JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MARCEL MENDES

Systèmes d'équations intégrales et figures dérivées des ellipsoïdes hétérogènes en rotation

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 32 (1953), p. 335-386.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1953_9_32__335_0>

Systèmes d'équations intégrales
et figures dérivées des ellipsoïdes hétérogènes en rotation;

Par M. Marcel MENDES.

Nous avons étudié dans un Mémoire antérieur ([1]) les figures infiniment voisines des ellipsoïdes en rotation, dans le cas où ceux-ci se composent d'un nombre fini de couches, chacune homogène, de densités croissant de la surface vers l'intérieur. Nous avons pu appliquer à cette étude la méthode de Poincaré utilisant les fonctions de Lamé, lorsque les ellipsoïdes de séparation sont homofocaux. Nous avons trouvé une infinité de figures infiniment voisines, obtenues en ajoutant à chaque couche une masse de volume algébrique nul, la rotation se conservant lorsqu'on passe d'un point à son dérivé.

Nous avons laissé de côté un autre cas intéressant : celui où les ellipsoïdes de séparation sont homothétiques, auquel une telle méthode ne s'applique pas facilement.

Dans le Mémoire actuel, nous reprenons la même question par les formules ordinaires du potentiel et effectuons les calculs, successivement pour les ellipsoïdes homofocaux et pour les ellipsoïdes homothétiques. L'existence, dans chaque cas, d'une figure infiniment voisine de celle d'où l'on est parti dépend de la résolution d'un système d'équations intégrales linéaires homogènes.

Il est habituel, pour établir l'existence de solutions pour de tels systèmes, de les ramener à une seule équation. Ici, dans une première

([1]) *La rotation de l'ellipsoïde hétérogène étudiée au moyen des fonctions de Lamé* (*J. Math. pures et appl.*, t. XXIV, 1945, p. 51).

partie, nous étudions directement ces systèmes et leur étendons, en particulier, la notion de noyaux symétriques, ainsi que la théorie des noyaux de Schmidt : les résultats obtenus sont à la base de la démonstration de l'existence des figures infiniment voisines des ellipsoïdes, qui constitue le but de ce Mémoire.

Dans les équations qui définissent ces dernières s'introduisent certaines constantes; la démonstration de la nullité de ces constantes s'appuie sur le développement suivant les fonctions fondamentales d'un groupe de fonctions; nous démontrons la légitimité d'un tel développement.

La seconde partie est une introduction aux deux dernières; elle traite la question relative à un seul ellipsoïde et permet de retrouver les résultats de Poincaré.

Les troisième et quatrième parties sont consacrées respectivement aux cas des ellipsoïdes de séparation homofocaux et homothétiques. Les conclusions, à la vérité, sont moins précises que celles obtenues dans le premier cas au moyen des fonctions de Lamé, mais la méthode actuelle offre l'avantage de s'appliquer dans des cas plus étendus.

Enfin, dans une Addition, nous rectifions quelques erreurs d'impression qui avaient subsisté dans notre précédent Mémoire.

PREMIÈRE PARTIE.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES.

1. Résolution par approximations successives. — Soit le système d'équations intégrales linéaires, dépendant du paramètre λ, et où l'on suppose $b > a$,

$$(1) \qquad \varphi_i(x) = \lambda \sum_{p=1}^{r} \int_a^b \mathrm{K}_{ip}(x, s)\, \varphi_p(s)\, ds + f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

les noyaux $\mathrm{K}_{ij}(x, y)$, ainsi que les fonctions $f_i(x)$, satisfaisant à un certain nombre de conditions auxiliaires, classiques dans la théorie des équations linéaires.

Les développements formels

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \lambda\varphi_{i1}(x) + \lambda^2\varphi_{i2}(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_{in}(x) + \ldots$$

vérifient ce système, si l'on pose

$$\varphi_{ik}(x) = \sum_p \int_a^b \mathrm{K}_{ip}(x, s)\,\varphi_{p,k-1}(s)\,ds \qquad (k = 1, 2, \ldots, n, \ldots).$$

Comparons le système (1) au système

$$\Phi_i(x) = \lambda \sum_p \int_a^b \mathrm{M}\,\Phi_p(s)\,ds + \mathrm{F}_i(x),$$

où M représente une limite supérieure, supposée finie, des valeurs absolues des noyaux dans le rectangle limité par les droites

$$x = a, \qquad x = b, \qquad y = a, \qquad y = b,$$

et les $\mathrm{F}(x)$ sont dominantes pour les $f(x)$.

Toute solution de ce système est de la forme

$$\Phi_i(x) = \mathrm{F}_i(x) + \mathrm{C}_i,$$

les C vérifiant le système linéaire

$$\mathrm{C}_i[1 - \lambda\mathrm{M}(b-a)] - \lambda\mathrm{M}(b-a)\sum_{q\neq i}\mathrm{C}_q = \lambda\mathrm{M}\sum_p \int_a^b \mathrm{F}_p(s)\,ds.$$

Chaque C est donc égal à une fraction ayant pour dénominateur le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda'-1 & \lambda' & \lambda' & \ldots & \lambda' \\ \lambda' & \lambda'-1 & \lambda' & \ldots & \lambda' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \lambda' & \lambda' & \lambda' & \ldots & \lambda'-1 \end{vmatrix}, \qquad \lambda' = \lambda\mathrm{M}(b-a).$$

Ce déterminant étant égal, selon la parité de r, à

$$\pm(1 - r\lambda') = \pm[1 - r\mathrm{M}(b-a)\lambda],$$

$\Phi_i(x)$ est développable suivant les puissances de λ, sous la condition

$$|\lambda| < \frac{1}{r\mathrm{M}(b-a)}.$$

Il en est de même de $\varphi_i(x)$.

2. Noyaux itérés. — Comme pour une seule équation, on est amené à introduire des suites indéfinies de noyaux

$$K_{ij}^{(1)}(x, y) = K_{ij}(x, y), \quad K_{ij}^{(2)}(x, y), \quad \ldots, \quad K_{ij}^{(n)}(x, y), \quad \ldots,$$

qui se déduisent les uns des autres par itération

$$K_{ij}^{(n)}(x, y) = \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, t)\, K_{pj}^{(n-1)}(t, y)\, dt.$$

Notons la formule

$$K_{ij}^{(\mu+\nu)}(x, y) = \sum_p \int_a^b K_{ip}^{(\mu)}(x, t)\, K_{pj}^{(\nu)}(t, y)\, dt.$$

On vérifie de proche en proche que l'on a

$$\varphi_{in}(x) = \sum_p \int_a^b K_{ip}^{(n)}(x, s) f_p(s)\, ds.$$

Considérons alors les séries

$$\Gamma_{ij}(x, y; \lambda) = K_{ij}(x, y) + \lambda K_{ij}^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} K_{ij}^{(n)}(x, y) + \ldots$$

M ayant la signification précédente, $|K_{ij}^{(n)}(x, y)|$ est inférieur à $r^{n-1} M^n (b-a)^{n-1}$, et les séries sont uniformément convergentes dans le domaine considéré, si λ vérifie l'inégalité précédente.

On en déduit que l'on a

$$(2) \qquad \varphi_i(x) = f_i(x) + \lambda \sum_p \int_a^b \Gamma_{ip}(x, s; \lambda) f_p(s)\, ds.$$

Les fonctions $\Gamma_{ij}(x, y; \lambda)$ sont les *résolvantes* ou les *noyaux résolvants*. Elles vérifient les deux systèmes d'équations fonctionnelles

$$(3) \qquad \Gamma_{ij}(x, y; \lambda) = K_{ij}(x, y) + \lambda \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, t)\, \Gamma_{pj}(t, y; \lambda)\, dt,$$

$$(3') \qquad \Gamma_{ij}(x, y; \lambda) = K_{ij}(x, y) + \lambda \sum_p \int_a^b K_{pj}(t, y)\, \Gamma_{ip}(x, t; \lambda)\, dt.$$

3. Noyaux symétriques. — Nous serons dans la suite amenés à considérer des noyaux tels que, pour tous les indices i et j, on ait

$$K_{ij}(x, y) = K_{ji}(y, x).$$

De tels noyaux constituent la généralisation des noyaux symétriques; nous les appellerons encore des *noyaux symétriques*.

On voit immédiatement que, si les noyaux $K_{ij}(x, y)$ sont symétriques, il en est de même de ceux que l'on obtient par itération.

