JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL JAFFARD

Contribution à l'étude des groupes ordonnés

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 32 (1953), p. 203-280.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1953_9_32__203_0>

Contribution à l'étude des groupes ordonnés;

PAR PAUL JAFFARD.

INTRODUCTION.

La notion de groupe ordonné résulte de la considération simultanée de deux notions algébriques importantes, celle de groupe et celle d'ensemble ordonné. Outre son intérêt propre, elle est le principal outil dans la théorie de la divisibilité dans les corps et la théorie des corps valués. Elle semble jouer un rôle de plus en plus important en analyse fonctionnelle (travaux de L. Kanthorovitch et F. Riesz).

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier la structure des groupes abéliens ordonnés et plus particulièrement des groupes réticulés qui se trouvent être les plus maniables.

Les groupes totalement ordonnés et les produits directs de tels groupes étant ceux qui se présentent le plus naturellement, étudier la structure d'un groupe ordonné revient le plus souvent à étudier de quelle manière on peut le plonger dans un tel produit direct. Dans un très beau travail, P. Lorenzen avait démontré que tout groupe réticulé peut être considéré comme un sous-groupe propre d'un produit de groupes totalement ordonnés. (Rappelons que si G est un groupe réticulé, le sous-groupe H de G sera dit propre si $x, y \in H$ entraîne $\inf(x, y) \in H$). Il en résultait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe ordonné puisse être plongé dans un produit direct de groupes totalement ordonnés est qu'il soit semi-clos (c'est-à-dire que $nx \geqq 0$ entraîne $x \geqq 0$ si n est un entier strictement positif ordinaire).

Pour obtenir ces résultats, Lorenzen s'était servi d'une généralisation de la notion de système de r-idéaux qui était due à Prüfer et s'était inspiré de la caractérisation des anneaux entièrement clos due à W. Krull.

J. Dieudonné donna peu après une méthode directe pour obtenir le résultat de Lorenzen sur les groupes semi-clos basé sur la considération des affinements des structures d'ordre d'un groupe. Cette méthode, moins fine que celle de Lorenzen dans le cas d'un groupe réticulé, est importante par sa grande généralité, puisqu'elle s'applique par exemple mot à mot aux ensembles ordonnés quelconques et permet de voir que tout ensemble ordonné peut être considéré comme un sous-ensemble d'un produit d'ensembles totalement ordonnés.

Vers la même date (1942), G. Birkhoff donnait une condition suffisante pour qu'un groupe réticulé soit somme directe d'un nombre fini de groupes totalement ordonnés en considérant le réseau des sous-groupes isolés du groupe réticulé (G étant un groupe ordonné, le sous-groupe H de G est dit isolé si $h, h' \in H$ et $h \leqq x \leqq h'$ entraîne $x \in H$.

Le chapitre I contient les généralités sur les groupes ordonnés; le paragraphe **1** rappelle brièvement les formules fondamentales dont certaines sont déjà connues de Dedekind.

Toutes les fois que l'on considère la réalisation d'un groupe ordonné G comme sous-groupe d'un produit $\prod_{\iota \in I} G_\iota$ de groupes ordonnés totalement ou partiellement, on est amené à considérer l'homomorphisme croissant $\varphi_\iota = pr_\iota \varphi$ de G dans G_ι. Réciproquement, la donnée d'un nombre suffisant d'homomorphismes croissant φ_ι de G dans des groupes ordonnés $G_\iota (\iota \in I)$ permet de considérer G comme un sous-groupe de $\prod_{\iota \in I} G_\iota$. D'où l'importance de ces homomorphismes pour l'étude de la structure d'un groupe ordonné et la nécessité de les étudier dans toute leur généralité

Dans le cas particulier où le groupe G est réticulé, on peut obtenir des homomorphismes propres de G sur des groupes totalement ordonnés par la considération des t-idéaux de G (un homomorphisme φ du groupe réticulé G dans le groupe réticulé H est dit propre si c'est en même temps un homomorphisme de sa structure de réseau, c'est-à-dire si $\varphi[\inf(x, x)] = \inf[\varphi(x), \varphi(y)]$). C'est l'idée centrale de Lorenzen qui lui permet d'obtenir son important théorème de structure. Nous montrons de plus que c'est la seule méthode possible pour obtenir de tels homomorphismes. Tout ceci fait l'objet du paragraphe **2**.

Une classe importante des homomorphismes croissants est celle qui résulte de l'application identique du groupe sur lui-même muni d'une structure d'ordre plus fine. C'est cette considération qui est à la base de la méthode de Dieudonné. L'étude, aussi générale que possible, des affinements de la structure d'ordre d'un groupe est faite au paragraphe **3**.

Dans le chapitre II, nous étudions la structure des groupes réticulés à partir de certaines classes d'équivalence que nous introduisons dans les éléments positifs de ces groupes. Ces classes, que nous appelons filets, forment elles-mêmes un réseau. La structure de ce réseau est liée profondément à celle du groupe réticulé et sa considération est avantageuse pour l'étude de ce groupe du point de vue envisagé plus haut. Ce réseau est moins fin que celui des sous-groupes isolés considéré par Birkhoff, plus fin que celui des bandes considéré par Riesz. C'est ainsi que chez Birkhoff les groupes totalement ordonnés sont caractérisés par le fait que le réseau de leurs sous-groupes isolés est totalement ordonné. Ils sont caractérisés ici par le simple fait que le réseau de leurs filets se réduit au plus à un seul élément différent de $\bar{0}$ (filet comprenant l'élément neutre du groupe).

L'ensemble des filets est, en toute généralité, définissable pour un groupe ordonné quelconque. Toutefois, l'ensemble de ces filets n'est maniable que si l'on peut énoncer la proposition 3 et le théorème 1 du paragraphe **1**. Ces propositions étant difficilement vérifiables dans des cas particuliers, il nous a semblé préférable de n'introduire les filets que dans certains groupes jouissant d'une propriété caractéristique aisément vérifiable (groupes réguliers) et dans lesquels elles sont valables. De fait, les applications intéressantes ne se présentent guère que dans le cas d'un groupe réticulé. Par souci de généralité et pour bien montrer que dans toute une partie de cette étude il n'est pas nécessaire de supposer le groupe réticulé, nous avons développé au paragraphe **1** l'étude des filets d'un groupe régulier.

Dans le cas où le groupe est réticulé, la considération du réseau des filets permet de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe soit somme directe de groupes totalement ordonnés. Cette étude est faite au paragraphe **2**.

Dans un groupe réticulé, la considération des filets permet d'obtenir de nouveaux homomorphismes croissants de ce groupe sur des groupes totalement ordonnés et de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe réticulé admette une réalisation irréductible, c'est-à-dire une réalisation comme sous-groupe propre de $\prod_{\iota \in I} G_\iota$, les G_ι étant totalement ordonnés et aucun groupe G_ι ne pouvant être « enlevé » de cette réalisation. Dans le cas général, apparaissent deux sous-groupes caractéristiques M et N. Ceci fait l'objet du paragraphe **3**.

Dans le paragraphe **4**, nous nous préoccupons de problèmes d'« Archimédianité ». Nous distingnons deux notions différentes, celle de groupe para-archimédien (appelés archimédiens par Clifford et Birkhoff) et celle de groupe archimédien. Nous montrons qu'aucune de ces notions n'implique l'autre dans le cas général.

La caractérisation intrinsèque des groupes ordonnés réalisables comme groupes de fonctions à valeur dans R (groupe additif des nombres réels) fut un problème posé par Krull dans les cas des groupes de divisibilité et posé dans toute sa généralité par Clifford. Nakayama démontra la fausseté de la conjecture de Krull-Clifford : Il existe des groupes réticulés para-archimédiens, non représentables comme fonctions à valeurs dans R. Nous démontrons dans deux cas particuliers la conjecture de Krull-Clifford (th. 6 et 7).

Tous ces théorèmes de structures du chapitre II donnent évidemment des théorèmes correspondants sur la divisibilité dans les corps. Nous laissons au lecteur le soin de faire cette traduction. Toutefois, nous avons voulu au chapitre III étudier certains aspects des corps qui admettent comme groupe de divisibilité un groupe réticulé. Nous dirons qu'un tel corps est demi-valué par le groupe réticulé correspondant. Nous montrons au paragraphe **1** que tout groupe réticulé (abélien) est tel qu'il existe un corps demi-valué par ce groupe, généralisant ainsi un théorème et une méthode dus à Krull dans le cas où le groupe est totalement ordonné.

Tout corps demi-valué admet une topologie naturelle compatible avec sa structure d'anneau, mais non en général avec sa structure de corps $\left(\text{c'est-à-dire que la fonction } \frac{1}{x} \text{ n'y est pas en général continue}\right)$. Nous démontrons au paragraphe **3** qu'il en est toutefois ainsi dans le cas où le groupe de divisibilité admet un filet maximal et, nous basant sur le théorème d'existence indiqué plus haut, nous montrons que réciproquement si le groupe réticulé G n'admet pas de filet maximal, il est possible de trouver un corps demi-valué par G tel que la fonction $\frac{1}{x}$ n'y soit pas continue.

Dans le paragraphe **2**, nous déterminons toutes les demi-valuations d'une extension transcendante simple d'un corps algébriquement clos s'annulant sur le corps de base.

Je tiens à exprimer ici toute la reconnaissance que je dois à M. Dubreuil, dont les conseils m'ont été très précieux pour la rédaction de ce travail. Je remercie également M. Dieudonné qui a bien voulu s'intéresser à ces recherches et m'aider de son expérience, M. le Doyen Chatelet et M. H. Cartan qui se sont joints à M. Dubreuil pour constituer la commission d'examen devant laquelle fut soutenue cette thèse, M. Villat qui, après M. E. Cartan, a présenté à l'Académie des Sciences des Notes résumant les principaux résultats obtenus, et N. Bourbaki qui m'a confié une des rédactions de son Ouvrage sur la Divisibilité, écrit dont je me suis largement inspiré pour l'ordre des résultats énoncés au chapitre I (§ **1**) et auquel je renvoie le lecteur pour les démonstrations correspondantes.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES ORDONNÉS.

1. Préliminaires. — Dans toute cette étude n'interviendront que des groupes abéliens. Le mot « groupe » signifiera donc « groupe commutatif ». Tous les groupes seront écrits sous la forme additive et, pour ne pas compliquer les notations, l'élément unité de chaque groupe sera toujours désigné par zéro sans qu'aucune confusion ne soit possible. Les structures d'ordre intervenant seront le plus souvent des structures d'ordre partielles : par « groupe ordonné » on devra donc entendre « groupe partiellement ordonné ».

Sauf mention expresse du contraire, nous entendrons par « structure d'ordre sur G » une « structure d'ordre sur G compatible avec sa structure de groupe ».

1. Étant donné un groupe (abélien) G, on dira qu'une structure d'ordre (partielle) définie sur G est compatible avec sa structure de groupe si

$$(1) \qquad a, b \in G \quad \text{et} \quad a \leqq b \quad \rightarrow \quad a+x \leqq b+x \quad \text{pour tout } x \in G,$$

l'égalité (1) est d'ailleurs équivalente à

$$(2) \qquad a, b, a', b' \in G \quad \text{et} \quad a \leqq b, \quad a' \leqq b' \quad \rightarrow \quad a+a' \leqq b+b'.$$

Un groupe muni d'une telle structure sera dit *groupe ordonné*.

2. On sait que la structure d'ordre d'un groupe ordonné est complètement caractérisée par la donnée de ses éléments positifs. De plus :

Théorème 1. — *Étant donné un groupe* G *et un sous-ensemble* P *de* G, *il existera une structure d'ordre sur* G *compatible avec sa structure de groupe et telle que* P *soit l'ensemble de ses éléments positifs si et seulement :*

1° $P+P \subset P$;
2° $P \cap (-P) = \{0\}$ [1].

On notera en général G_+ l'ensemble des éléments positifs de G.

Étant donné un groupe G; si l'on se donne un sous-ensemble P qui contienne zéro et vérifie la première condition du théorème 1, on voit que la relation

$$R(x, y) \rightleftharpoons y - x \in P$$

---

[1] Birhkoff [2], chap. XIV, th. 1.

transforme G en un ensemble *préordonné* tel que

$$R(a, b) \rightarrow R(a+x, b+x) \quad \text{pour tout } x \in G.$$

Les classes d'équivalence de G suivant la relation

$$x \equiv y \quad \rightleftharpoons \quad R(x, y) \text{ et } R(y, x)$$

s'identifient aux classes de G suivant le sous-groupe $H = P \cap (-P)$. La relation de préordre $R(x, y)$ donne sur G/H par passage au quotient une relation d'ordre compatible avec la structure de groupe de G/H. Le groupe ordonné G/H sera dit *groupe ordonné associé au groupe préordonné* G.

Si le groupe G est somme directe (resp. produit direct) des groupes ordonnés $G_\iota(\iota \in I)$, il est facile de voir que le sous-ensemble P des éléments de G défini par

$$x \in P \rightleftharpoons \mathrm{pr}_\iota(x) \geqq 0 \qquad (\iota \in I)$$

vérifie les conditions du théorème 1. Le groupe G muni de la structure d'ordre correspondante est dit *somme directe ordonnée* (resp. *produit direct ordonné*) des groupes $G_\iota(\iota \in I)$. On dira souvent que le groupe (ordonné) G est somme directe (resp. produit direct) des groupes ordonnés $G_\iota(\iota \in I)$. On voit que si G_ι est considéré comme sous-groupe de G, la structure d'ordre de G induit sur G_ι sa structure d'ordre initiale ([2]).

3. Un ensemble ordonné E sera dit *filtrant à droite* (resp. *à gauche*) si, quels que soient $a, b \in E$, il existe $c \in E$ tel que $a, b \leqq c$ (resp. $a, b \geqq c$). Un groupe ordonné filtrant à droite sera filtrant à gauche et réciproquement. Un tel groupe G sera simplement dit *filtrant*. On sait que :

THÉORÈME 2. — *Pour que le groupe ordonné* G *soit fitrant, il faut et il suffit qu'il soit engendré par l'ensemble* G_+ *de ses éléments positifs* ([3]).

([2]) On rappelle qu'étant donné un groupe ordonné G et un sous-groupe H de G, la structure d'ordre induite par G sur H est compatible avec la structure de groupe de H.

([3]) CLIFFORD [1].

Si les deux éléments a et b de G admettent une borne supérieure [4] (resp. inférieure), on notera celle-ci $\sup(a, b)$ [resp. $\inf(a, b)$].

Si, pour tout couple $a, b \in G$, $\sup(a, b)$ existe, on voit qu'il en sera de même de $\inf(a, b)$ et réciproquement. En ce cas, G sera dit *réticulé*.

Toute somme directe $G = \sum_{\iota \in I} G_\iota$ $\Big($resp. tout produit direct $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota\Big)$ de groupes réticulés est encore un groupe réticulé et l'on a

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{pr}_\iota[\sup(a, b)] = \sup[\mathrm{pr}_\iota(a), \mathrm{pr}_\iota(b)] \\ \mathrm{pr}_\iota[\inf(a, b)] = \inf[\mathrm{pr}_\iota(a), \mathrm{pr}_\iota(b)] \end{array}\right\} \quad (\iota \in I).$$

THÉORÈME 3. — *Le groupe filtrant* G *est réticulé si et si seulement il vérifie l'une des deux conditions (équivalentes) suivantes :*

a. pour tout $a, b \in G_+$: $\sup(a, b)$ *existe ;*
b. pour tout $a, b \in G_+$: $\inf(a, b)$ *existe* [5].

On vérifie sans difficulté les :

THÉORÈME 4. — *Si dans un groupe ordonné* G *les deux parties* A *et* B *ont des bornes supérieures* $\sup(A)$ *et* $\sup(B)$, $A + B$ *a aussi une borne supérieure et*

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B). \tag{2}$$

THÉORÈME 5. — *Dans un groupe ordonné* G, *on a les égalités suivantes dans la mesure où elles ont un sens :*

$$\sup[(a + x), (b + x)] = \sup(a, b) + x, \tag{3}$$
$$\inf[(a + x), (b + x)] = \inf(a, b) + x, \tag{4}$$
$$\inf(a, b) = -[\sup(-a, b)], \tag{5}$$
$$\sup(a, b) + \inf(a, b) = a + b \quad \text{(relation de Dedekind)}. \tag{6}$$

De plus, pour les trois premières égalités, si le premier membre a un sens, il en est de même du deuxième et réciproquement. Pour la quatrième, si $\sup(a, b)$ *a un sens, il en est de même de* $\inf(a, b)$ *et réciproquement.*

---

[4] C'est-à-dire s'il existe un élément c de G tel que

$$c \geqq a, b \quad \text{et} \quad x \geqq a, b \rightarrow x \geqq c.$$

[5] BOURBAKI [1].

4. Deux éléments (positifs) a et b du groupe ordonné G seront dits *étrangers* ([6]) si $\inf(a, b)$ existe et est égal à o.

Si $G \ni a$ et si $\inf(a, o)$ existe, on posera

$$a^+ = \sup(a, o), \qquad a^- = -\inf(a, o) \text{ (}^7\text{)}.$$

La formule (6) montre alors que

$$a = a^+ - a^-.$$

On déduit sans peine des définitions de a^+ et a^- les :

THÉORÈME 6. — *Si dans un groupe ordonné* G, a^+ *et* a^- *existent et si* $a = x - y$ *avec* $x, y \geqq o$, *on a* $x \geqq a^+$; $y \geqq a^-$.

THÉORÈME 7. — *Si dans un groupe ordonné* G, a *est tel que* a^+ *et* a^- *existent, on a*

$$\inf(a^+, a^-) = o. \tag{7}$$

THÉORÈME 8. — *Si dans un groupe ordonné trois éléments positifs* a, b, c *sont tels que* c *soit étranger à* a *et* b, c *est également étranger à* $a + b$.

En effet, soit $x \leqq a + b, c$. Comme $a \geqq o$; $x \leqq a + b, a + c$, donc $x - a \leqq b, c$ et $\inf(b, c) = o \rightarrow x - a \leqq o$. Mais alors $x \leqq a, c$ et $\inf(a, c) = o \rightarrow x \leqq o$. Donc $\inf(a + b, c) = o$.

THÉORÈME 9 (*lemme d'Euclide*). — *Si dans un groupe ordonné trois éléments positifs* a, b, c *sont tels que* c *et* a *soient étrangers et* $c \leqq a + b$, *on a aussi* $c \leqq b$.

THÉORÈME 10. — *Si dans un groupe ordonné* G, $x = a - b$ *et* $\inf(a, b) = o$, *on a*

$$a = \sup(x, o) = x^+, \qquad b = -\inf(x, o) = x^-.$$

En vertu de la formule (6), il suffit de montrer que $a = \sup(x, o)$. Or $a = x + b \geqq x, o$. De plus, si $u \geqq x, o$; $u \geqq a - b$, donc $u + b \geqq a$ et $\inf(b, a) = o$ implique d'après le lemme d'Euclide que $u \geqq a$. Donc $a = \sup(x, o)$.

([6]) De tels éléments sont appelés *disjoints* par Birkhoff.

([7]) Birkhoff pose $a^- = \inf(a, o)$. Nous préférons toutefois l'autre définition, car nous aurons surtout à considérer des éléments positifs.

A partir des thèorèmes 8 et 10 on montre les :

THÉORÈME 11. — *Si dans un groupe ordonné* $\sup(a, b)$ [resp. $\inf(a, b)$] *existe, il en est de même de* $\sup(na, nb)$ [resp. $\inf(na, nb)$] *et l'on a :*

$$\sup(na,\ nb) = n \sup(a,\ b), \tag{8}$$

$$\inf(na,\ nb) = n \inf(a,\ b), \tag{9}$$

n étant un entier positif ou nul.

THÉORÈME 12. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le groupe ordonné* G *soit réticulé est que tout élément de* G *soit la différence de deux éléments positifs étrangers.*

5. Un groupe ordonné G est dit *semi-clos* ([8]), n étant un entier strictement positif, si pour tout $x \in G$, $nx \geqq 0 \rightarrow x \geqq 0$.

THÉORÈME 13. — *Tout groupe semi-clos est sans torsion.*

THÉORÈME 14. — *Tout groupe réticulé est semi-clos.*

COROLLAIRE 1. — *Tout groupe réticulé est sans torsion* ([9]).

6. Pour terminer ce paragraphe, montrons le

THÉORÈME 15. — *Étant donné la suite finie d'éléments positifs* $(a_1, \ldots, a_m)$ *d'un groupe réticulé* G, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $\inf(a_1,\ \ldots,\ a_m) = 0$ *est que, pour tout x strictement positif, on puisse trouver un indice i* $(1 \leqq i \leqq m)$ *et un élément x' de* G *tel que*

$$0 < x' \leqq x \qquad \text{et} \qquad \inf(a_i,\ x') = 0.$$

Nécessité. — Suppposons $\inf(a_1,\ \ldots,\ a_m) = 0$. Soit $x > 0$. Posons

$$x_0 = x \qquad \text{et} \qquad x_i = \inf(x,\ a_1,\ \ldots,\ a_i).$$

On a

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_m = 0.$$

Soit i le premier indice tel que x_i soit nul. On a donc $x_{i-1} > 0$, $x_i = 0$. Or $x_i = \inf(x_{i-1},\ a_i)$, $x_{i-1} \leqq x$ et l'on peut prendre $x' = x_{i-1}$.

([8]) Lorenzen [1] appelle de tels groupes *s*-clos.

([9]) G. BIRKHOFF [2], chap. XIV, th. 7.

Suffisance. — Supposons la condition vérifiée. Si l'on avait

$$\inf(a_1, \ldots\ldots a_m) = a > 0,$$

quel que soit a' tel que $0 < a' \leqq a$, on aurait $a' \leqq a_i (1 \leqq i \leqq m)$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

2. Homomorphismes croissants. — Étant donnés deux groupes ordonnés G et G', un homomorphisme φ de G dans G' est un *homomorphisme croissant* ([10]) si a, $b \in G$ et $a \leqq b$ entraîne $\varphi(a) \leqq \varphi(b)$ dans G'. Ceci revient à dire que si P (resp P') est l'ensemble des éléments positifs de G (resp G'), on a $\varphi(P) \subset P'$. Dans le cas où φ est un isomorpbisme de G sur $\varphi(G) = G''$, si φ et φ^{-1} sont croissants, φ est un isomorphisme de la structure de groupe ordonné de G sur G''.

Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux ordinations de G, le groupe G ordonné par $\mathcal{O}'$, l'application identique φ de G sur G' sera croissante si et si seulement $\mathcal{O}'$ est une ordination plus fine que $\mathcal{O}$. G' sera dit en ce cas un *affinement* de G. L' application φ sera aussi appelée *affinement* sans qu'aucune confusion ne soit ici possible.

Étant donnés les groupes ordonnés G, G_1, G_2 et les homomorphismes croissants φ_1 et φ_2 de G sur G_1 et G_2, je dirai que les homomorphismes φ_1 et φ_2 sont G-*isomorphes* s'il existe un isomorphisme σ *pour la structure de groupe ordonné* de G_1 sur G_2 tel que $\varphi_2 = \varphi_1 \sigma$.

Il est facile de voir que φ_1 et φ_2 sont G-isomorphes si et si seulement $\varphi_1^{-1}(G_{1+}) = \varphi_2^{-1}(G_{2+})$.

2. Nous allons maintenant étudier le problème suivant :

Soit le groupe ordonné G, un groupe G' et un homomorphisme φ de G dans G', *trouver les ordinations de* G' *qui rendent* φ *croissant.*

Posons $G'' = \varphi(G)$. Si l'on peut trouver sur G' une ordination répondant à la question, elle induit sur G'' une ordination qui rendra croissant l'homomorphisme φ de G sur G''. Réciproquement, si l'on a pu trouver sur G'' une ordination $\mathcal{O}''$ qui rende φ croissant et si P'' est l'ensemble des éléments positifs de G'' pour $\mathcal{O}''$, tout sous-ensemble P' de G' tel que

$$P' + P' \subset P', \qquad P' \cap (-P') = \{0\} \qquad \text{et} \qquad P' \cap (G'') = P''$$

([10]) Un tel homomorphisme est appelé *isotone* par G. Birkhoff.

définit sur G une ordination qui induira sur G″ l'ordination $\mathcal{O}''$. On peut trouver de tels sous-ensembles P′ : il suffit de prendre $P' = P''$. Le problème est donc ramené au cas où $G' = G'' = \varphi(G)$.

