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\vec{\alpha}$$

et la contribution de Σ se réduit à

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Sigma}\vec{u}\,d\sigma$$

qui tend vers $4\pi\vec{u}(\mathrm{P})$.

En supposant alors l'annulation régulière de $r\vec{\omega}$ à l'infini, pour assurer la convergence de l'intégrale triple sur l'espace entier, on obtient à la limite

$$\vec{u}(P) = \frac{1}{2\pi}\iiint_E \frac{1}{l^3}\vec{\omega}(M) \wedge \overrightarrow{MP}\, d\tau_M.$$

On reconnaît la formule dite de Biot et Savart, que nous établissons ainsi d'une manière plus directe et plus générale que dans l'exposition classique (¹). En vertu des considérations du paragraphe **8** *a elle est compatible avec l'interprétation tourbillonnaire des surfaces de discontinuité.*

b. Supposons maintenant en outre l'annulation régulière de $r^3\vec{\omega}$ à l'infini. Nous allons en conclure, ce qui servira au chapitre III, que $r^3\vec{u}$ est borné à l'infini.

P étant supposé à la distance très grande r du point de référence O, appelons Δ l'intérieur de la sphère de centre P et de rayon $\frac{r}{2}$. La formule de Biot et Savart donne

$$\vec{u}(P) = \frac{1}{2\pi}\iiint_\Delta \frac{1}{l^3}\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MP}\, d\tau_M + \frac{1}{2\pi}\iiint_{E-\Delta} \frac{1}{l^3}\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MP}\, d\tau_M.$$

Lorsque M est dans Δ, on a évidemment

$$OM > \frac{r}{2},$$

donc d'après l'hypothèse, il existe un nombre B $\left(\text{tendant d'ailleurs vers zéro avec } \frac{1}{r}\right)$ tel que

$$\left|\vec{\omega}(M)\right| < \frac{B}{r^3}.$$

(¹) Si inversement on part d'un champ $\vec{\omega}$, *continu*, donné *a priori*, le champ $\vec{u}$ défini par l'intégrale de Biot et Savart peut n'être pas dérivable. (Pour établir l'existence des dérivées on supposera que $\vec{\omega}$ est lui-même dérivable ou, plus généralement, qu'il vérifie en chaque point une condition de Hölder). Mais

Alors

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iiint_{\Delta}\frac{1}{l^3}\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{\mathrm{MP}}\,d\tau_{\mathrm{M}}\right| < \frac{1}{2\pi}\iiint_{\Delta}\left|\frac{1}{l^3}\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|d\tau_{\mathrm{M}}$$

$$< \frac{1}{2\pi}\iiint_{\Delta}\left|\vec{\omega}\right|\frac{1}{l^2}\,d\tau_{\mathrm{M}}$$

$$< \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{B}}{r^3}\iiint_{\Delta}\frac{d\tau_{\mathrm{M}}}{l^2}, \qquad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{B}}{r^2}.$$

D'autre part

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iiint_{\mathrm{E}-\Delta}\frac{1}{l^3}\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{\mathrm{MP}}\,d\tau_{\mathrm{M}}\right| < \frac{1}{2\pi}\iiint_{\mathrm{E}-\Delta}\frac{1}{l^2}\left|\vec{\omega}\right|d\tau_{\mathrm{M}}$$

$$< \frac{1}{2\pi}\frac{4}{r^2}\iiint_{\mathrm{E}}\left|\vec{\omega}\right|d\tau_{\mathrm{M}}, \qquad \text{soit} \quad \frac{2\Omega}{\pi r^2},$$

en posant

$$\Omega = \iiint_{\mathrm{E}}\left|\vec{\omega}\right|d\tau,$$

intégrale qui converge d'après l'hypothèse.

On obtient donc effectivement

$$r^2\left|\vec{u}\right| < \mathrm{B} + \frac{2\Omega}{\pi}.$$

c. En vue de préciser davantage la structure à l'infini de $\vec{u}$, supposons maintenant que $r^5\vec{\omega}$ s'annule régulièrement à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif ε tel que $r^{5+\varepsilon}\left|\vec{\omega}\right|$ possède une borne A.

P étant encore à la distance très grande r de l'origine O, nous introduisons une sphère Δ, de centre P, de rayon $\frac{r}{2}$, et une sphère Δ' de centre O, de rayon $\rho < \frac{r}{2}$ à préciser ultérieurement. Soient respectivement $\vec{u}'$, $\vec{u}''$, $\vec{u}'''$ les contributions des domaines Δ, $\mathrm{E}-\Delta-\Delta'$ et Δ' dans l'intégrale de Biot et Savart.

---

sous la seule hypothèse de continuité de $\vec{\omega}$, on montre facilement que $\vec{u}$ possède du moins un *rotationnel au sens large* égal à $2\vec{\omega}$.

Nous avons comme tout à l'heure :

$$\left|\vec{u}'\right| < \frac{1}{2\pi}\iiint_{\Delta}\left|\vec{\omega}\right|\frac{1}{l^2}\,d\tau_{\mathrm{M}}$$

$$< \frac{1}{2\pi}\frac{2^{5+\varepsilon}}{r^{5+\varepsilon}}\mathrm{A}\iiint_{\Delta}\frac{d\tau_{\mathrm{M}}}{l^3}, \qquad \text{soit } 32\,\mathrm{A}\,\frac{2^{\varepsilon}}{r^{4+\varepsilon}}.$$

En outre

$$\left|\vec{u}''\right| < \frac{1}{2\pi}\iiint_{\mathrm{E}-\Delta-\Delta'}\left|\vec{\omega}\right|\frac{1}{l^2}\,d\tau_{\mathrm{M}} < \frac{1}{2\pi}\,\frac{4}{r^2}\iiint_{\mathrm{E}-\Delta'}\left|\vec{\omega}\right|d\tau_{\mathrm{M}},$$

$$\iiint_{\mathrm{E}-\Delta'}\left|\vec{\omega}\right|d\tau_{\mathrm{M}} < \iiint_{\mathrm{E}-\Delta'}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{OM}^{5+\varepsilon}}\,d\tau_{\mathrm{M}},$$

soit

$$\mathrm{A}\int_{\rho}^{\infty}\frac{4\pi\rho^2\,d\rho}{\rho^{5+\varepsilon}} = \frac{4\pi\mathrm{A}}{3+\varepsilon}\,\frac{1}{\rho^{2+\varepsilon}}.$$

Donc

$$\left|\vec{u}''\right| < \frac{8\mathrm{A}}{3+\varepsilon}\,\frac{1}{r^2\rho^{2+\varepsilon}}.$$

Il reste à préciser le comportement à l'infini du terme $\vec{u}'''$. A cet effet nous passons en notation tensorielle. Soient x_i les coordonnées de M, y_i les coordonnées de P ; posons :

$$x_i - y_i = z_i, \qquad v_i = \frac{1}{l^3}z_i;$$

d'où

$$u'''_m = \varepsilon_{min}\frac{1}{2\pi}\iiint_{\Delta'} v_i\omega_n\,d\tau_{\mathrm{M}}.$$

La formule de Taylor donne

$$v_i(\mathrm{M},\,\mathrm{P}) = v_i(\mathrm{O},\,\mathrm{P}) + x_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathrm{O},\,\mathrm{P}) + \frac{1}{2}x_jx_k\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\,\partial x_k}(\mathrm{M}',\,\mathrm{P});$$

M′ est un point du segment OM (dépendant d'ailleurs de l'indice i). En remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial z_i}, \qquad \frac{\partial l}{\partial z_i} = \frac{1}{l}z_i,$$

on obtient

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{l^3}\delta_i^j - \frac{3}{l^5} z_i z_j,$$

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \, \partial x_k} = \frac{15}{l^7} z_i z_j z_k - \frac{3}{l^5}(\delta_i^j z_k + \delta_j^k z_i + \delta_k^i z_j).$$

Nous posons

$$v_i^*(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = v_i(\mathrm{O}, \mathrm{P}) + x_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathrm{O}, \mathrm{P}) = -\frac{1}{r^3} y_i + x_j \left(\frac{1}{r^3}\delta_i^j - \frac{3}{r^5} y_i y_j \right).$$

Alors

$$v_i - v_i^* = \frac{1}{2} x_j x_k \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \, \partial x_k}(\mathrm{M}', \mathrm{P}).$$

Pour ce qui nous occupe, M et, par suite, M′, sont à l'intérieur de la sphère Δ'; P est à l'extérieur :

$$\mathrm{OM} \leqq \rho, \qquad \mathrm{OM}' \leqq \rho;$$
$$r - \rho \leqq \mathrm{PM}' \leqq r + \rho.$$

De l'expression de $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \, \partial x_k}$ on conclut donc que

$$\left| \vec{v} - \vec{v}^* \right| < \frac{12\rho^2 (r+\rho)^3}{(r-\rho)^7}.$$

Prenons

$$\rho = r^{\frac{1}{2} - k\varepsilon} \qquad (k > 0).$$

Lorsque r croît indéfiniment, il devient prépondérant dans les termes $r + \rho$ et $r - \rho$, de sorte que

$$\left| \vec{v} - \vec{v}^* \right| = \frac{\mathrm{B}}{r^{3+2k\varepsilon}} \qquad \mathrm{B} \text{ (borné)}.$$

On choisira k de manière que la quantité $\vec{u}''$ de tout à l'heure tende elle aussi vers zéro plus vite que $\frac{1}{r^3}$;

$$\left| \vec{u}'' \right| < \frac{8\mathrm{A}}{3+\varepsilon} \frac{1}{r^2} \frac{1}{r^{(2+\varepsilon)\left(\frac{1}{2} - k\varepsilon\right)}}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{r^{3+\left(\frac{1}{2} - 2k\right)\varepsilon - k\varepsilon^2}};$$

on prendra donc

$$\frac{1}{2} - 2k > 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad k < \frac{1}{4}.$$

Il ressort de toutes nos évaluations que

$$\vec{u}(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi}\iiint_{\Delta'} \vec{v}^\star \wedge \vec{\omega}\, d\tau_{\mathrm{M}} + \frac{\vec{\mathrm{B}}}{r^{3+\lambda}} \qquad \left(\vec{\mathrm{B}} \text{ borné, } \lambda \text{ positif}\right).$$

D'autre part, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\iiint_{\mathrm{E}} \vec{v}^\star \wedge \vec{\omega}\, d\tau_{\mathrm{M}}$$

étendue à l'espace entier, converge et l'on voit sans peine que le reste

$$\iiint_{\mathrm{E}-\Delta'} \vec{v}^\star \wedge \vec{\omega}\, d\tau_{\mathrm{M}}$$

est lui aussi de la forme $\dfrac{\vec{\mathrm{B}}}{r^{3+\lambda}}$.
Donc en définitive

$$\vec{u}(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi}\iiint_{\mathrm{E}} \vec{v}^\star \wedge \vec{\omega}\, d\tau_{\mathrm{M}} + \frac{\vec{\mathrm{B}}}{r^{3+\lambda}}.$$

d. Il nous faut maintenant expliciter cette quantité

$$\vec{u}^\star(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi}\iiint_{\mathrm{E}} \vec{v}^\star(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \wedge \vec{\omega}(\mathrm{M})\, d\tau_{\mathrm{M}},$$

qui est présumée fournir la partie principale de $\vec{u}$ à l'infini :

$$\begin{aligned} u_m^\star &= \frac{1}{2\pi}\varepsilon_{min}\iiint_{\mathrm{E}}\left[-\frac{1}{r^3}y_i + x_j\left(\frac{1}{r^3}\delta_i - \frac{3}{r^5}y_i y_j\right)\right]\omega_n\, d\tau_{\mathrm{M}} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\varepsilon_{min}\frac{1}{r^3}y_i\iiint_{\mathrm{E}}\omega_n\, d\tau_{\mathrm{M}} + \frac{1}{2\pi}\varepsilon_{uin}\left(\frac{1}{r^3}\delta_i^j - \frac{3}{r^5}y_i y_j\right)\iiint_{\mathrm{E}} x_j\omega_n\, d\tau_{\mathrm{M}}. \end{aligned}$$

D'après ce qu'on a vu au paragraphe **7** *a*,

$$\iiint_{\mathrm{E}}\omega_n\, d\tau_{\mathrm{M}} = 0.$$

Le champ est donc déterminé par le tenseur

$$\mathrm{T}_{jn} = \iiint_{\mathrm{E}} x_j\omega_n\, d\tau_{\mathrm{M}}.$$

Mais ce tenseur est *antisymétrique* ([1]), de sorte que (§ **2** *c*)

$$T_{jn} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kjn}I_k,$$

en désignant par $\vec{I}$ le vecteur *moment*

$$\vec{I} = \iiint_E \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}\, d\tau_M.$$

(De la nullité de la somme tourbillonnaire il résulte évidemment que ce vecteur $\vec{I}$ est indépendant du choix de l'origine O.)

Par conséquent

$$\begin{aligned} u_m^* &= \frac{1}{4\pi}\delta_{kj}^{mi}\left(\frac{1}{r^3}\delta_i^j - \frac{3}{r^5}y_i y_j\right)I_k \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{r^3}I_m - \frac{3}{r^5}y_i y_i I_m + \frac{3}{r^5}y_m y_i I_i\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3}{r^5}y_m y_i I_i - \frac{1}{r^3}I_m\right), \end{aligned}$$

soit vectoriellement

$$\vec{u}^* = \frac{3}{4\pi r^5}(\overrightarrow{OP}.\vec{I})\overrightarrow{OP} - \frac{1}{4\pi r^3}\vec{I}.$$

Ce champ est à l'infini de l'ordre de $\frac{1}{r^3}$; donc, d'après *c*, il constitue,

---

([1]) De ce que

$$\iint_S \omega_i \alpha_i\, d\sigma = 0$$

pour toute surface fermée S, on conclut en effet d'après le chapitre I (§ **4** *a*), que

$$\begin{aligned} \iint_S x_j x_n \omega_i \alpha_i\, d\sigma &= \iiint_D \omega_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j x_n)\, d\tau \\ &= \iiint_D \omega_i(\delta_j^i x_n + \delta_n^i x_j)\, d\tau = \iiint_D (x_n\omega_j + x_j\omega_n)\, d\tau. \end{aligned}$$

D'où l'antisymétrie annoncée dès qu'on suppose l'annulation uniforme de $r^4|\vec{\omega}|$ à l'infini.

L'antisymétrie de T_{jn} a lieu également lorsque l'intégrale est étendue à un *noyau tourbillonnaire* à la frontière duquel $\vec{\omega} = 0$ ou même seulement $\vec{\omega}.\vec{\alpha} = 0$.

pourvu que $\vec{I}$ ne soit pas nul, la *partie principale* de $\vec{u}$ à l'infini. Cette quantité $\vec{I}$, qui détermine la structure à l'infini, va jouer dans la suite un rôle fondamental, sous le nom de *résultante de polarisation.*

Si $\vec{I}$ est nul, il faut chercher dans des éléments d'ordre supérieur la partie principale de $\vec{u}$, et supposer d'ailleurs, pour cette recherche, une annulation plus rapide de $\vec{\omega}$.

e. Le cas bidimensionel se prête à des développements analogues.

En supposant l'annulation uniforme de $\vec{u}$ à l'infini, et l'annulation régulière de $r\zeta$ on établit que

$$\vec{u}(\mathrm{P}) = \frac{1}{\pi}\vec{z} \wedge \iint \frac{1}{l^2}\zeta(\mathrm{M})\,\overrightarrow{\mathrm{MP}}\,d\sigma_{\mathrm{M}},$$

l'intégrale étant étendue au plan entier. L'assimilation tourbillonnaire des éventuelles lignes de glissement sauvegarde ce résultat.

En supposant en outre l'annulation régulière de $r^3\zeta$, on obtient par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent

$$\vec{u}(\mathrm{P}) = \frac{1}{\pi r^2}\mathrm{K}'\vec{z} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{\vec{\mathrm{B}}}{r^{1+\lambda}},$$

ce qui fournit la partie principale de $\vec{u}$, si la somme tourbillonnaire

$$\mathrm{K}' = \iint \zeta\,d\sigma$$

n'est pas nulle.