4. Les noyaux résolvants sont des fonctions méromorphes du paramètre λ. — Pour le démontrer, faisons dans les équations (3)

$$\Gamma_{ij}(x, y; \lambda) = \frac{A_{ij}^0(x, y) + \lambda A_{ij}^1(x, y) + \ldots + \lambda^k A_{ij}^k(x, y) + \ldots}{1 + a_1\lambda + \ldots + a_k\lambda^k + \ldots} = \frac{D_{ij}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)}.$$

On obtient

$$D_{ij}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) = K_{ij}(x, y)\, D(\lambda) + \lambda \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s)\, D_{pj}\left(\begin{matrix} s \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) ds,$$

formule qui, développée, conduit aux relations

$$A_{ij}^k(x, y) = a_k K_{ij}(x, y) + \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s)\, A_{pj}^{k-1}(s, y)\, ds \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Posons, d'une façon générale,

$$k a_k = -\sum_p \int_a^b A_{pp}^{k-1}(s, s)\, ds.$$

A partir des valeurs

$$A_{ij}^0(x, y) = K_{ij}(x, y), \qquad a_1 = -\sum_p \int_a^b K_{pp}(s, s)\, ds,$$

on établit de proche en proche les formules

$$A_{ij}^k(x, y) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p_1, \ldots, p_k} \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{(k)} \times \begin{vmatrix} K_{ij}(x, y) & K_{p_1 j}(s_1, y) & \ldots & K_{p_k j}(s_k, y) \\ K_{ip_1}(x, s_1) & K_{p_1 p_1}(s_1, s_1) & \ldots & K_{p_k p_1}(s_k, s_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ K_{ip_k}(x, s_k) & K_{p_1 p_k}(s_1, s_k) & \ldots & K_{p_k p_k}(s_k, s_k) \end{vmatrix} ds_1\, ds_2 \ldots ds_k,$$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{p_1, \ldots, p_k} \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{(k)} \times \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1}(s_1, s_1) & K_{p_2 p_1}(s_2, s_1) & \ldots & K_{p_k p_1}(s_k, s_1) \\ K_{p_1 p_2}(s_1, s_2) & K_{p_2 p_2}(s_2, s_2) & \ldots & K_{p_k p_2}(s_k, s_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ K_{p_1 p_k}(s_1, s_k) & K_{p_2 p_k}(s_2, s_k) & \ldots & K_{p_k p_k}(s_k, s_k) \end{vmatrix} ds_1\, ds_2 \ldots ds_k.$$

$k!a_k$ est donc la somme de r^k intégrales d'ordre k, l'élément différentiel pour chacune d'elles étant un déterminant d'ordre k, tandis que $k!A_{ij}^k$ est la somme de r^k intégrales d'ordre k dont les éléments différentiels sont des déterminants d'ordre $k+1$. Si M est le maximum du module des noyaux, on a donc, en vertu d'un théorème de M. Hadamard ([2]),

$$|a_k| \leq \frac{1}{k!}(b-a)^k M^k k^{\frac{k}{2}} r^k = \alpha_k, \qquad |A_{ij}^k| \leq \frac{1}{k!}(b-a)^k M^{k+1}(k+1)^{\frac{k+1}{2}} r^k = \mathcal{A}_k.$$

Les séries

$$\sum_k \alpha_k |\lambda|^k \quad \text{et} \quad \sum_k \mathcal{A}_k |\lambda|^k$$

étant convergentes pour toutes les valeurs de λ, on en déduit que les fonctions $D_{ij}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ et $D(\lambda)$ sont des fonctions entières de λ.

Les résolvantes $\Gamma_{ij}(x, y; \lambda)$ sont donc les quotients de deux fonctions entières de λ : ce sont des fonctions méromorphes de λ.

On arrive ainsi au résultat suivant :

Si λ n'est pas racine de l'équation $D(\lambda) = 0$, le système (1) *admet une solution et une seule qui est donnée par la formule*

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \lambda \sum_p \int_a^b \frac{D_{ip}\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)} f_p(s)\, ds.$$

Si l'on appelle *système associé* du système (1) le système

$$\psi_i(x) = \lambda \sum_{p=1}^{r} \int_a^b K_{pi}(s, x)\, \psi_p(s)\, ds + g_i(x),$$

on voit qu'il admet, dans les mêmes conditions, une solution et une seule donnée par

$$\psi_i(x) = g_i(x) + \lambda \sum_p \int_a^b \frac{D_{pi}\left(\begin{matrix} s \\ x \end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)} g_p(s)\, ds.$$

([2]) *Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. XVII, 1893.

5. Développement de $D'(\lambda) : D(\lambda)$. — La relation

$$D_{ij}\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right) = \Gamma_{ij}(x, y; \lambda)\, D(\lambda)$$

conduit immédiatement à la formule

$$\sum_p \int_a^b D_{pp}\left(\begin{array}{c|c} s & \lambda \\ s & \end{array}\right) ds = \sum_p \int_a^b \Gamma_{pp}(s, s; \lambda)\, D(\lambda)\, ds.$$

Si l'on remplace $D_{pp}\left(\begin{array}{c|c} s & \lambda \\ s & \end{array}\right)$ par son développement en série d'une part et, d'autre part, que l'on dérive le développement donnant $D(\lambda)$, on parvient sans difficulté à la relation

$$\sum_p \int_a^b D_{pp}\left(\begin{array}{c|c} s & \lambda \\ s & \end{array}\right) ds = - D'(\lambda). \tag{4}$$

On a, d'autre part,

$$\Gamma_{pp}(s, s; \lambda) = K_{pp}(s, s) + \lambda K_{pp}^{(2)}(s, s) + \ldots,$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_p \int_a^b \Gamma_{pp}(s, s; \lambda)\, ds &= \sum_p \int_a^b [K_{pp}(s, s) + \lambda K_{pp}^{(2)}(s, s) + \ldots]\, ds \\ &= A_1 + A_2\lambda + \ldots + A_n \lambda^{n-1} + \ldots, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_p \int_a^b K_{pp}^{(n)}(s, s)\, ds \\ &= \sum_{p, p_1, \ldots, p_{n-1}} \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{(n)} K_{pp_1}(s, t_1)\, K_{p_1 p_2}(t_1, t_2) \ldots K_{p_{n-1}, p}(t_{n-1}, s)\, ds\, dt_1 \ldots dt_{n-1}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = - G(\lambda) = - (A_1 + A_2\lambda + \ldots + A_n \lambda^{n-1} + \ldots),$$

d'où, par intégration, en remarquant l'égalité $D(0) = 1$,

$$D(\lambda) = e^{-\left(A_1\lambda + A_2 \frac{\lambda^2}{2} + \ldots + A_n \frac{\lambda^n}{n} + \ldots\right)}.$$

Les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sont les *traces* du système de noyaux $K_{ij}(x, y)$.

6. L'identité (4) permet de démontrer la proposition suivante :

Toute racine $\lambda = c$ *de l'équation* $D(\lambda) = 0$ *est un pôle au moins pour certaines des résolvantes* $\Gamma_{ii}(x, y; \lambda)$.

En effet, si m est l'ordre de multiplicité de cette racine, tous les $D_{ii}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$ ne peuvent être divisibles par $(\lambda - c)^m$, car il en serait de même, d'après (4), de $D'(\lambda)$.

Les formules qui donnent la solution du système proposé n'ont donc plus de sens lorsque λ est racine de l'équation $D(\lambda) = 0$.

7. Les mineurs de $D(\lambda)$. — Si, dans la relation (4), on remplace $D_{pp}\left(\begin{smallmatrix} s \\ s \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$ par son développement en série, puis que l'on dérive, on établit de proche en proche, sans autre difficulté que la longueur des écritures, la formule générale

$$D^{(n)}(\lambda) = \frac{d^n D(\lambda)}{d\lambda^n} = (-1)^n \sum_{p_1, \ldots, p_n} \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{(n)} D_{p_1 \ldots p_n}\left(\begin{matrix} s_1 \ldots s_n \\ s_1 \ldots s_n \end{matrix}\middle|\lambda\right) ds_1 \ldots ds_n,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} & D_{i_1 \ldots i_n}\left(\begin{matrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \end{matrix}\middle|\lambda\right) \\ & = \sum_{p_1, \ldots, p_k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{(k)} \\ & \times \begin{vmatrix} K_{i_1 i_1}(x_1, y_1) & \ldots & K_{i_1 i_n}(x_1, y_n) & K_{i_1 p_1}(x_1, s_1) & \ldots & K_{i_1 p_k}(x_1, s_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{i_n i_1}(x_n, y_1) & \ldots & K_{i_n i_n}(x_n, y_n) & K_{i_n p_1}(x_n, s_1) & \ldots & K_{i_n p_k}(x_n, s_k) \\ K_{p_1 p_1}(s_1, y_1) & \ldots & K_{p_1 i_n}(s_1, y_n) & K_{p_1 p_1}(s_1, s_1) & \ldots & K_{p_1 p_k}(s_1, s_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{p_k i_1}(s_k, y_1) & \ldots & K_{p_k i_n}(s_k, y_n) & K_{p_k p_1}(s_k, s_1) & \ldots & K_{p_k p_k}(s_k, s_k) \end{vmatrix} ds_1 \ldots ds_k. \end{aligned}$$

Le théorème de M. Hadamard prouve la convergence de toutes ces séries pour toutes les valeurs de λ : *ce sont donc des fonctions entières de* λ, si les noyaux sont bornés.

D'une façon générale, posons

$$\mathcal{K}_{\substack{i_1\ldots i_n\\ j_1\ldots j_n}}\begin{pmatrix} x_1\ldots x_n\\ y_1\ldots y_n\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{K}_{i_1j_1}(x_1,\, y_1) & \ldots & \mathrm{K}_{i_1j_n}(x_1,\, y_n)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \mathrm{K}_{i_nj_1}(x_n,\, y_1) & \ldots & \mathrm{K}_{i_nj_n}(x_n,\, y_n)\end{vmatrix},$$

puis

$$\mathrm{D}_{\substack{i_1\ldots i_n\\ j_1\ldots j_n}}\left(\begin{matrix} x_1\ldots x_n\\ y_1\ldots y_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = \sum_{p_1,\ldots,p_k}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k\,!}\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{(k)}\mathcal{K}_{\substack{i_1\ldots i_n p_1\ldots p_k\\ j_1\ldots j_n p_1\ldots p_k}}\begin{pmatrix} x_1\ldots x_n s_1\ldots s_k\\ y_1\ldots y_n s_1\ldots s_k\end{pmatrix} ds_1\ldots ds_k.$$

Nous écrivons, pour plus de simplicité, $\mathrm{D}_{i_1\ldots i_n}$ pour $\mathrm{D}_{\substack{i_1\ldots i_n\\ i_1\ldots i_n}}$.