Posons $H = \varphi^{-1}(0)$.

Le problème initial se trouve ramené au suivant :

Étant donné le groupe ordonné G et le sous-groupe H de G, peut-on trouver sur $G' = G/H$ une ordination telle que l'homomorphisme canonique φ de G sur G′ soit croissant ?

On voit d'abord que le problème n'est pas possible en général.

En effet, si $h \in H$ et si $0 \leqq x \leqq h$, on aura par définition

$$0 = \varphi(h) \geqq \varphi(x) \geqq 0,$$

donc $\varphi(x) = 0$ et $x \in H$. Pour que le problème soit possible, il faudra que H soit tel que

$$h \in H \quad \text{et} \quad 0 \leqq x \leqq h \quad \rightarrow \quad x \in H.$$

Cette condition est équivalente à la suivante :

$$h_1 \leqq x \leqq h_2 \quad \text{et} \quad h_1, h_2 \in H \quad \rightarrow \quad x \in H.$$

Un tel sous-groupe de G sera dit *isolé* ([11]).

Supposons donc que H soit isolé. Si le problème est possible, on aura par définition

$$\varphi(P) \subset P', \tag{1}$$

P′ étant l'ensemble des éléments positifs de G′.

On voit que $P'_0 = \varphi(P)$ permet de définir sur G′ une ordination qui est solution du problème.

La formule (1) montre que l'ensemble des solutions du problème sont les ordinations de G′ plus fines que la précédente. Cette dernière sera dite *canonique* et, quand on parlera sans plus du *groupe ordonné* G/H, il faudra entendre qu'il est ordonné par sa structure canonique.

([11]) Birkhoff l'appelle « idéal » de G. Nous avons préféré garder à ce dernier terme sa signification habituelle (Prüfer, Krull, Lorenzen) et employer ici la qualification employée par Krull à propos des groupes totalement ordonnés (Krull [**1**]).

Un tel sous-groupe pourrait encore être appelé *convexe* en donnant à ce mot le sens donné par G. Birkhoff [**2**], chap. II, § 5).

On vérifie aisément la :

PROPOSITION 1. — G/H *étant ordonné canoniquement*

$$\varphi(x) \geqq \varphi(y) \quad \rightleftharpoons \quad \exists\, h \in \mathrm{A}, \text{ avec } x+h \geqq y.$$

Remarque. — Étant donné un ensemble E muni d'une structure d'ordre, nous pourrons dire qu'une relation d'équivalence $x \equiv y$ définie sur E est *compatible avec sa structure d'*ordre si, sur l'ensemble quotient E′ la relation

$$(2) \qquad \mathrm{R}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \rightleftharpoons \quad \exists\, x_1 \in \bar{x},\ y_1 \in \bar{y} \text{ tels que } x_1 \leqq y_1$$

est une relation d'ordre. R sera dite relation d'ordre quotient de la relation d'ordre initiale par la relation d'équivalence. On voit facilement que pour que la relation d'équivalence

$$x \equiv y \quad \rightleftharpoons \quad x - y \in \mathrm{H}$$

(H étant un sous-groupe de G), soit compatible avec la relation d'ordre, il faut et il suffit que H soit isolé. La relation d'ordre canonique sur G/H est alors identique à la relation d'ordre quotient de la relation d'ordre initiale par H.

THÉORÈME 1. — *Étant donné un groupe* G, *le sous-groupe* H *de* G *et l'homomorphisme canonique* φ *de* G *sur* G′ = G/H, *il est possible de trouver sur* G′ *une ordination telle que* φ *soit un homomorphisme croissant si et si seulement* H *est un sous-groupe isolé de* G. *S'il en est ainsi, les ordinations répondant à la question sont les ordinations de* G′ *plus fines que l'ordination quotient de* G *par* H.

3. G étant un groupe ordonné et H un sous-groupe isolé de G, étudions quelques propriétés du groupe ordonné G/H = G′. On remarque d'abord que si G est filtrant, il en est de même de G′.

Si G et G′ sont réticulés, nous dirons que l'homomorphisme φ est un *homomorphisme propre* si

$$(3) \qquad \varphi[\inf(x, y)] = \inf[\varphi(x,), \varphi(y)].$$

La formule [§ 1, (5)] montre qu'elle est équivalente à

$$(4) \qquad \varphi[\sup(x, y)] = \sup[\varphi(x), \varphi(y)].$$

Si φ est un homomorphisme propre, $x, y \in H$ implique

$$\varphi[\inf(x, y)] = \inf[\varphi(x), \varphi(y)] = 0, \qquad \text{donc } \inf(x, y) \in H.$$

Étant donné un groupe réticulé G, un sous-groupe de G sera dit *sous-groupe propre* de G si

$$x, y \in H \to \inf(x, y) \in H.$$

On a alors (12) le :

Théorème 2. — *Étant donné le groupe réticulé* G, *le sous-groupe isolé* H *de* G *et l'homomorphisme croissant* φ *de* G *sur* $G' = G/H$, G' *sera réticulé et* φ *un homomorphisme propre si et si seulement* H *est un sous-groupe propre de* G.

Remarque. — Dans un groupe réticulé G, tout sous-groupe isolé filtrant H est propre.

Exemple. — Soit $G = \prod_{\iota \in I}$ un produit direct ordonné de groupes réticulés. Le sous-groupe $H = \sum_{\iota \in I} G_\iota$ est un sous-groupe isolé propre de G. Par suite, $G' = G/H$ peut être considéré comme un groupe réticulé et la représentation canonique de G sur G' est propre.

Si $a \in G$, la classe de a dans G' sera supérieure ou égale à zéro si et si seulement a n'a qu'un nombre fini de composantes négatives.

4. Soit G un groupe ordonné et H un sous-groupe (quelconque) de G. Soit $G' = G/H$ et φ l'homomorphisme canonique de G sur G'. Si P est l'ensemble des éléments positifs de G, posons encore $P' = \varphi(P)$. On voit que l'on a toujours $P' + P' \subset P'$, mais que si H n'est pas isolé, $P' \cap (-P') = K'$ est en général différent de $\{0\}$. Mais on sait (§ 1, n° 2) que $G'/K' = G''$ peut être considéré comme un groupe ordonné. On désignera par ψ l'homomorphisme canonique de G' sur G''.

Montrons que $K = \varphi^{-1}(K')$ est un sous-groupe isolé de G :

Soit $x \in G$ tel que $0 \leqq x \leqq a$ et $a \in K$. Il existe $h \in H$ et $b \in P$ tels que $a = h - b$. Donc $x \leqq h - b$ s'écrit

$$x - h \leqq -b \leqq 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = \varphi(x - h) \in -P'.$$

---

(12) *Voir* G. Birkhoff ([2], p. 222). Les sous-groupes propres sont appelés *l-idéaux* par G. Birkhoff.

Donc

$$\varphi(x) \in P' \cap (-P') \quad \text{et} \quad x \in K.$$

K est donc bien un sous-groupe isolé. Montrons que c'est le sous-groupe isolé minimal qui contient H.

Soit K_1 un sous-groupe isolé de G tel que $K_1 \supset H$. Montrons que $K_1 \supset K$:

Soit $x \in K$. Il existe h_1, $h_2 \in H$ avec $x - h_1 \geqq 0$ et $x - h_2 \leqq 0$ ou $h_1 \leqq x \leqq h_2$. Or h_1, $h_2 \in H \subset K_1$ et K isolé impliquent que $x \in K_1$. Donc $K_1 \supset K$.

K sera dit *isolement* de H et sera désigné par $\hat{H}$. L'isolement définit une *opération de fermeture* dans l'ensemble des sous-groupes de G, c'est-à-dire que si H est un sous-groupe de G, $\hat{\hat{H}} = \hat{H}$. Puisque $\hat{H} = K$ est isolé, il est naturel de considérer le groupe ordonné $G''_1 \doteq G/K$ et de le comparer au groupe ordonné G''. Soit f l'homomorphisme canonique de G sur G''_1. $\psi\varphi$ est un homomorphisme de G sur G'' dont le noyau est $\varphi^{-1}(K') = K$. Donc, au sens de la théorie des groupes, G''_1 est isomorphe canoniquement à G''. Soit σ cet isomorphisme qui représente G''_1 sur G''; montrons que σ est un isomorphisme de groupes ordonnés :

Soit P''_1 l'ensemble des éléments positifs de G''_1. On a $P''_1 = f(P)$, donc

$$\sigma(P''_1) = \psi\varphi f^{-1} f(P) = \psi\varphi(P + K) = \psi(P' + K') = P''.$$

Et l'on peut énoncer le

THÉORÈME 3. — *Soient le groupe ordonné* G, *le sous-groupe* H *de* G *et* G'' *le groupe ordonné associé au groupe préordonné* G/H. *Les homomorphismes canoniques de* G *sur* $G/\hat{H}$ *et* G'' *sont* G-*isomorphes*.

5. Soit G un groupe ordonné et S un sous-ensemble additivement clos de G tel que $S \ni 0$. Soit

$$G_+^S = G_+ - S; \tag{5}$$

G_+^S est l'ensemble des éléments de G qui peuvent se mettre sous la forme $x = a - s$ avec $a \in G_+$ et $s \in S$. G_+^S définit sur G une structure de groupe préordonné. Si l'on pose

$$H_S = G_+^S \cap (-G_+^S), \tag{6}$$

on voit qu'à ce groupe préordonné correspond le groupe ordonné $G_S = G/H_S$ [13]. Soit φ_S l'homomorphisme canonique de G sur G_S.

THÉORÈME 4. — *Si* Γ *est un groupe ordonné tel qu'il existe un homomorphisme croissant de* G *sur* Γ, *il existe un système additivement clos* S *d'éléments de* G *contenant zéro et tel que* φ *soit* G-*isomorphe à* φ_S.

Soit φ un homomorphisme croissant de G sur Γ. Posons $S = \varphi^{-1}(-\Gamma_+)$. On voit que $\varphi^{-1}(\Gamma_+) = G_+^S$.

PROPOSITION 2. — H_S *est un sous-groupe isolé de* G.

Comme H_S est isolé, les considérations du n° 2 nous ont montré que G/H_S pouvait être considéré comme un groupe ordonné G'_S et que G_S était un affinement de G'_S. Soit φ'_S l'homomorphisme canonique de G sur G'_S.

THÉORÈME 5. — *Si* S *est contenu dans* G_+, *on a* $G_S = G'_S$.

Supposons $S \subset G_+$. On a

$$S \subset H_S \quad \text{et} \quad G_+^S = G_+ + H_S \quad \text{donc} \quad \varphi_S(x) \geqq 0 \rightleftharpoons \varphi'_S(x) \geqq 0.$$

6. Étant donné un groupe ordonné G, on dit que l'on a défini sur G un *système de r-idéaux* si l'on a défini une application $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_r$ de $\mathfrak{P}(G)$ (ensemble des parties de G) dans lui-même qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_r, \tag{7}$$

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}_r \quad \text{implique} \quad \mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{b}_r, \tag{8}$$

$$\text{si} \quad a \in G, \quad \{a\}_r = a + G_+, \tag{9}$$

$$a + \mathfrak{a}_r = (a + \mathfrak{a})_r; \tag{10}$$

$\mathfrak{a}_r$ est dit le *r-idéal engendré par* $\mathfrak{a}$.

On dira qu'un système de *r*-idéaux est de *caractère fini* si pour tout ensemble $\mathfrak{a} \subset G$ on a

$$\mathfrak{a}_r = \bigcup_{\mathfrak{n} \subset \mathfrak{a}} \mathfrak{n}_r, \tag{11}$$

où $\mathfrak{n}$ parcourt l'ensemble des sous-ensembles *finis* de $\mathfrak{a}$.

---

[13] On va voir que H_S est un sous-groupe isolé de G. Il importe de ne pas confondre G_S avec le groupe quotient G/H_S ordonné canoniquement.

Convenons de poser pour chaque élément $a \in G_2$

$$(a) = a + G_+. \tag{12}$$

Nous allons définir trois importants systèmes de r-idéaux :

On appelle *s-idéal* engendré par $\mathfrak{a} \subset G$ et l'on désigne par $\mathfrak{a}_s$ l'ensemble

$$\mathfrak{a}_s = \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} (a). \tag{13}$$

Le système des s-idéaux est évidemment de caractère fini.

On appelle *v-idéal* engendré par $\mathfrak{a} \subset G$ et l'on désigne par $\mathfrak{a}_v$ l'ensemble

$$\mathfrak{a}_v = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset (a)} (a). \tag{14}$$

Le système des v-idéaux n'est pas en général de caractère fini, mais si l'on pose

$$\mathfrak{a}_t = \bigcup_{\mathfrak{n} \subset \mathfrak{a}} \mathfrak{n}_v, \tag{15}$$

où $\mathfrak{n}$ parcourt l'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathfrak{a}$, on voit que l'on définit ainsi un système particulier de r-idéaux (dit *systèmes des t-idéaux*) qui est de type fini et tel que si $\mathfrak{a}$ est fini $\mathfrak{a}_t = \mathfrak{a}_v$ (on a toujours $\mathfrak{a}_s \subset \mathfrak{a}_t \subset \mathfrak{a}_v$).

On dira qu'un r-idéal $\mathfrak{a}_r$ est *entier* si $\mathfrak{a}_r \subset G_+$. Comme $G_+ = (0)$ est toujours un r-idéal, on voit que $\mathfrak{a}_r$ est entier si et si seulement $\mathfrak{a} \subset G_+$. Un r-idéal entier sera dit *premier* si $a + b \in \mathfrak{a}_r$, $a, b \geq 0$ et $a \notin \mathfrak{a}_r \rightarrow b \in \mathfrak{a}_r$.

THÉORÈME 6 (Krull-Lorenzen). — *Étant donné un groupe ordonné* G, *un système de r-idéaux de caractère fini sur* G, *un sous-ensemble additivement clos* S *de* G_+ *et un r-idéal entier* $\mathfrak{n}$ *tel que* $\mathfrak{n} \cap S = \emptyset$, *il existe un r-idéal premier* $\mathfrak{p}$ *tel que* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

THÉORÈME 7. — *Si* G *est un groupe réticulé et si* S *est un sous-ensemble additivement clos de* G_+, H_S *est un sous-groupe propre de* G *et, par suite* G *est réticulé et* φ_S *est un homomorphisme propre de* G *sur* G_S [14].

---

[14] *Voir* P. LORENZEN [1].

Nous rappelons qu'ici $G_S = G'_S$ (th. 5).

Proposition 3. — *Si* Γ *est un groupe réticulé tel qu'il existe un homomorphisme propre* φ *de* G *sur* Γ, *il existe un système additivement clos* S *d'éléments de* G_+ *contenant zéro tel que* φ *soit* G-*isomorphe à* $\varphi'_S = \varphi_S$.

Soit $H = \varphi^{-1}(o)$; on a vu (th. 2) que H est un sous-groupe isolé propre de G. Posons $S = H \cap G_+$, S est additivement clos, contient *zéro* et $G_+ \supset S$. Il suffit de montrer que $G_+^S = \varphi^{-1}(\Gamma_+)$.
Soit $x \in G_+^S$, $x = a - s$ ($a \in G_+$, $s \in S$). Donc

$$\varphi(x) = \varphi(a) - \varphi(s) = \varphi(a) \geqq o \quad \text{et} \quad x \in \varphi^{-1}(\Gamma_+).$$

Réciproquement, soit $x \in \varphi^{-1}(\Gamma_+)$. Alors

$$\varphi(x) \geqq o \quad \text{et} \quad \inf[\varphi(x), o] = \varphi[\inf(x, o)] = o.$$

Donc $\inf(x, o) \in H$ et $s = -\inf(x, o) \in H \cap (G_+) = S$.
Comme $x' = x - \inf(x, o) \geqq o$, on a $x = x' - s$ avec $x' \geqq o$, $s \in S$. Donc $x \in G_+^S$ et $G_+^S = \varphi^{-1}(\Gamma_+)$.

3. Si $\mathfrak{p}$ est un r-idéal entier premier différent de G_+ et si S est le système additivement clos formé par les éléments de G_+ qui ne sont pas compris dans $\mathfrak{p}$; on posera $G_S = G_\mathfrak{p}$, $H_S = H_\mathfrak{p}$ et $\varphi_S = \varphi_\mathfrak{p}$, on a alors le

Théorème 8. — *Si* $\mathfrak{p}$ *est un t-idéal premier différent de* G_+ *du groupe réticulé* G, $G_\mathfrak{p}$ *est totalement ordonné* [15].

Réciproquement on a la

Proposition 4. — *Si* G *est un groupe réticulé et si* Γ *est un groupe totalement ordonné tel qu'il existe un homomorphisme propre* φ *de* G *sur* Γ, *il existe un t-idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* G_+ *tel que* φ *soit* G-*isomorphe à* $\varphi_\mathfrak{p}$.

La proposition 3 nous montre en effet que si $S = H \cap G_+$, φ est bien G-isomorphe à φ_S. Posons $\mathfrak{p} = (\complement S) \cap G_+$.

Si $x, y \in \mathfrak{p}$, on aura $\varphi(x)$, $\varphi(y) > o$, Γ étant totalement ordonné,

$$\inf[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi[\inf(x, y)] > o$$

([15]) *Voir* P. Lorenzen [1].

et, par suite, $\inf(x, y) \notin S$. Or $x, y > 0$ implique $\inf(x, y) \geqq 0$ et $\inf(x, y) \in \complement S \cap G_+ = \mathfrak{p}$. Donc $x, y \in \mathfrak{p}$ entraîne $\inf(x, y) \in \mathfrak{p}$.

$\mathfrak{p}$ est un s-idéal, car si $x \in \mathfrak{p}$, $\varphi(x) > 0$ et si $a \geqq 0$,

$$\varphi(x+a) = \varphi(x) + \varphi(a) > 0.$$

Donc $x + a \notin S$ et $x + a \geqq 0$ entraîne $x + a \in \mathfrak{p}$. $\mathfrak{p}$ est un s-idéal premier car son complémentaire S dans G_+ est additivement clos.

Montrons que $\mathfrak{p}$ est un t-idéal :

$$\mathfrak{p}_t = \bigcup_{\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{n}_t,$$ où $\mathfrak{n}$ parcourt l'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathfrak{p}$.

Soit $\mathfrak{n} = (a_1, \ldots, a_n)$. Alors, puisque G est réticulé,

$$\mathfrak{n}_t = [\inf(a_1, \ldots, a_n)]_s.$$

Or $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{p}$ entraîne $\inf(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{p}$ et comme $\mathfrak{p}$ est un s-idéal, $\mathfrak{n}_t \subset \mathfrak{p}$. Donc $\mathfrak{p}_t \subset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}$ est un t-idéal. D'où la proposition 3.

9. Proposition 5. — *Si* G *est un groupe réticulé et* N *un ensemble de t-idéaux premiers (entiers) de* G *différents de* G_+ *tel que chaque élément strictement positif de* G *soit contenu dans un idéal de* N, *il existe un isomorphisme de groupe ordonné de* G *sur un sous-groupe propre de*

$$\Gamma = \prod_{\mathfrak{p} \in N} G_{\mathfrak{p}}.$$

On considère l'homomorphisme $\varphi = \prod_{\mathfrak{p} \in N} \varphi_{\mathfrak{p}}$ de G dans Γ.

φ est un homomorphisme propre, car chaque $\varphi_{\mathfrak{p}}$ est propre; $\varphi(G)$ est bien un sous-groupe propre de Γ. Si $x > 0$, par hypothèse il existe $\mathfrak{p} \in N$ tel que $x \in \mathfrak{p}$. Alors $\varphi_{\mathfrak{p}}(x) > 0$ et $\varphi(x) > 0$. Si $x \not\geqq 0$, $x^- > 0$, donc $\varphi(x)^- = \varphi(x^-) > 0$ et $\varphi(x) \not\geqq 0$. Il en résulte que φ est bien un isomorphisme de groupe ordonné de G dans Γ.

Si, en particulier, on prend pour N l'ensemble de tous les t-idéaux premiers de G différents de (0), N vérifie bien les conditions de la proposition 5, car si $G \ni a > 0$, (a) est un t-idéal, or l'ensemble des t-idéaux étant de type fini, il existe d'après le théorème 6 un t-idéal premier $\mathfrak{p}$ qui a une intersection vide avec $S = \{0\}$ et qui contient (a). Or $\mathfrak{p} \in N$ et $\mathfrak{p} \ni a$. On en conclut que :

THÉORÈME 9 (Lorenzen). — *Tout groupe réticulé* G *est isomorphe (pour sa structure de groupe ordonné) à un sous-groupe propre d'un produit de groupes totalement ordonnés.*

3. AFFINEMENT DES STRUCTURES D'ORDRE. — Dans ce paragraphe nous aurons à considérer différentes structures d'ordre sur un certain groupe G, comme toujours supposées compatibles avec sa structure de groupe. La lettre $\mathcal{O}$ suivie d'un accent ou d'un indice désignant une certaine structure d'ordre sur G, les lettres G et P suivies de ce même accent ou de ce même indice désigneront respectivement le groupe G ainsi ordonné et l'ensemble des éléments positifs correspondants de G. Réciproquement, la lettre P suivie d'un certain accent ou indice désignera un sous-ensemble de G définissant une structure d'ordre qui sera notée par la lettre $\mathcal{O}$ suivie du même accent ou du même indice.

1. Étant donné un groupe G, Ω l'ensemble des relations d'ordre sur G compatibles avec sa structure de groupe, $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_1 \in \Omega$, à quelle condition peut-on trouver $\mathcal{O} \in \Omega$ avec $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2 \leqq \mathcal{O}$? ($\mathcal{O} \leqq \mathcal{O}'$ se lisant : $\mathcal{O}'$ plus fine que $\mathcal{O}$.)

Le problème revient à trouver un sous-ensemble P de G tel que

1° $$P_1 \cup P_2 \subset P;$$

2° $$P + P \subset P;$$

3° $$P \cap (-P) = \{0\}.$$

La première et la troisième condition montrent que le problème ne sera possible que si

$$P_1 \cap (-P_2) = \{0\}. \tag{1}$$

Supposons qu'il en soit ainsi et soit $P' = P_1 + P_2$. Si P est une solution du problème, 1° et 2° montrent que l'on a nécessairement $P' \subset P$. On voit aisément que P' répond à la question; on a donc le

THÉORÈME 1 — *Étant donné un groupe* G *et deux structures d'ordre* $\mathcal{O}_1$ *et* $\mathcal{O}_2$ *sur* G, *il existe des structures d'ordre sur* G *plus fines que* $\mathcal{O}_1$ *et* $\mathcal{O}_2$ *si et si seulement* $P_1 \cap (-P_2) = \{0\}$.

Lorsqu'il en est ainsi, il en existe une moins fine que toutes les autres. L'ensemble de ses éléments positifs est $P_1 + P_2$.

2. Proposition 1. — *Étant donné un groupe* G *et un ensemble* $(a_\iota)_{\iota\in I}$ *d'éléments de* G *différents de zéro, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des structures d'ordre sur* G *telles que tous les éléments* $a_\iota\,(\iota\in I)$ *y soient positifs est que toute relation de la forme*

$$\sum_{\iota\in N} m_\iota a_\iota = 0, \tag{2}$$

où N *est un sous-ensemble fini de* I *et* m_ι *un entier positif ou nul* $(\iota\in N)$ *entraîne*

$$m_\iota = 0 \qquad (\iota\in N). \tag{3}$$

Lorsqu'il en est ainsi, il en existe une moins fine que toutes les autres. L'ensemble de ses éléments positifs sera l'ensemble P′ *formé par les éléments de la forme* $\sum_{\iota\in N} m_\iota a_\iota$ *où* N *est un sous-ensemble fini de* I *et* m_ι *un entier positif* $(\iota\in N)$.

Soit $\mathcal{O}$ une structure d'ordre répondant à la question $P\supset P'$.

Réciproquement, si P définit une structure d'ordre sur G et $P\supset P'$, P donne une solution du problème. Ceci posé, on vérifie immédiatement la suffisance.