Moyennant l'annulation régulière de $r^4\zeta$, on peut construire un développement d'ordre supérieur

$$\vec{u}(\mathrm{P}) = \frac{1}{\pi r^2}\mathrm{K}'\vec{z} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{1}{\pi}\vec{z} \wedge \left[\frac{2}{r^4}\left(\overrightarrow{\mathfrak{M}}.\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \frac{1}{r^2}\overrightarrow{\mathfrak{M}}\right] + \frac{\vec{\mathrm{B}}}{r^{2+\lambda}},$$

où

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \iint \zeta(\mathrm{M})\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,d\sigma.$$

En posant d'ailleurs, comme on le fera au chapitre suivant,

$$\vec{\mathrm{I}}' = -2\vec{z} \wedge \overrightarrow{\mathfrak{M}}$$

(résultante de polarisation), on a pour le second terme du développement

$$\frac{1}{\pi}\vec{z} \wedge \left[\frac{2}{r^4}(\overrightarrow{\mathfrak{M}}.\overrightarrow{OP})\overrightarrow{OP} - \frac{1}{r^2}\mathfrak{M}\right] = \frac{1}{\pi r^4}(\vec{I}'.\overrightarrow{OP})\overrightarrow{OP} - \frac{1}{2\pi r^2}\vec{I}'.$$

12. Singularités. — *a*. Soit un *noyau tourbillonnaire*, c'est-à-dire un domaine D à la frontière duquel le vecteur tourbillon est tangentiel ou nul. Nous considérons sa contribution dans l'intégrale de Biot et Savart :

$$\vec{u}(P) = \frac{1}{2\pi}\iiint_D \vec{v}(M, P) \wedge \vec{\omega}(M)\, d\tau_M.$$

Soit O un point, à distance finie, qui usuellement sera pris dans le domaine D lui-même, et R le rayon de la plus petite sphère de centre O renfermant D. Le champ vectoriel

$$\vec{v}(M, P) = \frac{1}{l^3}\overrightarrow{PM} = -\vec{\nabla}_M \frac{1}{l}$$

possède autour de O, comme le champ scalaire $\frac{1}{l}$, un développement en série de Taylor selon les puissances des coordonnées de M, uniformément convergent pour $OM < OP$, donc, *a fortiori*, convergent pour toute position de M dans D si $OP > R$. Alors, en multipliant par $\vec{\omega}(M)$ et en intégrant sur D terme à terme, on obtient un développement en série pour $\vec{u}(P)$, convergent à l'extérieur de la sphère de centre O et de rayon R. Les termes de ce développement sont des vecteurs fonctions homogènes de $\overrightarrow{OP}$, de degrés -3, -4, -5, ... Le premier a été construit au paragraphe précédent :

$$\vec{u}^* = \frac{3}{4\pi r^5}(\vec{I}.\overrightarrow{OP})\overrightarrow{OP} - \frac{1}{4\pi r^3}\vec{I},$$

avec

$$\vec{I} = \iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}\, d\tau_M.$$

Les termes suivants, dont il est inutile de chercher l'expression générale, dépendent des *moments* successifs du noyau, c'est-à-dire des tenseurs de la forme

$$T_{ijk\ldots s} = \iiint_D x_i x_j x_k \ldots \omega_s \, d\tau.$$

Le procédé employé au paragraphe précédent (en note) pour établir l'antisymétrie du moment du premier degré T_{ik} conduirait à des relations entre composantes qui permettent de ramener la donnée de chacun de ces tenseurs à celle d'un tenseur d'ordre inférieur d'une unité.

b. Imaginons alors un *noyau de dimensions infiniment petites*, avoisinant O, mais dans lequel $\vec{\omega}$ a des valeurs infiniment grandes, de sorte que les moments $T_{ij\ldots s}$ sont encore finis. Le développement précédent est convergent tout autour de O. Ce point est un *point singulier* du champ $\vec{u}$ et le développement joue un rôle tout analogue à celui de la série de Laurent en théorie des fonctions analytiques.

Seul nous intéressera le cas où tous les moments sont nuls, sauf le moment du premier degré, c'est-à-dire l'intégrale $\vec{I}$. C'est ce qui a lieu notamment pour un noyau infinitésimal déduit d'un noyau fini par une similitude de rapport infiniment petit ε, les valeurs de $\vec{\omega}$ aux points homologues étant alors dans le rapport $\frac{1}{\varepsilon^4}$. Il reste simplement

$$\text{(1)} \qquad \vec{u}(P) = \frac{3}{4\pi r^5}\left(\vec{I}.\overrightarrow{OP}\right)\overrightarrow{OP} - \frac{1}{4\pi 2^3}\vec{I}.$$

Un tel champ peut encore être considéré comme le champ newtonien d'une répartition de masses (de somme nulle) localisées dans le domaine infinitésimal du noyau. On retrouve en particulier cette expression comme champ créé par deux masses opposées infiniment grandes $-\frac{\delta}{4\pi}$ et $+\frac{\delta}{4\pi}$, placées en deux points M et M′, infiniment voisins de O et tels que

$$\delta\,\overrightarrow{MM'} = \vec{I}.$$

De là le nom de *doublet*, donné classiquement à la singularité en question (ce serait, du point de vue hydrodynamique, un couple d'une « source » et d'un « puits » infiniment voisins, de même débit δ, infiniment grand). Le vecteur $\vec{\mathrm{I}}$ est la *polarisation* du doublet.

D'une manière générale, nous dirons qu'un écoulement présente en O un doublet, si le champ $\vec{u}$ est la somme d'un champ de la forme (1) et d'un champ continu en O ainsi que ses dérivées partielles. $|\vec{u}|$ tend donc vers l'infini lorsqu'on approche de O : une telle singularité n'est mécaniquemeut concevable que comme *schéma limite d'un noyau tourbillonnaire très intense et très petit*. En l'envisageant ainsi il sera légitime de lui appliquer les résultats dynamiques des chapitres suivants.

Plus précisément, si l'on vient à considérer une intégrale linéaire en $\vec{\omega}$, $\iiint \varphi \vec{\omega}\, d\tau$ (φ champ scalaire), pour une portion d'écoulement présentant un doublet, la contribution du doublet sera l'intégrale étendue au noyau infinitésimal D

$$\vec{\delta} = \iiint_{\mathrm{D}} \varphi \vec{\omega}\, d\tau.$$

En supposant l'existence de dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ continues en O, on a

$$\varphi = \varphi(\mathrm{O}) + x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathrm{O}) + x_k \eta_k$$

(η_k tendant uniformément vers zéro avec x_k),

d'où la limite (¹)

$$\delta_i = \varphi(\mathrm{O}) \iiint_{\mathrm{D}} \omega_i\, d\tau + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathrm{O}) \iiint_{\mathrm{D}} x_k \omega_i\, d\tau = \mathrm{T}_{ki} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathrm{O}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{jki} \mathrm{I}_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_k},$$

c'est-à-dire

$$\vec{\delta} = \frac{1}{2} \vec{\mathrm{I}} \wedge \vec{\nabla} \varphi,$$

(¹) Du moins, on montrera sans peine que la contribution du terme complémentaire $x_k \eta_k$ est nulle à la limite, s'il s'agit d'un doublet déduit d'un noyau fini par similitude. Pour un doublet général, l'étude est plus délicate.

ce qui s'étend évidemment au cas où φ est de nature vectorielle ou tensorielle d'ordre quelconque.

c. Le cas bidimensionnel donne lieu à des considérations semblables, avec, comme toujours, la complication apportée par le fait que la somme tourbillonnaire K′ d'un noyau n'est pas nécessairement nulle.

Une singularité ponctuelle, limite d'un noyau tourbillonnaire infiniment petit, est définie par la suite des moments

$$T'_{ik\ldots l} = \iint_D x_i x_k \ldots x_l \zeta \, d\sigma,$$

tenseurs qui, cette fois, n'ont pas d'autre particularité que la symétrie par rapport à tous les indices. A partir de ces tenseurs, on construit, pour le champ $\vec{u}$ du noyau, un développement équivalent à la série de Laurent de la fonction analytique : $w = u_1 - iu_2$, « vitesse complexe ».

Deux cas seulement retiendront notre attention, celui d'abord où tous les moments sont nuls, sauf la somme tourbillonnaire

$$K' = \iint_D \zeta \, d\sigma.$$

Le champ $\vec{u}$ est alors de la forme

$$\vec{u}(P) = \frac{1}{\pi r^2} K' \vec{z} \wedge \overrightarrow{OP}.$$

C'est le classique *tourbillon ponctuel,* dont il n'existe pas d'analogue dans les écoulements tridimensionnels.

L'analogue du doublet de l'espace est fourni par le cas où K′ est nul, seul différant de zéro le moment du premier ordre

$$\mathfrak{M}_i = \iint x_i \zeta \, d\sigma.$$

L'expression de $\vec{u}$ est celle déjà donnée au paragraphe **11** *e* :

$$\vec{u}(P) = \frac{1}{\pi} \vec{z} \wedge \left[\frac{2}{r^4} (\overrightarrow{\mathfrak{M}} . \overrightarrow{OP}) \overrightarrow{OP} - \frac{1}{r^2} \overrightarrow{\mathfrak{M}} \right] = \frac{1}{\pi r^4} (\vec{I}' . \overrightarrow{OP}) \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2\pi r^2} \vec{I}',$$

avec

$$\vec{I}' = -2 \vec{z} \wedge \overrightarrow{\mathfrak{M}}.$$

A partir de cette dernière expression, on rejoint aisément l'interprétation classique du doublet : couple d'une source et d'un puits de même débit infiniment grand δ, placés aux points infiniment voisins M et M′ tels que

$$\delta\,\overrightarrow{MM'} = \vec{l'}.$$

d. Un autre type de singularité considéré usuellement en hydrodynamique tridimensuelle est la *ligne tourbillonnaire*, schéma limite d'un tube tourbillon très délié, dans lequel $\vec{\omega}$ est très grand, de sorte que la circulation de $\vec{u}$ autour du tube présente une valeur finie Γ : c'est l'*intensité* de la ligne. Un élément $\overrightarrow{dM}$ de cette ligne C (avec une orientation corrélative du sens de la circulation Γ, selon les règles invoquées pour le théorème de Stokes) équivaut donc à une cellule tourbillonnaire

$$\overrightarrow{dK} = \frac{1}{2}\Gamma\,\overrightarrow{dM}$$

et doit contribuer sous cette forme à toute intégrale de volume, linéaire en $\vec{\omega}$.

En particulier, la contribution de la ligne tourbillonnaire dans l'intégrale de Biot-Savart s'écrit

$$\vec{u}(P) = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_C \frac{1}{l^3}\,\overrightarrow{dM} \wedge \overrightarrow{MP}.$$

Ainsi qu'il est classique en électromagnétisme, un tel champ équivaut encore, si C est une courbe fermée, à celui d'un *feuillet* : répartition de doublets de densité superficielle $\Gamma\vec{\alpha}$ ($\vec{\alpha}$ vecteur unité normal), portée par une cloison quelconque S, ayant C pour contour. Cette équivalence s'étend à toute intégrale de volume, linéaire en $\vec{\omega}$. Pour l'anneau tourbillonnaire C, on a en effet

$$\iiint \varphi\,\vec{\omega}\,d\tau \sim \frac{\Gamma}{2}\int_C \varphi\,\overrightarrow{dM},$$

ce que la transformation de Stokes ramène à

$$\frac{\Gamma}{2}\iint_S \vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}\underset{*}{\varphi}\, d\sigma,$$

soit bien la contribution du feuillet selon b. En particulier l'intégrale $\vec{I}$, qui pour la ligne tourbillonnaire vaut

$$\vec{I}=\frac{\Gamma}{2}\int_C \overrightarrow{OM}\wedge d\overrightarrow{M},$$

s'écrit encore

$$\vec{I}=\Gamma\int_C \vec{\alpha}\, d\sigma.$$

CHAPITRE III.

BILAN DYNAMIQUE D'UN MILIEU INCOMPRESSIBLE ILLIMITÉ.

15. La résultante cinétique et le moment cinétique d'un milieu incompressible illimité. — *a*. Nous nous bornons désormais au cas des *milieux incompressibles* en supposant toujours l'existence et la continuité des dérivées partielles $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ et $\frac{\partial u_i}{\partial t}$.

Pour toute portion D d'un tel milieu, la résultante cinétique

$$\vec{\sigma}=\rho\iiint_D \vec{u}\, d\tau$$

peut s'exprimer par une intégrale double étendue à la surface frontière S ([1]). On a en effet

$$\underset{*}{\overrightarrow{OM}}\left(\vec{\nabla}.\underset{*}{\vec{u}}\right)=\underset{*}{\overrightarrow{OM}}\left(\vec{\nabla}.\vec{u}\right)+\overrightarrow{OM}\left(\vec{\nabla}.\underset{*}{\vec{u}}\right)=\vec{u},$$

d'où

$$\vec{\sigma}=\rho\iiint_D \underset{*}{\overrightarrow{OM}}\left(\vec{\nabla}.\underset{*}{\vec{u}}\right)d\tau=\rho\iint_S \overrightarrow{OM}\left(\vec{\alpha}.\vec{u}\right)d\sigma. \tag{1}$$

([1]) Cette résultante se relie comme on sait à la vitesse du centre de gravité. Or, vu l'homogénéité de la matière, l'évolution de ce centre de gravité ne dépend que de celle du domaine D, c'est-à-dire des vitesses sur la frontière.

Si l'on considère un milieu emplissant tout l'espace, la condition usuelle pour que l'intégrale $\vec{\sigma}$ converge est l'annulation régulière de $r^3 |\vec{u}|$. Alors la relation (1), appliquée en prenant pour S une sphère de rayon indéfiniment croissant, montre que $\vec{\sigma} = 0$.

$\vec{\sigma}$ est nul dès qu'est satisfaite sa condition ordinaire de convergence.

b. Il en va de même pour la *résultante dynamique*

$$\vec{\sigma}' = \rho \iiint_D \vec{\gamma}\, d\tau,$$

atteinte d'ordinaire en mécanique comme dérivée de $\vec{\sigma}$, mais qui pourrait être définie quand bien même cette dernière quantité ne le serait pas :

$$\vec{\sigma}' = \rho \iiint_D \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{\underset{\star}{u}} \right] d\tau.$$

Pour la convergence on sera donc conduit usuellement à admettre à l'infini l'annulation régulière de $r^3 \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right|$ et de $r^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ ainsi que l'annulation de $|\vec{u}|$, ce qui implique l'annulation régulière de $r|\vec{u}|$. On a alors

$$\iiint_D (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{\underset{\star}{u}}\, d\tau = \iiint_D (\vec{\underset{\star}{u}}.\vec{\nabla})\vec{\underset{\star}{u}}\, d\tau = \iint_S (\vec{u}.\vec{\alpha})\vec{u}\, d\sigma,$$

qui s'annule pour une sphère de rayon infiniment grand. Et d'autre part, D étant supposé fixe dans l'espace,

$$\iiint_D \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} d\tau = \frac{d}{dt}\iiint_D \vec{u}\, d\tau = \frac{d}{dt}\iint_S (\vec{u}.\vec{\alpha})\,\overrightarrow{OM}\, d\sigma = \iint_S \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\vec{\alpha}\right)\overrightarrow{OM}\, d\sigma,$$

ce qui s'annule également pour une sphère infiniment grande.

La résultante cinétique $\vec{\sigma}$ et la résultante dynamique $\vec{\sigma}'$ ne peuvent donc être d'aucun secours pour dresser le bilan dynamique de l'ensemble du milieu.

c. L'impuissance n'est pas aussi radicale pour le moment cinétique

$$\vec{\mu} = \rho \iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\, d\tau.$$

Il ne possède pas d'expression strictement périphérique, et peut converger sans être nul. En outre, lors de la construction du moment résultant des forces extérieures, on peut éliminer à la fois les pressions périphériques et les forces de profondeur dérivant d'un potentiel, en prenant pour D un *domaine sphérique* de centre O. Alors, en effet,

$$\iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\alpha} p\, d\sigma = 0$$

et

$$\iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\nabla}_{*} \mathrm{U}\, d\tau = \iiint_D \overrightarrow{OM}_{*} \wedge \vec{\nabla}_{*} \mathrm{U}\, d\tau = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\alpha}\, \mathrm{U}\, d\sigma = 0.$$

Toutefois la condition d'annulation régulière de $r^4 \left|\vec{u}\right|$, usuelle pour la convergence de $\vec{\mu}$, n'est ordinairement pas vérifiée en Hydrodynamique.