Si l'on développe alors le déterminant

$$\mathcal{K}_{\substack{i_1\ldots i_n p_1\ldots p_k\\ j_1\ldots j_n p_1\ldots p_k}}\begin{pmatrix} x_1\ldots x_n s_1\ldots s_k\\ y_1\ldots y_n s_1\ldots s_k\end{pmatrix}$$

suivant les éléments de la première ligne, on obtient, au moyen de quelques échanges de lignes dans les mineurs du second membre,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\substack{i_1\ldots i_n p_1\ldots p_k\\ j_1\ldots j_n p_1\ldots p_k}}\begin{pmatrix} x_1\ldots x_n s_1\ldots s_k\\ y_1\ldots y_n s_1\ldots s_k\end{pmatrix} &= \mathrm{K}_{i_1j_1}(x_1,\, y_1)\,\mathcal{K}_{\substack{i_2\ldots i_n p_1\ldots p_k\\ j_2\ldots j_n p_1\ldots p_k}}\begin{pmatrix} x_2\ldots x_n s_1\ldots s_k\\ y_2\ldots y_n s_1\ldots s_k\end{pmatrix}\\
&\quad - \mathrm{K}_{i_1j_2}(x_1,\, y_2)\,\mathcal{K}_{\substack{i_2 i_3\ldots i_n p_1\ldots p_k\\ j_1 j_3\ldots j_n p_1\ldots p_k}}\begin{pmatrix} x_2 x_3\ldots x_n s_1\ldots s_k\\ y_1 y_3\ldots y_n s_1\ldots s_k\end{pmatrix} + \ldots\\
&\quad + (-1)^{n+1}\mathrm{K}_{i_1j_n}(x_1,\, y_n)\,\mathcal{K}_{\substack{i_2\ldots i_n\ \ p_1\ldots p_k\\ j_1\ldots j_{n-1}p_1\ldots p_k}}\begin{pmatrix} x_2\ldots x_n\ \ s_1\ldots s_k\\ y_1\ldots y_{n-1} s_1\ldots s_k\end{pmatrix}\\
&\quad - \mathrm{K}_{i_1p_1}(x_1,\, s_1)\,\mathcal{K}_{\substack{p_1 i_2\ldots i_n p_2\ldots p_k\\ j_1 j_2\ldots j_n p_2\ldots p_k}}\begin{pmatrix} s_1\, x_2\ldots x_n s_2\ldots s_k\\ y_1 y_2\ldots y_n s_2\ldots s_k\end{pmatrix}\\
&\quad - \mathrm{K}_{i_1p_2}(x_1,\, s_2)\,\mathcal{K}_{\substack{p_2 i_2\ldots i_n p_1 p_3\ldots p_k\\ j_1 j_2\ldots j_n p_1 p_3\ldots p_k}}\begin{pmatrix} s_2\, x_2\ldots x_n s_1 s_3\ldots s_k\\ y_1 y_2\ldots y_n s_1 s_3\ldots s_k\end{pmatrix} - \ldots\\
&\quad - \mathrm{K}_{i_1p_k}(x_1,\, s_k)\,\mathcal{K}_{\substack{p_k i_2\ldots i_n p_1\ldots p_{k-1}\\ j_1 j_2\ldots j_n p_1\ldots p_{k-1}}}\begin{pmatrix} s_k\, x_2\ldots x_n s_1\ldots s_{k-1}\\ y_1 y_2\ldots y_n s_1\ldots s_{k-1}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On déduit de là l'égalité

$$\begin{aligned}
(5)\quad \mathrm{D}_{\substack{i_1\ldots i_n\\ j_1\ldots j_n}}\left(\begin{matrix} x_1\ldots x_n\\ y_1\ldots y_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) &= \mathrm{K}_{i_1j_1}(x_1,\, y_1)\,\mathrm{D}_{\substack{i_2\ldots i_n\\ j_2\ldots j_n}}\left(\begin{matrix} x_2\ldots x_n\\ y_2\ldots y_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)\\
&\quad - \mathrm{K}_{i_1j_2}(x_1,\, y_2)\,\mathrm{D}_{\substack{i_2 i_3\ldots i_n\\ j_1 j_3\ldots j_n}}\left(\begin{matrix} x_2 x_3\ldots x_n\\ y_1 y_3\ldots y_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) + \ldots\\
&\quad + (-1)^{n+1}\mathrm{K}_{i_1j_n}(x_1,\, y_n)\,\mathrm{D}_{\substack{i_2\ldots i_n\\ j_1\ldots j_{n-1}}}\left(\begin{matrix} x_2\ldots x_n\\ y_1\ldots y_{n-1}\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)\\
&\quad + \lambda\sum_p\int_a^b \mathrm{K}_{i_1p}(x_1,\, t)\,\mathrm{D}_{\substack{p\, i_2\ldots i_n\\ j_1 j_2\ldots j_n}}\left(\begin{matrix} t\, x_2\ldots x_n\\ y_1 y_2\ldots y_n\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) dt.
\end{aligned}$$

En développant le déterminant de tout à l'heure suivant les éléments de la première colonne, on démontrerait de même la formule

$$(5') \quad D_{\substack{i_1 \dots i_n \\ j_1 \dots j_n}}\left(\begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{matrix} \middle| \lambda\right) = K_{i_1 j_1}(x_1, y_1) D_{\substack{i_2 \dots i_n \\ j_2 \dots j_n}}\left(\begin{matrix} x_2 \dots x_n \\ y_2 \dots y_n \end{matrix} \middle| \lambda\right)$$
$$- K_{i_2 j_1}(x_2, y_1) D_{\substack{i_1 i_3 \dots i_n \\ j_2 j_3 \dots j_n}}\left(\begin{matrix} x_1 x_3 \dots x_n \\ y_2 y_3 \dots y_n \end{matrix} \middle| \lambda\right) + \dots$$
$$+ (-1)^{n+1} K_{i_n j_1}(x_n, y_1) D_{\substack{i_1 \dots i_{n-1} \\ j_2 \dots j_n}}\left(\begin{matrix} x_1 \dots x_{n-1} \\ y_2 \dots y_n \end{matrix} \middle| \lambda\right)$$
$$+ \lambda \sum_p \int_a^b K_{p j_1}(t, y_1) D_{\substack{i_1 i_2 \dots i_n \\ p j_2 \dots j_n}}\left(\begin{matrix} x_1 x_2 \dots x_n \\ t\, y_2 \dots y_n \end{matrix} \middle| \lambda\right) dt.$$

On obtiendrait des relations analogues à celles-là en développant le déterminant suivant une ligne ou une colonne autres que la première.

8. Équations homogènes. — Supposons que toutes les fonctions $f_i(x)$ soient identiquement nulles; le système (1) est alors homogène.

Si λ n'est pas racine de $D(\lambda)$, le système correspondant n'admet pas d'autre solution que $\varphi_i(x) = 0$.

Considérons le système

$$(6) \qquad \varphi_i(x) = c \sum_{p=1}^{r} \int_a^b K_{ip}(x, s)\, \varphi_p(s)\, ds,$$

où c est racine de l'équation $D(\lambda) = 0$. Si m est le degré de multiplicité de cette racine, elle peut annuler identiquement quelques-uns des mineurs

$$D_{i_1}\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \middle| \lambda\right), \quad D_{i_1 i_2}\left(\begin{matrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{matrix} \middle| \lambda\right), \quad \dots, \quad \text{(tous les indices } i \text{ compris entre 1 et } r\text{)},$$

mais elle ne peut annuler identiquement tous les mineurs de ce genre du premier ordre, du second ordre, etc., jusqu'à celui d'ordre m, sans quoi les dérivées de $D(\lambda)$ seraient nulles jusqu'à l'ordre m inclusivement pour $\lambda = c$, ce qui est impossible.

Nous pouvons donc admettre que, pour $\lambda = c$, certains mineurs d'ordre k, k pouvant être égal à *un* et étant égal au plus à m, ne sont pas identiquement nuls, tous les mineurs d'ordre inférieur à k étant identiquement nuls.

k étant ainsi choisi, soit (ξ_i, η_j) un système de $2k$ valeurs numériques telles que le mineur

$$\Delta = D_{i_1 i_2 \ldots i_k}\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_k \\ \eta_1 \ldots \eta_k \end{pmatrix} \Big| c \Big) \qquad (1 \leqq i_1, i_2, \ldots, i_k \leqq r)$$

ne soit pas nul. L'équation fonctionnelle (5) donne alors

$$D_{i_1 i_2 \ldots i_k}\left(\begin{matrix} x\,\xi_2 \ldots \xi_k \\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k \end{matrix} \Big| c\right) = c \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, t)\, D_{\substack{p\, i_2 \ldots i_k \\ i_1 i_2 \ldots i_k}}\left(\begin{matrix} t\,\xi_2 \ldots \xi_k \\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k \end{matrix} \Big| c\right) dt.$$

On voit donc que

$$\varphi_i(x) = D_{\substack{i\, i_2 \ldots i_k \\ i_1 i_2 \ldots i_k}}\left(\begin{matrix} x\,\xi_2 \ldots \xi_k \\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k \end{matrix} \Big| c\right)$$

constitue une solution non nulle du système homogène.

Les équations fonctionnelles analogues à (5) fourniraient, de même, chacune une solution non nulle du système (1).

On obtient ainsi k solutions, dont nous désignerons par $\Phi_i^1(x), \ldots, \Phi_i^k(x)$ les quotients par Δ. Les Φ sont encore des solutions et l'on démontre, comme dans le cas d'une équation, qu'elles sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'elles ne vérifient pas identiquement de relations de la forme

$$a_1 \Phi_i^1(x) + \ldots + a_k \Phi_i^k(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

les a étant des coefficients constants.