Nécessité. — Montrons d'abord que ceci est vrai si N se compose d'un seul élément : Soit $\mathcal{O}$ une ordination de G répondant à la question. Si l'on a $ma=0$ avec m entier >0, on a $(m-1)a=-a$. Mais $m-1\geqq 0$ entraîne $(m-1)a\in P$, $-a\in -P$, donc

$$-a\in P\cap(-P)\rightarrow a=0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Raisonnons par récurrence sur le nombre des éléments de N et supposons que $(2)\rightarrow(3)$ toutes les fois que N a moins de n éléments $(n>1)$. Montrons alors que ceci est encore vrai si N a n éléments.

Soit

$$m_1a_1+\ldots,+m_{n-1}a_{n-1}+m_na_n=0, \qquad \text{où} \quad a_1,\ldots,a_n\in(a_\iota)_{\iota\in I}$$

et où $m_1,\ldots,m_n$ sont des entiers positifs ou nuls.

Alors $m_1a_1+\ldots+m_{n-1}a_{n-1}=-m_na_n$.

Or $m_1 a_1 + \ldots + m_{n-1} a_{n-1} \in \mathrm{P}$ et $m_n a_n \in -\mathrm{P}$, donc

$$m_n a_n \in \mathrm{P} \cap (-\mathrm{P}) \qquad \text{et} \qquad m_1 a_1 + \ldots + m_{n-1} a_{n-1} = 0, \qquad m_n a_n = 0.$$

Les hypothèses de récurrence montrent alors que

$$m_i = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

Du théorème 1 et de la proposition 1 découle alors :

THÉORÈME 2. — *Étant donné le groupe ordonné* G *muni de la structure d'ordre* $\mathcal{O}$ *et un ensemble* $(a_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ *d'éléments de* G, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des structures d'ordre sur* G *plus fines que* $\mathcal{O}$ *et telles que tous les éléments* a_ι *y soient positifs est que toute inégalité de la forme*

$$(4) \qquad \sum_{\iota \in \mathrm{N}} m_\iota a_\iota \leqq 0,$$

où N *est un sous-ensemble fini de* I *et* m_ι *un entier positif ou nul entraîne*

$$(5) \qquad m_\iota = 0 \qquad (\iota \in \mathrm{N}).$$

Lorsqu'il en est ainsi, il existe une structure d'ordre répondant à la question moins fine que toutes les autres : l'ensemble de ses éléments positifs est $\mathrm{P} + \mathrm{P}'$, P' *désignant l'ensemble constitué par les éléments de la forme* $\sum_{\iota \in \mathrm{N}} m_\iota a_\iota$ *où* N *est un sous-ensemble fini de* I *et* m_ι *un entier positif* $(\iota \in \mathrm{N})$.

3. Étant donné un groupe ordonné G, cherchons si l'on peut trouver une structure d'ordre totale $\mathcal{O}' \geqq \mathcal{O}$.

Si ceci est possible, G muni de la structure d'ordre totale $\mathcal{O}'$ est réticulé, donc sans torsion (§ 1, corollaire 1 du th. 14). Montrons que cette condition est suffisante. Supposons donc que G soit sans torsion. Soit Ω l'ensemble des structures d'ordre plus fines que $\mathcal{O}$. Ω n'est pas vide puisque $\mathcal{O} \in \Omega$. Soit $(\mathcal{O}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ un sous-ensemble totalement ordonné de Ω et $\mathrm{P}_\mathrm{I} = \bigcup_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{P}_\iota$.

On voit que P_I définit une structure d'ordre $\mathcal{O}_\mathrm{I} \in \Omega$ et que $\mathcal{O}_\mathrm{I}$ est la limite supérieure de l'ensemble $(\mathcal{O}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$. Donc Ω est inductif. Le théorème de Zorn montre alors qu'il admet un élément maximal $\mathcal{O}'$.

Je dis que $\mathcal{O}'$ est une ordination totale : Si $\mathcal{O}'$ n'est pas une ordination totale $\exists\, x \in G$ avec $x \notin P' \cup (-P')$. Deux cas sont alors possibles :

1° Pour tout entier m strictement positif, on a $mx \notin -P'$. Le théorème 2 montre alors que l'on peut trouver une structure d'ordre $\mathcal{O}''$ telle que $\mathcal{O}' \leqq \mathcal{O}''$ et $x \in P''$. Donc $\mathcal{O}' \leqq \mathcal{O}''$ et $\mathcal{O}'' \in \Omega$, ce qui est impossible puisque $\mathcal{O}'$ est maximal dans Ω.

2° $\exists$ un entier $m > 0$ tel que $mx \in -P'$. En ce cas, si n est un entier positif ou nul, $n(-x) \in -P'$ entraîne $n = 0$, car sans cela $mn(-x) \in P' \cap (-P') = \{0\}$ $mnx = 0$ et, comme G est supposé sans torsion, $x = 0$. Ce qui est impossible. Donc $-x$ est dans le cas 1° et l'on a de nouveau une impossibilité. On voit donc que $P' \cup (-P') = G$ et, par suite,

THÉORÈME 3. — *Étant donné un groupe* G *muni de la structure d'ordre* $\mathcal{O}$, *pour qu'il existe sur* G *une structure d'ordre totale plus fine que* $\mathcal{O}$, *il faut et il suffit que* G *soit sans torsion.*

COROLLAIRE. — *Tout groupe sans torsion peut être totalement ordonné* [16].

Soit G un groupe sans torsion. Il suffit d'appliquer le théorème 3 au cas où l'ordination $\mathcal{O}$ est définie par $P = \{0\}$.

4. Nous allons donner maintenant quelques applications des théorèmes précédents.

Soit G un groupe (abélien), K un corps (commutatif ou non).

L'algèbre du groupe G relativement à K est identifiée à l'ensemble des « polynomes formels »

$$a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + a_n x^{\alpha_n}, \qquad \text{où} \quad \alpha_i \in G \quad \text{et} \quad a_i \in K \qquad (1 \leqq i \leqq n),$$

où n est un entier positif variable.

THÉORÈME 4. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre du groupe* G *relativement au corps* K *soit un anneau d'intégrité est que* G *soit sans torsion.*

---

(16) F. LÉVI [1].

Nécessité. — Si G n'était pas sans torsion, il existerait $\alpha \in G$ et un entier $n > 0$ tel que $\alpha \neq 0$ et $n\alpha = 0$. Soit alors

$$X = x^{(n-1)\alpha} + x^{(n-2)\alpha} + \ldots + x^{\alpha} + 1, \qquad Y = x^{\alpha} - 1.$$

On a X, $Y \neq 0$ et $XY \neq x^{n\alpha} - 1 = 0$; ceci est impossible, car l'anneau de groupe ne serait pas un anneau d'intégrité.

Suffisance. — Si G est sans torsion, on peut l'ordonner totalement et l'on raisonne comme dans le cas des polynomes ordinaires.

5. J. Dieudonné [17] s'est servi de certaines des considérations précédentes pour démontrer directement le théorème suivant dû à P. Lorenzen [18].

THÉORÈME 5. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe ordonné* G *soit réalisable comme sous-groupe d'un produit direct de groupes totalement ordonnés est qu'il soit semi-clos.*

La nécessité est évidente. Réciproquement soit G un groupe semi-clos et $\Omega = (\mathcal{O}_\iota)_{\iota \in I}$ l'ensemble des ordinations totales plus fines que $\mathcal{O}$. Posons $\Gamma = \prod_{\iota \in I} G_\iota$. L'application identique φ_ι de G sur G_ι est un homomorphisme croissant. Il en résulte que $\varphi = \prod_{\iota \in I} \varphi_\iota$ est un homomorphisme croissant. Son noyau est nul. Pour montrer que c'est un isomorphisme de groupes ordonnés, il suffit de montrer que $x \not\geq 0 \rightarrow \varphi(x) \not\geq 0$. Or $x \geq 0$ entraîne $\varphi(x) \geq 0$. Si x est incomparable avec o, comme G est semi-clos, quel que soit l'entier $n > 0$, on a $nx \not\geq 0$. Donc en vertu du théorème 2, il existe une ordination $\mathcal{O}'$ plus fine que $\mathcal{O}$ et telle que $x \in P'$. Comme G' est sans torsion, en vertu du théorème 3, il existe une ordination totale $\mathcal{O}'' \geq \mathring{\mathcal{O}}'$. Donc $\mathcal{O}'' \in (\mathcal{O}_\iota)_{\iota \in I}$. Soit $\mathcal{O}'' = \mathcal{O}_\alpha$. On a $\varphi_\alpha(x) > 0$. De même, $\exists_\beta \in I$ avec $\varphi_\beta(-x) > 0$ ou $\varphi_\beta(x) < 0$. Donc $\varphi(x)$ est incomparable avec o et l'on a bien dans tous les cas $x \not\geq 0 \rightarrow \varphi(x) \not\geq 0$.

---

(17) DIEUDONNÉ [1].

(18) LORENZEN [1].

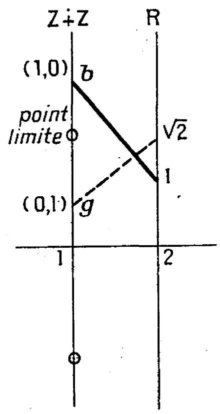
CHAPITRE II.

LA THÉORIE DES FILETS ET SES APPLICATIONS.

1. Les groupes réguliers et les filets. — 1. Étant donné un groupe ordonné G, a et b contenus dans G seront dits *faiblement étrangers* si $0 \leqq x \leqq a, b$ entraîne $x = 0$. Deux éléments étrangers sont toujours faiblement étrangers. Par contre, il existe des groupes tels que des éléments faiblement étrangers ne soient pas toujours étrangers.

Exemple. — Soit $G_1 = Z \dot{+} Z$ ordonné lexicographiquement, $G_2 = R$ et $\Gamma = G_1 \dot{+} G_2$ muni de l'ordination produit.

Si $a \in \Gamma$, on pourra noter $a(i) = \mathrm{pr}_i(a) \in G_i$ $(i = 1, 2)$.



Soient les deux éléments f et g de Γ définis de la façon suivante :

$$f(1) = (1, 0), \qquad f(2) = 1,$$
$$g(1) = (0, 1), \qquad g(2) = \sqrt{2}.$$

Considérons le sous-groupe G de Γ engendré par les éléments f et g, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de Γ qui peuvent se mettre sous la forme

$$h = \lambda f + \mu g, \tag{1}$$

où λ et μ sont des entiers.

$$h(1) = (\lambda, \mu), \qquad h(2) = \lambda + \mu\sqrt{2}$$

montrent que

$$h \geqq 0 \Rightarrow \lambda \geqq 0 \quad \text{et} \quad \lambda \geqq -\mu\sqrt{2}.$$

f et g sont faiblement étrangers (dans G), car $h \geqq 0$ et $h \leqq f, g$ impliquent $\lambda = 0$, donc $h(2) = \mu\sqrt{2}$ et $0 \leqq h(2) \leqq f(2)$ montre que $0 \leqq \mu\sqrt{2} < 1$, donc $\mu = 0$ et $h = 0$.

Ils ne sont pas étrangers car si $h' = g - f$, on voit que

$$h'(1) = (-1, 1), \qquad h'(2) = \sqrt{2} - 1 \qquad \text{et} \qquad h' \leqq f, g.$$

Or $h'(2) > 0$ montre que $h' \not\leqq 0$.

Il est facile de voir que si G est réticulé, deux éléments faiblement étrangers sont toujours étrangers. Un groupe ordonné G tel que deux éléments faiblement étrangers soient toujours étrangers est dit *groupe régulier. Tout groupe réticulé est régulier,* par contre nous rencontrerons des groupes réguliers qui ne sont pas réticulés (chap. II, § **2**, n° 2).

Remarque. — Dans l'exemple précédent on voit que $g < 2f$. Donc g est faiblement étranger à f et pas à $2f$: Un élément peut donc être faiblement étranger à deux autres sans l'être à leur somme.

PROPOSITION 1. — *Tout groupe ordonné* G *tel que* $\sum_{\iota \in I} G_\iota \subset G \subset \prod_{\iota \in I} G_\iota$ *où les* G_ι $(\iota \in I)$ *sont des groupes réguliers est lui-même un groupe régulier.*

Soient a et b contenus dans G_+ et faiblement étrangers. Pour tout $\iota \in I$, $pr_\iota(a)$ et $pr_\iota(b)$ sont faiblement étrangers dans G_ι. Si a et b n'étaient pas étrangers, on pourrait trouver $d \in G$ avec $d \not\leqq 0$, $d \leqq a, b$. Mais alors, par définition $\exists\, \alpha \in I$ avec $\text{proj}_\alpha(d) \not\leqq 0$. Or

$$\text{proj}_\alpha(d) \leqq \text{pr}_\alpha(a),\ \text{proj}_\alpha(b).$$

Mais $\text{proj}_\alpha(a)$ et $\text{proj}_\alpha(b)$ sont faiblement étrangers dans G et comme ce dernier groupe est régulier, on a $\text{proj}_\alpha(d) \leqq 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2. Soit G un groupe ordonné; la relation suivante définie entre éléments de G_+

$$(2) \qquad a \equiv b \quad \Leftrightarrow \quad \{\inf(a, x) = 0 \Leftrightarrow \inf(b, x) = 0\}$$

est une relation d'équivalence (ce qui justifie sa notation). Elle définit des classes dans l'ensemble G qui sont appelées *filets* de G. $\mathcal{F}$ désignera l'ensemble des filets de G. Si $a \in G$, $\bar{a}$ sera le filet qui contient a.

$\mathcal{F}$ est ordonné par la relation

$$(3) \qquad \bar{a} \geqq \bar{b} \quad \rightleftharpoons \quad \{\inf(a, x) = 0 \rightarrow \inf(b, x) = 0\}.$$

On a immédiatement la relation

$$(4) \qquad a, b \in G_+ \ \text{ et } \ a \geqq b \quad \rightarrow \quad \bar{a} \geqq \bar{b},$$

$\mathcal{F}$, muni de cette relation d'ordre, *est filtrant à droite et à gauche*. A gauche, car il admet pour plus petit élément le filet $\bar{0}$ composé du seul élément o; à droite en vertu de la

Proposition 2. — *$\mathcal{F}$ est semi-réticulé supérieurement et l'on a*

$$(5) \qquad \sup(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{a + b},$$

On a $\overline{a+b} \geqq \bar{a}, \bar{b}$. Soit $\bar{c} \geqq \bar{a}, \bar{b}$

$$\inf(x, c) = 0 \rightarrow \inf(x, a) = \inf(x, b) = 0,$$

donc $\inf(x, a+b) = 0$ (chap. I, § **1**, th. 8) et $\bar{c} \geqq \overline{a+b}$.

C. Q. F. D.

Deux filets $\bar{a}$ et $\bar{b}$ seront dits *étrangers* si $\inf(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{0}$.

Nous allons désormais supposer dans tout le reste de ce paragraphe que le groupe G *est régulier.*

Proposition 3. — *Les deux filets $\bar{a}$ et $\bar{b}$ du groupe régulier* G *sont étrangers si et si seulement les éléments a et b sont eux-mêmes étrangers.*

Supposons $\bar{a}$ et $\bar{b}$ étrangers. a et b sont faiblement étrangers. Mais puisque G est régulier, ceci entraîne que a et b soient étrangers.

Réciproquement soient $0 = \inf(a, b)$ et x tel que $0 \leqq \bar{x} \leqq \bar{a}, \bar{b}$.

La proposition 2 montre que $\bar{a} = \overline{a+x}$, $\bar{b} = \overline{b+x}$. Mais $\inf(a, b) = 0$ et $a + x \equiv a$ entraîne par définition $\inf(a+x, b) = 0$: Cette dernière égalité et $b \equiv b + x$ entraînent $\inf(a+x, b+x) = 0$.

Or $\inf(a+x, b+x) = \inf(a, b) + x$ et $\inf(a, b) = 0$ entraîne $x = 0$. Donc $\bar{x} = \bar{0}$ et l'on a bien $\inf(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{0}$.

THÉORÈME 1. — *Si $\bar{a}$ et $\bar{a}'$ sont deux filets du groupe régulier* G *tels que $\bar{a} \not\leq \bar{a}'$, il existe un filet $\bar{a}''$ différent de $\bar{0}$, étranger à $\bar{a}'$, tel que $\bar{a}'' < \bar{a}$.*

En effet, si $\bar{a} \not\leq \bar{a}'$, $\exists$ par définition $x \in G_+$ tel que x soit étranger à a' mais non à a; x n'est donc pas faiblement étranger à a et $\exists y$ tel que $a, x \geq y > 0$. En vertu de la proposition 3, il suffit de prendre $a'' = y$.

COROLLAIRE 1. — *Si $\bar{a}$ et $\bar{a}'$ sont deux filets du groupe régulier* G *différents de $\bar{0}$, tels que $\bar{a}' < \bar{a}$, il existe un filet $\bar{a}''$ différent de $\bar{0}$, étranger à $\bar{a}'$ et tel que $\bar{a}'' < \bar{a}$.*

Soit $\bar{a}''$ défini comme précédemment. Il reste à montrer que $\bar{a}'' < \bar{a}$. Il est impossible que $\bar{a}'' = \bar{a}$, sans cela $\inf(\bar{a}', \bar{a}'') = \inf(\bar{a}', \bar{a}) = \bar{a}' \neq \bar{0}$.

3. Nous venons de voir que l'ensemble ordonné $\mathcal{F}$ des filets d'un groupe régulier vérifiait les quatre conditions suivantes :

α. $\mathcal{F}$ possède un plus petit élément $\bar{0}$;
β. $\mathcal{F}$ est réticulé supérieurement;
γ. $\bar{0} = \inf(\bar{a}, \bar{c}) = \inf(\bar{b}, \bar{c}) \rightarrow \bar{0} = \inf[\sup(\bar{a}, \bar{b}), \bar{c}]$;
δ. $\bar{a} \not\leq \bar{a}' \rightarrow \exists\ \bar{a}'' \in \mathcal{F}$ tel que $\bar{0} = \inf(\bar{a}', \bar{a}''), \bar{0} < \bar{a}'' \leq \bar{a}$.

Ce que nous allons faire dans la suite de ce paragraphe revient à étudier les propriétés d'un tel ensemble ordonné.

Un filet $\bar{a}$ d'un groupe régulier G sera dit *minimal* si $\bar{a} \neq \bar{0}$ et $\bar{x} < \bar{a} \rightarrow \bar{x} = \bar{0}$. Nous désignerons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des filets minimaux de G, par $\mathfrak{M}(\bar{x})$ l'ensemble des filets minimaux inférieurs ou égaux à $\bar{x}$. On a évidemment

$$\bar{a} \geq \bar{b} \rightarrow \mathfrak{M}(\bar{a}) \supset \mathfrak{M}(\bar{b}), \tag{6}$$

$$\bar{0} = \inf(\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \mathfrak{M}(\bar{a}) \cap \mathfrak{M}(\bar{b}) = \emptyset. \tag{7}$$

PROPOSITION 4. — *On a :*

$$(8) \qquad \mathfrak{M}[\sup(\bar{a}, \bar{b})] = \mathfrak{M}(\bar{a}) \cup \mathfrak{M}(\bar{b}).$$

En effet $\mathfrak{M}[\sup(\bar{a}, \bar{b})] \supset \mathfrak{M}(\bar{a}) \cup \mathfrak{M}(b)$. D'autre part, si $\bar{x} \in \mathfrak{M}$ est tel que $\bar{x} \notin \mathfrak{M}(\bar{a}) \cup \mathfrak{M}(\bar{b})$, on a $\inf(\bar{x}, \bar{a}) = \inf(\bar{x}, \bar{b})$; d'où, en vertu de γ

$$\inf[\bar{x}, \sup(\bar{a}, \bar{b})] = 0 \qquad \text{ou} \qquad x \notin \mathfrak{M}[\sup(\bar{a}, \bar{b})].$$

4. L'ensemble $\mathcal{F}$ des filets d'un groupe régulier G sera dit posséder la *propriété* M si $\mathcal{F} \ni \bar{x} \neq \bar{0} \to \mathfrak{M}(\bar{x}) \neq \emptyset$. G sera dit alors lui aussi posséder la propriété M. Cette propriété peut s'exprimer de plusieurs façons différentes.

THÉORÈME 2. — *Dans l'ensemble $\mathcal{F}$ des filets du groupe régulier* G *les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

$$(9) \qquad \bar{x} \neq \bar{0} \to \mathfrak{M}(\bar{x}) \neq \emptyset,$$

$$(10) \qquad \bar{a} \geq \bar{b} \rightleftharpoons \mathfrak{M}(\bar{a}) \supset \mathfrak{M}(\bar{b}),$$

$$(11) \qquad \bar{a} = \bar{b} \rightleftharpoons \mathfrak{M}(\bar{a}) = \mathfrak{M}(\bar{b}),$$

$$(12) \qquad \inf(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{0} \rightleftharpoons \mathfrak{M}(\bar{a}) \cap \mathfrak{M}(\bar{b}) = \emptyset.$$

Les trois dernières relations sont toujours vraies de gauche à droite. Il nous suffira donc dans la démonstration de les vérifier de droite à gauche.

(9) *implique* (10) : Si (9) est vérifiée et si $\bar{a} \not\geq \bar{b}$, en vertu de δ, il existe $\bar{c}$ étranger à $\bar{a}$ et tel que $\bar{0} < \bar{c} \leq \bar{b}$, (9) implique $\mathfrak{M}(\bar{c}) \neq \emptyset$. Or en vertu de (6), $\mathfrak{M}(\bar{b}) \supset \mathfrak{M}(\bar{c})$ et en vertu de (7), $\mathfrak{M}(\bar{a}) \cap \mathfrak{M}(\bar{c}) = \emptyset$; on ne peut donc avoir $\mathfrak{M}(\bar{a}) \supset \mathfrak{M}(\bar{b})$.

(10) *implique évidemment* (11).

(11) *implique* (12) : Si (11) est vérifiée et si $\bar{0} \neq \inf(\bar{a}, \bar{b})$ $\exists \bar{c}$ avec $\bar{a}, \bar{b} \geq \bar{c} > \bar{0}$. En vertu de (11),

$$\mathfrak{M}(\bar{c}) \neq \mathfrak{M}(\bar{0}) = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}(\bar{a}) \cap \mathfrak{M}(\bar{b}) \supset \mathfrak{M}(\bar{c}) \neq \bar{0},$$

donc on a bien (12).

(12) *implique* (9) : Si $\mathfrak{M}(\bar{x}) = \emptyset$, $\mathfrak{M}(\bar{x}) \cap \mathfrak{M}(\bar{x}) = \emptyset$, (12) montre alors que $\inf(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{0}$ ou $\bar{x} = \bar{0}$, d'où (9).

Remarque. — (10) montre que si $\mathcal{F}$ vérifie la propriété M, $\bar{x} \to \mathcal{M}(\bar{x})$ définit un isomorphisme de $\mathcal{F}$ dans $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ (ensemble des parties de $\mathcal{M}$ ordonné par inclusion).

5. Rappelons ([19]) que l'ensemble $\mathcal{F}$ est dit *relativement complémenté* si, quels que soient $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{x} \in \mathcal{F}$ tels que $\bar{a} \leqq \bar{x} \leqq \bar{b}$, $\exists \bar{y} \in \mathcal{F}$ tel que :

$$\bar{a} = \inf(\bar{x}, \bar{y}), \qquad \bar{b} = \sup(\bar{x}, \bar{y}), \tag{13}$$

Si $\bar{a} = \bar{0}$, un filet $\bar{y}$ vérifiant (13) sera dit *complément de x par rapport à b*.

Proposition 5. — *Pour que $\mathcal{F}$ soit relativement complémenté, il suffit que pour tout $\bar{b}$ contenu dans $\mathcal{F}$, tout élément $\bar{x}$ inférieur à $\bar{b}$ admette un complément par rapport à $\bar{b}$.*

Soit $\bar{a} \leqq \bar{x} \leqq \bar{b}$. Par hypothèse, $\exists \bar{z} \in \mathcal{F}$ tel que $\bar{0} = \inf(\bar{x}, \bar{z})$, $\bar{b} = \sup(\bar{x}, \bar{z})$. Posons $\bar{y} = \sup(\bar{a}, \bar{z})$. On a évidemment

$$\bar{b} = \sup(\bar{x}, \bar{y}).$$

D'autre part, $\bar{x}, \bar{y} \geqq \bar{a}$. Soit $\bar{x}, \bar{y} \geqq \bar{t}$. Je dis que $\bar{t} \leqq \bar{a}$. En effet, si l'on avait $\bar{t} \not\leqq \bar{a}$, en vertu de δ, $\mathcal{F} \ni \bar{u}$ étranger à $\bar{a}$ et tel que $\bar{0} < \bar{u} \leqq \bar{t}$. Comme $\bar{u} \leqq \bar{x}$, $\bar{u}$ est étranger à $\bar{z}$, donc en vertu de γ, il est étranger à $\bar{y}$, ce qui contredit $\bar{0} < \bar{u} \leqq \bar{y}$.