Nous allons dans les paragraphes qui suivent, former à partir de la structure tourbillonnaire, deux vecteurs qui suppléent à cette déficience des éléments cinétiques.

14. L'intégrale $\vec{\mathrm{I}}$. — *a.* Pour une portion matérielle D, formons l'intégrale

$$\vec{\mathrm{I}} = \iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}\, d\tau,$$

qui va donner matière à des calculs analogues à ceux du paragraphe **7** *b* sur l'intégrale $\vec{\mathrm{K}}$.

On écrit

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{*}\right) = \frac{1}{2} \overrightarrow{OM}_{*} \wedge \left(\vec{\nabla}_{*} \wedge \vec{u}_{*}\right) - \frac{1}{2} \overrightarrow{OM}_{*} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right),$$

$$\overrightarrow{OM}_{*} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right) = \left(\overrightarrow{OM}_{*} . \vec{u}\right) \vec{\nabla} - \left(\overrightarrow{OM}_{*} . \vec{\nabla}\right) \vec{u} = -2\vec{u}.$$

Donc

$$\vec{I} = \iiint_{D} \vec{u}\, d\tau + \frac{1}{2}\iint_{S} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\right) d\tau, \tag{1}$$

ce qui relie $\vec{I}$ à la résultante cinétique $\vec{\sigma}$.

b. Par dérivation séquente on obtient alors

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{1}{\rho}\vec{\sigma}' + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iint_{S} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\right) d\sigma. \tag{2}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\iint_{S} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\right) d\sigma = & \iint_{S} \vec{u} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\right) d\sigma \\ & + \iint_{S} \overrightarrow{OM} \wedge \left\{\left[\underset{*}{\vec{u}} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}\right)\right] \wedge u\right\} d\sigma \\ & + \iint_{S} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma}\right) d\sigma.\end{aligned}$$

La seconde de ces trois intégrales s'écrit encore

$$\iint_{S} \overrightarrow{OM} \wedge \left[\left(\vec{u} . \underset{*}{\vec{u}}\right) \vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla} - \left(\vec{u} . \vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}\right) \underset{*}{\vec{u}}\right] d\sigma$$

qu'on divise en deux termes

$$\begin{aligned} & \iint_{S} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}\right)\left(\underset{*}{\vec{u}} . \vec{u}\right) d\sigma \\ & = \frac{1}{2}\iint_{S} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}\right) \underset{*}{u}^{2}\, d\sigma \\ & = \frac{1}{2}\iint_{S} \underset{*}{\overrightarrow{OM}} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}\right) \underset{*}{u}^{2}\, d\sigma - \frac{1}{2}\iint_{S} \underset{*}{\overrightarrow{OM}} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}\right) u^{2}\, d\sigma \\ & = -\iint_{S} u^{2}\vec{\alpha}\, d\sigma \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & -\iint_{S} \overrightarrow{OM} \wedge \underset{*}{\vec{u}}\left(\vec{u} . \vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}\right) d\sigma \\ = & -\iint_{S} \underset{*}{\overrightarrow{OM}} \wedge \underset{*}{\vec{u}}\left(\underset{*}{\vec{u}} . \vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}\right) d\sigma \\ & + \iint_{S} \left(\vec{u} . \vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}\right) \underset{*}{\overrightarrow{OM}} \wedge \vec{u}\, d\sigma + \iint_{S} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\left(\vec{\nabla} \wedge \underset{*}{\vec{u}} . \vec{\alpha}\right) d\sigma \\ = & \iint_{S} \left(\vec{u} \wedge \vec{\alpha}\right) \wedge \vec{u}\, d\sigma + 2\iint_{S} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\left(\vec{\omega} . \vec{\alpha}\right) d\sigma. \end{aligned}$$

En outre, il est utile pour les développements ultérieurs de remarquer que

$$2\iint_S \vec{u} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{u})\, d\sigma - \iint u^2 \vec{\alpha}\, d\sigma = 2\iint_S \left[\frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\,\vec{u}\right] d\sigma.$$

Alors

$$(3)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iint_S \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{u})\, d\sigma$$
$$= \iint_S \left[\frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\,\vec{u}\right] d\sigma$$
$$+ \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}(\vec{\omega}.\vec{\alpha})\, d\sigma + \frac{1}{2}\iint \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma})\, d\sigma.$$

c. Nous invoquons maintenant la Dynamique. Le milieu est supposé soumis à des forces extérieures réparties, soit pour un élément de volume $d\tau$

$$(\vec{F} + \vec{\nabla}\underset{\star}{U})\, d\tau,$$

en mettant à part celles qui dérivent d'une fonction de forces U. Les actions intérieures de cohésion sont décrites par une pression hydrostatique à laquelle se superpose un tenseur $\overline{\overline{T}}$.

L'équation de la résultante dynamique est alors

$$\vec{\sigma}' = \iiint_D \vec{F}\, d\tau + \iiint_D \vec{\nabla}\underset{\star}{U}\, d\tau + \iint_S \overline{\overline{T}}.\vec{\alpha}\, d\sigma - \iint_S p\vec{\alpha}\, d\sigma$$

ou

$$(4)\qquad \vec{\sigma}' = \iiint_D \vec{F}\, d\tau - \iint_S q\,\vec{\alpha}\, d\sigma + \iint_S \overline{\overline{T}}.\vec{\alpha}\, d\sigma,$$

en posant

$$q = p - U.$$

Supposons d'autre part que, *tout au moins dans le voisinage de la surface frontière* S, p soit différentiable et que le tenseur T possède un vecteur divergence $\vec{\varphi}$. On peut alors écrire dans cette région l'équation locale de la dynamique

$$\rho\vec{\gamma} = -\vec{\nabla}\underset{\star}{q} + \vec{\varphi} + \vec{F}.$$

Cela donne

$$\rho \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma})\, d\sigma = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge [\vec{\alpha} \wedge (\vec{\varphi} + \vec{F})]\, d\sigma - \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}_{\!\!*} q)\, d\sigma.$$

Or

$$-\iint_S \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}_{\!\!*} q)\, d\sigma = -\iint_S \overrightarrow{\underset{*}{OM}} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}_{\!\!*} q)\, d\sigma$$
$$+ \iint_S \overrightarrow{\underset{*}{OM}} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla} q)\, d\sigma = 2 \iint_S q\vec{\alpha}\, d\sigma.$$

Par rapprochement avec les relations (2), (3) et (4) on obtient donc

$$(5) \qquad \rho \frac{d\vec{I}}{dt} = \iiint_D \vec{F}\, d\tau + \iint_S \overline{\overline{T}}.\vec{\alpha}\, d\sigma + \frac{1}{2} \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge [\vec{\alpha} \wedge (\vec{\varphi} + \vec{F})]\, d\sigma$$
$$+ \rho \iint_S \left[\frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\vec{u}\right] d\sigma + \rho \iint \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}(\vec{\omega}.\vec{\alpha})\, d\sigma.$$

d. Soit alors un milieu incompressible emplissant tout l'espace. Nous admettons l'annulation uniforme de $\vec{u}$ à l'infini, l'annulation régulière de $r^2\vec{\omega}$, ce qui assure la convergence de $\vec{I}$, l'annulation régulière de $r^3\vec{F}$, ce qui assure la convergence de

$$\vec{R} = \iiint_D \vec{F}\, d\tau,$$

résultante des forces sans potentiel appliquées au milieu. Nous supposons enfin l'annulation uniforme à l'infini de $r^2\overline{\overline{T}}$ et de $r^3\vec{\varphi}$.

Précisons que les majorations impliquées par les annulations en questions doivent, comme au paragraphe **9***c*, être uniformes vis-à-vis de la variable t. On applique alors la formule (5) à la portion de milieu que limite une sphère, de rayon r tendant vers l'infini. Les intégrales doubles portant sur $\vec{F}$, $\vec{\varphi}$, $\overline{\overline{T}}$ tendent vers zéro, de même celles qui portent sur $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$, puisqu'on a vu au chapitre II (§ **11***b*) que $r^2\vec{u}$ était borné. Et il reste

$$\rho \frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{R}.$$

La résultante des forces sans potentiel appliquées au milieu se relie donc à la dérivée de l'intégrale $\vec{\mathrm{I}}$ *par rapport au temps.*

En particulier, si toutes les forces dépendent d'un potentiel, $\vec{\mathrm{I}}$ *reste constant*

Il n'est pas nécessaire de supposer le point O fixe, puisque la valeur de $\vec{\mathrm{I}}$ est en fait indépendante du choix de ce point (chap. II, § **11** *d*). Il découle en outre du chapitre II (§ **8** *a*) que le résultat est encore valable si le milieu présente des surfaces de glissement (tout entières à distance finie), à condition de faire figurer les tourbillons équivalents dans l'intégrale $\vec{\mathrm{I}}$, sous la forme

$$\iint_{\Sigma} \frac{1}{2} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \left[\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{u}' - \vec{u}'' \right) \right] d\sigma.$$

Le milieu pourra notamment se composer d'un fluide et de corps immergés, pourvu que ces corps aient la même densité que le fluide; on peut toujours se ramener à ce cas par de faciles corrections d'inertie

e. On a vu au chapitre II (§ **11** *d*) que la partie principale de $\vec{u}$ à l'infini était déterminée par l'intégrale $\vec{\mathrm{I}}$. Si à un instant t_0 le milieu était au repos, la relation précédente nous donne

$$\vec{\mathrm{I}}(t) = \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^{t} \vec{\mathrm{R}}\, dt,$$

ce qui fait apparaître l'intégrale des forces sans potentiel dans l'espace et dans le temps depuis l'instant t_0, c'est-à-dire l'impulsion totale reçue par le milieu.

L'allure à l'infini du mouvement d'un fluide illimité parfait ou visqueux, contenant éventuellement des systèmes immergés, est déterminée par l'impulsion totale, localisée à distance finie, qui a tiré l'ensemble du repos (1).

---

(1) Les considérations du paragraphe **10** concernant l'allure à l'infini de $\vec{\omega}$ dans un fluide visqueux, laissent en effet présumer qne le tenseur des actions de

15. L'INTÉGRALE $\vec{J}$. — *a*. En vue d'une évaluation du moment résultant des forces subies par le milieu, nous formons maintenant la quantité

$$\vec{J} = -\iiint_D OM^2 \vec{\omega}\, d\tau.$$

On la relie au moment cinétique $\vec{\mu}$ en écrivant

$$OM^2\vec{\omega} = \frac{1}{2} OM^2 \vec{\nabla} \wedge \underset{*}{\vec{u}} = \frac{1}{2} \underset{*}{OM^2} \vec{\nabla} \wedge \underset{*}{\vec{u}} - \frac{1}{2} \underset{*}{OM^2} \vec{\nabla} \wedge \vec{u},$$

d'où

$$\vec{J} = \iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\, d\tau - \frac{1}{2} \iint_S OM^2 \vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma.$$

Si donc $\vec{u}$ est nul sur les surfaces frontières avec, le cas échéant, annulation régulière à l'infini de $r^4 \vec{u}$ et $r^5 \vec{\omega}$, il reste

$$\rho \vec{J} = \vec{\mu}.$$

Mais ce n'est pas là un cas usuel en Hydrodynamique.

b. La portion D conservant son individualité matérielle, on a, par dérivation séquente,

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{1}{\rho} \vec{\mu}' - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint_S OM^2 \vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma,$$

(Le point O est supposé fixe.)

Or

$$\frac{d}{dt} \iint_S OM^2 \vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma = 2 \iint_S (\overrightarrow{OM} . \vec{u}) \vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma$$
$$+ \iint_S OM^2 [\underset{*}{\vec{u}} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla})] \wedge \vec{u}\, d\sigma + \iint_S OM^2 \vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma}\, d\sigma.$$

---

viscosité

$$T_{ik} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

vérifie bien les conditions requises.

L'avant-dernière intégrale s'écrit encore

$$\iint_S \mathrm{OM}^2\left[\left(\vec{u}.\underset{\star}{\vec{u}}\right)\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}-\left(\vec{u}.\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}\right)\underset{\star}{u}\right]d\sigma,$$

qu'on décompose en deux termes

$$\iint_S \mathrm{OM}^2\left(\vec{u}.\underset{\star}{\vec{u}}\right)\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}\,d\sigma=\frac{1}{2}\iint_S \underset{\star}{\mathrm{OM}^2}\,\underset{\star}{u^2}\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}\,d\sigma-\frac{1}{2}\iint_S u^2\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}\underset{\star}{\mathrm{OM}^2}\,d\sigma$$
$$=-\iint_S u^2\vec{\alpha}\wedge\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,d\sigma$$

et

$$-\iint_S \mathrm{OM}^2\left(\vec{u}.\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}\right)\underset{\star}{\vec{u}}\,d\sigma=-\iint_S \underset{\star}{\mathrm{OM}^2}\left(\underset{\star}{\vec{u}}.\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}\right)\underset{\star}{\vec{u}}\,d\sigma$$
$$+\iint_S \underset{\star}{\mathrm{OM}^2}\left(\vec{u}\wedge\vec{\alpha}.\vec{\nabla}\right)\vec{u}\,d\sigma+\iint_S \mathrm{OM}^2\left(\vec{\nabla}\wedge\underset{\star}{\vec{u}}.\vec{\alpha}\right)\vec{u}\,d\sigma$$
$$=2\iint_S\left(\vec{u}\wedge\vec{\alpha}.\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\vec{u}\,d\sigma+2\iint \mathrm{OM}^2\vec{u}\left(\vec{\omega}.\vec{\alpha}\right)d\sigma.$$

En remarquant enfin que

$$2\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\vec{u}\right)\vec{\alpha}\wedge\vec{u}-u^2\vec{\alpha}\wedge\overrightarrow{\mathrm{OM}}+2\left(\vec{u}\wedge\vec{\alpha}.\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\vec{u}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\left[2\left(\vec{\alpha}\wedge\vec{u}\right)\wedge\vec{u}+u^2\vec{\alpha}\right]$$
$$=-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\left[u^2\vec{\alpha}-2\left(\vec{u}.\vec{\alpha}\right)\vec{u}\right],$$

il reste

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iint_S \mathrm{OM}^2\vec{\alpha}\wedge\vec{u}\,d\sigma=\iint_S\overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\left[\frac{1}{2}u^2\vec{\alpha}-\left(\vec{u}.\vec{\alpha}\right)\vec{u}\right]d\sigma$$
$$-\iint_S \mathrm{OM}^2\vec{u}\left(\vec{\omega}.\vec{\alpha}\right)d\sigma-\frac{1}{2}\iint_S \mathrm{OM}^2\vec{\alpha}\wedge\vec{\gamma}\,d\sigma.$$

c. Nous invoquons maintenant la Dynamique dans les mêmes conditions qu'au paragraphe précédent.

$$\vec{\mu}'=\iiint_D\overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\vec{\mathrm{F}}\,d\tau+\iint_S\overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\left(\overline{\overline{\mathrm{T}}}.\vec{\alpha}\right)d\sigma-\iint_S\overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\vec{\alpha}\,q\,d\sigma.$$

D'autre part,

$$\rho\iint_S \mathrm{OM}^2\vec{\alpha}\wedge\vec{\gamma}\,d\sigma=\iint_S \mathrm{OM}^2\vec{\alpha}\wedge\left(\vec{\mathrm{F}}+\vec{\varphi}\right)d\sigma-\iint_S \mathrm{OM}^2\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}\underset{\star}{q}\,d\sigma$$

et

$$\iint_S \mathrm{OM}^2 \vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla} \underset{*}{q}\, d\sigma = \iint_S \underset{*}{\mathrm{OM}}^2 \vec{\alpha} \wedge \vec{\underset{*}{\nabla}} q\, d\sigma - \iint_S \vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla} \underset{*}{\mathrm{OM}}^2 q\, d\sigma$$
$$= 2 \iint_S \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{\alpha}\, q\, d\sigma.$$