9. Remarque. — Faisons une remarque qui nous servira dans la suite. Reprenons le système (1). Il donne

$$\varphi_p(s) = \lambda \sum_{p'} \int_a^b K_{pp'}(s, t)\, \varphi_{p'}(t)\, dt + f_p(s),$$

puis, les $H_i(x, s)$ étant des fonctions intégrables,

$$\lambda \sum_p \int_a^b H_p(x, s)\, \varphi_p(s)\, ds$$
$$= \lambda^2 \sum_p \sum_{p'} \int_a^b \int_a^b H_p(x, s)\, K_{pp'}(s, t)\, \varphi_{p'}(t)\, ds\, dt + \lambda \sum_p \int_a^b H_p(x, s) f_p(s)\, ds.$$

On en déduit

$$\varphi_i(x) = \lambda \sum_p \int_a^b \Big[K_{ip}(x, s)\,\varphi_p(s) - H_p(x, s)\,\varphi_p(s) + \lambda \sum_{p'} \int_a^b H_p(x, t)\, K_{pp'}(t, s)\,\varphi_{p'}(s)\, dt \Big] ds + \Big[f_i(x) + \lambda \sum_p \int_a^b H_p(x, s)\, f_p(s)\, ds \Big].$$

Les fonctions φ vérifient donc une infinité de systèmes d'équations intégrales.

Si nous nous bornons au cas des équations homogènes et supposons $\lambda = c$, nous obtenons le système

$$\varphi_i(x) = c \sum_p \int_a^b F_{ip}(x, s)\,\varphi_p(s)\, ds,$$

avec

$$F_{ip}(x, s) = K_{ip}(x, s) - H_p(x, s) + c \sum_{p'} \int_a^b H_{p'}(x, t)\, K_{p'p}(t, s)\, dt.$$

10. Fonctions fondamentales. — Nous avons obtenu pour le système (6) des solutions de la forme

$$\varphi_i(x) = D_{\substack{i\, i_2 \ldots i_k \\ i_1 i_2 \ldots i_k}} \left(\begin{matrix} x\, \xi_2 \ldots \xi_k \\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k \end{matrix} \middle| c \right),$$

sous la condition $\Delta \neq 0$.

Plus généralement, soit

$$\delta = D_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_k \\ j_1 j_2 \ldots j_k}} \left(\begin{matrix} \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k \end{matrix} \middle| c \right) \neq 0,$$

k étant la plus petite valeur telle que, δ étant différent de zéro, tous les mineurs d'ordre inférieur à k soient identiquement nuls; cette nouvelle valeur de k peut *a priori* être inférieure à la précédente. Un raisonnement analogue au précédent fournit pour le système (6) k solutions indépendantes, dont la première est

$$\Phi_i^1(x) = \frac{1}{\delta} D_{\substack{i\, i_2 \ldots i_k \\ j_1 j_2 \ldots j_k}} \left(\begin{matrix} x\, \xi_2 \ldots \xi_k \\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k \end{matrix} \middle| c \right).$$

Considérons alors le nombre k le plus petit possible, tel que, pour un système de nombres convenablement choisi ξ, η, le mineur

$$\delta = D_{\substack{i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k}}\left(\begin{matrix}\xi_1 \dots \xi_k \\ \eta_1 \dots \eta_k\end{matrix}\middle| c\right)$$

soit différent de zéro, tout mineur d'ordre inférieur à k étant identiquement nul. Si nous prenons

$$H_p(x, s) = \frac{1}{\delta} D_{\substack{i\, i_1 \dots i_k \\ p\, j_1 \dots j_k}}\left(\begin{matrix}x\, \xi_1 \dots \xi_k \\ s\, \eta_1 \dots \eta_k\end{matrix}\middle| c\right),$$

l'équation (5′) donne

$$\begin{aligned}
F_{ip}(x, s) = {} & K_{ip}(x, s) + c\sum_{p'} \int_a^b H_{p'}(x, t)\, K_{p'p}(t, s)\, dt \\
& - \frac{1}{\delta}\Bigg\{K_{ip}(x, s)\,\delta - K_{i_1 p}(\xi_1, s)\, D_{\substack{i\, i_2 \dots i_k \\ j_1 j_2 \dots j_k}}\left(\begin{matrix}x\ \xi_2 \dots \xi_k \\ \eta_1 \eta_2 \dots \eta_k\end{matrix}\middle| c\right) \\
& \qquad + \dots + (-1)^k K_{i_k p}(\xi_k, s)\, D_{\substack{i\, i_1 \dots i_{k-1} \\ j_1 j_2 \dots j_k}}\left(\begin{matrix}x\ \xi_1 \dots \eta_{k-1} \\ \eta_1 \eta_2 \dots \eta_k\end{matrix}\middle| c\right) \\
& \qquad + c\sum_{p'} \int_a^b K_{p'p}(t, s)\, D_{\substack{i\, i_1 \dots i_k \\ p'\, j_1 \dots j_k}}\left(\begin{matrix}x \xi_1 \dots \xi_k \\ t\, \eta_1 \dots \eta_k\end{matrix}\middle| c\right) dt\Bigg\} \\
= {} & K_{i_1 p}(\xi_1, s)\, \Phi_i^1(x) + \dots + K_{i_k p}(\xi_k, s)\, \Phi_i^k(x).
\end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned}
\varphi_i(x) & = c\sum_p \int_a^b \left[\sum_{q=1}^{k} \Phi_i^q(x)\, K_{i_q p}(\xi_q, s)\right] \varphi_p(s)\, ds \\
& = c\sum_q \Phi_i^q(x) \sum_p \int_a^b K_{i_q p}(\xi_q, s)\, \varphi_p(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Les $\varphi_i(x)$ sont donc des combinaisons linéaires des $\Phi_i^q(x)$, et ce sont les mêmes pour tous les indices i.

Cette conclusion entraîne que le nombre k obtenu en second lieu, qui, *a priori*, semblait pouvoir être inférieur au premier nombre envisagé, est en réalité le même.

Le système des fonctions $\Phi_i^q(x)$ forme un système de *fonctions fondamentales*.

On démontrerait de la même façon que le système associé

$$\psi_i(x) = c \sum_p \int_a^b \mathrm{K}_{pi}(s, x)\, \psi_p(s)\, ds \tag{7}$$

admet également k solutions linéairement distinctes.

11. Système non homogène : cas exceptionnel. — On démontre, par extension de la méthode relative à une seule équation, que, *pour que le système*

$$\varphi_i(x) = c \sum_p \int_a^b \mathrm{K}_{ip}(x, s)\, \varphi_p(s)\, ds + f_i(x)$$

admette des solutions, il faut et il suffit que les fonctions $f_i(x)$ vérifient les k relations

$$\sum_i \int_a^b f_i(x)\, \Psi_i^q(x)\, dx = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, k),$$

les $\Psi_i^q(x)$ constituant un système de fonctions fondamentales du système (7), *et la solution dépend alors de k constantes arbitraires.*

12. Tout système de fonctions $\varphi_i(x)$, non toutes identiquement nulles, satisfaisant au système (6), est un système de fonctions fondamentales pour les noyaux $\mathrm{K}_{ij}(x, y)$.

Pour que ce système (6) *admette une solution non nulle, il faut que c soit un pôle pour certaines au moins des résolvantes $\Gamma_{ii}(x, y; \lambda)$.*

Réciproquement, *à tout pôle des résolvantes correspond au moins un système de fonctions fondamentales.*

Nous allons donner une démonstration générale de cette proposition que nous avons déjà établie au paragraphe **8** pour des noyaux bornés.

Soit k l'ordre maximum du pôle considéré pour l'ensemble des fonctions $\Gamma_{ij}(x, y; \lambda)$ correspondant à la racine c de $\mathrm{D}(\lambda)$.

On pourra écrire des développements de la forme

$$\Gamma_{ij}(x, y; \lambda) = \frac{\mathrm{A}_{ij}}{(\lambda - c)^k} + \frac{\mathrm{B}_{ij}}{(\lambda - c)^{k-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{L}_{ij}}{\lambda - c} + \mathrm{M}_{ij} + \mathrm{N}_{ij}(\lambda - c) + \ldots,$$

les coefficients A, B, ..., L, M, N, ... étant des fonctions de x, y, et certains A pouvant être nuls, mais l'un au moins étant différent de zéro. Si l'on porte ces développements dans (3), après avoir posé $\lambda - c = h$, et que l'on identifie les termes en h^{-k}, on obtient le système

$$A_{ij}(x, y) = c \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, t) A_{pj}(t, y)\, dt.$$

On voit donc que, j restant fixe et i prenant les valeurs 1, 2, ..., r, les $A_{ij}(x, y)$ représentent, pour une valeur quelconque donnée y_1 de y, un système de fonctions fondamentales. Cette conclusion établit l'existence de la réciproque énoncée.

c étant toujours une valeur singulière pour le système de noyaux $K_{ij}(x, y)$ et $\varphi_i(x)$ un système de fonctions fondamentales correspondant, on a

$$\varphi_p(s) = c \sum_{p'} \int_a^b K_{pp'}(s, t)\, \varphi_{p'}(t)\, dt,$$

d'où

$$c \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s)\, \varphi_p(s)\, ds = c^2 \sum_p \sum_{p'} \int_a^b \int_a^b K_{ip}(x, s)\, K_{pp'}(s, t)\, \varphi_{p'}(t)\, ds\, dt$$

ou

$$\varphi_i(x) = c^2 \sum_p \int_a^b K_{ip}^{(2)}(x, t)\, \varphi_p(t)\, dt.$$

On aura, de même,

$$\varphi_i(x) = c^k \sum_p \int_a^b K_{ip}^{(k)}(x, t)\, \varphi_p(t)\, dt.$$

Donc *tout système de fonctions fondamentales pour des noyaux* $K_{ij}(x, y)$ *correspondant à un pôle c des résolvantes est aussi un système de fonctions fondamentales pour les noyaux* $K_{ij}^{(k)}(x, y)$ *le pôle correspondant étant* c^k.