Théorème 3. — *Si $\bar{0} \leqq \bar{x}_1 \leqq \bar{x}_2 \leqq \bar{b}$ et si $\bar{y}_i$ est complément de $\bar{x}_i$ par rapport à $\bar{b}$ $(i = 1, 2)$, on a $\bar{0} \leqq \bar{y}_2 \leqq \bar{y}_1 \leqq \bar{b}$.*

Si l'on avait $\bar{y}_2 \not\leqq \bar{y}_1$ en vertu de δ, $\mathcal{F} \ni \bar{z}$ étranger à $\bar{y}_1$, et tel que $\bar{0} < \bar{z} \leqq \bar{y}_2$,

$$\bar{0} = \inf(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \to \bar{0} = \inf(\bar{x}_2, \bar{z}) \qquad \text{et} \qquad \bar{x}_1 \leqq \bar{x}_2 \to \bar{0} = \inf(\bar{x}_1, \bar{z}).$$

En vertu de γ, $\bar{z}$ étranger à $\bar{x}_1$ et $\bar{y}_1$ est donc étranger à $\sup(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \bar{b}$, ce qui contredit $\bar{0} \leqq \bar{z} \leqq \bar{b}$.

([19]) G. Birkhoff [2].

COROLLAIRE 1. — *Si $\overline{y}$ et $\overline{y'}$ sont des compléments de $\overline{x}$ par rapport à $\overline{b}$, on a $\overline{y}=\overline{y}'$.*

On posera alors $\overline{y}=C_{\overline{b}}\overline{x}$ sans ambiguïté possible. Si $\overline{y}=C_{\overline{b}}\overline{x}$, on a $\overline{x}=C_{\overline{b}}\overline{y}$.

COROLLAIRE 2. — $\overline{0}\leqq\overline{x}_1<\overline{x}_2\leqq\overline{b}$ *entraîne* $C_{\overline{b}}\overline{x}_1>C_{\overline{b}}x_2$.

6. Rappelons que l'ensemble ordonné $\mathcal{F}$ est dit vérifier la *condition affaiblie de chaîne ascendante* si tout ensemble de $\mathcal{F}$ borné supérieurement vérifie la condition de chaîne ascendante. Il sera dit vérifier la *condition* MF s'il vérifie la condition M et si pour tout $\overline{x}\in\mathcal{F}$, $\mathcal{M}(\overline{x})$ est fini.

On a alors le

THÉORÈME 4. — *Dans l'ensemble $\mathcal{F}$ des filets du groupe régulier* G *les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *$\mathcal{F}$ vérifie la condition affaiblie de chaîne ascendante;*

2° *$\mathcal{F}$ est relativement complémenté et vérifie la condition de chaîne descendante;*

3° *$\mathcal{F}$ vérifie la condition* MF*;*

4° *$\mathcal{F}$ est isomorphe à l'ensemble (ordonné par inclusion) des parties finies d'un certain ensemble* E.

1° *entraîne* 2° : Soit $\mathcal{F}$ vérifiant 1°. D'après la proposition 5 pour montrer que $\mathcal{F}$ est relativement complémenté, il suffit de montrer que si $\overline{0}\leqq\overline{x}\leqq\overline{b}$, $\overline{x}$ admet un complément par rapport à $\overline{b}$.

Soit $\mathcal{F}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ ainsi défini

$$(14)\qquad \overline{y}\in\mathcal{F}'\rightleftharpoons[\overline{0}=\inf(\overline{x},\overline{y})\text{ et }\overline{y}\leqq\overline{b}];$$

$\mathcal{F}$ n'est pas vide puisque $\overline{0}\in\mathcal{F}'$. Comme $\mathcal{F}'$ est borné par $\overline{b}$, par hypothèse il vérifie la condition de chaîne ascendante et possède des éléments maximaux. Soit $\overline{z}$ un tel élément. Pour montrer que $\overline{z}=C_{\overline{b}}\overline{x}$, il suffit de montrer que $\overline{b}=\sup(\overline{x},\overline{z})$.

Soit $\overline{b'}=\sup(\overline{x},\overline{z})$. Si l'on avait $\overline{b}>\overline{b'}$, il existerait un élément $\overline{b''}$ de $\mathcal{F}$ tel que $\inf(\overline{b'},\overline{b''})=\overline{0}$ et $\overline{0}<\overline{b''}\leqq\overline{b}$. Alors $\overline{b'}\geqq\overline{x}$ montre que $\bar{o} = \inf(\bar{x}, \bar{b}'')$. Donc $\bar{b}'' \in \mathcal{F}'$. En vertu de γ, $\bar{z}' = \sup(\bar{z}, \bar{b}'')$ est étranger à $\bar{x}$. D'autre part, $\bar{z}' \leq \bar{b}$. Donc $\bar{z}' \in \mathcal{F}'$. La maximalité de $\bar{z}$ dans $\mathcal{F}'$ implique $\bar{z}' = \bar{z}$, ce qui contredit $\inf(\bar{z}, \bar{b}'') = \bar{o}$.

Montrons que $\mathcal{F}$ vérifie la condition de chaîne descendante :

Soit $\bar{a} = \bar{a}_1 \geq \bar{a}_2 \geq \ldots \geq \bar{a}_n \ldots$. Comme on vient de voir que $\mathcal{F}$ est relativement complémenté, pour tout $\bar{a}_n$, $\exists \bar{b}_n$ tel que $\bar{b}_n = C_{\bar{a}} \bar{a}_n$ et, en vertu du théorème 3, on a

$$\bar{b}_1 \leq \bar{b}_2 \leq \ldots \leq \bar{b}_n \leq \ldots \leq \bar{a}.$$

$\mathcal{F}$ vérifiant la condition affaiblie de chaîne ascendante, à partir d'un certain rang p, on a $\bar{b}_n = \bar{b}_{n+1} = \bar{b}$. A partir de ce même rang, on a donc

$$C_{\bar{a}} \bar{b}_n = C_{\bar{a}} \bar{b}_{n+1} = C_{\bar{a}} \bar{b}_p \qquad \text{ou} \qquad \bar{a}_n = \bar{a}_{n+1} = \bar{a}_p.$$

$\mathcal{F}$ vérifie bien la condition de chaîne descendante.

2° *entraîne* 3° : Soit $\mathcal{F}$ vérifiant 2°. Comme il vérifie la condition de chaîne descendante, il vérifie évidemment la condition M. Il suffit donc de montrer que si $\bar{a} \in \mathcal{F}$, $\mathcal{M}(a)$ est fini.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit une suite $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \ldots$ d'éléments tous différents et contenus dans $\mathcal{M}(\bar{a})$. Posons $\bar{b}_1 = \bar{a}_1, \ldots, b_p = \sup(\bar{b}_{p-1}, \bar{a}_p)$. On déduit facilement de γ que $\bar{b}_1 < \bar{b}_2 < \ldots < \bar{b}_p < \ldots < \bar{a}$. Comme $\mathcal{F}$ est relativement complémenté, on a en vertu du corollaire 2 du théorème 3

$$C_{\bar{a}} \bar{b}_1 > C_{\bar{a}} \bar{b}_2 > \ldots > C_{\bar{a}} \bar{b}_p > \ldots,$$

ce qui contredit la condition de chaîne descendante.

3° *entraîne* 4° : Soit $\mathcal{F}$ vérifiant 3°. On posera $E = \mathcal{M}$ et l'application de $\mathcal{F}$ dans $\mathfrak{L}(\mathcal{M})$ sera définie par $\bar{x} \to \mathcal{M}(\bar{x})$. Comme $\mathcal{F}$ vérifie la propriété M, en vertu de (11) elle est biunivoque, c'est un isomorphisme pour les structures d'ordre correspondantes en vertu de (10). Il reste à montrer qu'elle applique $\mathcal{F}$ sur le sous-ensemble $\mathfrak{L}'$ de $\mathfrak{L}(\mathcal{M})$ composé de toutes les parties finies de $\mathcal{M}$. Puisque $\mathcal{F}$ vérifie MF, on a pour tout élément $\bar{x} \in \mathcal{F}$, $\mathcal{M}(\bar{x}) \in \mathfrak{L}'$. Réciproquement, si

$\mathfrak{X}' \ni = \mathfrak{D}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$, il est facile de voir à partir de γ que $\mathfrak{M}[\sup(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)] = 2$.

4° *entraîne évidemment* 1°. D'où le théorème.

Remarque. — Un groupe régulier G peut être tel que $\mathfrak{F}$ soit relativement complémenté sans vérifier la condition de chaîne descendante, comme le montre l'exemple du groupe réticulé $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$, où I est un ensemble infini et les G_ι des groupes totalement ordonnés dont aucun ne se réduit à l'élément neutre. Il serait intéressant de savoir s'il existe un groupe régulier tel que l'ensemble de ses filets vérifie la condition de chaîne descendante sans être relativement complémenté.

2. La théorie des filets dans les groupes réticulés. — 1. Proposition 1. — *Si* G *est réticulé, l'ensemble* $\mathfrak{F}$ *des filets de* G *est lui-même un réseau et l'on a*

$$\sup(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{\sup(a, b)} = a + \bar{b}, \tag{1}$$

$$\inf(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{\inf(a, b)}. \tag{2}$$

(1) a été démontré au paragraphe 1 pour un groupe régulier général [20].

Vérifions (2). On a $\bar{a}, \bar{b} \geqq \overline{\inf(a, b)}$.

Si, d'autre part, $\bar{a}, \bar{b} \geqq \bar{c}$, $\inf[\inf(a, b), x] = 0$ s'écrit

$$\inf[a, \inf(b, x)] = 0,$$

donc

$$\inf[c, \inf(b, x)] = \inf[b, \inf(c, x)] = 0,$$

d'où $\inf[c, \inf(c, x)] = \inf(c, x) = 0$.

2. Un groupe G totalement ordonné et possédant plus d'un élément, ne possède qu'un seul filet différent de $\bar{0}$. Réciproquement

Théorème 1. — *Si* G *est un groupe réticulé et si* $\mathcal{f}$ *est un filet minimal de* G, $\mathcal{f}$ *engendre un sous-groupe de* G *qui est totalement ordonné.*

([20]) On a du moins montré que $\sup(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{a + b}$. Or

$$\overline{a + b} \geqq \overline{\sup(a, b)} \geqq \bar{a}, \bar{b}, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{a + b} = \overline{\sup(a, b)} = \sup(\bar{a}, \bar{b}).$$

Soit $\mathcal{F}$ un filet minimal de G.

Soient $a, b \in \mathcal{F}$; $a \geqq \inf(a, b) > 0 \to \overline{\inf(a, b)} = \mathcal{F}$. Posons

$$a' = a - \inf(a, b); \qquad b' = b - \inf(a, b).$$

$\inf(a', b') = 0$ montre qu'on ne peut avoir $\overline{a'} = \overline{b'} = \mathcal{F}$. Supposons $\overline{a'} \neq \mathcal{F}$. Alors $a' = 0$ et $a \leqq b$. $\mathcal{F}$ *est donc totalement ordonné.* Soit

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup (-\mathcal{F}) \cup \{0\} \subset G, \tag{3}$$

$\tilde{\mathcal{F}}$ est totalement ordonné.

Si H est le sous-groupe de G engendré par $\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{F}} \subset H$. Montrons que $\tilde{\mathcal{F}} = H$ et pour cela que $\tilde{\mathcal{F}}$ est un sous-groupe de G. Soient $a, b \in \tilde{\mathcal{F}}$, montrons que $a - b \in \tilde{\mathcal{F}}$. Ceci est vrai par définition si a ou b est égal à zéro. Supposons donc qu'il n'en est pas ainsi. En remplaçant au besoin $a - b$ par son opposé, on voit que l'on peut supposer $a \in \mathcal{F}$. Si $b \in -\mathcal{F}$, $(-b) \in \mathcal{F}$ et $a - b \in \mathcal{F}$.

Si $b \in \mathcal{F}$, on peut supposer $a \geqq b$, sinon on se ramènerait à ce cas en prenant l'opposé de $a - b$. Mais alors $a > a - b \geqq 0$ et $\bar{a} \geqq \overline{a - b} \geqq \bar{0}$. Donc $\overline{a - b}$ est égal à $\bar{0}$ ou à $\mathcal{F}$. Dans les deux cas $a - b \in \tilde{\mathcal{F}}$ et le théorème est démontré.

Nous désignerons désormais par $\tilde{\mathcal{F}}$ le sous-groupe de G engendré par le filet $\mathcal{F}$.

Nous allons montrer que le théorème précédent n'est pas vrai pour un groupe régulier quelconque.

Soient E l'ensemble des entiers strictement positifs et $\Gamma = R^E$ (groupe ordonné des applications de E dans R).

Soient les éléments f et g de Γ ainsi définis :

$$f(p) = \frac{1}{p}\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad g(p) = p\sqrt{2} \qquad (p \geqq 1).$$

Considérons le sous-groupe G de Γ composé des éléments de la forme

(4) $\quad h = nf + mg, \qquad$ où $n, m \in Q$ (ensemble des nombres rationnels).

Cherchons à quelles conditions $h \in G_+$. On a

$$h(p) = n\frac{\sqrt{3}}{p} + mp\sqrt{2}. \tag{5}$$

Si $x \to +\infty$, on voit que $h(x)$ est équivalent à $mx\sqrt{2}$ dans le cas où $m \neq 0$. Donc $h \in G_+ \to m \geqq 0$. Si, d'autre part, $n \geqq 0$, h est évidemment contenu dans G_+. Voyons ce qui se passe si $n < 0$, $m \geqq 0$.

$h(p)$ est une fonction croissante de p. Pour que h soit contenu dans G_+ (toujours avec l'hypothèse $n < 0$, $m \geqq 0$), il faut et il suffit donc que $h(1) \geqq 0$. Comme n, $m \geqq 0 \to h(1) \geqq 0$, on voit qu'en résumé

$$(6) \qquad h \geqq 0 \rightleftharpoons [m \geqq 0 \text{ et } h(1) \geqq 0].$$

Si maintenant h_1, $h_2 \in G_+$ sont tels que h_1, $h_2 > 0$, on a $h_1(1)$, $h_2(1) > 0$. Posons

$$a = \inf[h_1(1), h_2(1)] \; (a > 0),$$

donc on peut trouver un nombre rationnel n tel que $0 < n \leqq \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Posons alors $h = nf$.

D'après ce que l'on vient de voir,

$$h_i - h \geqq 0 \quad \text{et} \quad 0 < h \leqq h_i \qquad (i = 1, 2).$$

Ceci montre que deux éléments strictement positifs de G ne sont jamais faiblement étrangers. Il en résulte que G est régulier et ne possède qu'un filet différent de $\bar{o}$. G n'est pas totalement ordonné. Par suite, il existe des groupes réguliers à un seul filet non totalement ordonnés. Le théorème 1 serait donc faux si l'on remplaçait dans son énoncé « réticulé » par « régulier ».

D'après le théorème 1, le groupe G ne peut pas être réticulé et G nous livre un exemple de *groupe régulier non réticulé*.

3. Nous supposerons dans ce paragraphe que tous les groupes totalement ordonnés considérés ont plus d'un élément.

Dans ce qui suit nous allons considérer un groupe G tel que

$$(7) \qquad \sum_{\iota \in I} G_\iota \subset G \subset \prod_{\iota \in I} G_\iota = \Gamma,$$

où tous les G_ι sont des groupes totalement ordonnés.

Pour simplifier, on identifiera canoniquement les G_ι aux sous-groupes correspondants de Γ.

G est régulier d'après la proposition 1 du paragraphe 1.

Étudions à quelle condition deux éléments de G_+ font partie d'un même filet.

Considérons l'application π de G_+ dans $\mathfrak{L}(I)$ ainsi définie :

$$(8) \qquad \iota \in \pi(x) \rightleftharpoons \mathrm{pr}_\iota x > 0 \qquad (x \in F_+).$$

Il est facile de voir que

$$\text{(9)} \qquad \inf(x, y) = 0 \rightleftharpoons \pi(x) \cap \pi(y) = \emptyset \qquad (x, y \in G_+).$$

De la relation (9), on déduit immédiatement que

$$\text{(10)} \qquad \bar{x} \leqq \bar{y} \rightleftharpoons \pi(x) \subset \pi(y)$$

l'ensemble des filets minimaux de G correspond biunivoquement aux éléments de (I) et le filet minimal correspondant à $\alpha \in I$ est $\pi^{-1}(\{\alpha\})$: c'est l'ensemble des éléments de G dont toutes les composantes sont nulles, sauf la composante α qui est strictement positive. Le groupe G a la propriété M; π établit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble $\mathcal{F}$ des filets et le sous-ensemble $\pi(\mathcal{F})$ de $\mathfrak{T}(I)$ (ordonné par inclusion), en posant évidemment $\pi(\bar{o}) = \pi(o) = \emptyset$.

Si $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$, on a $\pi(\mathcal{F}) = \mathfrak{T}(I)$.

Si $G = \sum_{\iota \in I} G_\iota$, $\pi(\mathcal{F})$ est l'ensemble des parties finies de I. En ce cas G a la propriété MF.

Comme première application simple de la théorie des filets, on a les théorèmes d'unicité suivants :

THÉORÈME 2. — *Si* $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota = \prod_{\iota' \in I'} G_{\iota'}$ *est produit ordonné des groupes totalement ordonnés* $G_\iota(\iota \in I)$ [*resp.* $G_{\iota'}(\iota' \in I')$], *il existe une représentation biunivoque* φ *de* I *sur* I′ *telle que* $G_{\varphi(\iota)} = G_\iota$.

Les filets minimaux de G sont en correspondance biunivoque avec les éléments de I (resp. I′), d'où une correspondance biunivoque φ de I sur I′. Soit $\iota \in I$ et $\mathcal{J}$ le filet minimal correspondant à ι et à $\varphi(\iota)$ on a $\tilde{\mathcal{J}} = G_\iota = G_{\varphi(\iota)}$. De même :

THÉORÈME 3. — *Si* $G = \sum_{\iota \in I} G_\iota = \sum_{\iota' \in I'} G_{\iota'}$ *est somme directe ordonnée des groupes totalement ordonnés* $G_\iota(\iota \in I)$ [*resp.* $G_{\iota'}$, $(\iota' \in I')$], *il existe une représentation biunivoque* φ *de* I *sur* I′ *telle que* $G_{\varphi(\iota)} = G_\iota$.

THÉORÈME 4. — *Si* $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota = \sum_{\iota' \in I'} G_{\iota'}$ *est produit* (*resp. somme* *directe) ordonnée des groupes totalement ordonnés* $G_\iota (\iota \in I)$ [*resp.* $G_{\iota'}$, $(\iota' \in I')$], I *et* I' *sont des ensembles finis et il existe une représentation biunivoque* φ *de* I *sur* I' *telle que* $G_{\varphi(\iota)} = G_{\iota'}$.

En effet, puisque $G = \sum_{\iota' \in I'} G_{\iota'}$, l'ensemble des filets de G vérifie la condition de chaîne descendante. Par suite, I est fini, on peut donc écrire $G = \sum_{\iota \in I} G_\iota$ et l'on applique le théorème 3.

Remarques. — 1° Tout ce qui précède pouvait s'étendre aux groupes réguliers à condition de remplacer partout « groupe totalement ordonné » par « groupe régulier à un seul filet ». Nous n'avons pas donné les théorèmes généraux pour ne pas alourdir les énoncés et aussi parce que ce sont surtout les réciproques qui nous intéresseront (à quelles conditions un groupe ordonné peut-il être considéré comme une somme directe de groupes totalement ordonnés ?) et que nous ne pouvons rien dire dans le cas général (c'est-à-dire : à quelles conditions un groupe régulier peut-il-être considéré comme une somme directe de groupes réguliers à un seul filet ?).

2° On peut démontrer les théorèmes 2 et 3 sans faire appel à la théorie des filets. Le théorème 2, par exemple, sera une conséquence directe du

THÉORÈME 5. — *Soit* G *un groupe réticulé réalisable de deux manières différentes comme produit de groupes réticulés.* $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha = \prod_{\beta \in B} G_\beta$. *Il existe alors des sous-groupes* $G_{\alpha,\beta}$ *de* $G (\alpha \in A, \beta \in B)$ *tels que*

$$G_\alpha = \prod_{\beta \in B} G_{\alpha,\beta}, \qquad G_\beta = \prod_{\alpha \in A} G_{\alpha,\beta} \quad ([21]).$$

4. Un filet minimal $\bar{a}$ du groupe réticulé G, sera dit avoir la *propriété* A si tout élément $x \in G_+$ peut être mis sous la forme

(11) $$x = x_1 + x_2$$

avec

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \bar{x}_1 \leq \bar{a}; \quad \inf(\bar{x}_2, \bar{a}) = \bar{0}.$$

Si cette forme existe, elle est unique. En effet, soit

$$x = x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2, \qquad \text{avec} \quad \bar{x}_1, \bar{x}'_1 \leq \bar{a}$$

([21]) BIRKHOFF [2], p. 222.

et

$$\inf(\bar{x}_2, \bar{a}) = \inf(\bar{x}'_2, \bar{a}) = \bar{0}.$$

On a $\inf(x'_2, x_1) = 0$.

Donc, d'après le lemme d'Euclide, $x'_2 \leqq x_2$.

De même, $x'_2 \geqq x_2$. Donc

$$x'_2 = x_2 \qquad \text{et} \qquad x'_1 = x_1.$$

$x_1 = x'_1$ est dit *projection de x sur le filet $\bar{a}$* et est désigné par $\mathrm{pr}_{\bar{a}} x$.

Proposition 2. — *Si le filet $\bar{a}$ est minimal, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *$\bar{a}$ vérifie la propriété* A ;

2° *Quel que soit $x \in G$, on peut trouver $y \in \bar{a}$ tel que $y \not\leqq x$.*

Soit un filet minimal $\bar{a}$ vérifiant la propriété A. Si $x \not> 0$, il suffit de prendre $y = a$. Soit $x > 0$. Si $\bar{x} \not\geqq \bar{a}$, $\inf(x, a) = 0$ et l'on a encore $a \not\leqq x$.

Si $\bar{x} \geqq \bar{a}$, soit $\mathrm{pr}_{\bar{a}} x = x_1 \neq 0$. On peut prendre $y = 2x_1$.

Réciproquement, supposons que le filet minimal $\bar{a}$ vérifie la propriété 2°. Si $x \in G_+$, soit $y \in \bar{a}$ avec $y \not\leqq x$. Soit $x_1 = \inf(x, y)$ et $x - x_1 = x_2$. Montrons que $\inf(x_2, a) = 0$. Si l'on avait

$$\inf(x_2, a) = b > 0,$$

la minimalité de $\bar{a}$ entraînerait $\bar{b} = \bar{a}$ et $x \geqq x_1 + b$ entraînerait $y \geqq x_1 + b$, sans cela, puisque $\bar{a}$ est totalement ordonné, on aurait $y \leqq x_1 + b$ et $x \geqq y$. On aurait donc $x, y \geqq x_1 + b$ et $b > 0$, ce qui contredit $\inf(x, y) = x_1$. On a donc bien $\inf(x_2, a) = 0$ et comme $\bar{x}_1 \leqq \bar{a}$, on a achevé de démontrer la proposition 2.

5. Nous allons maintenant déterminer les conditions pour qu'un groupe réticulé G puisse être réalisé comme somme directe de groupes totalement ordonnés.

Si le groupe réticulé G est tel que tous ses filets minimaux vérifient la propriété A, il sera dit lui-même vérifier la *propriété* A.

On voit à partir de la proposition 2 que tout groupe réticulé G vérifiant la relation (7) a la propriété A et, en particulier, il en est ainsi des sommes et produits directs de groupes totalement ordonnés.