Donc finalement

$$\rho \frac{d\vec{J}}{dt} = \iiint_D \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}\, d\tau + \iint_S \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \left(\overline{\overline{T}}.\vec{\alpha}\right) d\sigma - \frac{1}{2} \iint \mathrm{OM}^2 \vec{\alpha} \wedge \left(\vec{\varphi} + \vec{F}\right) d\sigma$$
$$+ \rho \iint_S \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \left[\frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - \left(\vec{u}.\vec{\alpha}\right) \vec{u}\right] d\sigma - \rho \iint_S \mathrm{OM}^2 \vec{u} \left(\vec{\omega}.\vec{\alpha}\right) d\sigma.$$

Pour un milieu emplissant tout l'espace nous supposerons l'annulation uniforme à l'infini de $\vec{u}$, l'annulation régulière de $r^5 \vec{\omega}$ et $r^4 \vec{F}$, l'annulation uniforme de $r^3 \overline{\overline{T}}$ et $r^4 \vec{\varphi}$. Il reste alors au second membre l'expression du moment résultant $\vec{H}$ des forces sans potentiel appliquées au milieu

$$\rho \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{H}. \tag{1}$$

En particulier si ce moment est nul, $\vec{J}$ *est constant.*

Comme tout à l'heure, le résultat subsiste si le milieu présente des surfaces de glissement, qui devront alors contribuer à l'expression de $\vec{J}$ par des intégrales de surface

$$-\iint_\Sigma \frac{1}{2} \mathrm{OM}^2 \vec{\alpha} \wedge \left(\vec{u}' - \vec{u}''\right) d\sigma.$$

De là l'application à un fluide contenant des solides immergés.

d. On peut également considérer l'expression

$$\vec{J}' = \iiint_D 2\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\vec{\omega}\right) \overrightarrow{\mathrm{OM}}\, d\tau.$$

On a

$$2\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\vec{\omega}\right)\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \left(\overrightarrow{\underset{*}{\mathrm{OM}}}.\vec{\nabla} \wedge \underset{*}{\vec{u}}\right)\overrightarrow{\underset{*}{\mathrm{OM}}} - \left(\overrightarrow{\underset{*}{\mathrm{OM}}} \wedge \vec{\nabla}.\vec{u}\right)\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{u}.\vec{\nabla}\right)\overrightarrow{\underset{*}{\mathrm{OM}}}$$
$$= \left(\overrightarrow{\underset{*}{\mathrm{OM}}}.\vec{\nabla} \wedge \underset{*}{\vec{u}}\right) \overrightarrow{\underset{*}{\mathrm{OM}}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{u},$$

donc

$$\vec{J}' = \iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\, d\tau + \iint_S \left(\overrightarrow{OM}.\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\right) \overrightarrow{OM}\, d\sigma.$$

Cela permet de développer à partir de $\vec{J}'$ des calculs absolument semblables aux précédents. De même pour la quantité

$$\vec{J}'' = \frac{1}{3}\left(2\vec{J} + \vec{J}'\right) = \frac{2}{3} \iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}\right) d\tau,$$

qui donne

$$\vec{J}'' = \iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\, d\tau + \frac{1}{3} \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\right)\right] d\sigma.$$

D'ailleurs la différence

$$\vec{J}' - \vec{J} = \iint_S \left[\left(\overrightarrow{OM}.\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\right) \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2} OM^2 \vec{\alpha} \wedge \vec{u}\right] d\sigma$$

est nulle si $\vec{u}$ est nul sur la frontière. En y remplaçant d'autre part $\vec{\alpha} \wedge \vec{u}$ par $\left(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}.\vec{\nabla}\right) \underset{*}{\overrightarrow{OM}}$, la quantité intégrée s'écrit

$$\begin{aligned}
&\left[\overrightarrow{OM}.\underset{*}{\overrightarrow{OM}}\left(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}.\vec{\nabla}\right)\right] \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2} OM^2 \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}.\vec{\nabla}\right) \underset{*}{\overrightarrow{OM}} \\
&= \frac{1}{2} \underset{*}{OM^2} \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}.\vec{\nabla}\right) \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2} OM^2 \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}.\vec{\nabla}\right) \underset{*}{\overrightarrow{OM}} \\
&= -\frac{1}{2} \underset{*}{OM^2} \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}.\underset{*}{\vec{u}}\right) \underset{*}{\overrightarrow{OM}} + \frac{1}{2} OM^2 \left(\vec{\alpha}.\vec{\nabla} \wedge \underset{*}{\vec{u}}\right) \overrightarrow{OM}.
\end{aligned}$$

Après intégration sur une surface fermée Σ, constituant tout ou partie de la frontière S, cela laisse

$$\iint_\Sigma \left(\vec{\alpha}.\vec{\omega}\right) OM^2 \overrightarrow{OM}\, d\sigma,$$

qui est nul si $\vec{\alpha}.\vec{\omega}$ est nul sur Σ, ou bien encore pour une sphère de rayon infiniment grand, d'après l'hypothèse d'annulation régulière de $r^5 \vec{\omega}$.

Les trois intégrales $\vec{J}$, $\vec{J}'$ et $\vec{J}''$ sont ainsi égales pour un noyau tourbillonnaire ou pour un milieu illimité. *Elles peuvent donc se remplacer dans la formule* (1).

16. LE TORSEUR DE POLARISATION. — *a*. D'après ce qu'on vient de voir, les quantités $\vec{I}$ et $\vec{J}$, pour un milieu illimité, constituent les dérivées par rapport à t de la résultante et du moment en O d'un *torseur* indépendant du choix de O : au facteur ρ près, le torseur des actions sans potentiel. Il est à prévoir que ces quantités elle-mêmes constituent également la résultante et le moment d'un torseur indépendant du choix du point O. On le vérifie aisément :

En effet, nous avons déjà fait observer, au chapitre II que l'intégrale $\vec{I}$ était indépendante du choix de O, puisque la somme

$$\vec{K} = \iiint_D \vec{\omega}\, d\tau$$

est nulle, cela pour tout noyau tourbillonnaire ou bien encore pour un milieu emplissant l'espace entier, en vertu des conditions à l'infini que nous posons.

Il reste à prouver que la variation de $\vec{J}$, consécutive à un déplacement de O, satisfait bien à la loi de changement d'origine d'un moment, soit, pour un déplacement différentiel,

$$\delta\vec{J} = \vec{I} \wedge \delta\vec{O}.$$

On écrit

$$\delta\vec{J} - \vec{I} \wedge \delta\vec{O} = \iiint_D \left[2\left(\overrightarrow{OM}.\delta\vec{O}\right)\vec{\omega} - \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}\right) \wedge \delta\vec{O} \right] d\tau,$$

or

$$\begin{aligned} 2\left(\overrightarrow{OM}\delta\vec{O}\right)\vec{\omega} - \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}\right) \wedge \delta\vec{O} &= \left(\vec{\omega}.\delta\vec{O}\right)\overrightarrow{OM} + \left(\overrightarrow{OM}.\delta\vec{O}\right)\vec{\omega} \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \wedge \underset{*}{\vec{u}}.\delta\vec{O}\right)\overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}.\delta\vec{O}\right)\vec{\nabla} \wedge \underset{*}{\vec{u}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \wedge \underset{*}{\vec{u}}.\delta\vec{O}\right)\underset{*}{\overrightarrow{OM}} + \frac{1}{2}\left(\underset{*}{\overrightarrow{OM}}.\delta\vec{O}\right)\vec{\nabla} \wedge \underset{*}{\vec{u}}, \end{aligned}$$

puisque

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}.\delta\vec{O}\right)\underset{*}{\overrightarrow{OM}} + \left(\underset{*}{\overrightarrow{OM}}.\delta\vec{O}\right)\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \delta\vec{O} + \delta\vec{O} \wedge \vec{u} = 0.$$

Donc

$$\delta\vec{J} - \vec{I} \wedge \delta\vec{O} = \frac{1}{2}\iint_S \left[\left(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}.\delta\vec{O}\right)\overrightarrow{OM} + \left(\overrightarrow{OM}.\delta\vec{O}\right)\vec{\alpha} \wedge \vec{u} \right] d\sigma.$$

La nullité de cette expression est assurée si $\vec{u}$ s'annule sur S, mais ce n'est pas là le cas qui nous intéresse. Nous obtenons une expression en $\vec{\omega}$ en remarquant que

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{u} = (\vec{\alpha} \wedge \vec{u}.\vec{\nabla})\,\underset{*}{\overrightarrow{\mathrm{OM}}},$$

de sorte que la quantité sous le signe $\iint$ prend la forme

$$\begin{aligned}
&(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}.\vec{\nabla})\,(\underset{*}{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}.\delta\vec{\mathrm{O}})\,\overrightarrow{\mathrm{OM}} + (\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\delta\vec{\mathrm{O}})\,(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}.\vec{\nabla})\,\underset{*}{\overrightarrow{\mathrm{OM}}} \\
&\quad = (\vec{\alpha} \wedge \underset{*}{\vec{u}}.\vec{\nabla})\,(\underset{*}{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}.\delta\vec{\mathrm{O}})\,\underset{*}{\overrightarrow{\mathrm{OM}}} - (\vec{\alpha} \wedge \underset{*}{\vec{u}}.\vec{\nabla})\,(\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\delta\vec{\mathrm{O}})\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}.
\end{aligned}$$

Le premier terme, soit

$$-(\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}.\underset{*}{\vec{u}})\,(\underset{*}{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}.\delta\vec{\mathrm{O}})\,\underset{*}{\overrightarrow{\mathrm{OM}}},$$

donne zéro par intégration sur toute surface fermée, et il reste

$$\delta\vec{\mathrm{J}} - \vec{\mathrm{I}} \wedge \delta\vec{\mathrm{O}} = \iint_{\mathrm{S}} (\vec{\alpha}.\vec{\omega})\,(\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\delta\vec{\mathrm{O}})\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,d\sigma,$$

qui sera bien nul pour tout *noyau tourbillonnaire,* s'étendant éventuellement à l'infini (en vertu de l'hypothèse d'annulation régulière de $r^4\vec{\omega}$ à l'infini qu'on invoque déjà pour la convergence de $\vec{\mathrm{I}}$).

$\vec{\mathrm{I}}$ *et* $\vec{\mathrm{J}}$ *constituent en ce cas les éléments de réduction d'un torseur bien défini* que nous appelons *torseur de polarisation du milieu.*

Voici une raison de cette dénomination :

b. Soit un *doublet,* tel que nous l'avons étudié au chapitre II (§ **12** *b*). L'origine O étant prise au point même qu'il occupe, la contribution du doublet dans l'intégrale $\vec{\mathrm{I}}$ n'est autre que le vecteur $\vec{\mathrm{L}}$, *polarisation* du doublet. Et la contribution dans l'intégrale $\vec{\mathrm{J}}$ est nulle, comme se reliant au tenseur moment tourbillonnaire du second degré. C'est dire que la contribution du doublet au torseur de polarisation est constituée par le vecteur $\vec{\mathrm{L}}$, considéré comme lié à O.

Pour un ensemble de doublets, les quantités $\vec{\mathrm{I}}$ et $\vec{\mathrm{J}}$, évaluées à partir d'une origine O quelconque, sont donc la résultante et le moment résultant du système des vecteurs polarisation des divers doublets. C'est par extension que nous continuons, pour une structure tourbillonnaire quelconque, à dénommer torseur de polarisation le torseur dont $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont les éléments de réduction.

Soit d'ailleurs un *anneau tourbillonnaire* C, d'intensité Γ. En ce qui concerne l'évaluation de toute intégrale de volume linéaire en $\vec{\omega}$, donc notamment vis-à-vis de $\vec{I}$ et de $\vec{J}$, cet anneau équivaut à un feuillet S, ayant C pour contour (chap. II, § **12** *d*) :

$$\vec{I} = \Gamma \iint_S \vec{\alpha}\, d\sigma, \qquad \vec{J} = \Gamma \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\alpha}\, d\sigma.$$

Le torseur de polarisation de l'anneau équivaut au torseur intégral des $\Gamma\vec{\alpha}\, d\sigma$ (¹).

Nous arrivons alors à cette conception imagée du torseur de polarisation : Pour un écoulement quelconque, on supposera la structure tourbillonnaire décomposée en anneaux; chacun d'entre eux équivaut à un feuillet, c'est-à-dire à une répartition superficielle de vecteurs polarisation. L'ensemble de ces vecteurs engendre le torseur de polarisation.

c. Nous énonçons en résumé :

Le torseur des actions sans potentiel subies par un milieu incompressible, homogène, illimité, au repos à l'infini, s'exprime en multipliant par la densité ρ la dérivée relativement au temps du torseur de polarisation (²).

A titre de premier exemple, appliquons ce résultat à la théorie classique de l'inertie apparente d'une sphère immergée :

Une sphère solide S est baignée par un fluide parfait indéfini au

(¹) En particulier pour un anneau *plan* le torseur de polarisation équivaut à un vecteur unique, issu du centre de gravité de l'aire plane S que limite l'anneau, normal à son plan et de grandeur ΓS (avec les règles d'orientation connues).

(²) A vrai dire, ces « actfons sans potentiel » ne sont définies en chaque point qu'à un gradient arbitraire près. Mais si ce gradient est choisi de manière que l'annulation à l'infini reste assurée, le torseur résultant est bien défini.

repos. On la met en mouvement selon une loi quelconque. Pendant une première phase du mouvement, assez courte pour que les effets du décollement soient encore négligeables, le schéma classique d'un écoulement irrotationnel partout régulier est valable. Le champ de vitesses du fluide, à l'extérieur de S, est celui d'un *doublet*, localisé au centre O, de polarisation

$$\vec{A} = 2\pi R^3 \vec{V};$$

R, rayon de la sphère,

$\vec{V}$, vecteur vitesse du centre [1].

Considérons le milieu homogène illimité que constituent le fluide et la sphère solide *supposée de même densité que lui*. On évalue la résultante de polarisation grâce à la remarque suivante :

Pour toute portion d'un milieu incompressible, $\vec{I}$ ne dépend que du mouvement périphérique. Cela résulte immédiatement des équations [(1), § **13** et (2), § **14**].

On ne change donc pas $\vec{I}$ en imaginant que $\vec{u}$ se confond dans tout l'espace avec le champ du doublet, par conséquent

$$\vec{I} = \vec{A} = 2\pi R^3 \vec{V}.$$

Alors la résultante des forces sans potentiel subies par le milieu, c'est-à-dire la force qu'il faut exercer sur la sphère pour assurer son mouvement au sein du fluide, est donnée par

$$\vec{F} = \rho \frac{d\vec{I}}{dt} = 2\pi R^3 \rho \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

---

(1) L'expression donnée au chapitre II (§ **12** *a*) pour le champ du doublet se transforme en effet, par la formule du double produit vectoriel, en

$$\vec{u}(P) = \frac{3}{4\pi r^5} \overrightarrow{OP} \wedge \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{A}\right) + \frac{1}{2\pi r^3} \vec{A}.$$

Sur la sphère S, il reste donc

$$\vec{u} - \vec{V} = \frac{3}{4\pi R^5} \overrightarrow{OP} \wedge \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{A}\right),$$

qui est bien *tangentiel*. Avec la condition d'annulation à l'infini, cela caractérise le champ.