On déduit de là que, si les noyaux $K_{ij}(x, y)$ ne sont pas bornés, mais qu'au bout d'un nombre *fini* d'itérations on puisse obtenir des noyaux bornés, il n'y a qu'un nombre fini de fonctions fondamentales correspondant au pôle c relatif aux noyaux donnés.

13. Noyaux orthogonaux. — Nous dirons que deux systèmes de noyaux, $K_{ij}(x, y)$ et $K'_{ij}(x, y)$, sont *orthogonaux* si les relations

$$(8) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_p \int_a^b K_{ip}(x, t)\, K'_{pj}(t, y)\, dt = 0, \\ \displaystyle\sum_p \int_a^b K'_{ip}(x, t)\, K_{pj}(t, y)\, dt = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, r) \end{cases}$$

sont toutes vérifiées, quels que soient x et y; ils sont *semi-orthogonaux* si l'un de ces groupes de relations est seul vérifié.

On démontre facilement de proche en proche que, si deux systèmes de noyaux sont orthogonaux, deux systèmes de noyaux itérés $K^{(k)}_{ij}(x, y)$ et $K'^{(k')}_{ij}(x, y)$ sont aussi orthogonaux.

Si l'on pose

$$(9) \qquad S_{ij}(x, y) = K_{ij}(x, y) + K'_{ij}(x, y),$$

on a également (démonstration par récurrence)

$$S^{(k)}_{ij}(x, y) = K^{(k)}_{ij}(x, y) + K'^{(k)}_{ij}(x, y).$$

On déduit de là que *les résolvantes relatives aux noyaux* S_{ij} *sont la somme des résolvantes correspondantes relatives aux noyaux* K_{ij} *et* K'_{ij}.

Ce théorème s'étend au cas où l'on aurait plusieurs groupes de systèmes de noyaux K_{ij}, K'_{ij}, K''_{ij}, ..., orthogonaux deux à deux : *les résolvantes relatives à leur somme sont la somme des résolvantes relatives à chacun.*

Si les noyaux vérifient seulement le premier groupe des égalités (8), nous dirons que les noyaux $K_{ij}(x, y)$ sont *orthogonaux à droite* aux noyaux $K'_{ij}(x, y)$, tandis que les K' sont *orthogonaux à gauche* aux K. Les noyaux itérés K^q_{ij} et $K'^{q'}_{ij}$ sont alors dans la même relation.

Considérons deux systèmes de noyaux orthogonaux ou seulement semi-orthogonaux $K_{ij}(x, y)$, $K'_{ij}(x, y)$, et soient $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$ leurs fonctions déterminantes de Fredholm. S_{ij} étant défini par (9), supposons vérifié le second groupe de relations d'orthogonalité. On a alors

$$S^{(2)}_{ij}(x, y) = K^{(2)}_{ij}(x, y) + K'^{(2)}_{ij}(x, y) + \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s)\, K'_{pj}(s, y)\, ds,$$

et l'on démontre de proche en proche la formule générale

$$S_{ij}^{(k)}(x, y) = K_{ij}^{(k)}(x, y) + K'^{(k)}_{ij}(x, y) + \sum_{q,q'} C_{q,q'} \sum_p \int_a^b K_{ip}^{(q)}(x, s) K'^{(q')}_{pj}(s, y)\, ds,$$

les C étant des nombres entiers.

On déduit de là que la trace A_n du système de noyaux $S_{ij}(x, y)$ est

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_p \int_a^b S_{pp}^{(n)}(s, s)\, ds \\ &= \sum_p \int_a^b K_{pp}^{(n)}(s, s)\, ds + \sum_p \int_a^b K'^{(n)}_{pp}(s, s)\, ds \\ &+ \sum_p \sum_{q,q'} C_{q,q'} \sum_{p'} \int_a^b \int_a^b K_{pp'}^{(q)}(s, t) K'_{p'p}(t, s)\, ds\, dt, \end{aligned}$$

et le dernier terme est nul, comme on le voit en intégrant d'abord par rapport à t.

La $n^{\text{ième}}$ trace du système de noyaux S_{ij} est donc égale à la somme des $n^{\text{ièmes}}$ traces des systèmes de noyaux K_{ij} et K'_{ij}.

On a donc, comme dans le cas d'une seule équation, si $\mathcal{D}(\lambda)$ est la fonction déterminante des S_{ij},

$$\frac{\mathcal{D}'(\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} = \frac{D'_1(\lambda)}{D_1(\lambda)} + \frac{D'_2(\lambda)}{D_2(\lambda)},$$

d'où

$$\mathcal{D}(\lambda) = D_1(\lambda) D_2(\lambda).$$

14. Nous dirons qu'un système de fonctions $\varphi_i(x)$ est orthogonal à droite aux noyaux $K_{ij}(x, y)$ si l'on a, quel que soit x,

$$\sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s) \varphi_p(s)\, ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Si deux systèmes de noyaux K_{ij}, K'_{ij}, sont orthogonaux, tout système de fonctions

$$K_i(\varphi) = \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, t) \varphi_p(t)\, dt$$

est, comme on le voit immédiatement, orthogonal à droite au système de noyaux K'_{ij}.

Il en résulte, en particulier, que *si deux systèmes de noyaux* K_{ij}, K'_{ij} *sont orthogonaux, tout système de fonctions fondamentales pour l'un des systèmes de noyaux est orthogonal à l'autre système de noyaux.*

En effet, les $\varphi_i(x)$ étant une solution fondamentale pour les noyaux K_{ij}, on a

$$\varphi_i(x) = c K_i(\varphi);$$

ces fonctions sont donc orthogonales à droite aux noyaux K'_{ij}.

Cela posé, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Si les systèmes de noyaux $K_{ij}(x, y)$, $K'_{ij}(x, y)$, $\ldots$, $K^q_{ij}(x, y)$ *sont orthogonaux deux à deux, toute valeur singulière pour l'un des groupes est une valeur singulière pour les noyaux* $S_{ij}(x, y)$ *définis par les relations*

$$S_{ij}(x, y) = K_{ij}(x, y) + K'_{ij}(x, y) + \ldots + K^q_{ij}(x, y).$$

Réciproquement, *toute valeur singulière pour les* S_{ij} *est singulière pour l'un au moins des groupes de noyaux* K, K', $\ldots$, K^q.

La démonstration se fait comme pour une seule équation ([3]).

Plus généralement, *si l'on considère des systèmes de noyaux orthogonaux deux à deux, tout système de fonctions fondamentales pour les noyaux résultants est un système fondamental pour un des systèmes de noyaux composants ou s'obtient en ajoutant les fonctions fondamentales des noyaux composants qui correspondent à un pôle commun de leurs résolvantes.*

15. Noyaux principaux. — Pour définir les noyaux principaux, partons de l'équation fonctionnelle, que l'on peut établir comme dans le cas d'une seule équation,

$$\Gamma_{ij}(x, y; \lambda) - \Gamma_{ij}(x, y; \mu) = (\lambda - \mu) \sum_p \int_a^b \Gamma_{ip}(x, t; \lambda) \Gamma_{pj}(t, y; \mu)\, dt.$$

Si l'on a

$$\Gamma_{ij}(x, y; \lambda) = \frac{B^{ij}_k(x, y)}{(\lambda - c)^k} + \ldots + \frac{B^{ij}_1(x, y)}{\lambda - c} + A^{ij}_0(x, y) + A^{ij}_1(x, y)(\lambda - c) + \ldots,$$

([3]) *Voir* Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, 2e éd., p. 401.

et que l'on pose

$$\lambda - c = h, \qquad \mu - c = h',$$

on peut l'écrire, après division par $h - h'$,

$$-\sum_{\rho=0}^{k-1} \frac{B_{k-\rho}^{ij}(x, y)}{hh'}\left(\frac{1}{h^{k-\rho-1}} + \frac{1}{h^{k-\rho-2}h'} + \ldots + \frac{1}{h'^{k-\rho-1}}\right)$$
$$+\sum_{\rho'=1}^{\infty} A_{\rho'}^{ij}(x, y)\,(h^{\rho'-1} + h^{\rho'-2}h' + \ldots + h'^{\rho'-1})$$
$$=\sum_p \int_a^b \left[\sum_{\rho=0}^{k-1} \frac{B_{k-\rho}^{ip}(x, t)}{h^{k-\rho}} + \sum_{\rho'=0}^{\infty} A_{\rho'}^{ip}(x, t)\, h^{\rho'}\right]\left[\sum_{\rho=0}^{k-1} \frac{B_k^{pj}(t, y)}{h'^{k-\rho}} + \sum_{\rho'=0}^{\infty} A_{\rho'}^{pj}(t, y)\, h'^{\rho'}\right] dt.$$

L'identification donne immédiatemant

$$\sum_p \int_a^b B_{k-\rho}^{ip}(x, t)\, A_{\rho'}^{pj}(t, y)\, dt = 0, \qquad \sum_p \int_a^b B_{k-\rho}^{pj}(t, y)\, A_{\rho'}^{ip}(x, t)\, dt = 0$$
$$(\rho = 0, 1, 2, \ldots, k-1;\ \rho' = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

Si l'on désigne par $\gamma_{ij}(x, y; \lambda)$ la partie principale du noyau $\Gamma_{ij}(x, y; \lambda)$ et par $H_{ij}(x, y; \lambda)$ sa partie régulière, on en déduit les égalités

$$\sum_p \int_a^b \gamma_{ip}(x, t; \lambda)\, H_{pj}(t, y; \mu)\, dt = 0, \qquad \sum_p \int_a^b H_{ip}(x, t; \mu)\, \gamma_{pj}(t, y; \lambda)\, dt = 0$$

pour toutes les combinaisons possibles de i, j et pour toutes les valeurs de λ, μ.