PROPOSITION 3. — *Soit* $(\mathfrak{F}_\iota)_{\iota\in I}$ *un ensemble de filets minimaux du groupe réticulé* G; *le sous-groupe* H *engendré par* $\bigcup_{\iota\in I}(\mathfrak{F}_\iota)$ *est la somme directe ordonnée des groupes* $\mathfrak{F}_\iota$.

Ceci revient à montrer que si $a = a_1 + \ldots + a_m$, avec $a_i \in \tilde{\mathfrak{F}}_i$; $\tilde{\mathfrak{F}}_i \in (\tilde{\mathfrak{F}}_\iota)_{\in I}$ $(1 \leqq i \leqq m)$, on a

$$a \geqq 0 \rightleftharpoons [a_i \geqq 0 (1 \leqq i \leqq m)]. \tag{12}$$

En effet, cette condition est bien réalisée si H est somme directe ordonnée des groupes $\tilde{\mathfrak{F}}_\iota$. D'autre part, si elle est réalisée et si

$$a = a_1 + \ldots + a_m = b_1 + \ldots + b_m, \quad \text{où} \quad a_i,\ b_i \in \mathfrak{F}_i \quad (1 \leqq i \leqq m),$$

on a

$$0 = (a_1 - b_1) + \ldots + (a_m - b_m)$$

et (12) montre que $a_i - b_i \geqq 0$, donc $a_i \geqq b_i$. Mais on aura de même $b_i \geqq a_i$, donc $a_i = b_i$ et H est bien somme directe des groupes $\tilde{\mathfrak{F}}_\iota$. (12) montre de plus que c'est bien la somme ordonnée des groupes $\tilde{\mathfrak{F}}_\iota$.

Soit $a = a_1 + \ldots + a_m \geqq 0$. Montrons que $a_i \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$. (On peut évidemment supposer $a_1, \ldots, a_m \neq 0$.) Ceci est trivial pour $m = 1$. Supposons donc $m > 1$ et raisonnons par l'absurde : Soit donc un indice i tel que $a_i < 0$. Il existe nécessairement un indice $j \neq i$ tel que $a_j > 0$, sans cela on aurait $a < 0$. Supposons donc que $a_1, a_2, \ldots, a_p > 0$; $a_{p+1}, \ldots, a_m < 0$. On aura alors

$$a_1 + \ldots + a_p > (-a_{p+1}) + \ldots + (-a_m).$$

Or $\overline{-a_{p+i}}$ et $\bar{a}_j$ étant deux filets minimaux distincts si $j \leqq p$, on en déduit que $\inf(-a_{p+i}, a_j) = 0$ et, par suite, que

$$\inf[a_1 + \ldots + a_p, (-a_{p+1}) + \ldots + (-a_m)] = 0.$$

Donc $-(a_{p+1}) + \ldots + (-a_m) = 0$, ce qui implique

$$-a_{p+1} = \ldots = -a_m = 0,$$

contrairement à l'hypothèse.

Ceci étant établi, on peut démontrer le

THÉORÈME 6. — *Un groupe réticulé* G *est somme directe ordonnée de groupes totalement ordonnés si et si seulement :*

1° G *vérifie la condition* A;
2° G *vérifie la propriété* MF.

Ces conditions sont nécessaires [22]. Montrons qu'elles sont suffisantes. Soit G vérifiant les conditions 1° et 2°. $(\mathcal{F}_\iota)_{\iota\in I}$ l'ensemble de ses filets minimaux, $G_\iota = \tilde{\mathcal{F}}_\iota$ le groupe totalement ordonné engendré par $\mathcal{F}_\iota(\iota \in I)$ et H le sous-groupe de G engendré par $\bigcup_{\iota\in I} G_\iota$.

La proposition 3 montre que $H = \sum_{\iota\in I} G_\iota$. Montrons que $G = H$.

Comme $x = x^+ - x^-$, il suffit de montrer que $G_+ \subset H$.

Soit donc $x \in G_+$ et n le nombre (fini) d'éléments de $\mathfrak{M}(\bar{x})$. La propriété est triviale pour $n = 0$ (cas de $x = 0$). Supposons donc qu'elle soit vraie pour tout $n < p (p > 0)$ et montrons qu'elle est vraie pour $n = p$.

Puisque $p > 0$, il existe un filet minimal $\mathcal{F}_\iota$ tel que $\mathcal{F}_\iota \leqq \bar{x}$. G vérifiant la propriété A, posons $\mathrm{pr}_{\mathcal{F}_\iota} x = b$. On aura par définition $\inf(\overline{x-b}, \mathcal{F}_\iota) = \bar{0}$ et les relations $\mathfrak{M}(\bar{x}) \ni \mathcal{F}_\iota$, $\mathfrak{M}(\overline{x-b}) \not\ni \mathcal{F}_\iota$ montrent que $\mathfrak{M}(\overline{x-b})$ contient moins de p termes.

D'après les hypothèses de récurrence $x - b \in H$. Comme $\bar{b} = \mathcal{F}_\iota$, on a aussi $b \in H$, et, par suite, $x \in H$. D'où le théorème 6.

Remarque. — La condition A ne peut se déduire de la propriété MF. Montrons l'exemple d'un groupe réticulé G possédant seulement trois filets différents de $\bar{0}$ et ne vérifiant pas la condition A.

Soit E l'ensemble (1, 2), A un groupe isomorphe à Z + Z ordonné lexicographiquement et $\Gamma = A^E$.

Soient a, b, $c \in \Gamma$ tels que

$$a(1) = (0, 1), \quad a(2) = (0, 0);$$
$$b(1) = (0, 0), \quad b(2) = (0, 1); \quad c(1) = (1, 0) \quad c(2) = (1, 0).$$

[22] On a vu la condition A au début du n° 4, la condition MF avant l'énoncé du théorème 2.

Soit G le sous-groupe de Γ engendré par les éléments a, b, c c'est-à-dire l'ensemble des éléments de Γ de la forme $\lambda a + \mu b + \nu c$ où λ, μ, ν sont des entiers ordinaires.

On voit facilement que G est réticulé, qu'il admet en tous les quatre filets $\bar{o}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} = \overline{a+b}$. Cependant, G ne vérifie pas la propriété A car, quel que soit $x \in \bar{a}$, on a $x < c$.

6. Il résulte du théorème 4 du paragraphe 1 et du théorème 6 le

Théorème 6'. — *Pour qu'un groupe réticulé* G *soit somme directe de groupes totalement ordonnés, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes :*

1° G *vérifie la condition* A;

2° *L'ensemble* $\mathcal{F}$ *des filets de* G *vérifie la condition affaiblie de chaîne ascendante.*

Le même théorème 4 du paragraphe 1 montre de plus que la condition 2° pourrait être remplacée par les deux conditions simultanées suivantes :

2° *a*. L'ensemble $\mathcal{F}$ vérifie la condition de chaîne descendante;

2° *b*. $\mathcal{F}$ est relativement complémenté.

Or, de fait :

Proposition 4. — *Si* G *vérifie la propriété* A, *la condition affaiblie de chaîne ascendante pour les éléments de* $\mathcal{F}$ *est équivalente à la condition de chaîne descendante.*

D'après le théorème 4 du paragraphe 1, il suffit de montrer que si G vérifie la propriété A et $\mathcal{F}$ la condition de chaîne descendante, G vérifie la propriété MF. Soit donc G vérifiant les conditions précédentes. Puisque $\mathcal{F}$ vérifie la condition de chaîne descendante, G vérifie la propriété M. Il reste donc à montrer que si $\bar{a}$ est un filet quelconque de G, $\mathcal{M}(\bar{x})$ est fini.

Supposons pour cela que nous ayons déjà défini des éléments $a_0 = a$, a_1, ..., a_n de G tels que

$$\bar{a} = \bar{a}_0 > \bar{a}_1 > \ldots > \bar{a}_n \geq \bar{o}.$$

Si $\bar{a}_n = 0$, nous nous arrêterons. Si $\bar{a}_n > 0$, nous choisirons $\mathfrak{f}_n \in \mathfrak{M}(\bar{a}_n)$ et si $b_n = \mathrm{pr}_{\mathfrak{f}_n} a_n$, nous poserons : $a_{n+1} = a_n - b_n$. On a par définition $a_n > a_{n+1} \geq 0$ et $\mathfrak{M}(\bar{a}_{n+1}) \not\ni \mathfrak{f}_n$, donc $\bar{a}_n > \bar{a}_{n+1}$. Comme $\mathfrak{F}$ vérifie la condition de chaîne descendante, il existe un indice m tel que $\bar{a}_m = \bar{0}$. On a alors

$$a = b_0 + \ldots + b_{m-1} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}(\bar{a}) = \{\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_{m-1}\},$$

d'où la proposition.

Le théorème 6 et la proposition 4 permettent d'énoncer :

THÉORÈME 6″. — *Pour qu'un groupe réticulé* G *soit somme directe de groupes totalement ordonnés, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes :*

1° G *vérifie la condition* A ;

2° *L'ensemble* $\mathfrak{F}$ *des filets de* G *vérifie la condition de chaîne descendante.*

Remarque. — C'est par une méthode analogue à celle de la proposition 4 que l'on peut démontrer qu'un groupe réticulé G est somme directe de groupes tous isomorphes à Z si et si seulement G_+ vérifie la condition de chaîne descendante ([23]).

THÉORÈME 6‴. — *Pour qu'un groupe réticulé* G *soit somme directe de groupes totalement ordonnés, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes :*

1° G *vérifie la condition* A ;

2° *Le réseau des filets de* G *est isomorphe au réseau des parties finies d'un ensemble* E.

L'ensemble E *a alors même puissance que l'ensemble des groupes totalement ordonnés différents de* $\{0\}$ *et intervenant dans la somme directe.*

7. Donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe réticulé soit somme directe de n groupes ordonnés (tous différents de $\{0\}$) qui ne fasse pas intervenir la notion de filet.

([23]) BOURBAKI [1].

Des éléments de G en nombre fini $(a_i)_{i\in M}$ sont *indépendants* si pour tout sous-ensemble N de M tel que $N \neq M$ on a :

$$\inf[(a_i)_{i\in N}] > \inf[(a_j)_{j\in M}] \tag{13}$$

THÉORÈME 7. — *Pour que le groupe réticulé* G *soit somme directe de n groupes totalement ordonnés différents de* $\{o\}$, *il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes :*

1° G *vérifie la propriété* A;
2° *n est le nombre maximum d'éléments indépendants de* G.

Nécessité. — Soit $G = \sum_{1\leqq i\leqq n} G_i$. On a déjà vu que G vérifiait la condition A. Soient des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de G tels que

$$pr_i(a_j) = o \quad \text{si} \quad i \neq j, \qquad pr_i(a_i) > o.$$

Les éléments $a_1, \ldots, a_n$ sont indépendants.

Si $b_1, b_2, \ldots, b_m \in G$ sont indépendants, il existe un indice $\varphi(i)(1 \leqq j \leqq n)$ tel que $pr_{\varphi(i)}(b_j) < pr_{\varphi(i)}(b_i)(i \neq j)$ et ceci implique $n \geqq m$.

Suffisance. — Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des filets de G.

LEMME 1. — *Il ne peut y avoir dans* G *plus de n filets différents de* $\bar{o}$ *et deux à deux étrangers.*

Soient $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_p \in \mathcal{F}$ des filets G tous différents de $\bar{o}$, deux à deux étrangers et tels que $p > n$. Nous poserons

$$a_i = b_1 + b_2 + \ldots + b_{i-1} + b_{i+1} + \ldots + b_p \qquad (1 \leqq i \leqq p). \tag{14}$$

On voit facilement que :

$$\inf[(a_i)_{1\leqq i\leqq p}] = o. \tag{15}$$

Ceci posé, soit $(a_i)_{i\in N}$ un sous-ensemble quelconque de $(a_i)_{1\leqq i\leqq p}$ tel que $(a_i)_{i\in N} \neq (a_i)_{1\leqq i\leqq p}$.

On peut supposer que le numérotage des a_i soit fait de telle façon que $a_j \in (a_i)_{i\in N} \rightleftharpoons j \leqq q < p$.

Mais alors

$$\inf[(a_i)_{1\leqq i\leqq q}] \geqq b_p > \inf[(a_i)_{1\leqq i\leqq p}] = o,$$

donc on a les relations (13) et les éléments $b_1, b_2, \ldots, b_p$ sont indépendants et, comme $p > n$, on a une contradiction avec l'hypothèse. D'où le lemme 1.

LEMME 2. — G *est tel que toute chaîne descendante de filets est au plus de longueur n.*

Ce lemme résulte immédiatement du lemme 1 et du corollaire 1 du paragraphe **1**, théorème 1.

Il résulte du lemme 2 que G vérifie la propriété M. Si $\mathcal{M}$ est l'ensemble de ses filets minimaux, le lemme 1 montre que $\mathcal{M}$ a m éléments avec $m \leq n$. Comme G vérifie la condition A et la condition MF, il résulte de la démonstration de la proposition 3 que $G = \tilde{\mathcal{F}}_1 + \ldots + \tilde{\mathcal{F}}_m$ si $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ sont les filets minimaux de G. Or la proposition directe montre que m est le nombre maximum d'éléments de G qui peuvent être indépendants, donc $m = n$ et le théorème 7 est complètement démontré.

3. APPLICATIONS DES FILETS AUX HOMOMORPHISMES CROISSANTS. RÉALISATIONS IRRÉDUCTIBLES. — 1. Soit G un groupe réticulé, H un sous-groupe isolé propre de G et φ l'homomorphisme propre de G sur $G' = G/H$.

Cherchons à quelles conditions on a

$$\bar{a} = \bar{b} \rightarrow \overline{\varphi(a)} = \overline{\varphi(b)}, \tag{1}$$

Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que :

$$a \in G_+ \cap H \rightarrow \bar{\bar{a}} \subset H; \tag{2}$$

Si la condition (2) n'était pas réalisée, $\exists\, a, b \in G_+$ avec $\bar{a} = \bar{b}$, $a \in H$ et $b \notin H$. Mais alors

$$\varphi(a) = 0, \qquad \varphi(b) > 0, \qquad \text{donc} \qquad \overline{\varphi(a)} \neq \overline{\varphi(b)}$$

Si le sous-groupe isolé propre H vérifie la condition (2), il sera dit *sous-groupe plein* de G et φ un *homomorphisme plein*.

La condition (2) entraîne la condition (1) :

En effet, soit H un sous-groupe plein de G et $a, b \in G_+$ avec $\bar{a} = \bar{b}$. Montrons que $\overline{\varphi(a)} = \overline{\varphi(b)}$:

Si $\inf[\varphi(a), \varphi(x)] = 0$, on peut supposer $x \geqq 0$ (chap. I, § 2, prop. 1), donc on aura

$$\varphi[\inf(a, x)] = 0 \rightarrow \inf(a, x) \in H \rightarrow \overline{\inf(a, x)} \subset H.$$

Or

$$\overline{\inf(a, x)} = \inf(\bar{a}, \bar{x}) = \inf(\bar{b}, \bar{x}) = \overline{\inf(b, x)},$$

Donc

$$\inf(b, x) \in H \quad \text{et} \quad \inf[\varphi(x), \varphi(b)] = \varphi[\inf(b, x)] = 0,$$

quel que soit $\varphi(x) \in G'_{+}$, on a

$$\inf[\varphi(a), \varphi(x)] = 0 \rightarrow \inf[\varphi(b), \varphi(x)] = 0,$$

on a donc $\overline{\varphi(a)} \geqq \overline{\varphi(b)}$. De même, $\overline{\varphi(a)} \leqq \overline{\varphi(b)}$. Donc $\overline{\varphi(a)} = \overline{\varphi(b)}$ et

Théorème 1. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un homomorphisme propre* φ *de* G *sur* G′ *vérifie la condition* (1) *est que* H *soit un sous-groupe plein de* G.

Si φ est un homomorphisme plein de G sur G′, si $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) désigne l'ensemble des filets de G (resp. G′), et si l'on pose

$$\Phi(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)} \qquad (\bar{a} \in \mathcal{F}), \tag{3}$$

on voit que Φ définit une application de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$ qui sera dite *induite par* φ.

Proposition 1. — Φ *est un homomorphisme de réseaux.*

En effet, on vérifie sans peine que

$$\Phi[\sup(\bar{a}, \bar{b})] = \sup[\Phi(\bar{a}), \Phi(\bar{b})] \tag{4}$$

$$\Phi[\inf(\bar{a}, \bar{b})] = \inf[\Phi(\bar{a}), \Phi(\bar{b})], \tag{5}$$

Proposition 2. — *Si* $\bar{a}$ *vérifie la propriété* A, *il en est de même de* $\Phi(\bar{a})$.

Soit $\varphi(x) \geqq 0$. On peut supposer $x \geqq 0$. Soit donc $x_1 = \mathrm{pr}_{\bar{a}}(x)$ et $x = x_1 + x_2$; $\varphi(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$; $\bar{x}_1 \leqq \bar{a}$ entraîne $\Phi(\bar{x}_1) \leqq \Phi(\bar{a})$ et $\inf(\bar{a}, \bar{x}_2) = \bar{0}$ entraîne $\inf[\Phi(\bar{a}), \Phi(\bar{x}_2)] = 0$. De plus

$$\varphi(x)_{\varphi(\bar{a})} = \varphi(x_{\bar{a}}). \tag{6}$$

2. Soit G un groupe réticulé et $\bar{a}$ un filet de G. Soit $H_{\bar{a}}$ le sous-

groupe engendré par l'ensemble E des éléments de G_+ étrangers à [24]; Je dis que :

$$(7) \qquad x \in \mathrm{H} \rightleftharpoons \begin{cases} \inf(x^+, a) = 0, \\ \inf(x^-, a) = 0. \end{cases}$$

Si $x \in \mathrm{H}_{\bar{a}}$, $x = y - z$ avec y, $z \in \mathrm{E}$ (puisque E est additivement clos). Or y, $z \geqq 0$ implique $y \geqq x^+$, $z \geqq x^-$ (chap. 1, § 1, th. 6), donc

$$\inf(x^+, a) \leqq \inf(y, a) = 0 \qquad \inf(x^-, a) \leqq \inf(z, a) = 0$$

et l'on a bien

$$\inf(x^+, a) = \inf(x^-, a) = 0.$$

On vérifie immédiatement la

Proposition 3. — $\mathrm{H}_{\bar{a}}$ *est un sous-groupe plein de* G.

Par suite, l'homomorphisme canonique $\varphi_{\bar{a}}$ de G sur $\mathrm{G}/\mathrm{H}_{\bar{a}} = \mathrm{G}_{\bar{a}}$ est un homomorphisme plein.

Désignons par $\bar{\bar{a}}$ le sous-groupe de G engendré par les éléments de G_+ tels que leurs filets soient inférieurs ou égaux à $\bar{a}$ [25]. Un raisonnement analogue au précédent montre que :

$$(8) \qquad x \in \bar{\bar{a}} \rightleftharpoons \overline{x^+}, \overline{x^-} \leqq \bar{a}.$$

et de même

Proposition 4. — $\bar{\bar{a}}$ *est un sous-groupe plein de* G.

Il résulte immédiatement des définitions que

$$(9) \qquad \bar{\bar{a}} \cap \mathrm{H}_{\bar{a}} = \{0\}.$$

$\varphi_{\bar{a}}$ induit sur $\bar{\bar{a}}$ un isomorphisme de groupe σ. Si $x \in \bar{\bar{a}}$ et $\varphi_{\bar{a}}(x) \geqq 0$, il existe $h \in \mathrm{E}$ tel que $x + h \geqq 0$ ou $x^+ + h \geqq x^-$, or $\inf(x^+, x^-) = 0$ et $x^- \leqq a^-$ entraîne $\inf(x^-, h) = 0$, donc $x^- = 0$ et $x \geqq 0$. σ *est un*

---

[24] *Voir* G. Birkhoff [**2**], chap. XIV, § **6**, ex. **3**.

[25] $\bar{\bar{a}}$ avait été précédemment défini avec la même notation dans le cas où $\bar{a}$ était minimal (§ **2**, n° **2**).

isomorphisme de groupe ordonné. $\bar{\bar{a}}$ *peut donc être canoniquement identifié à un sous-groupe de* $G_{\bar{a}}$.

PROPOSITION 5. — *Le filet* $\bar{a}$ *a la propriété* A *si et si seulement* $\varphi_{\bar{a}}(\bar{\bar{a}}) = G_{\bar{a}}$. *En ce cas* G *est somme directe ordonnée des sous-groupes* $\bar{\bar{a}}$ *et* $H_{\bar{a}}$

$$G = \bar{\bar{a}} + H_{\bar{a}} \tag{10}$$

et l'on a

$$\mathrm{pr}_{\bar{a}}(x) = \sigma^{-1}[\varphi_{\bar{a}}(x)]. \tag{11}$$

Si $\bar{a}$ a la propriété A, (10) résulte des définitions et si $x_1 = \mathrm{pr}_{\bar{a}}(x)$ et $x = x_1 + x_2$, on aura $\varphi_{\bar{a}}(x) = \varphi_{\bar{a}}(x_1)$, donc

$$\varphi_{\bar{a}}(\bar{\bar{a}}) = G_{\bar{a}} \qquad \text{et} \qquad x_1 = \sigma^{-1}[\varphi(x)].$$

Réciproquement, si $\varphi_{\bar{a}}(\bar{\bar{a}}) = G_{\bar{a}}$ et si $x \in G_+$, il existe x_1 contenu dans $\bar{\bar{a}}$ avec $\varphi(x_1) = \varphi(x)$, donc $x - x_1 = x_2 \in H_{\bar{a}}$. On a

$$x + x_1^- + x_2^- = x_1^+ + x_2^+$$

Or x_1^- est étranger à $x_1^+ + x_2^+$ et, par suite, $x_1^- = 0$. De même, $x_2^- = 0$, donc $x_1, x_2 \geqq 0$ et $\bar{a}$ a bien la propriété A.

THÉORÈME 2. — $G_{\bar{a}}$ *est totalement ordonné si et si seulement* $\bar{a}$ *est un filet minimal.*

Soit $\bar{a}$ un filet minimal et $\Phi_{\bar{a}}$ l'homomorphisme de l'ensemble des filets de G sur celui des filets de $G_{\bar{a}}$ induit par $\varphi_{\bar{a}}$.

Comme $\varphi(a) > 0$, $\Phi_{\bar{a}}(\bar{a}) > \bar{0}$. Or si $G_{\bar{a}}$ n'était pas totalement ordonné, il existerait deux filets $\Phi_{\bar{a}}(\bar{x})$ et $\Phi_{\bar{a}}(\bar{y})$ qui seraient différents de $\bar{0}$ et étrangers. $\Phi_{\bar{a}}(\bar{x}) \neq \bar{0}$ implique $\varphi_{\bar{a}}(x) \neq 0$, donc $\inf(x, a) \neq 0$ et comme $\bar{a}$ est minimal, $\bar{x} \geqq \bar{a}$. De même $\bar{y} \geqq \bar{a}$. Donc

$$\inf[\Phi_{\bar{a}}(\bar{x}), \Phi_{\bar{a}}(\bar{y})] \geqq \Phi_{\bar{a}}(\bar{a}) > \bar{0}.$$

Or ceci contredit $\inf[\Phi_{\bar{a}}(\bar{x}), \Phi_{\bar{a}}(\bar{y})] = \bar{0}$.

Réciproquement si $\bar{a}$ n'est pas un filet minimal, il existe des filets $\bar{b}$ et $\bar{c}$ tels que $\bar{0} < \bar{b}$, $\bar{c} < \bar{a}$, $\inf(\bar{b}, \bar{c}) = \bar{0}$.

Comme $b, c \notin H_{\bar{a}}$, on a $\varphi(b)$, $\varphi(c) > 0$ et donc $\Phi_{\bar{a}}(\bar{b})$, $\Phi_{a}(\bar{c}) > \bar{0}$

$$\inf[\Phi_{\bar{a}}(\bar{b}), \Phi_{\bar{a}}(\bar{c})] = \Phi_{\bar{a}}[\inf(\bar{b}, \bar{c})] = \Phi(\bar{0}) = 0.$$

Donc G contient deux filets étrangers différents de $\bar{0}$, il ne peut être totalement ordonné.