Si la sphère était isolée dans l'espace la force serait

$$\vec{F}' = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Tout se passe donc comme si la masse de la sphère était augmentée de $\frac{2}{3}\pi R^3 \rho$, soit la moitié de la masse du fluide déplacé.

d. Indiquons encore, en vue des applications de ce genre, le calcul de la contribution qu'apporte aux intégrales $\vec{I}$ et $\vec{J}$ une portion de milieu *solide* D. Le vecteur tourbillon se réduit alors au vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}$, de sorte qu'on écrit

$$\vec{I} = \iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Omega}\, d\tau = v\,\overrightarrow{OG} \wedge \vec{\Omega},$$

en appelant v le volume et G le centre de gravité du solide, supposé homogène. De même

$$\vec{J} = -\iiint_D OM^2 \vec{\Omega}\, d\tau = -\mathcal{J}\vec{\Omega};$$

$\mathcal{J}$: moment d'inertie en O du solide, supposé de densité 1. Donc

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = v\vec{V}_G \wedge \vec{\Omega} + v\,\overrightarrow{OG} \wedge \frac{d\vec{\Omega}}{dt},$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = -2v\left(\vec{V}_0 . \overrightarrow{OG}\right)\vec{\Omega} - \mathcal{J}\frac{d\vec{\Omega}}{dt};$$

$\vec{V}_0$ et $\vec{V}_G$: vitesses locales du solide en O et en G ; d'ailleurs

$$\vec{V}_G = \vec{V}_0 + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}, \qquad \vec{V}_0 . \overrightarrow{OG} = \vec{V}_G . \overrightarrow{OG}.$$

17. Cas bidimensionnel. — *a.* Dans le cas bidimensionnel, on introduira, pour une portion D de milieu que limite un contour C, la quantité vectorielle

$$\vec{I}' = -2\vec{z} \wedge \iint_D \overrightarrow{OM}\,\zeta\, d\sigma$$

et la quantité scalaire

$$\mathrm{J}' = -\iint \mathrm{OM}^2 \zeta \, d\sigma.$$

L'étude se développe selon le même plan que dans le cas tridimensionnel.

On écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,\zeta = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,(\vec{z}\wedge\vec{\nabla}.\vec{u}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}_{*}\,(\vec{z}\wedge\vec{\nabla}.\vec{u}_{*}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}_{*}\,(\vec{\nabla}.\vec{u}\wedge\vec{z}),$$

d'où

$$\vec{\mathrm{I}}' = \iint_{\mathrm{D}} \vec{u}\, d\sigma - \vec{z}\wedge\oint_{\mathrm{C}} \overrightarrow{\mathrm{OM}}\,(\vec{u}.d\overrightarrow{\mathrm{M}});$$

puis, par dérivation séquente,

$$\frac{d\vec{\mathrm{I}}'}{dt} = \frac{1}{\rho}\vec{\sigma}' - \vec{z}\wedge\frac{d}{dt}\oint_{\mathrm{C}}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,(\vec{u}.d\overrightarrow{\mathrm{M}}),$$

avec d'ailleurs

$$\frac{d}{dt}\oint_{\mathrm{C}}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,(\vec{u}.d\overrightarrow{\mathrm{M}}) = \oint_{\mathrm{C}}\left[(\vec{u}.d\overrightarrow{\mathrm{M}})\,\vec{u} - \frac{1}{2}u^2 d\overrightarrow{\mathrm{M}}\right] + \oint_{\mathrm{C}}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,(\vec{\gamma}.d\overrightarrow{\mathrm{M}}).$$

On invoque alors la Dynamique comme au chapitre II (§ **9** *c*) et il reste

$$\rho\frac{d\vec{\mathrm{I}}'}{dt} = \iint_{\mathrm{D}}\vec{\mathrm{F}}\,d\sigma + \oint_{\mathrm{C}}\overline{\overline{\mathrm{T}}}.(d\overrightarrow{\mathrm{M}}\wedge\vec{z}) - \vec{z}\wedge\oint\overrightarrow{\mathrm{OM}}\left[(\vec{\mathrm{F}}+\vec{\varphi}).d\overrightarrow{\mathrm{M}}\right]$$
$$-\rho\vec{z}\wedge\oint_{\mathrm{C}}\left[(\vec{u},d\overrightarrow{\mathrm{M}})\,\vec{u} - \frac{1}{2}u^2 d\overrightarrow{\mathrm{M}}\right].$$

Pour un milieu remplissant tout le plan on suppose l'annulation uniforme de $\vec{u}$ à l'infini et l'annulation régulière de $r^3\zeta$, ce qui implique l'annulation régulière de ru^2 (chap. II, § **11** *e*); l'annulation uniforme de $r\mathrm{T}$ et $r^2\vec{\varphi}$, l'annulation régulière de $r^2\vec{\mathrm{F}}$. Il vient alors

$$\rho\frac{d\vec{\mathrm{I}}'}{dt} = \vec{\mathrm{R}},$$

résultante des forces sans potentiel appliquées au milieu plan entier (soit une tranche d'espace d'épaisseur unité).

b. De même, on trouve

$$J' = \vec{z}.\iint_D \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\, d\sigma - \frac{1}{2}\oint_C OM^2(\vec{u}.d\overrightarrow{M}),$$

d'où par dérivation séquente

$$\frac{dJ'}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d\mu'}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\oint OM^2(\vec{u}.d\overrightarrow{M}),$$

avec

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\oint OM^2(\vec{u}.d\overrightarrow{M}) = \oint \overrightarrow{OM}.\left[(\vec{u}.d\overrightarrow{M})\vec{u} - \frac{1}{2}u^2 d\overrightarrow{M}\right] + \frac{1}{2}\oint OM^2(\vec{\gamma}.d\overrightarrow{M}),$$

donc

$$\rho\frac{dJ'}{dt} = \vec{z}.\iint \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\, d\sigma + z\oint_C \overrightarrow{OM} \wedge (\overline{\overline{T}}.d\overrightarrow{M} \wedge \vec{z})$$
$$- \frac{1}{2}\oint_C OM^2\left[(\vec{F} + \vec{\varphi}).d\overrightarrow{M}\right] - \rho\oint \overrightarrow{OM}.\left[(\vec{u}.d\overrightarrow{M})\vec{u} - \frac{1}{2}u^2 d\overrightarrow{M}\right].$$

Pour un milieu emplissant tout le plan, on suppose l'annulation uniforme de $\vec{u}$ à l'infini, l'annulation régulière de $r^4\zeta$, l'annulation uniforme de r^2T et $r^3\vec{\varphi}$, l'annulation régulière de $r^3\vec{F}$.

L'annulation limite de la dernière intégrale, du second degré en $\vec{u}$, n'est pas aussi immédiate que dans les considérations antérieures. Mais on invoque le développement limité du chapitre II (§ **11** *e*) :

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'',$$

avec

$$\vec{u}'(P) = \frac{1}{\pi r^2}K'\vec{z} \wedge \overrightarrow{OP} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}''(P) = \frac{\vec{B}}{r^{1+\lambda}}.$$

L'intégrale en question, étendue à un cercle de centre O, de rayon r indéfiniment croissant, se décompose dans les termes suivants :

$$\oint_C \overrightarrow{OM}.\left[(\vec{u}''.d\overrightarrow{M})\vec{u}'' - \frac{1}{2}u''^2 d\overrightarrow{M}\right],$$
$$\oint_C \overrightarrow{OM}.\left[(\vec{u}'.d\overrightarrow{M})\vec{u}'' - \frac{1}{2}(\vec{u}'.\vec{u}'')d\overrightarrow{M}\right],$$
$$\oint_C \overrightarrow{OM}.\left[(\vec{u}''.d\overrightarrow{M})\vec{u}' - \frac{1}{2}(\vec{u}'.\vec{u}'')d\overrightarrow{M}\right],$$

nuls à la limite, parce que la quantité intégrée s'annule plus vite que $\frac{1}{r}$, et

$$\oint_C \overrightarrow{OM}.\left[\left(\vec{u}'.d\overrightarrow{M}\right)\vec{u}' - \frac{1}{2}u'^2 d\overrightarrow{M}\right],$$

nul de par la structure de $\vec{u}'$.

Pour le milieu entier nous avons donc

$$\rho\frac{dJ'}{dt} = H,$$

moment résultant des forces sans potentiel.

Tous ces résultats sont aussi bien valables s'il se présente des structures tourbillonnaires singulières : singularités ponctuelles ou lignes de glissement, à faire entrer dans les expresssions de I' et J' sous les formes précisées au chapitre II.

c. En particulier si le milieu n'est soumis qu'à un champ de forces dérivant d'un potentiel, $\vec{I}'$ et J' sont *constants*. On a vu d'ailleurs au chapitre II (§ **9** *c*) que la somme tourbillonnaire

$$K' = \iint_D \zeta\, d\sigma$$

restait elle-même constante. Si elle est différente de zéro, on peut définir par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2K'}\vec{z}\wedge\vec{I}' = \frac{1}{K'}\iint_D \overrightarrow{OM}\zeta\, d\sigma,$$

le point G, *barycentre des tourbillons;* ce point est alors *fixe*. De même l'invariance de J' peut s'énoncer en disant que le *moment d'inertie* des tourbillons par rapport au point fixe O est constant.

Nous généralisons ainsi des résultats classiques concernant le mouvement d'un système de tourbillons ponctuels en fluide parfait (1).

Dans le cas général, les dérivées de $\vec{I}'$ et J' par rapport au temps conduisent aux éléments de réduction en O du torseur des actions

(1) *Cf.* H. Villat, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, chap. III.

sans potentiel subies par le milieu. Mais, à l'inverse du cas de l'espace, ces quantités ne sont pas elles-mêmes les éléments de réduction d'un torseur indépendant de O. En effet, la somme tourbillonnaire K′ étant en général différente de zéro, le vecteur $\vec{I}'$ *dépend du choix de* O.

Les intégrales $\vec{I}'$ et J′, pour une portion du milieu, ne sont les éléments de réduction d'un torseur bien défini que si l'intégrale K′ correspondante est nulle. Alors on peut parler d'un *torseur de polarisation.*

Ainsi, par exemple, un *doublet* du plan, localisé en un point P et défini par son moment du premier ordre

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \iint \overrightarrow{OM}\, dK',$$

possède un torseur de polarisation équivalent au vecteur de polarisation

$$\vec{L} = -2\vec{z} \wedge \overrightarrow{\mathfrak{M}}.$$

Les contributions de ce doublet dans les intégrales $\vec{I}'$ et J′, pour une origine O quelconque, sont donc

$$\vec{I}' = \vec{L}, \qquad J' = \vec{z}.\overrightarrow{OP} \wedge \vec{L}.$$

CHAPITRE IV.

BILAN DYNAMIQUE D'UNE PORTION DE FLUIDE.

18. Formules générales. — *a.* Soit D une portion d'un milieu incompressible homogène, de propriétés internes quelconques (usuellement : fluide parfait, avec des solides immergés de même densité), mais *toutefois helmholtzien dans le voisinage de la surface frontière* S.

Les formules des paragraphes **14** *c* et **15** *c* se réduisent alors, vu l'annulation de T, $\vec{\varphi}$, $\vec{F}$ sur S, à

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{1}{\rho}\vec{R} + \iint_S \left[\frac{1}{2}u^2\vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\vec{u}\right] d\sigma + \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\, d\Phi,$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{1}{\rho}\vec{H} + \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \left[\frac{1}{2}u^2\vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\vec{u}\right] d\sigma - \iint_S OM^2\vec{u}\, d\Phi,$$

$\vec{R}$ et $\vec{H}$ désignant la résultante et le moment résultant des forces extérieures sans potentiel appliquées dans l'étendue de D [1].

Le résultat subsiste même si D comporte des singularités ou des surfaces de glissement, *à condition qu'elles n'atteignent par la frontière* S, ce qui mettrait en défaut les raisonnements du chapitre III, basés sur la dérivation séquente. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

Par ailleurs, si D ne comporte pas d'autres singularités que des surfaces de glissement, les intégrales du second degré en $\vec{u}$ peuvent se transformer d'après les formules du paragraphe **8** *b* :

$$\vec{A} = \iint_S \left[\frac{1}{2}u^2\vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\vec{u}\right] d\sigma = 2\iiint_D \vec{u} \wedge d\vec{K},$$

$$\vec{B} = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \left[\frac{1}{2}u^2\vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\vec{u}\right] d\sigma = 2\iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge d\vec{K}).$$

On écrit finalement

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\vec{R} &= \frac{d\vec{I}}{dt} - \vec{A} - \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\, d\Phi, \\ \frac{1}{\rho}\vec{H} &= \frac{d\vec{J}}{dt} - \vec{B} + \iint_S OM^2\vec{u}\, d\Phi. \end{aligned}\right.$$

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. **229**, 1949, p. 100.

Là encore, les actions sans potentiel ne sont définies qu'à un gradient près, mais elles doivent s'annuler sur S. Les raisonnements qui seront employés au paragraphe **22** *b* permettent alors de montrer que le torseur résultant est bien défini, du moins si S se compose d'une surface fermée unique, cas auquel on peut toujours se ramener.

b. On rejoint facilement à partir de là les formules données, pour le cas d'un écoulement périodique, par M. Pérès [1], qui considère un *domaine fixe*, soit Δ. Si D est le domaine fluide qui coïncide avec Δ à l'instant en cause, la considération du volume balayé par la surface frontière donne immédiatement

$$\frac{d}{dt}\vec{I}(D) = \frac{d}{dt}\vec{I}(\Delta) + \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}\left(\vec{\alpha}.\vec{u}\right) d\sigma,$$
$$\frac{d}{dt}\vec{J}(D) = \frac{d}{dt}\vec{J}(\Delta) - \iint_S \overrightarrow{OM}^2\vec{\omega}\left(\vec{\alpha}.\vec{u}\right) d\sigma.$$

Cela fait apparaître dans les second membres des formules (1) les différences

$$\iint_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}\left(\vec{\alpha}.\vec{u}\right) - \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\left(\vec{\alpha}.\vec{\omega}\right)\right] d\sigma = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \left[\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}\right)\right] d\sigma$$

et

$$-\iint_S OM^2\left[\vec{\omega}\left(\vec{\alpha}.\vec{u}\right) - \vec{u}\left(\vec{\alpha}.\vec{\omega}\right)\right] d\sigma = -\iint_S OM^2\left[\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}\right)\right] d\sigma.$$

Pour un écoulement périodique, les moyennes prises au cours d'une période éliminent les termes

$$\frac{d}{dt}\vec{I}(\Delta) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\vec{J}(\Delta).$$

En fait, la formule donnée pour l'expression de $\vec{H}$ par M. Pérès revient à introduire, non pas la quantité $\vec{J}$ comme ci-dessus, mais la quantité équivalente appelée $\vec{J}''$ au paragraphe **15** *d*, ce qui remplace l'intégrale double

$$-\iint_S OM^2\left[\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}\right)\right] d\sigma$$

par

$$\frac{2}{3}\iint_\delta \overrightarrow{OM} \wedge \left\{\overrightarrow{OM} \wedge \left[\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}\right)\right]\right\} d\sigma.$$

---

[1] *Comptes rendus du IIIe Congrès international de Mécanique appliquée*, Stokholm, 1931, vol. **1**, p. 132.

c. Les formules (1) sont d'autre part susceptibles d'une interprétation qui vient corroborer les considérations du paragraphe **10**.

Dans la région périphérique helmoltzienne, les lignes tourbillons sont des lignes fluides. De façon plus précise, la ligne tourbillon issue d'un élément matériel de cette région reste, dans toute sa portion helmholtzienne, matériellement transportée par le fluide. Mais dès qu'elle pénètre dans la zone non helmoltzienne, elle perd cette propriété et présente, vis-à-vis du milieu, un certain glissement. La ligne étant prolongée jusqu'à ressortir de cette zone, *nous supposerons que le glissement s'annule à nouveau à l'arrivée dans la zone périphérique helmoltzienne*. On peut montrer que cette circonstance n'est pas générale, mais elle est assez usuelle et réalisée notamment lorsqu'il existe un plan de symétrie.

Cela étant, on imaginera la structure tourbillonnaire de D décomposée en tubes tourbillons infiniment déliés, qui se meuvent en conservant leurs intensités. Certains de ces tubes ont, comme il vient d'être expliqué, leurs extrémités dans la région périphérique helmholtzienne. La vitesse de déplacement absolu $\vec{v}$ d'un de ces tubes — définie en chaque point à une composante tangentielle près — se réduit, aux extrémités, à la vitesse $\vec{u}$ du fluide. La différence

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$$

est la *vitesse de glissement*.

Il peut également se présenter d'autres tubes, formant un noyau tourbillonnaire à l'intérieur de D : on leur attribuera encore, avec un large arbitraire, une vitesse de déplacement.