Posons

$$k_{ij}(x, y) = \gamma_{ij}(x, y; 0), \qquad H_{ij}(x, y) = K_{ij}(x, y) - k_{ij}(x, y).$$

Les noyaux $K_{ij}(x, y)$ sont ainsi décomposés en deux systèmes de noyaux orthogonaux $k_{ij}(x, y)$ et $H_{ij}(x, y)$.

L'identification précédente conduit également aux relations

$$\gamma_{ij}(x, y; \lambda) - \gamma_{ij}(x, y; \mu) = (\lambda - \mu)\sum_p \int_a^b \gamma_{ip}(x, t; \lambda)\, \gamma_{pj}(t, y; \mu)\, dt,$$

$$H_{ij}(x, y; \lambda) - H_{ij}(x, y; \mu) = (\lambda - \mu)\sum_p \int_a^b H_{ip}(x, t; \lambda)\, H_{pj}(t, y; \mu)\, dt$$

qui montrent que les résolvantes relatives aux noyaux $k_{ij}(x, y)$ sont les $\gamma_{ij}(x, y; \lambda)$, tandis que les résolvantes relatives aux $H_{ij}(x, y)$ sont les $H_{ij}(x, y; \lambda)$.

On appelle *noyaux principaux* les noyaux $k_{ij}(x, y)$.

16. Noyaux symétriques. — Nous supposerons dans la suite que les noyaux offrent la symétrie que nous avons définie dans le paragraphe **3**

$$K_{ij}(x, y) = K_{ji}(y, x).$$

Si l'on part du système

$$u_i(x, \lambda) = u_i(x) + \lambda \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s)\, u_p(s, \lambda)\, ds,$$

où l'on met en évidence la dépendance des u par rapport à λ, on a la solution

$$\begin{aligned} u_i(x, \lambda) &= u_i(x) + \lambda \sum_p \int_a^b \Gamma_{ip}(x, s; \lambda)\, u_p(s)\, ds \\ &= u_i(x) + \sum_k \lambda^k \sum_p \int_a^b K_{ip}^{(k)}(x, s)\, u_p(s)\, ds. \end{aligned}$$

Si les séries qui donnent $u_i(x, \lambda)$ sont des séries entières, il en sera de même de la série

$$\int_a^b \sum_i u_i(x, \lambda)\, u_i(x)\, dx = \sum_k A_k \lambda^k,$$

où

$$A_k = \sum_p \sum_i \int_a^b \int_a^b K_{ip}^{(k)}(x, s)\, u_p(s)\, u_i(x)\, dx\, ds.$$

On a, d'après cette formule,

$$A_{2k} = \sum_i \sum_p \sum_{p'} \int_a^b \int_a^b \int_a^b K_{ip'}^{(k)}(x, t)\, K_{p'p}^{(k)}(t, s)\, u_p(s)\, u_i(x)\, dx\, ds\, dt.$$

D'après l'hypothèse de la symétrie des noyaux, on a, b étant supposé supérieur à a,

$$\begin{aligned}
A_{2k} &= \sum_{p'} \int_a^b dt \int_a^b \sum_i K_{ip'}^{(k)}(x, t)\, u_i(x)\, dx \int_a^b \sum_p K_{p'p}^{(k)}(t, s)\, u_p(s)\, ds \\
&= \sum_{p'} \int_a^b dt \sum_i \int_a^b K_{ip'}^{(k)}(x, t)\, u_i(x)\, dx \sum_p \int_a^b K_{pp'}^{(k)}(s, t)\, u_p(s)\, ds \\
&= \sum_{p'} \int_a^b \left[\sum_i \int_a^b K_{ip'}^{(k)}(x, t)\, u_i(x)\, dx \right]^2 dt \geqq 0.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
A_{2k} &= \sum_i \sum_p \sum_{p'} \int_a^b \int_a^b \int_a^b K_{ip'}^{(k+1)}(x, t)\, K_{p'p}^{(k-1)}(t, s)\, u_p(s)\, u_i(x)\, dx\, ds\, dt \\
&= \sum_{p'} \int_a^b \left[\sum_i \int_a^b K_{ip'}^{(k+1)}(x, t)\, u_i(x)\, dx \right] \left[\sum_p \int_a^b K_{pp'}^{(k-1)}(s, t)\, u_p(s)\, ds \right] dt.
\end{aligned}$$

Posons

$$\sum_i \int_a^b K_{ip}^{(k+1)}(x, t)\, u_i(x)\, dx = f_p(t), \qquad \sum_{p'} \int_a^b K_{p'p}^{(k-1)}(s, t)\, u_{p'}(s)\, ds = \varphi_p(t).$$

On a alors

$$A_{2k} = \sum_p \int_a^b f_p(t)\, \varphi_p(t)\, dt, \qquad A_{2k+2} = \sum_p \int_a^b f_p^2(t)\, dt, \qquad A_{2k-2} = \sum_p \int_a^b \varphi_p^2(t)\, dt.$$

Nous allons démontrer l'inégalité

$$A_{2k}^2 \leqq A_{2k+2} A_{2k-2}, \tag{10}$$

c'est-à-dire

$$\left[\sum_p \int_a^b f_p(t)\, \varphi_p(t)\, dt \right]^2 \leqq \sum_p \int_a^b f_p^2(t)\, dt \sum_p \int_a^b \varphi_p^2(t)\, dt,$$

ou encore

$$\sum_p \left[\int_a^b f_p(t)\,\varphi_p(t)\,dt\right]^2 + 2\sum_{i,j(i\neq j)} \left[\int_a^b f_i(t)\,\varphi_i(t)\,dt \int_a^b f_j(t)\,\varphi_j(t)\,dt\right]$$
$$\leqq \sum_p \left[\int_a^b f_p^2(t)\,dt \int_a^b \varphi_p^2(t)\,dt\right] + \sum_{i,j(i\neq j)} \left[\int_a^b f_i^2(t)\,dt \int_a^b \varphi_j^2(t)\,dt\right].$$

Or on a (inégalité de Schwartz)

$$\left[\int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt\right]^2 \leqq \int_a^b f^2(t)\,dt \int_a^b \varphi^2(t)\,dt.$$

Pour démontrer cette inégalité, écrivons-la

$$2\int_a^b f(s)\,\varphi(s)\,ds \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt$$
$$\leqq \int_a^b f^2(s)\,ds \int_a^b \varphi^2(t)\,dt + \int_a^b f^2(t)\,dt \int_a^b \varphi^2(s)\,ds$$

ou

$$\int_a^b \int_a^b [f(s)\,\varphi(t) - f(t)\,\varphi(s)]^2\,ds\,dt \geqq 0\,;$$

sous cette forme, elle est évidente.

On a donc

$$\sum_p \left[\int_a^b f_p(t)\,\varphi_p(t)\,dt\right]^2 \leqq \sum_p \left[\int_a^b f_p^2(t)\,dt \int_a^b \varphi_p^2(t)\,dt\right].$$

D'autre part, on a

$$\sum_{i,j(i\neq j)} \left[\int_a^b f_i(t)\,\varphi_i(t)\,dt \int_a^b f_j(t)\,\varphi_j(t)\,dt\right] \leqq \sum_{i,j(i\neq j)} \left[\int_a^b f_i^2(t)\,dt \int_a^b \varphi_j^2(t)\,dt\right].$$

Démontrons cette inégalité pour les termes correspondant, par exemple, à $i=1, j=2$ et à $i=2, j=1$, ce qui, par addition de telles inégalités, entraînera l'inégalité totale. Nous voulons donc démontrer

$$2\int_a^b f_1(t)\,\varphi_1(t)\,dt \int_a^b f_2(t)\,\varphi_2(t)\,dt$$
$$\leqq \int_a^b f_1^2(t)\,dt \int_a^b \varphi_2^2(t)\,dt + \int_a^b f_2^2(t)\,dt \int_a^b \varphi_1^2(t)\,dt$$

ou

$$2\int_a^b\int_a^b f_1(s)\,\varphi_1(s)\,f_2(t)\,\varphi_2(t)\,ds\,dt \leqq \int_a^b\int_a^b [f_1^2(s)\,\varphi_2^2(t)+f_2^2(t)\,\varphi_1^2(s)]\,ds\,dt$$

ou enfin

$$\int_a^b\int_a^b [f_1(s)\,\varphi_2(t)-f_2(t)\,\varphi_1(s)]^2\,ds\,dt \geqq 0,$$

inégalité évidente sous cette forme.

L'inégalité (10) est donc vérifiée. On en déduit que la série $\Sigma A_k \lambda^k$ ne peut être convergente pour toute valeur de λ si A_4 n'est pas nul ([1]).