3. Le théorème de Lorenzen permet de considérer un groupe réticulé G comme isomorphe au sous-groupe propre G′ d'un produit de groupes totalement ordonnés

$$G' \subset \Gamma = \prod_{\iota \in I} G_\iota. \tag{12}$$

De plus, la démonstration du théorème de Lorenzen montre que, quel que soit $\iota \in I$, on a $\mathrm{pr}_\iota(G) = G_\iota$. Lorsqu'il en sera ainsi, on dira que l'on a obtenu une *réalisation de* G (comme sous-groupe propre d'un produit de groupes totalement ordonnés).

Supposons que (12) définisse une réalisation de G et soit $\alpha \in I$. La composante α sera dite *superflue* si l'homomorphisme canonique ψ_α de Γ sur $\Gamma' = \prod_{\iota \notin \{\alpha\}} G_\iota$ induit sur G un isomorphisme de groupe ordonné, c'est-à-dire si Γ' définit encore une réalisation de G obtenue canoniquement à partir de la précédente. Une composante non superflue sera dite *essentielle*.

THÉORÈME 3. — *La composante* α *sera essentielle si et si seulement il existe* $x \in G$ *tel que* $\mathrm{pr}_\alpha(x) > 0$ *et* $\mathrm{pr}_\iota(x) = 0$ *pour* $\iota \neq \alpha$.

L'existence d'un tel x entraîne que la composante soit essentielle, puisque alors $x \neq 0$ et $\psi_\alpha(x) = 0$. Supposons maintenant qu'un tel x ne puisse exister. Alors si $x \in G$ et si $\mathrm{pr}_\alpha(x) > 0$, $\exists\, \beta \in I$ tel que $\beta \neq \alpha$ et $\mathrm{pr}_\beta x > 0$. En effet, si ceci n'était pas réalisé, puisque G est sous-groupe propre de Γ, x^+ serait tel que $\mathrm{pr}_\alpha(x^+) > 0$ et $\mathrm{pr}_\iota(x^+) = 0$ si $\iota \neq \alpha$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

$\psi_\alpha(x) \geqq 0$ montre que $\iota \neq \alpha \rightarrow \mathrm{pr}_\iota(x) \geqq 0$.

Si l'on avait $\mathrm{pr}_\alpha(x) < 0$, on voit que l'on aurait $x^- = -\mathrm{pr}_\alpha(x) < (0)$, ce qui est impossible. Donc, d'après ce que l'on vient de voir, $\mathrm{pr}_\iota(x) \geqq 0$, quel que soit $\iota \in I$ et $x \geqq 0$. D'où le théorème.

On dira qu'une réalisation est *irréductible* si toutes ses composantes sont essentielles.

THÉORÈME 4. — *Un groupe réticulé* G *admet une réalisation irréductible si et si seulement il vérifie la propriété* M.

Supposons que $G \subset \Gamma = \prod_{\iota \in I} G_\iota$ définisse une réalisation irréductible de G. Alors, si $x \in G$ est strictement positif, $\exists\, \alpha \in I$ tel que $pr_\alpha x > 0$. Puisque la composante α est essentielle, d'après le théorème 3, il existe $a \in G$ tel que $a = pr_\alpha a > 0$. $\bar{a}$ est minimal et $\bar{x} \geqq \bar{a}$. G vérifie donc la propriété M.

Réciproquement, supposons que le groupe réticulé G vérifie la propriété M, soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des filets minimaux de G et

$$\Gamma = \prod_{\bar{a} \in \mathfrak{M}} G_{\bar{a}}. \tag{13}$$

Tous les $G_{\bar{a}}$ sont totalement ordonnés d'après le théorème 2. $\varphi = \prod_{\bar{a} \in \mathfrak{M}} \varphi_{\bar{a}}$ est un homomorphisme propre de G dans Γ. Par définition, $pr_{\bar{a}}(G) = G_{\bar{a}}$. Si $x \ngeq 0$, $x^- > 0$ et, par hypothèse, il existe $\bar{b} \in \mathfrak{M}$ avec $\bar{b} \leqq x^-$, $\varphi_{\bar{b}}(x^+) = 0$ et $\varphi_{\bar{b}}(x^-) > 0$.

Donc $\varphi_{\bar{b}}(x) < 0$ et $pr_{\bar{b}}(x) < 0$ entraîne $\varphi(x) \ngeq 0$. Par suite, $\varphi(x) \geqq 0$ entraîne $x \geqq 0$ et l'on a bien une réalisation. Elle est irréductible, car si $\bar{a}$ est composante quelconque, $pr_{\bar{a}}(a) > 0$ et $\mathfrak{M} \ni \bar{b} \neq \bar{a} \rightarrow pr_{\bar{b}}(a) = 0$. Toute composante est donc essentielle. On a, de plus, le théorème d'unicité suivant :

THÉORÈME 5. — *Étant données deux réalisations irréductibles d'un groupe réticulé* G

$$G \subset \Gamma = \prod_{\iota \in I} G_\iota, \qquad G \subset \Gamma' = \prod_{\iota' \in I} G_\iota,$$

il existe une application biunivoque ψ *de* I *sur* I' *telle que, quel que soit* $\iota \in I$,

$$G \cap G_\iota = G \cap G_{\psi(\iota)}. \tag{14}$$

et telle qu'il existe un isomorphisme de groupe ordonné σ_ι *de* G_ι *sur* $G_{\psi(\iota)}$ *qui prolonge l'égalité précédente* [*c'est-à-dire que si* $x \in G \cap G_\iota$, $\sigma_\iota(x) = x$] ([26]).

En effet, si $\mathfrak{M}$ est l'ensemble des filets minimaux de G, des considérations analogues à celles du n° 3 du paragraphe 2 montrent la correspondance biunivoque de I (resp. I') avec $\mathfrak{M}$, d'où une application biunivoque ψ de I sur I'. Ceci posé, si $\alpha \in I$ et si $\bar{a}$ est le filet minimal correspondant, je dis que G_α est isomorphe (pour sa structure de groupe ordonné) à $G_{\bar{a}}$. En effet, $\mathrm{pr}_{\bar{a}}$ définit un homomorphisme φ_α croissant de G sur G_α qui a pour noyau $H_{\bar{a}}$

$$\varphi_\alpha(x) \geqq 0 \rightleftharpoons \mathrm{pr}_\alpha(x) \geqq 0 \rightleftharpoons x + [\mathrm{pr}_\alpha(x) - x] \geqq 0.$$

Comme $\mathrm{pr}_\alpha(x) - x \in H_{\bar{a}}$, il résulte du chapitre I, paragraphe 2, proposition 1 que φ_α est G-isomorphe à $\varphi_{\bar{a}}$. Il en est de même de $\varphi_{\psi(\alpha)}$. Par suite, $\varphi_{\psi(\alpha)}$ et φ_α sont G-isomorphes et il existe un isomorphisme canonique σ_α de groupe ordonné de G_α sur $G_{\psi(\alpha)}$ tel que $\varphi_{\psi(\alpha)} = \varphi_\alpha \sigma_\alpha$. De plus, si $x \in G \cap G_\alpha$, on a $\varphi_\alpha(x) = \varphi_{\psi(\alpha)}(x) = \mathrm{pr}_\alpha(x) = x$, ce qui achève de démontrer le théorème.

Remarque. — Il y a des groupes réticulés qui n'admettent pas de filets minimaux et, par suite, tels que dans chacune de leurs réalisations toutes les composantes soient superflues.

Il est facile de voir que le groupe additif des fonctions continues habituelles n'admet pas de filet minimal. On pourrait voir de même que si $\Gamma = \prod_{\iota \in I} G$ est un produit direct de groupes totalement ordonnés tel que I soit infini et tel qu'aucun des G_ι ne se réduise à l'élément neutre, si l'on pose $\Delta = \sum_{\iota \in I} G_\iota$, le groupe réticulé $G = \Gamma/\Delta$ n'admet pas de filet minimal.

4. Soit G un groupe réticulé, $\mathfrak{M}$ l'ensemble de ses filets minimaux et $\mathfrak{N}$ l'ensemble des filets de G qui ne sont supérieurs ou égaux à aucun filet minimal. $\mathfrak{M}'$ désignera l'ensemble des filets de G qui sont étrangers à tous les filets de $\mathfrak{N}$. On a $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}'$.

([26]) Ce théorème généralise les théorèmes 2 et 3 du paragraphe 2.

Désignons par M et N les sous-groupes de G engendrés par les éléments qui composent $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{N}$. On voit comme n° 2 que

$$(15) \qquad x \in M \rightleftharpoons \overline{x}^{+},\ \overline{x}^{-} \in \mathfrak{M}' \qquad x \in N \rightleftharpoons \overline{x}^{+},\ \overline{x}^{-} \in \mathfrak{N}.$$

De même que dans la proposition 4, on voit que

$$M \cap N = \{\varnothing\} \qquad \text{et, par suite,} \quad M + N = M \dotplus N.$$

Enfin, on a les relations

$$(16) \qquad M = \{0\} \rightleftharpoons N = G, \qquad N = \{0\} \rightleftharpoons M = G.$$

Elles découlent des relations évidentes

$$\mathfrak{M} = \varnothing \rightleftharpoons \mathfrak{N} = \mathfrak{F} \rightleftharpoons \mathfrak{M}' = \{\overline{0}\}, \qquad \mathfrak{N}\{\overline{0}\} \rightleftharpoons \mathfrak{M}' = \mathfrak{F}$$

si $\mathfrak{F}$ désigne l'ensemble des filets de G.

On n'a pas, en général, $G = M \dotplus N$.

Soit M_1 un groupe réticulé ayant une réalisation irréductible, N_1 un groupe réticulé sans filet minimal, soit G_1 la somme directe ordonnée des groupes M_1 et N_1 et soit $G = Z \dotplus G_1$ ordonné lexicographiquement.

Il est facile de voir que $M = M_1$, $N = N_1$ et cependant $G \neq M \dotplus N$.

M apparaît comme le plus grand sous-groupe réticulé de G admettant une réalisation irréductible, N comme le plus grand sous-groupe réticulé de G n'admettant pas de filet minimal.

5. On pourrait penser que, d'une manière analogue au théorème 6‴ du paragraphe 2, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe réticulé G soit produit direct ordonné de groupes totalement ordonnés est qu'il vérifie la condition A et que le réseau des filets de G soit isomorphe au réseau de toutes les parties d'un ensemble E. De fait, il n'en est rien dans le cas où E a une infinité d'éléments. Les considérations de ce paragraphe montrent que G admet alors la réalisation irréductible $\sum_{\overline{a} \in \mathfrak{M}} G_{\overline{a}} \subset G \subset \prod_{\overline{a} \in \mathfrak{M}} G_{\overline{a}}$ où $\mathfrak{M}$ désigne l'ensemble des filets minimaux de G. De plus, $G \neq \sum_{a \in \mathfrak{M}} G_{\overline{a}}$.

Cependant, soit Z' isomorphe à $Z_1 \dotplus Z_2$ ordonné lexicographiquement

(Z_1 et Z_2 étant isomorphes à Z et I étant un ensemble infini quelconque). Posons $\Gamma = Z^I$.

Soit $\Delta = \sum_{\iota \in I} G_\iota$ et soit, d'autre part, le sous-groupe Λ de Γ ainsi défini : $x \in \Lambda \rightleftharpoons$ pour tout $\iota \in I$, $\mathrm{pr}_\iota(x^+)$ et $\mathrm{pr}_\iota(x^-)$ ne sont pas contenus dans l'étage supérieur de G_ι [27].

(Λ est le sous-groupe des applications telles que la composante suivant Z_1 soit toujours nulle).

Alors $G = \Delta + \Lambda$ est un sous-groupe réticulé de Γ, vérifiant la condition A, tel que le réseau de ses filets soit isomorphe au réseau $\mathfrak{L}(I)$. Comme $G \neq \Gamma$, on voit d'après le théorème d'unicité 5, que G ne peut être considéré comme produit direct de groupes totalement ordonnés.

4. Groupes archimédiens et para-archimédiens. — 1. Étant donné un groupe G totalement ordonné, nous rappelons qu'il est dit *archimédien* si, quel que soit l'élément x de G strictement positif, pour tout y contenu dans G, il existe un entier n tel que $nx \geqq y$. Si R désigne alors le groupe additif de nombres réels, on sait que :

Théorème 1. — G *est isomorphe à un sous-groupe de* R *si et si seulement il est archimédien.*

Dans le cas général, on introduit dans G_+ la relation de préordre suivante :

$$x \prec y \rightleftharpoons \exists\, n \in Z, \quad \text{avec} \quad ny \geqq x. \tag{1}$$

La relation d'équivalence

$$x \equiv y \quad \rightleftharpoons \quad x \prec y \text{ et } y \prec x \tag{2}$$

définit les classes dans G_+ qui seront dites *étages*. On désignera par $\mathcal{E}(x)$ l'étage déterminé par x. On a évidemment $\mathcal{E}(0) = \{0\}$. La relation de préordre (1) définit sur l'ensemble des étages une relation d'ordre totale.

[27] Les étages d'un groupe totalement ordonné sont définis au paragraphe 4. Ici, cela signifie que si σ est l'isomorphisme qui représente G_ι sur $Z_1 \dotplus Z_2$, on a $\mathrm{pr}_1[\sigma(\mathrm{pr}_\iota x^+)] = \mathrm{pr}_1[\sigma(\mathrm{pr}_\iota x^-)] = 0$.

Les groupes archimédiens sont ceux qui n'admettent qu'un étage différent de $\mathscr{E}(o)$.

2. Si maintenant G est un groupe ordonné quelconque, on peut généraliser à G de trois manières différentes la notion de groupe archimédien :

α. Nous dirons que G est *faiblement archimédien* si, pour tout couple $x, y \in G$ tel que x soit *strictement positif*, il existe un entier n avec $nx \not< y$;

β. Nous dirons que G est *archimédien* si pour tout couple $x, y \in G$ tel que x soit *strictement positif*, il existe un entier n avec $nx \geqq y$;

γ. Nous dirons que G est *para-archimédien* si pour tout couple $x, y \in G$ tel que $x \not\leqq o$, il existe un entier n avec $nx \not< y$ [28].

Tout groupe archimédien est faiblement archimédien.
Tout groupe para-archimédien est faiblement archimédien.

Proposition 1. — *Si le groupe régulier* G *est archimédien, il n'a qu'un seul filet différent de* $\bar{o}$.

Si le groupe régulier G admet deux filets $\bar{a}$ et $\bar{b}$ différents de $\bar{o}$, il existe deux filets $\bar{c}$ et $\bar{d}$ différents de $\bar{o}$ et étrangers.

Quel que soit l'entier n, on a toujours $nc \not\geqq d$. G n'est donc pas archimédien. Il résulte donc du paragraphe **2**, théorème **1**, le

Théorème 2. — *Tout groupe réticulé archimédien est totalement ordonné et, par suite, isomorphe à un sous-groupe de* R.

Remarque. — Il existe, par contre, des groupes réguliers à un seul filet différent de $\bar{o}$ qui ne sont pas archimédiens.

Reprenons l'exemple du n° 2 du paragraphe **2**. Quel que soit l'entier $n > o$, nf n'est pas supérieur à g, donc G n'est pas archimédien. Or, on a démontré qu'il n'admettait qu'un seul filet différent de $\bar{o}$. On peut même voir qu'il est faiblement archimédien. En effet, si $h \in G$ est tel que $h > o$, on a $h(1) > o$. Par suite, si $h' \in G$, il existe toujours un entier n tel que $nh(1) > h'(1)$, donc tel que $nh \not< h'$.

[28] Il importe de remarquer ici que les groupes que nous appelons para-archimédiens sont en général appelés archimédiens (G. Birkhoff, Clifford).

Ceci nous montre déjà qu'il existe des *groupes faiblement archimédiens qui ne sont pas archimédiens.*

Évidemment, *il existe des groupes para-archimédiens qui ne sont pas archimédiens :* il suffit pour cela de considérer la somme directe ordonnée $Z \dotplus Z$.

Nous allons maintenant montrer l'*existence d'un groupe archimédien qui n'est pas para-archimédien.*

Soit E l'ensemble $(1, 2)$, Λ le groupe $R \dotplus R$ ordonné lexicographiquement et $\Gamma = \Lambda^E$.

Soient f et g contenus dans Γ ainsi définis :

$$f(1) = (1, 0), \qquad f(2) = (2\sqrt{2}, 0);$$
$$g(1) = (2, 1), \qquad g(2) = (\sqrt{3}, 0).$$

Considérons le sous-groupe G de Γ formé par les fonctions de la forme $\lambda f + \mu g$ avec λ, $\mu \in Q$.

Soit $h = \lambda f + \mu g \in G$. On a

$$h(1) = [(\lambda + 2\mu), \mu], \qquad h(2) = (2\lambda\sqrt{2} + \mu\sqrt{3}, 0).$$

Je dis que $h > 0$ entraîne $\lambda + 2\mu > 0$.

En effet, $h > 0$ entraîne $h(1) \geqq 0$, donc $\lambda + 2\mu \geqq 0$. Si l'on avait $\lambda + 2\mu = 0$, on aurait $h(1) = (0, \mu)$ et, par suite, $\mu \geqq 0$. On ne pourrait avoir $\mu = 0$, sans cela $\lambda = \mu = 0$ et h serait égal à 0. Donc $\mu > 0$ et

$$h(2) = 2\lambda\sqrt{2} + \mu\sqrt{3} = -\mu(4\sqrt{2} - \sqrt{3}) < 0.$$

Donc $h(2) < 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $h > 0$. Donc $h > 0 \rightarrow \lambda + 2\mu > 0$.

De même, $h > 0$ entraîne $2\lambda\sqrt{2} + \mu\sqrt{3} > 0$. D'où

$$(3) \qquad h > 0 \rightleftharpoons (\lambda + 2\mu > 0,\ 2\lambda\sqrt{2} + \mu\sqrt{3} > 0),$$

c'est-à-dire que h est strictement positif si et seulement si $h(1)$ et $h(2)$ sont dans l'étage supérieur $\mathcal{E}_1$ de Γ.

Montrons à partir de là que G est archimédien :

Si $G \ni h > 0$ et si $h' \in G$, puisque $h(1)$ et $h(2)$ sont dans $\mathcal{E}_1$, il existe un entier m tel que $mh \geqq h'$. Donc, G est archimédien. Montrons qu'il n'est pas para-archimédien :

Soit $h = -2f + g$. On aura

$$h(1) = (0, 1) > 0, \qquad h(2) = (\sqrt{3} - 4\sqrt{2}, 0) < 0, \qquad \text{donc} \quad h \nleq 0,$$

et, quel que soit n, $nh < f$. G n'est pas para-archimédien.

THÉORÈME 3. — *Tout groupe réticulé faiblement archimédien est para-archimédien.*

Soit G un groupe réticulé faiblement archimédien. Soit $x \in G$ tel que $x \nleq 0$ et soit $y \in G$. Comme $x^+ > 0$, $\exists$ un entier $m > 0$ tel que $mx^+ \nleq y^+$. Si l'on avait $mx \leq y$, on aurait $mx^+ + y^- \leq y^+ + mx^-$, mx^+ étant étranger à mx^-, il résulterait du chapitre I, paragraphe **1**, théorème 9 que $mx^+ \leq y^+$, d'où une contradiction. Donc $mx \nleq y$ et G est para-archimédien.

3. Notre but dans ce numéro est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Pour que le groupe ordonné* G *soit isomorphe à un sous-groupe de* R, *il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes :*

1° G *est semi-clos et filtrant;*

2° *Toute structure d'ordre totale sur* G *plus fine que sa structure d'ordre initiale transforme* G *en un groupe archimédien (c'est-à-dire en un sous-groupe isomorphe à un sous-groupe de* R*);*

3° *Si* G *est trivialement ordonné (c'est-à-dire* $P = \{0\}$*),* $G = \{0\}$ [29].

Nous aurons dans ce qui suit à considérer diverses structures d'ordre sur G et nous adopterons pour simplifier le même système de notations que dans le paragraphe **3** du chapitre I.

Il est bien évident que les conditions du théorème 4 sont nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes et pour cela démontrons d'abord le

LEMME 1. — *Si* G *est un groupe filtrant et sans torsion tel que toute structure d'ordre totale sur* G *plus fine que sa structure d'ordre initiale le transforme en un groupe archimédien,* G *est lui-même archimédien.*

Soit G répondant à la question, $0 < a \in G$ et b un élément quel-

---

[29] Un groupe trivialement ordonné est à la fois archimédien et para-archimédien.

conque de G. Il faut montrer qu'il existe un entier m tel que $ma > b$. Comme G est filtrant, on peut supposer $b \geqq 0$. Il est impossible de trouver une ordination $\mathcal{O}'$ plus fine que $\mathcal{O}$ et telle que $b - na \in P'$ pour tout $n \geqq 1$ car alors, G étant sans torsion, G' aussi, et, en vertu du chapitre I, paragraphe 3, théorème 3, il serait possible de trouver une ordination totale $\mathcal{O}'' \geqq \mathcal{O}'$. Mais $P'' \supset P' \supset (b - na)\,(1 \leqq n)$, ce qui contredit l'hypothèse que G'' est archimédien.

Il résulte alors du chapitre I, paragraphe 3, théorème 2, qu'il existe un entier $n > 0$ et des entiers $m_1, \ldots, m_n \geqq 0$ avec $m_n > 0$, tels que

$$m_1(b - a) + m_2(b - 2a) + \ldots + m_n(b - na) \leqq 0,$$

ou encore

$$(m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n)a \geqq (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)b.$$

Or $m_n > 0$ entraîne que

$$\begin{gathered} m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = m' > 0, \\ m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m'' > 0. \end{gathered}$$

On a donc $m'a \geqq m''$B. Mais, puisque $b \geqq 0$ et $m'' \geqq 1$,

$$m''b = (m'' - 1)b + b \geqq b.$$

Donc $m'a \geqq b$ et l'on peut prendre $m = m'$. D'où le lemme.

Ceci posé, revenons au théorème et soit G vérifiant les conditions nécessaires du théorème. Si $\mathcal{O}'$ est une structure d'ordre sur G plus fine que $\mathcal{O}$, G' est sans torsion. Si, d'autre part, $\mathcal{O}''$ est une structure d'ordre totale sur G' plus fine que $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}''$ est aussi plus fine que $\mathcal{O}$, donc par hypothèse G'' est archimédien. Le lemme 1 montre alors que G' est archimédien, d'où le

Lemme 2. — *Quelle que soit l'ordination $\mathcal{O}'$ plus fine que $\mathcal{O}$, G' est archimédien.*

En particulier, G est archimédien et il suffira donc pour démontrer le théorème 4 de montrer que G est totalement ordonné.

Soit $a \in G$ tel que $a \nleqq 0$; montrons que $a > 0$:

Comme G est semi-clos, quel que soit l'entier $n > 0$, on voit que $na \notin -P$. Par suite, il existe une ordination $\mathcal{O}'$ de G telle que $P' = P + Z_+ a$.

Comme l'ordination $\mathcal{O}'$ est plus fine que $\mathcal{O}$, il résulte du lemme 2 que G' est archimédien. Puisque $P' \ni a \neq 0$, on en déduit que si nous choisissons b arbitraire tel que $b > 0$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse $G_+ \neq \{0\}$), on peut trouver un entier $n > 0$ avec $na - b \in P'$.

Donc il existe $b' \in P$ et $s \in Z_+$ avec $na - b = b' + sa$ ou $(n-s)a = b' + b \in P$.

$b > 0$ et $b' \geqq 0$ montrent que $n - s \neq 0$. On ne peut avoir $n - s < 0$, sans cela G étant semi-clos, on aurait $a \in -P$, ce qui a été exclu. Par suite, $n - s > 0$ et G étant semi-clos, $a \in P$. D'où $a > 0$.

4. Si G est un groupe ordonné isomorphe à un sous-groupe de $\Gamma = \prod_{\iota \in \pm} G_\iota$, où tous les G_ι sont des groupes totalement ordonnés isomorphes à des sous-groupes de R, il est facile de voir que G est para-archimédien.

Un des problèmes les plus importants de la théorie des groupes ordonnés est de savoir à quelles conditions un groupe para-archimédien est réalisable de cette manière. Clifford [30] et Birkhoff [31] émirent l'hypothèse que tout groupe para-archimédien admet une telle réalisation. Krull [32] avait déjà posé ce problème dans le cas où le groupe est groupe de divisibilité d'un certain corps. Nakayama [33] démontra la fausseté de l'hypothèse de Krull.