Un tube, d'intensité $2\,\delta\varphi$, a pour contribution dans $\vec{I}$ et $\vec{J}$ les intégrales curvilignes

$$\delta\vec{I} = \delta\varphi \int \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{M}, \qquad \delta\vec{J} = -\,\delta\varphi \int OM^2\, d\vec{M}.$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{I} = \delta\varphi \int \left(\vec{v} \wedge d\vec{M} + \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{v}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{J} = -\,\delta\varphi \int \left[2\left(\overrightarrow{OM}.\vec{v}\right) d\vec{M} + OM^2\, d\vec{v}\right].$$

Or

$$\vec{v} \wedge d\vec{M} + \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{v} = d(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}) + 2\vec{v} \wedge d\vec{M},$$
$$-2(\overrightarrow{OM}.\vec{v})\, d\vec{M} - OM^2 d\vec{v} = -d(OM^2\vec{v}) + 2\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{v} \wedge d\vec{M}).$$

Pour un tube ayant deux extrémités A et B dans la surface S, on a

$$\delta\varphi \int d(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}) = \quad \delta\varphi \left[\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\right]_A^B,$$
$$-\delta\varphi \int d(OM^2\vec{v}) \;=-\delta\varphi\left[OM^2\vec{v}\right]_A^B.$$

Comme $\vec{v}$ est égal à $\vec{u}$ sur S, et que $\delta\varphi$ représente le flux de $\vec{\omega}$ dans le tube, une sommation étendue à tous les tubes conduit aux intégrales

$$\iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\, d\Phi \qquad \text{et} \qquad -\iint_S OM^2\vec{u}\, d\Phi.$$

Le long d'un tube fermé les différentielles exactes ont une intégrale nulle. Les termes restants, sommés pour tous les tubes, ouverts ou fermés, engendrent les intégrales

$$2\iiint_D \vec{v} \wedge d\vec{K} \qquad \text{et} \qquad 2\iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{v} \wedge d\vec{K}).$$

Donc finalement

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\, d\Phi + 2\iiint_D \vec{v} \wedge d\vec{K},$$
$$\frac{d\vec{J}}{dt} = -\iint_S OM^2\vec{u}\, d\Phi + 2\iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{v} \wedge d\vec{K}).$$

Par rapprochement avec les relations (1) il vient alors

$$\vec{R} = 2\rho\iiint \vec{w} \wedge d\vec{K},$$
$$\vec{H} = 2\rho\iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{w} \wedge d\vec{K}).$$

Ainsi les actions extérieures se trouvent directement reliées au glissement des tubes tourbillonnaires. Il serait vain d'ailleurs d'attribuer à ce résultat une valeur locale.

Le cas bidimensionnel donne lieu à des considérations analogues, l'évolution de la structure tourbillonnaire d'un domaine fluide pouvant, avec un large arbitraire, être représentée comme un déplacement de quantités tourbillonnaires conservatives.

19. Noyau tourbillonnaire. — *a*. Adoptant maintenant un point de vue différent, plus important pour les applications, nous envisageons le cas où D est un *noyau tourbillonnaire*, baigné de fluide helmholtzien. Nous voulons dire par là que $\vec{\omega}.\vec{\alpha}$ est nul sur S; c'est ce qui a lieu, *a fortiori*, si la frontière S est tracée dans une région irrotationnelle. Les intégrales en $d\Phi$ disparaissent des formules (1) du paragraphe **18**. En outre $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont, comme on l'a vu au paragraphe **16**, les éléments de réduction d'un *torseur de polarisation* bien défini.

En vue de l'évaluation de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ nous écrivons

$$\vec{u} = \vec{u}^{(i)} + \vec{u}^{(e)},$$

en désignant par $\vec{u}^{(i)}$ la vitesse induite, selon les formules de Biot et Savart, par la structure tourbillonnaire contenue dans D. Le reste $\vec{u}^{(e)}$ constitue alors la *vitesse primitive*, soit, en quelque sorte, la vitesse qu'on observerait en l'absence du noyau tourbillonnaire D. Dès lors

$$\vec{A} = 2\iiint_D \vec{u}^{(i)} \wedge d\vec{K} + 2\iiint_D \vec{u}^{(e)} \wedge d\vec{K},$$
$$\vec{B} = 2\iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{u}^{(i)} \wedge d\vec{K}\right) + 2\iiint_D OM \wedge \left(\vec{u}^{(e)} \wedge d\vec{K}\right).$$

Les intégrales en $u^{(i)}$ peuvent être envisagées comme relatives à un écoulement qui emplirait l'espace entier, avec structure tourbillonnaire restreinte à D. C'est dire qu'on peut remplacer le domaine d'intégration par l'intérieur d'une quelconque surface fermée Σ, renfermant D, et par la transformation du paragraphe **8** *b*, cela donne

$$\iiint_D \vec{u}^{(i)} \wedge d\vec{K} = \iint_\Sigma \left[\frac{1}{2}\vec{u}^{(i)2}\vec{\alpha} - \left(\vec{u}^{(i)}.\vec{\alpha}\right)\vec{u}^{(i)}\right] d\sigma,$$
$$\iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{u}^{(i)} \wedge d\vec{K}\right) = \iint_\Sigma \overrightarrow{OM} \wedge \left[\frac{1}{2}\vec{u}^{(i)2}.\vec{\alpha} - \left(\vec{u}^{(i)}.\vec{\alpha}\right)\vec{u}^{(i)}\right] d\sigma.$$

En prenant alors pour Σ une sphère de rayon indéfiniment croissant, et vu l'allure à l'infini de $u^{(i)}$, on conclut à la nullité de ces intégrales.

Donc, dans ce cas d'un noyau tourbillonnaire, il reste

$$\frac{1}{\rho}\vec{R} = \frac{d\vec{I}}{dt} - \vec{\mathcal{A}}, \qquad \frac{1}{\rho}\vec{H} = \frac{d\vec{J}}{dt} - \vec{\mathcal{B}},$$

où $\vec{\mathcal{A}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ sont des intégrales d'interaction entre la structure tourbillonnaire de D *et la vitesse primitive. De ce fait le calcul est encore possible lorsque* D *contient des singularités ou des lignes tourbillonnaires.*

Supposons en particulier que l'écoulement soit *permanent*, et que les éléments tourbillonnaires de D n'atteignent pas la frontière S, laquelle se trouve ainsi tracée dans une région irrotationnelle. Alors la structure tourbillonnaire intérieure à D est fixe dans l'espace, d'où l'invariance de $\vec{I}$ et $\vec{J}$ et l'annulation des dérivées. $\vec{R}$ et $\vec{H}$ se réduisent donc à ces termes d'interaction : nous ferons voir au paragraphe **25** qu'on généralise par là le théorème de Joukowsky.

b. Les vecteurs ainsi introduits,

$$\vec{\mathcal{A}} = 2\iiint_{D} \vec{u}^{(e)} \wedge d\vec{K},$$
$$\vec{\mathcal{B}} = 2\iiint_{D} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{u}^{(e)} \wedge d\vec{K}\right),$$

constituent la résultante et le moment en O d'un torseur : c'est, disons-nous, le torseur de l'*influence tourbillonnaire* subie par le noyau tourbillonnaire D. Il se rapproche, par sa forme, du torseur des forces électromagnétiques subies, selon la loi de Laplace, par un système de courants fermés, de la part d'un champ magnétique.

Dans le cas d'un milieu emplissant tout l'espace, avec repos à l'infini, $\vec{u}^{(e)}$ n'est autre que la vitesse induite, selon la formule de Biot-Savart, par l'ensemble de la structure tourbillonnaire extérieure à D. Imaginons à ce sujet *deux noyaux tourbillonnaires* distincts D' et D''. Soient respectivement $\vec{u}'$ et $\vec{u}''$ les champs de vitesses qu'ils induisent selon les formule de Biot et Savart.

Les intégrales

$$\vec{\mathcal{A}}' = 2 \iiint_{D'} \vec{u}'' \wedge d\vec{K},$$

$$\vec{\mathcal{B}}' = 2 \iiint_{D'} \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u}'' \wedge d\vec{K}),$$

constituent la contribution du noyau D″ dans l'influence tourbillonnaire que subit D′ : on dira qu'elles définissent le torseur de l'*influence tourbillonnaire subie par* D′ *de la part du noyau* D″. De même

$$\vec{\mathcal{A}}'' = 2 \iiint_{D} \vec{u}' \wedge d\vec{K};$$

$$\vec{\mathcal{B}}'' = 2 \iiint_{D''} \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u}' \wedge d\vec{K}),$$

définissent l'influence tourbillonnaire subie par D″ de la part de D′. Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, il est alors facile de montrer que

$$\vec{\mathcal{A}}' + \vec{\mathcal{A}}'' = 0, \qquad \vec{\mathcal{B}}' + \vec{\mathcal{B}}'' = 0.$$

Les influences tourbillonnaires vérifient la règle d'action et de réaction.

c. Il est important, pour les applications, d'étendre au cas général où D n'est pas un noyau tourbillonnaire, ce principe d'une décomposition du champ des vitesses en vitesse primitive et vitesse induite. La vitesse induite

$$\vec{u}^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \iiint_{D} \frac{1}{l^3} \vec{\omega}_P \wedge \overrightarrow{PM}\, d\tau_P$$

contribue à l'intégrale $\vec{A}$ par l'expression

$$\vec{A}^{(i)} = \frac{1}{\pi} \iiint_{M} \iiint_{P} \frac{1}{l^3} (\vec{\omega}_P \wedge \overrightarrow{PM}) \wedge \vec{\omega}_M\, d\tau_P\, d\tau_M.$$

La quantité intégrée s'écrit encore

$$\frac{1}{l^3} (\vec{\omega}_P \cdot \vec{\omega}_M) \overrightarrow{PM} + \left(\vec{\omega}_M \cdot \vec{\nabla}_M \frac{1}{l}\right) \vec{\omega}_P;$$

le premier terme est fonction antisymétrique de M et P et donne donc zéro dans l'intégration sextuple. Pour le second terme, on permutera les intégrations, ce qui conduit à calculer d'abord l'intégrale

$$\iiint_D \vec{\omega}_M . \vec{\nabla}_M \frac{1}{l} d\tau_M = \iint_S \frac{1}{l} \vec{\omega}_M . \vec{\alpha}_M d\sigma_M,$$

d'où finalement

$$\vec{A}^{(i)} = \iint_S \vec{\Pi} \, d\Phi,$$

en posant

$$\vec{\Pi}(M) = \frac{1}{\pi} \iiint_D \frac{1}{l} \vec{\omega}_P \, d\tau_P.$$

Pour l'intégrale $\vec{B}$, des calculs semblables donnent la contribution de la vitesse induite

$$\vec{B}^{(i)} = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Pi} \, d\Phi.$$

Donc finalement

$$\frac{1}{\rho} \vec{R} = \frac{d\vec{I}}{dt} - \vec{\mathfrak{A}} - \iint_S \left(\vec{\Pi} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right) d\Phi,$$

$$\frac{1}{\rho} \vec{H} = \frac{d\vec{J}}{dt} - \vec{\mathfrak{B}} - \iint_S \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Pi} - OM^2 \vec{u}\right) d\Phi;$$

où $\vec{\mathfrak{A}}$ et $\vec{\mathfrak{B}}$ sont, comme au paragraphe *a*, calculés à partir de la vitesse primitive seule. L'intérêt de ce résultat est d'être encore applicable lorsque D contient des singularités.

d. Ces considérations s'adaptent au cas bidimensionnel, sans qu'il y ait cette fois de condition de fermeture à invoquer pour parler d'un noyau tourbillonnaire.

Soit D une portion d'un milieu incompressible, *supposé helmholtzien dans le voisinage de la courbe frontière* C, mais de constitution interne quelconque. Les formules du paragraphe **17** *a* donnent

$$\frac{1}{\rho} \vec{R} = \frac{d\vec{I}'}{dt} + \vec{z} \wedge \oint_C \left[\left(\vec{u} . \overrightarrow{dM}\right) \vec{u} - \frac{1}{2} u^2 \, \overrightarrow{dM}\right],$$

$$\frac{1}{\rho} H = \frac{dJ'}{dt} + \oint_C OM . \left[\left(\vec{u} . \overrightarrow{dM}\right) \vec{u} - \frac{1}{2} u^2 \, \overrightarrow{dM}\right],$$

avec, d'après le paragraphe **9** *d*,

$$\oint_C \left[\left(\vec{u}.d\vec{M}\right)\vec{u} - \frac{1}{2}u^2\,d\vec{M}\right] = 2\iint_D \vec{u}\,dK',$$

$$\oint_C \overrightarrow{OM}.\left[\left(\vec{u}.d\vec{M}\right)\vec{u} - \frac{1}{2}u^2\,d\vec{M}\right] = 2\iint_D \overrightarrow{OM}.\vec{u}\,dK'.$$

On pose donc

$$\vec{A}' = -2\vec{z}\wedge\iint_D \vec{u}\,dK'$$

$$B' = -2\iint \overrightarrow{OM}.\vec{u}\,dK'$$

et il reste

$$\frac{1}{\rho}\vec{R} = \frac{d\vec{I}'}{dt} - \vec{A}', \qquad \frac{1}{\rho}H = \frac{dJ'}{dt} - B'.$$

Comme tout à l'heure, on décompose la vitesse $\vec{u}$ en la somme d'une *vitesse primitive* $\vec{u}^{(e)}$ et de la vitesse $\vec{u}^{(i)}$, induite par la structure tourbillonnaire intérieure à D. En renouvelant le raisonnement du paragraphe **17** *b*, on montre que la contribution de $\vec{u}^{(i)}$ dans $\overrightarrow{A'}$ et B' est nulle, de sorte que ces termes se réduisent à des intégrales $\vec{\mathcal{A}}'$ et $\mathcal{B}'$ d'interaction entre la vitesse primitive et la structure tourbillonnaire intérieure, calculables même si cette structure intérieure comporte des singularités. $\vec{\mathcal{A}}'$ et $\mathcal{B}'$ constituent la résultante et le moment résultant du torseur d'*influence tourbillonnaire* subie par D. On vérifie encore dans ce cas la règle d'action et de réaction.

20. Singularités ponctuelles. — *a*. Les singularités ponctuelles : doublet dans le cas de l'espace, tourbillon ponctuel et doublet dans le cas du plan, étudiées au paragraphe **12**, n'étaient envisagées alors qu'à titre strictement descriptif. Une telle singularité se présentant, à un instant initial, au sein d'un fluide parfait, l'étude de l'évolution ultérieure pose des questions fort délicates. Il n'est même pas certain *a priori* que la singularité conserve son caractère ponctuel : il semble possible qu'elle arrive à s'étendre en un ensemble de dimensions non nulles, quoique encore de mesure nulle. De toutes manières la singularité ponctuelle ne saurait être conçue mécaniquement que comme schéma limite d'un noyau tourbillonnaire de dimensions infiniment petites : l'évolution ultérieure dépend de la *microstructure interne*. Nous envisageons, dans ce qui suit, des singularités conservant leur caractère ponctuel, au sein d'un fluide helmholtzien, *le corps de la singularité pouvant d'ailleurs n'être pas lui-même helmholtzien* et subir des *actions extérieures* ne dérivant pas d'un potentiel (soit $\vec{R}$ leur résultante, $\vec{H}$ leur moment résultant).

D'un autre côté, un *doublet* étant localisé en un point P de l'espace, le champ de vitesses $\vec{u}$ dans le voisinage a été défini au paragraphe **12** comme la somme d'un champ de la forme

$$\vec{w}(M) = \frac{3}{4\pi r^5}\left(\vec{L}.\overrightarrow{PM}\right)\overrightarrow{PM} - \frac{1}{4\pi r^3}\vec{L}$$

et d'un champ $\vec{v}$, continu ainsi que ses dérivées du premier ordre dans le domaine de P, lequel champ définit l'écoulement primitif. Il faut noter alors qu'une structure de cette forme ne saurait subsister que si cet écoulement primitif est *irrotationnel*. Autour de P, en effet, le champ $\vec{\omega}$ se réduit au tourbillon de $\vec{v}$. Des équations de Helmholtz, jointes à la considération de la forme de l'écoulement, on conclut que ce champ ne peut demeurer continu dans le domaine du point P. La conclusion est la même pour un doublet du plan (sauf peut-être dans le cas spécial d'un écoulement primitif à ζ uniforme).

Par contre, dans le cas bidimensionnel, le *tourbillon ponctuel* paraît pouvoir subsister sur un écoulement primitif rotationnel régulier.