Or

$$A_4 = \sum_i \int_a^b \left[\sum_p \int_a^b K_{pi}^{(2)}(x,\,t)\,u_p(x)\,dx\right]^2 dt.$$

Pour que A_4 soit nul, il faut et il suffit donc que l'on ait, pour tout indice i,

$$\sum_p \int_a^b K_{pi}^{(2)}(x,\,t)\,u_p(x)\,dx = 0$$

ou, ce qui revient au même en vertu de la symétrie des noyaux,

$$\sum_p \int_a^b K_{ip}^{(2)}(x,\,s)\,u_p(s)\,ds = 0.$$

En d'autres termes, les fonctions $u_i(x)$ sont orthogonales à droite aux noyaux $K_{ij}^{(2)}(x,y)$.

Les égalités précédentes, écrites sous la forme

$$\sum_p\sum_{p'}\int_a^b\int_a^b K_{ip'}(x,\,t)\,K_{p'p}(t,\,s)\,u_p(s)\,ds\,dt = 0,$$

entraînent

$$\sum_i\sum_p\sum_{p'}\int_a^b\int_a^b\int_a^b K_{ip'}(x,\,t)\,K_{pp'}(s,\,t)\,u_p(s)\,u_i(x)\,dx\,ds\,dt = 0$$

([1]) Goursat, *loc. cit.*, p. 440.

ou

$$\sum_{p'} \int_a^b \left[\sum_p \int_a^b \mathrm{K}_{pp'}(x,\, t)\, u_p(x)\, dx \right]^2 dt = 0,$$

ce qui prouve que les fonctions $u_i(x)$ doivent être orthogonales aux noyaux $\mathrm{K}_{ij}(x, y)$.

En résumé, si les fonctions $u_i(x)$ ne sont pas orthogonales aux noyaux $\mathrm{K}(x, y)$, les séries qui fournissent les $u_i(x, \lambda)$ ne peuvent être convergentes pour toute valeur de λ. *Tout système de noyaux symétriques possède donc au moins une valeur singulière.*

17. Considérons le système homogène

$$\varphi_i(x) = c_1 \sum_p \int_a^b \mathrm{K}_{ip}(x,\, s)\, \varphi_p(s)\, ds$$

et le système associé

$$\psi_i(x) = c_2 \sum_p \int_a^b \mathrm{K}_{pi}(s,\, x)\, \psi_p(s)\, ds,$$

c_1 et c_2 étant deux valeurs singulières différentes.

On aura

$$\begin{aligned}\sum_i \int_a^b \varphi_i(x)\, \psi_i(x)\, dx &= c_1 \sum_i \sum_p \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}_{ip}(x,\, s)\, \varphi_p(s)\, \psi_i(x)\, dx\, ds \\ &= c_2 \sum_i \sum_p \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}_{ip}(x,\, s)\, \varphi_p(s)\, \psi_i(x)\, dx\, ds.\end{aligned}$$

c_1 étant différent de c_2, on en déduit que l'on a

$$\sum_i \int_a^b \varphi_i(x)\, \psi_i(x)\, dx = 0.$$

Nous dirons que cette égalité définit l'orthogonalité des deux groupes de fonctions $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$.

Le résultat précédent peut alors s'énoncer sous la forme suivante :

Toute solution fondamentale $\varphi_i(x)$ correspondant à une valeur singulière c_1 est orthogonale à toute solution fondamentale $\psi_i(x)$ du système *associé correspondant à une autre valeur singulière c_2 différente de la première.*

Cette propriété, comme on le voit, n'exige d'ailleurs pas la symétrie des noyaux.

Si les noyaux sont symétriques, les deux systèmes associés homogènes coïncident et les φ_i et ψ_i sont des solutions fondamentales correspondant aux deux valeurs singulières c_1 et c_2 d'un même système.

18. Considérons alors le cas de noyaux symétriques *réels*. Soit $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ une valeur singulière pour ces noyaux; $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ en sera alors une autre et l'on aura, correspondant à ces deux valeurs singulières, deux systèmes fondamentaux $u_i+v_i\sqrt{-1}$ et $u_i-v_i\sqrt{-1}$. La propriété démontrée dans le paragraphe précédent donnera l'égalité

$$\sum_i \int_a^b (u_i+v_i\sqrt{-1})(u_i-v_i\sqrt{-1})\,dx = \sum_i \int_a^b (u_i^2+v_i^2)\,dx = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$u_i = v_i = 0.$$

On en déduit que *toutes les valeurs singulières des noyaux symétriques réels sont réelles.*

19. Soit maintenant une solution fondamentale $\varphi_i(x)$ correspondant à une valeur singulière c. Nous supposerons, ce qui est possible, que l'on a

$$\sum_p \int_a^b \varphi_p^2(x)\,dx = 1.$$

Les fonctions $\varphi_i(x)$ sont alors dites *normales*.

Nous allons montrer que les deux systèmes de noyaux

$$\frac{\varphi_i(x)\,\varphi_j(y)}{c} = \mathcal{K}_{ij}(x, y) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{K}_{ij}(x, y) - \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_j(y)}{c} = \mathrm{K}'_{ij}(x, y)$$

sont orthogonaux.

On a, en effet, indépendamment de la symétrie des noyaux,

$$\sum_p \int_a^b \mathrm{K}'_{ip}(x, s)\,\mathcal{K}_{pj}(s, y)\,ds = \frac{\varphi_j(y)}{c}\sum_p \int_a^b \varphi_p(s)\left[\mathrm{K}_{ip}(x, s) - \frac{\varphi_i(x)}{c}\varphi_p(s)\right]ds$$
$$= \frac{\varphi_j(y)}{c}\left[\frac{\varphi_i(x)}{c} - \frac{\varphi_i(x)}{c}\sum_p \int_a^b \varphi_p^2(s)\,ds\right] = 0$$

et, en vertu de la symétrie des noyaux,

$$\sum_p \int_a^b \mathcal{K}_{ip}(x, s)\,\mathrm{K}'_{pj}(s, y)\,ds = \frac{\varphi_i(x)}{c}\sum_p \int_a^b \varphi_p(s)\left[\mathrm{K}_{pj}(s, y) - \frac{\varphi_p(s)\,\varphi_j(y)}{c}\right]ds$$
$$= \frac{\varphi_i(x)}{c}\sum_p \int_a^b \varphi_p(s)\left[\mathrm{K}_{jp}(y, s) - \frac{\varphi_j(y)}{c}\varphi_p(s)\right]ds$$
$$= \frac{\varphi_i(x)}{c}\left[\frac{\varphi_j(y)}{c} - \frac{\varphi_j(y)}{c}\sum_p \int_a^b \varphi_p^2(s)\,ds\right] = 0.$$

De plus, les $\mathrm{K}'_{ij}(x, y)$ offrent la même symétrie que les $\mathrm{K}_{ij}(x, y)$.

Si c est encore une valeur singulière pour le système de noyaux $\mathrm{K}'_{ij}(x, y)$, nous pourrons recommencer la même opération sur ces noyaux.

Soit alors $\varphi'_i(x)$ une solution fondamentale pour ce système de noyaux, c'est-à-dire supposons que l'on ait

$$\varphi'_i(x) = c\sum_p \int_a^b \mathrm{K}'_{ip}(x, s)\,\varphi'_p(s)\,ds.$$

Nous allons démontrer que $\varphi'_i(x)$ est aussi solution fondamentale pour le système proposé, c'est-à-dire que l'on a

$$\varphi'_i(x) = c\sum_p \int_a^b \mathrm{K}_{ip}(x, s)\,\varphi'_p(s)\,ds.$$

En d'autres termes, nous voulons démontrer l'égalité

$$\sum_p \int_a^b [\mathrm{K}_{ip}(x, s) - \mathrm{K}'_{ip}(x, s)]\,\varphi'_p(s)\,ds = 0$$

ou

$$\sum_p \int_a^b \varphi_p(s)\,\varphi'_p(s)\,ds = 0$$

ou encore

$$\sum_{p'} \int_a^b \varphi'_{p'}(t)\,dt \sum_p \int_a^b \mathrm{K}'_{pp'}(s, t)\,\varphi_p(s)\,ds = 0.$$

Or, en vertu de la symétrie des noyaux, on a

$$\begin{aligned} c\sum_p \int_a^b \mathrm{K}'_{pp'}(s, t)\,\varphi_p(s)\,ds &= \sum_p \int_a^b [c\mathrm{K}_{pp'}(s, t) - \varphi_p(s)\,\varphi_{p'}(t)]\,\varphi_p(s)\,ds \\ &= \sum_p \int_a^b [c\mathrm{K}_{p'p}(t, s) - \varphi_p(s)\,\varphi_{p'}(t)]\,\varphi_p(s)\,ds \\ &= \varphi_{p'}(t)\left[1 - \sum_p \int_a^b \varphi_p^2(s)\,ds\right] = 0. \end{aligned}$$

Donc, *toute solution fondamentale du second système est solution du premier.*

Supposons alors que le premier système admette $m+1$ solutions fondamentales $\varphi_i(x)$, $\varphi_i^1(x)$, ..., $\varphi_i^m(x)$, dont la première est normalisée.

Posons, les c_q étant des constantes,

$$\psi_i^q(x) = \varphi_i(x) + c_q\,\varphi_i^q(x) \qquad (q = 1, 2, \ldots, m).$$

On voit facilement que ces fonctions ψ fournissent une solution du second système si l'on détermine les coefficients c_q au moyen des relations

$$1 + c_q \sum_p \int_a^b \varphi_p(s)\,\varphi_p^q(s)\,ds = 0.$$

Nous obtenons ainsi m solutions fondamentales du second système. Nous allons voir qu'il n'y en a pas d'autre. En d'autres termes, le *second système admet une solution fondamentale de moins que le premier.*

Pour le montrer, commençons par établir un lemme.