Nous allons dans ce qui suit résoudre ce problème dans quelques cas particuliers.

THÉORÈME 5. — *Pour que le groupe ordonné* G *soit représentable comme groupe de fonctions à valeurs dans* R, *il faut et il suffit que pour tout élément* a *de* G *tel que* $a \nleq 0$, *il existe une ordination totale* $\mathcal{O}$ *de* G *plus fine que l'ordination initiale* (*resp. un groupe totalement ordonné* $G_\alpha \neq \{0\}$ *et un homomorphisme croissant* φ_α *de* G *sur* G_α) *telle que* a [*resp.* $\varphi_\alpha(a)$] *soit dans l'étage supérieur de* G_α.

---

(30) CLIFFORD [1].
(31) BIRKHOFF [1].
(32) KRULL [1].
(33) NAKAYAMA [1].

Montrons que ces conditions sont nécessaires :

Soit G un sous-groupe de $\Gamma = \prod_{\iota \in I} \Gamma_\iota$ où tous les Γ_ι sont isomorphes à des sous-groupes de R. Considérons G comme sous-groupe de Γ. Si $G \ni a \not\leq 0$, il existe $\alpha \in I$ avec $pr_\alpha a > 0$. Bien-ordonnons l'ensemble I, de sorte que α soit son premier élément. On en déduit une ordination lexicographique $\mathcal{O}'_\alpha$ de Γ qui fait de Γ un groupe totalement ordonné tel que l'étage de a soit l'étage supérieur de Γ. Cette ordination $\mathcal{O}'_\alpha$ induit sur G l'ordination $\mathcal{O}_\alpha$ cherchée. Comme en particulier l'application identique de G sur G_α est un homomorphisme croissant φ_α, la nécessité des conditions est démontrée.

Montrons maintenant que chacune de ces conditions est suffisante :

Soit donc G tel que pour tout $a \not\leq 0$, il existe un groupe totalement ordonné $G_\alpha \neq \{0\}$ et un homomorphisme croissant φ_α de G sur G_α tel que $\varphi_\alpha(a)$ soit dans l'étage supérieur (supposé évidemment exister) de G_α. Si H'_α est l'ensemble des éléments positifs ou nuls de G non situés dans l'étage supérieur de G, on voit facilement ([34]) que $H_\alpha = H'_\alpha \cup (-H'_\alpha)$ est un sous-groupe isolé de G_α et que le groupe totalement ordonné $G'_\alpha = G_\alpha/H_\alpha$ n'admet qu'un seul étage autre que celui qui contient 0, c'est-à-dire est isomorphe à un sous-groupe de R qui est $\neq \{0\}$. Si, par suite, ψ_α est l'homomorphisme canonique de G_α sur G'_α, on voit que $\varphi'_\alpha = \psi_\alpha \varphi_\alpha$ est un homomorphisme croissant de G sur G'_α tel que $\varphi'_\alpha(a) > 0$. Si l'on considère $\Gamma = \prod_{\iota \in I} G'_\iota$ et l'homomorphisme $\varphi = \prod_{\iota \in I} \varphi'_\iota$ de G sur Γ, un raisonnement souvent répété montre que φ est un isomorphisme de groupe ordonné de G dans Γ, or chnque G'_ι est isomorphe à un sous-groupe de R ($\iota \in I$). Comme le cas d'une ordination totale est un cas particulier du précédent, le théorème 5 est complètement démontré.

Théorème 6. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe semi-clos archimédien non trivialement ordonné soit représentable comme groupe de fonctions à valeurs dans* R *est qu'il soit para-archimédien.*

([34]) *Voir* Krull [1].

On a vu que la condition était nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante :

Soit donc G semi-clos archimédien et para-archimédien. Si $(\mathcal{O}_\iota)_{\iota\in I}$ est l'ensemble des ordinations totales de G plus fines que l'ordination initiale, on sait (chap. I, § 3) que G peut être considéré comme sous-groupe de $\Gamma = \prod_{\iota\in I} G_\iota$.

Si $G \ni b > 0$, quel que soit $\iota \in I$, G_ι admet un étage supérieur qui contient $\mathrm{pr}_\iota b$. En effet, soit x_ι un élément positif de G_ι. Comme $\mathrm{pr}_\iota(G) = G_\iota$, il existe un élément x de G tel que $\mathrm{pr}_\iota x = x_\iota$. Puisque G est archimédien, il existe donc un entier $n > 0$ tel que $nb > x$, donc $n\,\mathrm{pr}_\iota b \geq x_\iota$ et $\mathcal{E}(\mathrm{pr}_\iota b) \geq \mathcal{E}(x_\iota)$. Par suite, $\mathcal{E}(\mathrm{pr}_\iota b)$ est l'étage maximal de G_ι.

Si maintenant $G \ni a \nleq 0$, à moins que $G = \{0\}$ (auquel cas le théorème 6 devient trivial), puisque nous avons supposé son ordination non triviale, $P \neq \{0\}$, donc il existe $b \in G$ tel que $b > 0$. G étant para-archimédien, il existe un entier n positif avec $na \nleq b$, donc un indice $\alpha \in I$ tel que $\mathrm{pr}_\alpha na > \mathrm{pr}_\alpha b$. Comme on vient de voir que $\mathrm{pr}_\alpha b$ se trouvait dans l'étage supérieur de G_α, il en est de même de $\mathrm{pr}_\alpha a$. Ceci étant valable quel que soit $a \nleq 0$, le théorème 6 se déduit immédiatement du théorème 5.

Donnons quelques indications sur le problème de Krull-Clifford dans le cas où le groupe para-archimédien G considéré est réticulé.

Théorème 7. — *Si le groupe réticulé para-archimédien* G *admet une réalisation irréductible, il est réalisable comme groupe de fonctions à valeurs dans* R *: tous les groupes ordonnés intervenant dans sa réalisation irréductible sont isomorphes à des sous-groupes de* R.

Soit $G \subset \Gamma = \prod_{\iota\in I} G_\iota$ une réalisation irréductible de G. Il est facile de voir que G a la propriété A : en effet, soit $\bar{a}$ un filet minimal de G et $x \in G$. Puisque $a > 0$ et G est para-archimédien, il existe un entier $n > 0$ tel que $na \nleq x$. Or $\overline{na} = \bar{a}$.

Par suite, $\sum_{\iota\in I} G_\iota \subset G \subset \prod_{\iota\in I} G_\iota$. Mais $G_\iota \subset \sum_{\iota\in I} G_\iota \subset G$ et G_ι est para-archimédien comme sous-groupe d'un groupe para-archimédien. Comme il est totalement ordonné, on voit que G_t est isomorphe à un sous-groupe de R. D'où le théorème.

CHAPITRE III.

CORPS DEMI-VALUÉS.

Tous les corps et tous les groupes qui interviennent dans ce chapitre sont commutatifs.

1. Anneaux de demi-valuation. — 1. Étant donné un corps K, nous rappelons qu'on appelle *ordre de* K un sous-anneau A de K contenant l'élément unité et tel que K puisse être considéré comme corps des quotients de A. L'ensemble $E = A \cap A^{-1}$ des éléments inversibles de A est un sous-groupe du groupe multiplicatif K^* formé par les éléments de K différents de zéro. Quoique obtenu à partir d'un groupe écrit sous forme multiplicative, on écrira toujours additivement le groupe quotient

$$\Gamma = K^*/E.$$

Soit w l'application canonique de K^* sur Γ. La relation

$$(1) \qquad w(x) \geqq w(y) \rightleftharpoons xy^{-1} \in A \qquad (x, y \in K^*)$$

définit sur Γ une structure d'ordre partiel qui en fait un groupe ordonné filtrant. Le groupe ordonné Γ sera dit *groupe de divisibilite de* K *par rapport à* A.

L'application w de K sur Γ vérifie alors les relations

$$(2) \qquad w(xy) = w(x) + w(y),$$

$$(3) \qquad w(z) \leqq w(x),\ w(y) \quad \rightarrow \quad w(z) \leqq w(x+y).$$

Si K est un corps, Γ un groupe ordonné filtrant et w une application de K^* sur qui vérifie les relations (2) et (3), w est dite *semi-valuation de* K ([35]). Il est facile de voir que toute semi-valuation peut s'obtenir de la manière précédente.

([35]) Zelinsky [1].

Lorsque Γ est un groupe réticulé, le corps K sera dit *demi-valué* et w sera dite *demi-valuation*. Dans le cas particulier où Γ est totalement ordonné, toute demi-valuation par Γ est une valuation au sens de Krull ([36]).

Un domaine d'intégrité A ([37]) est dit *anneau de demi-valuation* si, K étant le corps des quotients de A, le groupe de divisibilité de K par rapport à A est un groupe réticulé.

2. Généralisant un théorème de Krull, nous nous proposons de montrer qu'à tout groupe réticulé Γ correspond un corps K demi-valué par Γ. Nous allons pour cela généraliser le procédé de Krull.

Soit donc Γ un groupe réticulé. Remarquons d'abord que pour trouver un corps K répondant à la question, il suffit de trouver un anneau d'intégrité A et une application w de A^* sur Γ vérifiant les relations (2) et (3). Supposons, en effet, que nous ayons trouvé A et w vérifiant ces relations. Si nous posons pour tout élément a/b de K^* $(a, b \in A)$:

$$\bar{w}(a/b) = w(a) - w(b). \tag{4}$$

On voit que $\bar{w}$ est bien une demi-valuation de K par Γ.

Déterminons donc un anneau d'intégrité A et une application w de A^* sur Γ vérifiant les relations (2) et (3).

k étant un corps (commutatif) quelconque, soit A l'algèbre de groupe de Γ par rapport à k. Tout élément $X \neq 0$ de A peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme canonique,

$$X = a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + a_m x^{\alpha_m}, \qquad \text{avec } a_i \in k, \quad \alpha_i \in \Gamma \qquad (1 \leq i \leq m),$$
$$a_i \neq 0 \qquad \text{et} \qquad i \neq j \rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j.$$

Nous poserons

$$\Gamma_X = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \Gamma \qquad \text{et} \qquad \Gamma_0 = \emptyset.$$

Soit alors

$$w(X) = \inf(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \inf(\Gamma_X); \tag{5}$$

il résulte du chapitre I, paragraphe 3, théorème 4, que A est bien

---

([36]) KRULL [1].

([37]) Anneau commutatif, sans diviseur de 0 et possédant un élément unité.

un anneau d'intégrité. w étant une application de A^* sur Γ, il reste à montrer que w vérifie les conditions (2) et (3).

La condition (3) est aisément vérifiable : elle est trivialement remplie si X, Y ou $X+Y=0$. Supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi.

On a $\Gamma_{X+Y} \subset \Gamma_X \cup \Gamma_Y$ donc

$$w(X+Y) = \inf(\Gamma_{X+Y}) \geqq \inf[w(X), w(Y)] = \inf(\Gamma_X \cup \Gamma_Y).$$

Reste à démontrer la formule (2). Elle est triviale si X ou $Y=0$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Sa vérification est immédiate dans le cas où la forme canonique de X n'a qu'un seul terme. En effet, dans ce cas $\Gamma_X = \{\alpha\}$ et $\Gamma_{XY} = \alpha + \Gamma_Y$, donc

$$w(XY) = \alpha + \inf(\Gamma_Y) = w(X) + w(Y).$$

Il suffit de vérifier (2) dans le cas où $w(X) = w(Y) = 0$. En effet, si

$$w(X) = \alpha, \qquad w(Y) = \beta; \qquad w(XY) = w(Xx^{-\alpha}x^{\alpha}Yx^{-\beta}x^{\beta}) = w(X'x^{\alpha}Y'x^{\beta}),$$

en posant

$$X' = Xx^{-\alpha}, \qquad Y' = Yx^{-\beta}.$$

Or, d'après ce qui vient d'être vu,

$$\begin{aligned} w(X'x^{\alpha}Y'x^{\beta}) &= w(X'x^{\alpha}Y') + w(x^{\beta}) \\ &= w(X'Y') + w(x^{\alpha}) + w(x^{\beta}) = w(X'Y') + \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Si, par suite, la formule (3) est vérifiée dans le cas de $w(X) = w(Y) = 0$, comme $w(X') = 0$ et $w(Y') = 0$, on aura

$$w(XY) = \alpha + \beta = w(X) + w(Y).$$

Supposons donc que $w(X) = w(Y) = 0$.

Soient

$$X = \sum_{1 \leqq i \leqq m} a_i x^{\alpha_i}, \qquad Y = \sum_{1 \leqq j \leqq n} b_j x^{\beta} \qquad \text{et} \qquad XY = \sum_{1 \leqq k \leqq p} c_k x^{\gamma_k}$$

les formes canoniques de X, Y et XY. Comme $w(X) = w(Y) = 0$, on en déduit que

$$\alpha_i,\ \beta_j \geqq 0 \qquad (1 \leqq i \leqq m), \qquad (1 \leqq j \leqq n).$$

Par suite, en vertu des formules de multiplication dans l'algèbre A

$$\gamma_k \geqq 0 \qquad (1 \leqq k \leqq p).$$

Pour démontrer que $\inf(\gamma_1, \ldots, \gamma_p) = 0$, nous pourrons appliquer le théorème 15 (chap. I, § 1).

Soit donc γ un élément strictement positif quelconque de Γ. Montrons qu'il existe $\delta \in \Gamma$ tel que $\gamma \geqq \delta > 0$ et un entier k tel que

$$1 \leqq k \leqq p \qquad \text{et} \qquad \inf(\delta, \gamma_k) = 0.$$

Comme $\inf(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0$, d'après le théorème invoqué, il existe $\gamma' > 0$ et un nombre positif $i < m$ tel que

$$\gamma \geqq \gamma' > 0 \qquad \text{et} \qquad \inf(\alpha_i, \gamma') = 0.$$

En vertu de ce même théorème, comme $\inf(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$, $\exists\, \delta \in \Gamma$ et j tel que $1 \leqq j \leqq n$

$$\gamma' \geqq \delta > 0 \qquad \text{et} \qquad \inf(\beta_j, \delta) = 0.$$

Il en résulte en particulier que $\inf(\alpha_i, \delta) = 0$.

Supposons les indices choisis de manière que

$$(6) \qquad \inf(\alpha_k, \delta) = 0 \quad \rightleftharpoons \quad k \leqq m' \qquad (m' \geqq 1),$$

$$(7) \qquad \inf(\beta_k, \delta) = 0 \quad \rightleftharpoons \quad k \leqq n' \qquad (n' \geqq 1).$$

Posons $X = X_1 + X'_1$, $Y = Y_1 + Y'_1$ avec

$$(8) \qquad X_1 = \sum_{1 \leqq k \leqq m'} a_k x^{\alpha_k}, \qquad Y_1 = \sum_{1 \leqq k \leqq n'} b_k x^{\beta_k}.$$

On a

$$XY = X_1 Y_1 + Z, \qquad \text{avec} \quad Z = X_1 Y'_1 + X'_1 Y_1 + X'_1 Y'_1.$$

L'ensemble $\Gamma_{X_1 Y_1}$ est un sous-ensemble de

$$(\alpha_i + \beta_j)_{(1 \leqq i \leqq m',\, 1 \leqq j \leqq n')}.$$

Chacun de ces exposants est donc étranger à δ.

Or si $Z \neq 0$, aucun des éléments de Γ_Z cet ensemble n'est étranger à δ.

Il en résulte donc que $\Gamma_{X_1 Y_1} \cap \Gamma_Z = \varnothing$ et, par suite, la forme canonique de XY est somme des formes canoniques de $X_1 Y_1$ et de Z.

Donc $\Gamma_{XY} \supset \Gamma_{X_1 Y_1}$. Comme X_1 et Y_1 sont différents de o, il en est de même de $X_1 Y_1$ et, par suite, il existe un élément γ_k tel que $1 \leqq k \leqq p$ et tel que $\inf(\gamma_k, \delta) = 0$. D'où :

THÉORÈME 1. — *Étant donné un groupe réticulé* Γ, *il existe toujours un corps* K *qui est demi-valué par* Γ.

3. Les anneaux de demi-valuation se caractérisent simplement :

Soit A un anneau d'intégrité, K son corps des quotients, Γ le groupe de divisibilité de K par rapport à A et w la semi-valuation correspondante. Pour que Γ soit un groupe réticulé, on a vu (chap. I, § 1, th. 3) qu'il fallait et suffisait qu'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

1° Pour tout couple $\alpha, \beta \in \Gamma_+$, $\sup(\alpha, \beta)$ existe;
2° Pour tout couple $\alpha, \beta \in \Gamma_+$, $\inf(\alpha, \beta)$ existe.

La condition 2° montre que pour qu'un anneau d'intégrité A soit un anneau de demi-valuation, il faut et il suffit que deux éléments de A admettent toujours un plus grand commun diviseur.

La condition 1° montre qu'une autre condition nécessaire et suffisante est que deux éléments de A admettent toujours un plus petit commun multiple.

Si A est un anneau d'intégrité et si x et y sont contenus dans A, dire que x divise y revient à dire que y est contenu dans l'idéal principal (x) ou encore que $(y) \subset (x)$. Par suite, dire que a et b admettent un plus petit commun multiple revient à dire qu'il existe un élément m de A tel que :

$$(a) \cap (b) \supset (m) \quad \text{et} \quad (a) \cap (b) \ni x \;\rightarrow\; (m) \supset (x),$$

ou encore tel que

$$(a) \cap (b) = (m).$$

Donc, pour que A soit un anneau de demi-valuation, il faut et il suffit que l'intersection de deux idéaux principaux soit encore un idéal principal.

De la même manière, dire que a et b admettent un plus grand commun diviseur revient à dire qu'il existe un élément d de A tel que

$$(d)\supset(a)\cup(b) \quad \text{et} \quad (x)\supset(a)\cup(b) \rightarrow (x)\supset(d),$$

ou encore tel que (d) soit l'intersection de tous les idéaux principaux qui contiennent l'idéal $(a)+(b)$.

Nous retrouvons ici la propriété $\mathcal{V}$A de Prüfer ([38]) : tout v-idéal fini est idéal principal ([39]).

Il résulte de tout ceci que nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 2. — *Étant donné un anneau d'intégrité* A, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° A *est un anneau de demi-valuation;*

2° *Deux éléments de* A *admettent toujours un plus grand commun diviseur;*

3° *Deux éléments de* A *admettent toujours un plus petit commun multiple;*

4° *L'intersection de deux idéaux principaux quelconques de* A *est encore un idéal principal;*

5° *Tout v-idéal fini est principal, ou encore l'intersection de tous les idéaux principaux qui contiennent deux idéaux principaux quelconques est un idéal principal.*

4. Nous allons maintenant donner une autre caractérisation des anneaux de demi-valuation basée sur le théorème 12 (chap. I, § 1).

Soit A un anneau d'intégrité, K son corps des quotients. On dira que a/b est une *forme canonique* de l'élément k de K si :

1° $k=a/b$ et $a,\ b\in$ A;

2° $a'/b'=a/b$ ($a',\ b'\in$ A) entraîne qu'il existe un élément c de A tel que $a'=ca,\ b'=cb$.

Le numérateur et le dénominateur d'une forme canonique sont définis à un élément inversible près de A.

([38]) PRÜFER [1].

([39]) Il importe de remarquer qu'ici on a en général $(d)\neq(a)+(b)$. Si l'on avait pour tout couple $a,\ b\in$ A, $(d)=(a)+(b)$, nous aurions la propriété $\mathfrak{A}$A ou $\mathcal{L}$A de Prüfer (tout idéal fini est principal) qui est strictement plus forte que $\mathcal{V}$A.

Cherchons quelles conditions doit remplir A pour que tout élément de K puisse se mettre sous forme canonique.

Pour cela désignons par Γ le groupe de divisibilité de K par rapport à A et par w la semi-valuation correspondante.

Si a/b est une forme canonique, $w(a)$ et $w(b)$ sont nécessairement étrangers.

Réciproquement, si $w(a)$ et $w(b)$ sont étrangers en vertu des théorèmes 6 et 10 (chap. I, § **1**), a/b est une forme canonique.

Par suite, si $w(a') - w(a) = w(b') - w(b) = w(c)$, on a $c \in A$ et $a' = ca$, $b' = cb$. Il résulte donc du chapitre I, paragraphe **1**, théorème 12 le

Théorème 3. — *Étant donné un anneau d'intégrité* A, *la condition nécessaire et suffisante pour que chaque élément du corps des quotients de* A *admette une forme canonique est que* A *soit un anneau de demi-valuation.*

Étant donné un anneau d'intégrité A et le corps des quotients K de A, a/b sera une *forme irréductible* de l'élément k de K ($a, b \in A$) si :

1° $k = a/b$;

2° Pour tout c contenu dans A, les relations $a = a'c$, $b = b'c$ impliquent que c soit inversible dans A.

Proposition 1. — *Toute forme canonique est irréductible.*

Soit a/b une forme canonique. Si $a = a'c$, $b = b'c$, on aura $a/b = a'/b'$. Donc il existe par définition un élément d de A tel que $a' = da$, $b' = db$. Mais $d = c^{-1}$, donc c est bien inversible dans A.

Si Γ est le groupe de divisibilité de K par rapport à A et w la semi-valuation correspondante, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que a/b ($a, b \in A$) soit une forme irréductible est que $w(a)$ et $w(b)$ soient faiblement étrangers. Par suite, tout élément de K admettra une forme irréductible si et si seulement tout élément de Γ peut se mettre sous la forme d'une différence de deux éléments faiblement étrangers. Nous ne saurions dire si de tels groupes autres que les groupes réticulés existent et, à fortiori, s'il peut exister un corps semi-valué par un tel groupe.

2. ÉTUDE DE CERTAINES DEMI-VALUATIONS. — Nous allons montrer dans ce paragraphe que l'on peut dans certains cas déterminer toutes les demi-valuations d'un corps K satisfaisant à certaines conditions.

1. Q étant le corps des nombres rationnels ordinaires, nous allons non seulement déterminer toutes les demi-valuations de Q, mais encore toutes ses semi-valuations, c'est-à-dire déterminer tous les ordres de Q.

Soit A un ordre de Q. Si Z est l'anneau des entiers ordinaires, comme A contient 1 et est un anneau, on a $A \supset Z$.

Soit $a \in Z$ tel qu'il existe une fraction a'/a irréductible (a', $a \in Z$) telle que $a'/a \in A$. a' et a étant premiers entre eux, il existe des entiers m et n tels que $ma' + na = 1$. Or a'/a, $1 \in A$ entraîne

$$(ma'/a) + n \in A \qquad \text{ou} \qquad 1/a \in A.$$

D'autre part, si $a = a_1 a_2 (a_1, a_2 \in Z)$, on aura $a_2/a = 1/a_1 \in A$. A est donc entièrement déterminé par l'ensemble P des nombres premiers (positifs) tels que

$$p \in P \rightleftharpoons 1/p \in A. \tag{1}$$

On voit que si a/b est une fraction irréductible telle que $b > 0$, a/b sera contenu dans A si et si seulement b peut se décomposer en un produit de facteurs premiers tous contenus dans P.

Il est immédiat que la donnée d'un ensemble quelconque P de nombres premiers contenant 1 détermine de cette manière un ordre de A.

Soit $P' = (p_\iota)_{\iota \in I}$ l'ensemble des nombres premiers positifs non contenus dans P et $\Gamma = Z^{(P')} = \sum_{\iota \in I} Z_\iota$ le groupe ordonné des applications dans Z des sous-ensembles finis de P'. x étant un élément de Q, soit $\varphi_\iota(x)$ la valeur de x dans la valuation p_ι-adique. Posons

$$\varphi(x) = \sum_{\iota \in I} \varphi_\iota(x).$$

φ est une application de Q sur Γ qui est la semi-valuation correspondant à l'ordre A. Comme Γ est réticulé, on voit que :

THÉORÈME 1. — *Toute semi-valuation de Q est une demi-valuation.*

2. Soit k un corps algébriquement clos et $K = k(x)$ une extension transcendante simple de k. Nous nous proposons de déterminer ici toutes les demi-valuations de K qui s'annulent sur k, ou encore tous les ordres de K qui contiennent k et sont en même temps anneaux de demi-valuation.