Ces réserves faites, les considérations des paragraphes précédents permettent bien facilement de dresser le bilan dynamique d'un doublet ou d'un tourbillon ponctuel.

b. Soit d'abord, dans l'espace, un *doublet*, de polarisation $\vec{L}$, sur un écoulement primitif irrotationnel. Nous appliquons les résultats du paragraphe **19** à un petit domaine fluide renfermant P, dont la structure tourbillonnaire se réduit au doublet.

Ainsi qu'on l'a vu au paragraphe **16** *b*, on a

$$\vec{I} = \vec{L}, \qquad \vec{J} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{L},$$

d'où

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \qquad \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \wedge \vec{L} + \overrightarrow{OP} \wedge \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

En outre, selon les principes du paragraphe **12**, il vient

$$\vec{\mathfrak{A}} = 2 \iiint_D \vec{v} \wedge d\vec{K} \sim \vec{\underset{*}{v}} \wedge (\vec{L} \wedge \vec{\nabla})$$

ou, par la formule du double produit vectoriel,

$$\vec{\mathfrak{A}} = -(\vec{\underset{*}{v}} . \vec{L}) \vec{\nabla}.$$

De même

$$\vec{\mathfrak{B}} = 2 \iiint_D \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{v} \wedge d\vec{K}) \sim \overrightarrow{\underset{*}{OM}} \wedge [\vec{\underset{*}{v}} \wedge (\vec{L} \wedge \vec{\nabla})],$$

c'est-à-dire

$$\vec{\mathfrak{B}} = -\overrightarrow{\underset{*}{OM}} \wedge \vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{L}) + \overrightarrow{\underset{*}{OM}} \wedge \vec{L}(\vec{v}.\vec{\nabla}) + \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\mathfrak{A}} = \vec{v} \wedge \vec{L} + \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\mathfrak{A}}.$$

On prend l'origine fixe O en coïncidence, à l'instant en cause, avec P et il reste [1]

$$\frac{1}{\rho} \vec{R} = \frac{d\vec{L}}{dt} + (\vec{\underset{*}{v}}.\vec{L}) \vec{\nabla}, \qquad \frac{1}{\rho} \vec{H} = \frac{d\vec{P}}{dt} \wedge \vec{L} - \vec{v} \wedge \vec{L}.$$

On peut d'ailleurs poser

$$\frac{d\vec{P}}{dt} - \vec{v} = \vec{V},$$

---

[1] Notons qu'on pourrait traiter formellement le cas où l'écoulement primitif présente un tourbillon non nul $\vec{\Omega}$ (le calcul est plus délicat parce qu'alors le domaine isolé n'est plus un noyau tourbillonnaire fermé). Dans l'expression de $\vec{R}$ apparaît un terme en $\vec{L} \wedge \vec{\Omega}$ peut être significatif, qualitativement, d'une tendance à l'*orientation* des singularités au sein d'un écoulement rotationnel.

vitesse du doublet par rapport à l'écoulement primitif, ce qui laisse

$$\frac{1}{\rho}\vec{H} = \vec{V} \wedge \vec{L}.$$

Les résultats sont formellement identiques pour un doublet du plan (¹).

Pour un *doublet libre*, c'est-à-dire ne subissant pas de forces extérieures, il reste

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -(\vec{\nu}.\vec{L})\vec{V}, \qquad \vec{L} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{L} \wedge \vec{\nu},$$

équations qui définissent l'évolution du vecteur de polarisation $\vec{L}$ (selon la même loi que nous avons trouvée au paragraphe **6** *a* pour un $\vec{\alpha}\,d\sigma$) et seulement la *composante perpendiculaire* à $\vec{L}$ *de la vitesse de* P. Notre bilan global est insuffisant pour préciser la vitesse de progression du doublet selon la direction de $\vec{L}$. *A priori*, pour un doublet strictement helmholtzien, cette vitesse dépend de la microstructure interne : nous ne saurions même affirmer qu'il existe des doublets stationnaires, pour lesquels on aurait

$$\vec{V}.\vec{L} = 0.$$

c. Le cas d'un *tourbillon ponctuel*, d'intensité $2K'$, localisé en un point P d'un écoulement helmholtzien bidimensionnel, se traite d'une manière semblable. En posant encore

$$\frac{d\vec{P}}{dt} - \vec{\nu} = \vec{V},$$

vitesse de P par rapport à l'écoulement primitif, on trouve que le corps de la singularité doit subir des actions extérieures équivalentes à une force unique, appliquée en P et définie par

$$\vec{R} = -2\rho K'\vec{z} \wedge \vec{V} = -\rho\Gamma\vec{z} \wedge \vec{V}$$

(Γ, circulation de $\vec{u}$ autour du tourbillon).

(¹) *Cf.* J. Pérès, *Cours de Mécanique des fluides*, p. 147, où le cas du mouvement permanent est traité au moyen des formules de Blasius.

En particulier, pour un tourbillon libre,

$$\vec{V} = 0.$$

21. Surfaces de glissement. — Ainsi que nous l'avons fait remarquer, les considérations du paragraphe **18**, basées sur des dérivations séquentes, sont en défaut lorsque la surface frontière S coupe des surfaces de glissement. Cette frontière, supposée continue à l'instant initial, se trouve en effet scindée dans l'évolution ultérieure. On présume cependant que les résultats acquis peuvent être adaptés à ce cas par l'assimilation tourbillonnaire des surfaces de glissement. Dans l'évaluation des dérivées $\frac{d\vec{I}}{dt}$ et $\frac{d\vec{J}}{dt}$, la circonscription invoquée pour les éléments tourbillonnaires superficiels correspondra à *la portion de couche médiane qui était incluse dans le domaine initial.*

Il suffit de rejoindre dans ce cadre les relations purement cinématiques établies aux paragraphes **14** *b* et **15** *b* :

$$\frac{1}{\rho}\vec{\sigma}' = \frac{d\vec{I}}{dt} - \iint_S \left[\frac{1}{2}u^2\vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\vec{u}\right] d\sigma - \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\, d\Phi - \frac{1}{2}\iint \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma})\, d\sigma, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\rho}\vec{\mu}' = \frac{d\vec{J}}{dt} - \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \left[\frac{1}{2}u^2\vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\vec{u}\right] d\sigma + \iint_S OM^2\vec{u}\, d\Phi + \frac{1}{2}\iint_S OM^2\vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma}\, d\sigma. \tag{2}$$

Développons les calculs pour la première de ces relations. Le domaine D est supposé partagé en deux parties D′ et D″ par la surface de discontinuité Σ; soient S′ et S″ les portions correspondantes de la frontière S. On a

$$\vec{\sigma}'(D) = \vec{\sigma}'(D') + \vec{\sigma}'(D'').$$

Soient en outre A′, A″ les contributions de S′, S″ dans l'intégrale

$$\iint_S \left[\frac{1}{2}u^2\vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\vec{u}\right] d\sigma,$$

G', G'' leurs contributions dans l'intégrale

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma}\right) d\sigma.$$

Soient $\vec{\mathrm{I}}'$, $\vec{\mathrm{I}}''$, $\vec{\mathrm{I}}^\star$ les contributions, dans l'intégrale $\vec{\mathrm{I}}$, des domaines D' et D'' et de la couche tourbillonnaire Σ (limitée au cours du temps comme il vient d'être dit); soient $\vec{\mathrm{E}}'$, $\vec{\mathrm{E}}''$, $\vec{\mathrm{E}}^\star$ leurs contributions dans l'intégrale

$$\iint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{u}\, d\Phi,$$

c'est-à-dire

$$\vec{\mathrm{E}}^\star = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{u}^\star\left[\left(\vec{u}' - \vec{u}''\right) . d\vec{\mathrm{M}}\right];$$

Γ est la courbe de section de Σ par la frontière S. Nous reprenons là les notations du paragraphe **8** : $\vec{\alpha}$ désigne le vecteur unité normal à Σ orienté de D'' vers D'; la courbe Γ est orientée corrélativement. La relation (1), appliquée séparément aux domaines D' et D'', donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\vec{\sigma}'(\mathrm{D}') = \frac{d\vec{\mathrm{I}}'}{dt} - \vec{\mathrm{A}}' - \vec{\mathrm{E}}' - \vec{\mathrm{G}}' &+ \iint_{\Sigma}\left[\frac{1}{2}u'^2\vec{\alpha} - \left(\vec{u}'.\vec{\alpha}\right)\vec{u}'\right] d\sigma \\
&+ \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{u}'\left(\vec{\alpha}.\vec{\omega}'\right) d\sigma + \frac{1}{2}\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma}'\right) d\sigma, \\
\frac{1}{\rho}\vec{\sigma}'(\mathrm{D}'') = \frac{d\vec{\mathrm{I}}''}{dt} - \vec{\mathrm{A}}'' - \vec{\mathrm{E}}'' - \vec{\mathrm{G}}'' &- \iint_{\Sigma}\left[\frac{1}{2}u''^2\vec{\alpha} - \left(\vec{u}''.\vec{\alpha}\right)\vec{u}''\right] d\sigma \\
&- \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{u}''\left(\vec{\alpha}.\vec{\omega}''\right) d\sigma - \frac{1}{2}\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma}''\right) d\sigma.
\end{aligned}$$

Par addition il vient donc

$$\frac{1}{\rho}\vec{\sigma}'(\mathrm{D}) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathrm{I}}' + \vec{\mathrm{I}}''\right) - \vec{\mathrm{A}} - \vec{\mathrm{E}} - \vec{\mathrm{G}} - \vec{\mathcal{A}}^\star - \vec{\mathcal{E}}^\star - \vec{\mathcal{G}}^\star,$$

en posant

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{A}}^\star &= \iint_{\Sigma}\left[\frac{1}{2}u''^2\vec{\alpha} - \left(\vec{u}''.\vec{\alpha}\right)\vec{u}'' - \frac{1}{2}u'^2\vec{\alpha} + \left(\vec{u}'.\vec{\alpha}\right)\vec{u}'\right] d\sigma, \\
\vec{\mathcal{E}}^\star &= \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \left[\vec{u}''\left(\vec{\alpha}.\vec{\omega}''\right) - \vec{u}'\left(\vec{\alpha}.\vec{\omega}'\right)\right] d\sigma, \\
\vec{\mathcal{G}}^\star &= \frac{1}{2}\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \left[\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{\gamma}'' - \vec{\gamma}'\right)\right] \delta\sigma.
\end{aligned}$$

Il s'agit de prouver que

$$-\vec{\mathcal{A}}^\star-\vec{\mathcal{E}}^\star-\vec{\mathcal{G}}^\star=\frac{d\vec{\mathrm{I}}^\star}{dt}-\vec{\mathrm{E}}^\star.$$

Les calculs du paragraphe **8** *b* donnent

$$\vec{\mathcal{A}}^\star=-2\iint_\Sigma \vec{u}^\star\wedge d\vec{\mathrm{K}}.$$

On écrit de même

$$\vec{u}'=\vec{u}^\star+\vec{\delta},\qquad \vec{u}''=\vec{u}^\star-\vec{\delta},$$

d'où

$$\begin{aligned}\vec{u}''(\vec{\alpha}.\vec{\omega}'')-\vec{u}'(\vec{\alpha}.\vec{\omega}'')= {} & \frac{1}{2}(\vec{u}^\star-\vec{\delta})\left[\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}.(\underset{\star}{\vec{u}^\star}-\underset{\star}{\vec{\delta}})\right]\\ & -\frac{1}{2}(\vec{u}^\star+\vec{\delta})\left[\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}.(\underset{\star}{\vec{u}^\star}+\underset{\star}{\vec{\delta}})\right]\\ = {} & -\vec{u}^\star(\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}.\underset{\star}{\vec{\delta}})-\vec{\delta}(\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}.\underset{\star}{\vec{u}^\star})\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\vec{\mathcal{E}}^\star=\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\left[-\vec{u}^\star(\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}.\underset{\star}{\vec{\delta}})-\vec{\delta}(\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}.\underset{\star}{\vec{u}})\right]d\sigma.$$

D'autre part, on a, par la transformation de Stokes,

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{E}}^\star= {} & -\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\vec{u}^\star(\underset{\star}{\vec{\delta}}.\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla})\,d\sigma=-\iint_\Sigma(\vec{\delta}\wedge\vec{\alpha})\wedge\vec{u}^\star\,d\sigma\\ & -\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\left[\underset{\star}{\vec{u}^\star}(\vec{\delta}.\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla})+\vec{u}^\star(\underset{\star}{\vec{\delta}}.\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla})\right]d\sigma,\end{aligned}$$

donc, après réduction,

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{E}}^\star-\vec{\mathcal{A}}^\star-\vec{\mathcal{E}}^\star-\vec{\mathcal{G}}^\star= {} & \iint_\Sigma \vec{u}^\star\wedge d\vec{\mathrm{K}}\\ & +\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\Big[\vec{\delta}(\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}.\underset{\star}{\vec{u}^\star})-\underset{\star}{\vec{u}^\star}(\vec{\delta}.\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla})\\ & \qquad +\frac{1}{2}\vec{\alpha}\wedge(\vec{\gamma}'-\vec{\gamma}'')\Big]\,d\sigma.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on effectue une dérivation séquente selon la couche médiane

$$\frac{d\vec{\mathrm{I}}^\star}{dt}=\frac{d}{dt}\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge d\vec{\mathrm{K}}=\iint_\Sigma \vec{u}^\star\wedge d\vec{\mathrm{K}}+\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\frac{d}{dt}(d\vec{\mathrm{K}}),$$

et les calculs du paragraphe **8** *c* donnent

$$\frac{d}{dt}\left(d\vec{K}\right)=\left[\vec{\delta}\left(\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}.\underset{\star}{\vec{u}^{\star}}\right)-\underset{\star}{\vec{u}^{\star}}\left(\vec{\alpha}\wedge\vec{\nabla}.\vec{\delta}\right)+\frac{1}{2}\vec{\alpha}\wedge\left(\vec{\gamma}'-\vec{\gamma}''\right)\right]d\sigma.$$

L'égalité annoncée en résulte.

La relation des moments (2) s'étend de même. Le cas bidimensionnel conduit à une extension analogue.

22. Bilan énergétique. — *a*. Sans nous soucier, pour ce simple aperçu, de réduire les hypothèses au minimum (nous allons être amenés notamment à supposer $\vec{\omega}$ dérivable par rapport aux x_i), reprenons le point de vue du paragraphe **18** *c*. Soit une portion D de milieu incompressible, helmoltzien dans le voisinage de la frontière S. L'évolution de la structure tourbillonnaire est décrite comme une déformation des lignes tourbillons, supposées individualisées de telle sorte que l'intensité de tout tube reste constante dans le temps: un tube atteignant la région périphérique helmholtzienne par deux extrémités y présente par hypothèse des bases matériellement liées au fluide.

La vitesse absolue $\vec{v}$ de déplacement des lignes est définie en chaque point à une composante tangentielle près : ce champ de vitesses est celui d'un ensemble d'éléments matériels, *fluide fictif* (θ), la loi de déplacement de ces éléments le long de chaque ligne étant fixée arbitrairement. La différence

$$\vec{v}-\vec{u}=\vec{w}$$

constitue la *vitesse de glissement* des lignes par rapport au milieu.