Soit donc w une demi-valuation de K qui s'annule sur k, A et Γ l'ordre et le groupe de divisibilité correspondante. Excluons le cas trivial où $\Gamma = \{0\}$.

Pour simplifier les notations, nous poserons si $y \in K$

$$w^+(y) = [w(y)]^+, \qquad w^-(y) = [w(y)]^-.$$

LEMME 1. — *Si a et b sont deux éléments distincts contenus dans k, pour tout élément y de K, $w^+(y-a)$ et $w^+(y-b)$ sont étrangers.*

Comme Γ est réticulé, il nous suffit pour cela de montrer que $w^+(y-a)$ et $w^+(y-b)$ sont faiblement étrangers.

Soit donc $w^+(y-a), w^+(y-b) \geqq \alpha > 0$. On a

$$\begin{aligned}(2) \qquad w(y-a) = w^+(y-a) - w^-(y-a) &\geqq \alpha - w^-(y-a)\\ &\geqq \alpha - \sup[w^-(y-a), w^-(y-b)].\end{aligned}$$

De même, $w(y-b) \geqq \alpha - \sup[w^-(y-a), w^-(y-b)]$. Par suite,

$$(3) \qquad \inf[w(y-a), w(y-b)] \geqq \alpha - \sup[w^-(y-a), w^-(y-b)].$$

Comme $b - a \in k$,

$$\inf[w(y-a), w(y-b)] \leqq w(b-a) = 0,$$

(3) peut donc s'écrire

$$(3') \qquad \sup[w^-(y-a), w^-(y-b)] \geqq \alpha.$$

Or $w^+(y-a)$ étant étranger à $w^-(y-a)$, il en est de même de α. α étant étranger à $w^-(y-a)$ et $w^-(y-b)$ est étranger à $\sup[w^-(y-a), w^-(y-b)]$.

Il résulte donc de (3′) que $\alpha = 0$. D'où le lemme

LEMME 2. — *Quels que soient $a, b \in k$ et $y \in K$, on a*

$$w^-(y-a) = w^-(y-b).$$

Soit $z \in K$ tel que $w(z) = -w^-(y-a)$.

Comme $w(z) \leqq w(y-a)$, $w(a-b)$, on a $\frac{y-a}{z}, \frac{a-b}{z} \in A$, donc

$$\frac{y-a}{z} + \frac{a-b}{z} = \frac{y-b}{z} \in A \quad \text{ou} \quad w(z) \leqq w(y-b).$$

Comme $w(z) \leqq 0$, on a donc

$$w(z) \leqq -w^-(y-b) \quad \text{et} \quad -w^-(y-a) = w(z) \leqq -w^-(y-b)$$

ou

$$w^-(y-a) \geqq w^-(y-b).$$

Comme on a de même $w^-(y-a) \leqq w^-(y-b)$, on en déduit le lemme

LEMME 3. — *Il existe un générateur y de* K *sur k tel que* $w(y) > 0$.

Plusieurs cas sont possibles :

1° $\exists\, a \in k$ tel que $w(x-a) > 0$. On prend alors $y = x - a$;

2° $\exists\, b \in k$ tel que $w(x-b) < 0$. On prend alors $y = \frac{1}{x-b}$;

3° Aucune des deux premières conditions n'est réalisée.

Montrons que ce cas ne peut se produire. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il se produise effectivement.

Soit α la valeur (constante en vertu du lemme 2) de $w^-(x-a)$ lorsque a parcourt k. On a nécessairement $\alpha > 0$, car si l'on avait $\alpha = 0$ comme par hypothèse, quel que soit $a \in k$, $w(x-a) \not> 0$, on aurait $w(x-a) = 0$. Or, si P est un polynome quelconque en x de degré non nul, comme k est algébriquement clos, $P = a_0(x-a_1)\ldots(x-a_m)$ $(a_i \in k,\ 0 \leqq i \leqq m)$. On aurait donc $w(P) = \sum_{1 \leqq i \leqq m} w(x-a_m) = 0$ et comme tout élément X de K peut se mettre sous la forme P/Q, avec P, $Q \in k[x]$, on aurait $w(X) = 0$ pour tout $X \in K$, ce qui contredit l'hypothèse $\Gamma \neq \{0\}$.

Soit donc $\alpha > 0$.

Soit $P \in k[x]$ et m le degré de P. Si $m = 0$, $w(P) = 0$. Si $m > 0$, on a

(4) $$P = a_0(x-a_1)\ldots(x-a_m) \quad (a_i \in k,\ 0 \leqq i \leqq m).$$

Donc

$$w(P) = \sum_{1 \leq i \leq m} w(x - a_i) = \sum_{1 \leq i \leq m} w^+(x - a_i) + \sum_{1 \leq i \leq m} w^-(x - a_i)$$
$$= \sum_{1 \leq i \leq m} w^+(x - a_i) - m\alpha.$$

Comme $\alpha = w^-(x - a_i)$ $(1 \leq i \leq m)$, α est étranger à $\sum_{1 \leq i \leq m} w^+(x - a_i)$.

D'où

$$w^+(P) = \sum_{1 \leq i \leq m} w^+(x - a_i), \qquad w^-(P) = m\alpha. \tag{5}$$

On en déduit en particulier que, quel que soit le degré m de P (positif ou nul), on a bien $w^-(P) = m\alpha$.

Soit maintenant $X \in K$ tel que $w(X) > 0$.

On peut poser $X = P/Q$, P et Q étant deux polynomes premiers entre eux. Soit m le degré de P et n celui de Q.

$$w(X) = w(P) - w(Q), \qquad \text{donc} \quad w^+(P) + w^-(Q) > w^+(Q) + w^-(P)$$

ou

$$w^+(P) > w^+(Q) + (m - n)\alpha. \tag{6}$$

Or α est étranger à $w^+(P)$, donc $m = n$ et comme $w(X) > 0$, on a $m = n > 0$.

Soit donc

$$\left.\begin{array}{l} P = a_0(x - a_1)\ldots(x - a_m) \\ Q = b_0(x - b_1)\ldots(x - b_m) \end{array}\right\} a_i,\ b_i \in k \qquad (0 \leq i \leq m).$$

Comme P et Q sont premiers entre eux,

$$a_i \neq b_j \qquad (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq m).$$

Donc, en vertu du lemme 1, $w^+(x - a_i)$ est étranger à $w^+(x - b_j)$ et par suite, comme en vertu de (5)

$$w^+(P) = \sum_{1 \leq i \leq m} w^+(x - a_i), \qquad w^+(Q) = \sum_{1 \leq j \leq m} w^+(x - b_j),$$

on a

$$\inf[w^+(P), w^+(Q)] = 0. \tag{7}$$

La formule (6) montre donc que $w^+(Q)=0$. Par suite, $w^+(x-b_1)=0$ et $w(x-b_1)=-\alpha<0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le troisième cas ne peut donc se présenter, d'où le lemme 3.

Dans ce qui suit, nous supposerons que x ait été choisi de sorte que $w(x)>0$. Il résulte alors du lemme 2 que, quel que soit $a\in k$,

$$w^-(x-a)=0.$$

Soit $(a_\iota)_{\iota\in I}$ le sous-ensemble de k ainsi défini

$$a\in(a_\iota)_{\iota\in I}\rightleftharpoons w(x-a)>0. \tag{8}$$

On voit alors, en tenant compte du lemme 1 que le groupe Γ est isomorphe à $Z^{(I)}=\sum_{\iota\in I} Z_\iota$. Si nous les identifions, la demi-valuation sera ainsi définie : la composante d'indice ι de $w(P)$, P étant un polynome en x, sera la puissance à laquelle le monome $(x-a_\iota)$ apparaîtra dans la décomposition de P en facteurs premiers.

3. Topologie induite. — 1. Soit un corps K et un ordre A de K, Γ le groupe de divisibilité correspondant, et w l'application canonique de K^* sur Γ. On peut définir ([40]) une topologie sur K en prenant pour base du filtre des voisinages de 0 l'ensemble $(V_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ ainsi défini :

$$x\in V_\alpha\rightleftharpoons[w(x)\geqq\alpha \text{ ou } x=0] \qquad (\alpha\in\Gamma). \tag{1}$$

Il est facile de voir ([41]) que K, muni de cette topologie, a une structure d'anneau topologique, mais ce n'est pas en général un corps topologique, c'est-à-dire que la fonction $f(x)=1/x$ n'est pas toujours continue.

Cette topologie sera dite *induite par l'ordre* A ou *par la semi-valuation* w.

Deux ordres A et A' de K seront dits *équivalents* s'il existe deux éléments a et b différents de 0 dans K tels que

$$A\supset aB \qquad \text{et} \qquad B\supset bA.$$

([40]) Zelinsky [1].

([41]) *Voir* par exemple, Bourbaki, *Topologie générale*, chap. III.

C'est évidemment une relation d'équivalence sur l'ensemble des ordres de K.

THÉORÈME 1. — *La condition nécessaire et suffisante pour que deux ordres de* K *induisent la même topologie sur* K *est qu'ils soient équivalents.*

Soient A et B deux ordres équivalents, $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ les topologies respectives qu'ils induisent sur K. Soient a et b deux éléments de K différents de o tels que $A \supset Ba$ et $B \supset Ab$. Soit V un voisinage de o dans $\mathcal{T}_A$. Il contient par définition un ensemble $Ax (x \neq 0)$, or $Ax \supset Bax$ qui est un voisinage de o dans $\mathcal{T}_B$, puisque $ax \neq 0$. Il en résulte que $\mathcal{T}_B$ est plus fine que $\mathcal{T}_A$. Comme $\mathcal{T}_A$ est aussi plus fine que $\mathcal{T}_B$, on a $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_B$.

Réciproquement, soient deux ordres A et B de K tels que $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_B$; $A = A_1$ est un voisinage de o dans $\mathcal{T}_A$, donc il existe un élément a de K différent de o tel que $A \supset Ba$. De même, il existe un élément b de K différent de o tel que $B \supset Ab$. A et B sont bien équivalents.

Étant donné un corps K et une topologie $\mathcal{T}$ compatible avec sa structure d'anneau, Zelinsky donne un critère permettant de reconnaître si la topologie $\mathcal{T}$ est induite par un ordre de K. Un sous-ensemble E de K sera dit *borné* si pour tout voisinage V de o, il existe un voisinage U de o tel que $AU \subset V$. On a alors le

CRITÈRE DE ZELINSKY. — *Étant donné un corps* K *et une topologie sur* K *compatible avec sa structure d'anneau, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un ordre de* K *induisant la topologie* $\mathcal{T}$ *est qu'il existe un sous-groupe additif de* K *qui soit en même temps borné et ouvert.*

2. Montrons que si le corps K est un corps demi-valué par le groupe réticulé Γ et si l'on considère K comme muni de la topologie correspondante, la continuité de $f(x) = 1/x$ est étroitement liée à l'existence d'un filet maximal dans Γ.

Supposons que Γ admette le filet maximal $\bar{\mu}$ et montrons que

$$w(b/a) > \mu \rightarrow w(b+a) = w(a) \qquad (a,\ b \in K,\ a \neq 0). \tag{2}$$

(le cas $b = 0$ est trivial).

Plaçons-nous dans ces hypothèses et soit $c = b + a$. On aura

$$w(c) \geqq \inf[w(a),\ w(b)] = w(a), \qquad \text{puisque} \quad w(b) \geqq w(a) + \mu \geqq w(a),$$

Or

$$w(a) = w(c-b) \geqq \inf[w(c), w(-b)] = \inf[w(c), w(b)].$$

Comme $w(a) \leqq w(b), w(c)$, on en déduit $w(a) = \inf[w(c), w(b)]$. Ceci peut s'écrire $w(a) = \inf[w(a+b), w(b)]$ ou

$$\inf\left[w\left(1+\frac{b}{a}\right), w\left(\frac{b}{a}\right)\right] = 0. \tag{3}$$

Or, puisque $w(b/a) \geqq \mu$, $\overline{w(b/a)}$ est le filet maximal de Γ, donc

$$\overline{w(b/a)} \geqq \overline{w\left(1+\frac{b}{a}\right)}$$

et l'égalité (3) montre que $w\left(1+\dfrac{b}{a}\right) = 0$ ou $w(a+b) = w(a)$, d'où la formule (2).

Ceci posé, montrons que la fonction $f(x) = 1/x$ est continue sur K^*. Soit $x_0 \neq 0$. Il faut montrer qu'étant donné un voisinage V de o, on peut trouver un voisinage W de o tel que

$$h \in W \to f(x_0+h) - f(x_0) \in V.$$

Par définition, il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $V \supset V_\alpha$, V_α étant défini par la formule (1). On a

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0} = \frac{-h}{x_0(x_0+h)}$$

et

$$w[f(x_0+h) - f(x_0)] = w(h) - w(x_0) - w(x_0+h).$$

Soit $\beta' \geqq \mu + w(x_0)$. Si $w(h) \geqq \beta'$, on aura, en vertu de la formule (2),

$$w(x_0+h) = w(x_0) \qquad \text{et} \qquad w[f(x_0+h) - f(x_0)] = w(h) - 2w(x_0).$$

Par suite, si $w(h) \geqq \beta', \alpha + 2w(x_0)$, on aura

$$w[f(x_0+h) - f(x_0)] \geqq \alpha \qquad \text{et} \qquad f(x_0+h) - f(x_0) \in V_\alpha \subset V.$$

Donc en posant $\beta = \sup[\beta', \alpha + 2w(x_0)]$, on voit que

$$h \in V_\beta \to f(x_0+h) - f(x_0) \in V.$$

On peut donc prendre $W = V_\beta$ et l'on en déduit la proposition 1 :

Proposition 1. — *Si le groupe réticulé* Γ *admet un filet maximal, tout corps* K *demi-valué par* Γ *est un corps topologique.*

Nous avons déjà rencontré de nombreux groupes réticulés admettant un filet maximal : les groupes totalement ordonnés (la proposition 1 permet alors de retrouver le résultat bien connu que tout corps valué peut être considéré comme un corps topologique), les produits directs de groupes totalement ordonnés et leurs quotients par les sommes directes correspondantes, le groupe des fonctions continues habituelles.

Il serait intéressant de savoir si réciproquement un corps K étant demi-valué par le groupe réticulé Γ et la topologie correspondante rendant $1/x$ continue sur K^*, Γ admet un filet maximal. Nous ne savons si cette proposition est vraie dans toute sa généralité, toutefois, si Γ est un groupe réticulé sans filet maximal, nous pouvons toujours construire un corps K demi-valué par Γ tel que la fonction $1/x$ ne soit pas continue sur K^* :

Soit donc Γ un groupe réticulé sans filet maximal, k étant un corps quelconque, K sera le corps des quotients de l'algèbre du groupe Γ par rapport à k, w la demi-valuation définie précédemment (§ 1, n° 2). Montrons que la fonction $f(x) = 1/x$ n'est pas continue au point $x = 1$. Pour cela, montrons que l'on peut trouver $\alpha \in \Gamma$ tel que, quel que soit $\beta \in \Gamma$ aussi grand qu'on le veut, on puisse trouver $h \in K$ tel que $w(h) \geqq \beta$ et $w[f(1+h) - f(1)] \ngeqq \alpha$.

Soit donc $\alpha > 0$ et β que l'on peut supposer positif ou nul. Soit $\gamma \geqq \alpha, \beta$. Comme Γ n'admet pas de filet maximal, il existe un filet strictement supérieur à $\bar{\gamma}$, donc un filet $\bar{\xi} \neq \bar{0}$ étranger à $\bar{\gamma}$ (chap. II, § 1, th. 1).

Posons alors $\gamma' = \gamma + \xi$ et soient a et b les deux éléments de l'algèbre de groupe définis par :

$$a = x^\gamma + x^{\gamma'}, \qquad b = - x^\gamma + x^\xi. \tag{4}$$

On a $w(a) = \inf(\gamma, \gamma') = \gamma$; $w(b) = \inf(\gamma, \xi) = 0$.

Donc $w(a/b) = \gamma \geqq \beta$ et

$$w(a+b) = w(x^{\gamma'} + x^\xi) = \inf(\gamma', \xi) = \inf(\gamma + \xi, \xi) = \xi.$$

D'autre part

$$w\left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}}-1\right)=w\left(\frac{a}{a+b}\right)=w(a)-w(a+b)=\gamma-\xi.$$

Or on ne peut avoir $\gamma-\xi\geqq\alpha$, sans cela on aurait $\gamma\geqq\alpha+\xi$ et $\bar{\gamma}\geqq\bar{\xi}$.

La fonction $1/x$ est donc bien discontinue au point 1. D'où :

THÉORÈME 2. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe réticulé* Γ *soit tel que tout corps demi-valué par* Γ *soit un corps topologique est que* Γ *admette un filet maximal.*

3. Il résulte de l'article déjà cité de Zelinsky qu'étant donné un corps K semi-valué par Γ, la condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre correspondant A soit équivalent à un anneau de valuation est que dans la topologie induite par A, l'anneau topologique K vérifie la condition V de Kaplansky [42] : Tout ensemble E de K éloigné de o (c'est-à-dire disjoint d'un voisinage de o) est tel que E^{-1} soit borné.

Il est facile de voir que ceci ne dépend que de la structure du groupe de divisibilité Γ. Plus précisément

THÉORÈME 3. — *Pour qu'un corps semi-valué par* Γ (*et, par suite, considéré comme anneau topologique*) *remplisse la condition* V, *il faut et il suffit que* Γ *remplisse la condition suivante : Il existe un élément* α *de* Γ *tel que* $\xi\not\leqq 0$ *entraîne* $\xi\geqq\alpha$.

La condition précédente sera aussi dite *condition* V.

Supposons d'abord que K, semi-valué par Γ remplisse la condition V et soit E le sous-ensemble de K ainsi défini

$$(5)\qquad x\in E \rightleftharpoons w(x)\not\geqq 0,$$

w étant la semi-valuation correspondante.

---

(42) KAPLANSKY [1].

E est éloigné de o, puisqu'il n'a aucun point commun avec le voisinage V_0 de o. Puisque K remplit la condition V, il en résulte que E^{-1} est borné, donc pour tout β il existe γ tel que $V_\gamma E^{-1} \subset V_\beta$ ou encore pour tout $\xi \not\leq 0$, $\xi \geq \beta - \gamma$. En posant $\beta - \gamma = \alpha$, on voit donc que Γ remplit la condition V.

Réciproquement, supposons que Γ remplisse la condition V. Si μ est un élément de Γ, il existera $\mu' \in \Gamma$ tel que pour tout $\xi \in \Gamma$, $\xi \not\leq \mu$ entraîne $\xi \not\geq \mu'$. Soit donc E un sous-ensemble de K éloigné de o. Par définition, $\exists \lambda \in \Gamma$ tel que $x \in E$ entraîne $w(x) \not\geq \lambda$. Par suite, si $y \in E^{-1}$, $w(y) \not\leq -\lambda$. Il existe donc $\lambda' \in \Gamma$ tel que $y \in E^{-1}$ entraîne $w(y) \geq \lambda'$. Si β est un élément quelconque de Γ, en posant $\gamma = \beta - \lambda'$, on voit que $V_\gamma E^{-1} \subset V_\beta$. Par suite, E^{-1} est borné et K vérifie la condition V.

Il existe des groupes réticulés non totalement ordonnés et remplissant la condition V :

Soit G le groupe $Z_1 \dotplus Z_2$ ordonné lexicographiquement, Z_i étant isomorphe du groupe ordonné des entiers $[i = 1, 2$ et $(+1, -1) > 0]$.

Soit $\Lambda = G^R$ le groupe ordonné des applications de l'ensemble R dans G. Le sous-ensemble Γ de Λ défini par

$$f \in \Gamma \rightleftharpoons pr_1 f(x) = \text{const.}$$

est un sous-groupe réticulé propre de Λ.

Le groupe Γ n'est pas totalement ordonné. Soit, d'autre part, $h \in \Gamma$ tel que

$$h(x) = (-1, 0) \qquad (x \in R).$$

Si $f \in \Gamma$ est tel que $f \not\leq 0$, on a $pr_1 f(x) \geq 0$ $(x \in R)$, donc $f > h$ et Γ remplit bien la condition V.

Il résulte des théorèmes 2 et 3 et du théorème **1** du paragraphe **1** la

Proposition 2. — *Tout groupe réticulé remplissant la condition* V *admet un filet maximal.*

Démontrons ceci directement : soit Γ un groupe réticulé remplissant la condition V et $\alpha \in \Gamma$ tel que $\xi \not\leq 0$ entraîne $\xi \geq \alpha (\xi \in \Gamma)$. Si Γ n'admettait pas de filet maximal, on pourrait trouver deux éléments ξ_1 et ξ_2 de Γ tels que

$$\xi_i > 0, \qquad \inf(\xi_i, \alpha^+) = \inf(\xi_i, \alpha^-) = 0 \quad (i = 1, 2) \qquad \text{et} \qquad \inf(\xi_1, \xi_2) = 0.$$

Comme $\xi_1 - \xi_2 \nleq 0$, on a par définition

$$\xi_1 - \xi_2 \geqq \alpha^+ - \alpha^- \qquad \text{ou} \qquad \xi_1 + \alpha^- \geqq \xi_2 + \alpha^+,$$

ce qui est absurde, puisque ξ_2 est strictement positif et étranger à ξ_1 et à α^-.

BIBLIOGRAPHIE.

BIRKHOFF (G.) :

[1] *Lattice-ordered groups* (*Ann. of Math.*, **43**, 1942, p. 298-331).
[2] *Lattice theorie*, 2e édition, New-York, 1948.

BOURBAKI (N.) :

[1] *Algèbre :* Chapitre VI, Paris, 1952 ; *Divisibilité*, à paraître.

CLIFFORD (A. H.):

[1] *Partially ordered abelian groups* (*Ann. of Math.*, **1**, 1940, p. 465-473).

DEDEKIND :

[1] *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grossten gemeinsamen Teiler* (*Ges. Werke*, **2**, p. 103-148).

DIEUDONNÉ (J.) :

[1] *Sur la théorie de la divisibilité* (*Bull. Soc. Math. France*, **49**, 1941, p. 133-134).

DUBREIL-JACOTIN (Mme), CROISOT (R.) et LESIEUR (L.) :

[1] *Leçons sur la théorie des treillis* (*Cahiers scientifiques*). Paris, Gauthier-Villars, 1953.

JAFFARD (P.) :

[1] *Théorie des filets dans les groupes réticulés* (*C. R. Acad. Sc.*, **230**, 1950, p. 1024-1025).
[2] *Applications de la théorie des filets* (*C. R. Acad. Sc.*, **230**, 1950, p. 1125-1126.
[3] *Nouvelles applications de la théorie des filets* (*C. R. Acad. Sc.*, **230**, 1950, p. 1631-1632).
[4] *Groupes archimédiens et para-archimédiens* (*C. R. Acad. Sc.*, **231**, 1950, p. 1278-1280).
[5] *Corps demi-values* (*C. R. Acad. Sc.*, **231**, 1950, p. 1401-1403).

KANTOROVITCH (L.) :

[1] *Lineare halbgeordnete Raume* (*Mat. Sbornik*, 44, 1937, p. 121-168).

KAPLANSKY (I.).

[1] *Topological methods in valuation theory* (*Duke Math. J.*, 14, 1947, p. 527-541).

KRULL (W.) :

[1] *Allgemeine Bewertungstheorie* (*J. Reine Angew. Math.*, **167**, 1931, p. 160-196).

LEVI (F.) :

[1] *Arithmetische Gesetze im Gebiete discreter Gruppen* (*Rendiconti Palermo*, 35, 1913, p. 225-236).

LORENZEN (P.) :

[1] *Abstrakte Begrundung der multiplicativen Idealtheorie* (*Math. Zeits.*, 45, 1939, p. 533-553).

NAKAYAMA (T.) :

[1] *On Krull's conjecture* (*Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 18, 1942, p. 1-4).

PRÜFER (H.) :

[1] *Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften in Körpern* (*J. Reine Angew. Math.*, **168**, 1932, p. 1-36.

RIESZ (F.) :

[1] *Sur la théorie générale des opérations linéaires* (*Ann. of Math.*, 41, 1940, p. 174-206).

ZELINSKY (D.) :

[1] *Topological characterisation of fields with valuations* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 54, 1948, p. 1145-1150).