Sur la frontière S

$$\vec{w}\wedge\vec{\omega}=0.$$

Le flux de $\vec{\omega}$ à travers une portion de surface Σ, transportée par le fluide fictif, reste constant dans le temps, puisque c'est l'intensité d'un tube. Pour un élément $d\sigma$ d'une telle surface on a donc, en notant $\frac{d_\theta}{dt}$ des dérivées séquentes prises selon le fluide fictif,

$$\frac{d_\theta}{dt}\left(\vec{\omega}.\vec{\alpha}\,d\sigma\right)=0,$$

ou, d'après le paragraphe **6** *a*,

$$\frac{d_0\vec{\omega}}{dt}\cdot\vec{\alpha}\,d\sigma+\vec{\omega}\cdot\Big[\big(\vec{\nabla}\cdot\underset{*}{\vec{v}}\big)\vec{\alpha}-\big(\vec{\alpha}\cdot\underset{*}{\vec{v}}\big)\vec{\nabla}\Big]\,d\sigma=0$$

quel que soit $\vec{\alpha}$, d'où

$$\frac{d_0\vec{\omega}}{dt}=\big(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\big)\underset{*}{\vec{v}}-\big(\underset{*}{\vec{v}}\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{\omega}.$$

D'autre part, si $\frac{d_f}{dt}$ représente une dérivée séquente selon le milieu matériel initial,

$$\frac{d_f\vec{\omega}}{dt}=\frac{d_0\vec{\omega}}{dt}-\big(\vec{w}\cdot\vec{\nabla}\big)\underset{*}{\vec{\omega}},$$

avec

$$\vec{\nabla}\cdot\underset{*}{\vec{w}}=\vec{\nabla}\cdot\big(\underset{*}{\vec{v}}-\underset{*}{\vec{u}}\big)=\vec{\nabla}\cdot\underset{*}{\vec{v}},$$

et l'on en tire

$$\begin{aligned}\frac{d_f\vec{\omega}}{dt}&=\big(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\big)\underset{*}{\vec{u}}+\big(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\big)\underset{*}{\vec{w}}-\big(\underset{*}{\vec{w}}\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{\omega}-\big(\vec{w}\cdot\vec{\nabla}\big)\underset{*}{\vec{\omega}}\\&=\big(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\big)\underset{*}{\vec{u}}+\big(\underset{*}{\vec{\omega}}\cdot\vec{\nabla}\big)\underset{*}{\vec{w}}-\big(\underset{*}{\vec{w}}\cdot\vec{\nabla}\big)\underset{*}{\vec{\omega}}\end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{D}_f\vec{\omega}=\vec{\nabla}\wedge\big(\underset{*}{\vec{w}}\wedge\underset{*}{\vec{\omega}}\big).$$

La relation (6) du paragraphe **7** *d* donne alors

$$2\vec{\nabla}\wedge\big(\underset{*}{\vec{w}}\wedge\underset{*}{\vec{\omega}}\big)=\vec{\nabla}\wedge\vec{\gamma}.$$

L'équation locale de la Dynamique est, d'autre part,

$$\rho\vec{\gamma}=-\vec{\nabla}\underset{*}{q}+\vec{F}+\vec{\varphi},$$

$\vec{F}$, champ des forces sans potentiel, $\vec{\varphi}$, divergence du champ tensoriel des contraintes non hydrostatiques, vecteurs caractéristiques des actions non helmholtziennes, qui sont censés s'annuler à la frontière de D. Et il reste

$$2\vec{\nabla}\wedge\big(\underset{*}{\vec{w}}\wedge\underset{*}{\vec{\omega}}\big)=\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\wedge\big(\vec{F}+\vec{\varphi}\big).$$

b. Supposons alors que le domaine D soit à connexion superficielle simple, c'est-à-dire que S se compose d'une surface fermée unique : on peut toujours se ramener à ce cas en posant que les éventuelles *lacunes helmholtziennes* font partie du domaine D. De la relation précédente il résulte que

$$\vec{F} + \vec{\varphi} = 2\rho \vec{w} \wedge \vec{\omega} + \vec{\nabla}_{*}\lambda,$$

λ étant un champ scalaire dont le gradient doit, comme les autres termes, s'annuler sur S. Ce champ scalaire possède donc une valeur constante unique λ_0 sur S (d'où il résulte qu'il est encore bien défini et uniforme, même lorsque S est à connexion linéaire multiple).

Pour l'évaluation des *puissances*, on écrit alors

$$\iiint_D \vec{u}.(\vec{F} + \vec{\varphi})\, d\tau = 2\rho \iiint_D \vec{u}.\vec{w} \wedge \vec{\omega}\, d\tau + \iiint_D \vec{u}.\vec{\nabla}_{*}\lambda\, d\tau,$$

avec

$$\iiint_D \vec{u}.\vec{\nabla}_{*}\lambda\, d\tau = \iiint_D \vec{u}_{*}.\vec{\nabla}_{*}\lambda\, d\tau = \iint_S \vec{u}.\vec{\alpha}\lambda\, d\sigma = \lambda_0 \iint_S \vec{u}.\vec{\alpha}\, d\sigma = 0.$$

Or

$$\iiint_D \vec{u}.\vec{F}\, d\tau = \mathfrak{P}^{(e)},$$

représente *la puissance développée au cours du mouvement par les actions extérieures sans potentiel.* D'autre part, puisque le tenseur T est nul sur S, on a

$$\iiint_D \vec{u}.\vec{\varphi}\, d\tau = \iiint_D u_i \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\, d\tau = \iint_S u_i T_{ik} \alpha_k\, d\sigma - \iiint_D \frac{\partial u_i}{\partial x_k} T_{ik}\, d\tau = \mathfrak{P}^{(i)},$$

puissance développée par les tensions intérieures du milieu. Et il reste

$$\mathfrak{P}^{(i)} + \mathfrak{P}^{(e)} = 2\rho \iiint_D \vec{u}.\vec{w} \wedge \vec{\omega}\, d\tau$$

La puissance développée par les actions non helmholtziennes se trouve ainsi directement reliée au glissement des lignes tourbillonnaires [1].

---

[1] Noter que l'évaluation précédente de la puissance serait aussi bien applicable pour toute évolution virtuelle à dilatation nulle. En prenant en particulier

C'est, nous semble-t-il, à partir de ce point de vue énergétique que la théorie des tourbillons prend son aspect le plus significatif. D'ailleurs, même pour un milieu compressible, les *conditions de Helmholtz* sont de nature énergétique. Les développements ultérieurs de la théorie, pour le cas des milieux compressibles quelconques, seront vraisemblablement obtenus dans cette voie, avec l'intervention de la Thermodynamique.

c. Rappelons encore ici une évaluation de la force vive d'une portion de fluide (¹), qui apporte un complément naturel aux considérations des précédents chapitres. Au paragraphe **8** *b* nous avons montré l'équivalence de la répartition vectorielle spatiale

$$\iiint_D 2\vec{u} \wedge \vec{\omega}\, d\tau$$

et de la répartition superficielle

$$\iint_S \left[\frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\vec{u}\right] d\sigma,$$

tant du point de vue de la résultante que de celui du moment résultant. Nous comparons maintenant les *viriels* de ces répartitions; soit

$$V = 2\iiint_D \overrightarrow{OM}.\vec{u} \wedge \vec{\omega}\, d\tau.$$

On écrit

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{OM}.(\vec{u} \wedge \vec{\omega}) &= \overrightarrow{OM}.[\vec{u} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \underset{\star}{\vec{u}})] = (\overrightarrow{OM}.\vec{\nabla})(\vec{u}.\underset{\star}{\vec{u}}) - (\overrightarrow{OM}.\underset{\star}{\vec{u}})(\vec{u}.\vec{\nabla}) \\ &= \frac{1}{2}(\underset{\star}{\overrightarrow{OM}}.\vec{\nabla})\underset{\star}{u^2} - \frac{3}{2}u^2 - (\underset{\star}{\overrightarrow{OM}}.\underset{\star}{\vec{u}})(\underset{\star}{\vec{u}}.\vec{\nabla}) + u^2, \end{aligned}$$

d'où

$$V = \iint_S \overrightarrow{OM}.\left[\frac{1}{2} u^2 \vec{\alpha} - (\vec{u}.\vec{\alpha})\vec{u}\right] d\sigma - \frac{1}{\rho} T,$$

T désignant l'*énergie cinétique* de la portion de milieu D.

---

comme déplacements virtuels une translation, puis une rotation, on retrouve les expressions du paragraphe **18** *c* pour la résultante et le moment résultant des $\vec{F}$ (les actions intérieures ont alors une puissance nulle).

(¹) *Cf.* Poincaré, *Théorie des tourbillons.*

Comme au paragraphe **8** *b*, ce résultat s'étend au cas de domaines scindés par une surface de glissement, en invoquant les éléments tourbillonnaires équivalents et la vitesse médiane. D'autre part, la *relation polaire* de cette relation quadratique est utile dans les évaluations de puissance.

23. Conclusions et exemples. — Il sortirait de notre programme de passer en revue maintenant les diverses considérations tourbillonnaires classiques, afin d'examiner les éclaircissements qu'y apportent les développements précédents. Bornons-nous à quelques généralités sur la résistance qu'éprouve un corps en translation uniforme, au sein d'un fluide indéfini.

Soit Θ_1 le système de référence lié au corps, Θ_0 le système, en translation par rapport au précédent, avec une vitesse $\overrightarrow{U}_0$, vis-à-vis duquel le fluide, soumis seulement à des forces dérivant d'un potentiel (pesanteur), est au repos à l'infini.

Si l'écoulement est permanent relativement à Θ_1, le torseur de polarisation est invariable par rapport à ce système : O_1 étant un point fixe par rapport à ce système, on a

$$\vec{I}(O_1) = \vec{I}_1, \qquad \vec{J}(O_1) = \vec{J}_1,$$

grandeurs vectorielles invariantes vis-à-vis de l'un ou de l'autre système de référence. Alors, O_0 désignant un point fixe par rapport à Θ_0,

$$\vec{I}(O_0) = \vec{I}_1, \qquad \vec{J}(O_0) = \vec{J}_1 + \overrightarrow{O_0 O_1} \wedge \vec{I}_1;$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\vec{I}(O_0) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\vec{J}(O_0) = \vec{I}_1 \wedge \vec{U}_0.$$

Si donc les conditions à l'infini précisées au chapitre III sont vérifiées, savoir :

annulation uniforme de $\vec{u}$ à l'infini,

annulation régulière de $r^5 \vec{\omega}$ (ou seulement de $r^4 \vec{\omega}$ si l'on se borne aux résultantes), annulation uniforme de $r^3 T$ et $r^4 \vec{\varphi}$ (ou seulement de $r^2 T$ et $r^3 \vec{\varphi}$), il vient

$$\vec{R} = 0, \qquad \vec{H} = \rho \vec{I}_1 \wedge \vec{U}_0.$$

Par $\vec{R}$ et $\vec{H}$ il faut entendre la résultante et le moment résultant des forces non conservatives appliquées au milieu entier : fluide et solide immergé, supposé de même densité que lui. Ce sont nécessairement des forces appliquées au solide, pour lequel les forces d'inertie sont d'autre part nulles. Si donc on fait abstraction des poussées archimédiennes, $\vec{R}$ et $\vec{H}$ représentent, au signe près, la résultante et le moment résultant des actions hydrodynamiques subies par le solide. Moyennant les conditions à l'infini ci-dessus on retombe ainsi sur le *paradoxe de d'Alembert* quelle que soit la nature des tensions internes du fluide (fluide réel quelconque).

Pourtant, d'après les considérations du paragraphe **10**, les conditions en question doivent être vérifiées pour un fluide visqueux initialement au repos. La conclusion est que, dans ce cas, un régime permanent ne peut jamais s'établir uniformément sur l'espace entier : la résultante de polarisation $\vec{I}$ est en constant accroissement. Cela n'enlève d'ailleurs pas de valeur à la conception d'un mouvement permanent; à l'intérieur de tout domaine fixé de Θ_1, on observera, au bout d'un temps suffisant, la permanence à une approximation quelconque. Et ainsi quelque grand que soit le domaine, le temps nécessaire devenant seulement plus grand. Il se définit de la sorte, mathématiquement, un régime permanent sur l'espace entier, mais ce régime ne vérifie certainement pas nos conditions à l'infini.

Ces circonstances se conçoivent clairement sur l'exemple d'une aile mince, en translation dans un fluide quasi parfait. La structure tourbillonnaire est réduite à la surface de l'aile et au *sillage* formé par les éléments de fluide que l'aile a côtoyé depuis sa mise en mouvement. En toute première approximation, ce sillage a la forme du rectangle que l'aile balaie dans son mouvement par rapport à Θ_0 : c'est un *feuillet* en constant accroissement (§ **16** *c*). Mais si l'on décrit le phénomène en se référant à Θ_1, on voit qu'un domaine arbitrairement grand renfermant l'aile finira par ne plus contenir les éléments initiaux du sillage et l'écoulement y tendra vers une forme permanente. Seulement ce régime n'est pas justiciable des considérations du chapitre III. Il est possible de développer à partir de ces points de vue des calculs approchés qui rejoignent la théorie de Prandtl [1].

b. Reprenons maintenant la question classique d'un corps en translation au sein d'un fluide parfait indéfini irrotationnel.

Soit d'abord le cas bidimensionnel. Nous nous référons au repère Θ_1, lié au profil C, et nous appliquons les résultats du paragraphe **17** *d* à une portion de fluide baignant ce profil solide, supposé de même densité. La structure tourbillonnaire se réduit à la couche de glissement sur C : un élément $d\overrightarrow{\mathrm{M}}$ de C (pris dans le sens trigonométrique) équivaut, d'après le paragraphe **9** *d*, à une quantité tourbillonnaire

$$d\mathrm{K}' = \frac{1}{2}\vec{u}.d\overrightarrow{\mathrm{M}}$$

$\left(\vec{u}\right.$, vitesse du fluide le long de $\left.\mathrm{C}\right)$. En régime permanent, cette structure est invariable, d'où la nullité de $\dfrac{d\vec{\mathrm{I}}'}{dt}$ et $\dfrac{d\mathrm{J}'}{dt}$. D'autre part, *la vitesse primitive* se réduit à $\overrightarrow{\mathrm{U}}_0$, d'où les termes d'influence tourbillonnaire

$$\vec{\mathfrak{A}}' = -2\vec{z}\wedge\int_{\mathrm{C}}\overrightarrow{\mathrm{U}}_0\,d\mathrm{K}' = -\vec{z}\wedge\overrightarrow{\mathrm{U}}_0\int_{\mathrm{C}}\vec{u}.d\overrightarrow{\mathrm{M}},$$

$$\vec{\mathfrak{B}}' = -2\int\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\overrightarrow{\mathrm{U}}_0\,d\mathrm{K}' = -\overrightarrow{\mathrm{U}}_0\int\overrightarrow{\mathrm{OM}}\left(\vec{u}.d\overrightarrow{\mathrm{M}}\right).$$

On en tire la résultante et le moment résultant des actions exercées par le fluide sur le profil (c'est-à-dire pour une tranche d'espace d'épaisseur unité)

$$\overrightarrow{\mathrm{R}}' = -\rho\vec{z}\wedge\overrightarrow{\mathrm{U}}_0\oint_{\mathrm{C}}\vec{u}.d\overrightarrow{\mathrm{M}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{H}}' = -\overrightarrow{\mathrm{U}}_0\oint_{\mathrm{C}}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\left(\vec{u}.d\overrightarrow{\mathrm{M}}\right).$$

On reconnaît dans la première relation le *théorème de Joukowsky*.

---

[1] *Cf.* M. Roy, *Sur l'aérodynamique des ailes sustentatrices et des hélices*, 1928.

Le raisonnement est le même dans le cas tridimensionnel : la surface Σ du corps immergé équivaut à une couche de tourbillons. Si $\vec{\alpha}$ est le vecteur unité normal *extérieur*, on a

$$d\vec{K} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma$$

et

$$\vec{R} = \rho\vec{\mathcal{A}} = \rho\vec{U}_0 \wedge \iint_\Sigma \vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma,$$

$$\vec{H} = \rho\vec{\mathcal{B}} = \rho\iint_\Sigma \overrightarrow{OM} \wedge \left[\vec{U}_0 \wedge \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{u}\right)\right] d\sigma.$$

La première de ces relations peut être considérée comme l'analogue du théorème de Joukowsky pour le cas de l'espace (¹). L'intégrale

$$\iint_\Sigma \vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma,$$

invariante lorsqu'on remplace Σ par une surface enveloppante, joue le rôle de la *circulation*. En fait elle représente, comme dans le cas du plan, le double de *la somme tourbillonnaire* du milieu, nulle d'après les considérations du paragraphe **7** *a* :

$$\iint_\Sigma \vec{\alpha} \wedge \vec{u}\, d\sigma = 2\iint_\Sigma \overrightarrow{OM}\left(\vec{\alpha}.\vec{\omega}\right) d\sigma = 0.$$

On retrouve donc le paradoxe de d'Alembert.

(¹) M. PASCAL, *Atti dei Lincei*, vol. 30, 1921.