Considérons des noyaux de la forme

$$\mathrm{K}_{ij}(x, y) = \mathrm{X}_i(x)\,\mathrm{Y}_j(y).$$

Le système (1) s'écrira alors

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \lambda X_i(x) \sum_p \int_a^b Y_p(s)\,\varphi_p(s)\,ds = f_i(x) + \mathrm{H}\,X_i(x),$$

avec

$$\mathrm{H} = \lambda \sum_p \int_a^b Y_p(s)\,\varphi_p(s)\,ds.$$

On aura donc

$$\varphi_i(s) = f_i(s) + \mathrm{H}\,X_i(s),$$

d'où

$$f_i(x) + \mathrm{H}\,X_i(x) = f_i(x) + \lambda X_i(x) \sum_p \int_a^b Y_p(s)[f_p(s) + \mathrm{H}\,X_p(s)]\,ds,$$

ou, en posant

$$\mathrm{L} = \sum_p \int_a^b X_p(s)\,Y_p(s)\,ds,$$

$$\mathrm{H} = \lambda \sum_p \int_a^b Y_p(s)\,f_p(s)\,ds + \lambda \mathrm{L}\mathrm{H},$$

d'où

$$\mathrm{H} = \frac{1}{1 - \lambda \mathrm{L}} \sum_p \int_a^b Y_p(s)\,f_p(s)\,ds$$

et

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \frac{\lambda X_i(x)}{1 - \lambda \mathrm{L}} \sum_p \int_a^b Y_p(s)\,f_p(s)\,ds.$$

La comparaison de cette relation avec (2) donne

$$\Gamma_{ij}(x, y; \lambda) = \frac{X_i(x)\,Y_j(y)}{1 - \lambda \mathrm{L}}.$$

On voit donc que $\Gamma_{ij}(x, y; \lambda)$ admet pour seul pôle

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{L}},$$

et ce pôle est simple. Donc, il n'y a pour ces noyaux qu'une valeur singulière.

D'après cette propriété et en vertu de celle établie à la fin du paragraphe **13**, on voit alors, les systèmes de noyaux envisagés tout à l'heure, $\mathcal{K}_{ij}$ et K'_{ij}, étant orthogonaux, que la fonction déterminante relative aux noyaux K'_{ij} admet la racine $\lambda = c$ à l'ordre $s-1$ de multiplicité, si s est l'ordre de multiplicité de cette racine pour la fonction déterminante relative au système proposé.

En appliquant l'opération précédente un certain nombre de fois, on pourra donc, avec n fini, écrire

$$K_{ij}(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_i^k(x)\,\varphi_j^k(y)}{c} + H_{ij}(x, y),$$

les $\varphi_i^k(x)$ étant toutes des solutions fondamentales distinctes des noyaux $K_{ij}(x, y)$ et les noyaux $H_{ij}(x, y)$ n'admettant plus la valeur singulière c.

Les fonctions $H_{ij}(x, y)$ forment un système de noyaux symétriques et les fonctions $\varphi_i^k(x)$ forment un système orthogonal et normal, c'est-à-dire vérifiant les relations

$$\sum_p \int_a^b \varphi_p^q(x)\,\varphi_p^{q'}(x)\,dx = 0 \qquad \text{pour} \quad q \neq q'$$

et

$$\sum_p \int_a^b [\varphi_p^k(x)]^2\,dx = 1.$$

Ce résultat montre que, s étant l'ordre de multiplicité de la racine c de $D(\lambda) = 0$, le nombre de fonctions fondamentales pour un système donné est au plus égal à s. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on arriverait par le procédé précédent à un système n'admettant plus c comme valeur singulière et ayant cependant, pour $\lambda = c$, une solution fondamentale.

Tout pôle des résolvantes relatives aux noyaux $K_{ij}(x, y)$ est un pôle pour l'un au moins des systèmes de noyaux $\frac{\varphi_i^k(x)\,\varphi_j^k(y)}{c}$ et, comme ces derniers n'admettent que des pôles simples, il en est de même pour le premier.

Donc, *dans le cas d'un système de noyaux symétriques, les valeurs singulières sont des pôles simples pour les résolvantes.*

Le raisonnement précédent montre que tout système de noyaux symétriques ayant un nombre fini de valeurs singulières se met sous la forme

$$K_{ij}(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_i^k(x)\,\varphi_j^k(y)}{\lambda_k}.$$

En effet, si l'on retranche des $K_{ij}(x, y)$ les sommes $S_{ij}(x, y)$ des noyaux principaux, les différences

$$K_{ij}(x, y) - S_{ij}(x, y) = H_{ij}(x, y)$$

sont orthogonales aux $K_{ij}(x, y)$ et offrent la symétrie précédente. N'admettant pas de valeur singulière, ces noyaux sont nuls.

Pour des noyaux symétriques ayant une infinité de valeurs singulières, on a

$$K_{ij}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^k(x)\,\varphi_j^k(y)}{\lambda_k},$$

pourvu que la série soit uniformément convergente.

En résumé, les fonctions fondamentales d'un système de noyaux symétriques (au sens donné ici à ce mot) réels forment un système orthogonal et normal de fonctions

$$\varphi_i^1, \quad \varphi_i^2, \quad \ldots, \quad \varphi_i^k, \quad \ldots,$$

dont chacune correspond à un pôle des noyaux résolvants. Supposons ces pôles rangés dans l'ordre de modules non décroissants, chacun d'eux étant écrit autant de fois qu'il lui correspond de systèmes de fonctions fondamentales

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots.$$

A chaque λ_k correspond un système de fonctions φ_i^k du système orthogonal. Inversement, tout système orthogonal peut être déduit d'un système de noyaux symétriques d'une infinité de façons [5].

---

[5] Goursat, *loc. cit.*, p. 442.

20. Développement suivant les fonctions fondamentales. — Considérons un système de fonctions orthogonales et normales $\varphi_i^k(x)$ ($i=1$, $2, \ldots, r$; $k=1, 2, \ldots, \infty$), c'est-à-dire vérifiant les relations

$$\sum_i \int_a^b [\varphi_i^k(x)]^2 \, dx = 1, \qquad \sum_i \int_a^b \varphi_i^k(x)\, \varphi_i^{k'}(x)\, dx = 0 \qquad (k \neq k').$$

Soit, d'autre part, un système de fonctions $f_i(x)$. S'il est possible de les développer sous la forme

$$f_i(x) = \sum_k f^k \varphi_i^k(x),$$

les coefficients f^k sont donnés par

$$f^k = \sum_i \int_a^b f_i(x)\, \varphi_i^k(x)\, dx;$$

ils sont donc bien déterminés.

L'inégalité

$$\sum_i \int_a^b [f_i(x) - f^1 \varphi_i^1(x) - \ldots - f^n \varphi_i^n(x)]^2 \, dx \geqq 0,$$

développée, fournit l'inégalité de Bessel

$$(f^1)^2 + (f^2)^2 + \ldots + (f^n)^2 \leqq \sum_i \int_a^b [f_i(x)]^2 \, dx.$$

21. Développement des noyaux itérés. — Nous avons vu que tout système de noyaux symétriques se mettait sous la forme

$$K_{ij}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^k(x)\, \varphi_j^k(y)}{\lambda_k},$$

pourvu que le second membre soit une série limitée ou uniformément convergente.

On en déduit, d'après une propriété énoncée au paragraphe **12**, que si la série

$$\sum_k \frac{\varphi_i^k(x)\,\varphi_j^k(y)}{\lambda_k^p} \qquad (p \text{ entier positif})$$

est uniformément convergente, elle représente $K_{ij}^{(p)}(x, y)$.

Nous allons montrer ([6]) qu'il y a convergence uniforme au moins pour $p \geqq 3$.

La question ne se pose que si le nombre des constantes caractéristiques est infini. Leurs valeurs absolues croissent alors indéfiniment; on peut donc trouver un nombre q tel que, pour $n > q$, on ait $|\lambda_n| > 1$.

Pour $n > q$ et $p \geqq 3$, on a

$$\sum_{h=n}^{n+m} \left| \frac{\varphi_i^h(x)\,\varphi_j^h(y)}{\lambda_h^p} \right| \leqq \sum_h \left| \frac{\varphi_i^h(x)\,\varphi_j^h(y)}{\lambda_h^3} \right| \leqq \frac{1}{2|\lambda_n|} \sum_h \frac{[\varphi_i^h(x)]^2 + [\varphi_j^h(y)]^2}{\lambda_h^2}.$$

Or on a (inégalité de Bessel)

$$\sum_h \left[\sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s)\,\varphi_p^h(s)\,ds \right]^2 \leqq \sum_p \int_a^b [K_{ip}(x, y)]^2\,dx$$

ou

$$\sum_h \frac{[\varphi_i^h(x)]^2}{\lambda_h^2} \leqq \sum_p \int_a^b [K_{ip}(x, y)]^2\,dx.$$

On en déduit, pour $p \geqq 3$ et $n > q$,

$$\sum_{h=n}^{n+m} \left| \frac{\varphi_i^h(x)\,\varphi_j^h(y)}{\lambda_h^p} \right|^2 \leqq \frac{1}{|\lambda_n|} \sum_p \int_a^b [K_{ip}(x, y)]^2\,dx.$$

Le second membre tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Cela montre, d'après un théorème de Cauchy sur la convergence des séries, la propriété énoncée : à savoir l'égalité

$$K_{ij}^{(p)}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^k(x)\,\varphi_j^k(y)}{\lambda_k^p}.$$

([6]) HEYWOOD et FRÉCHET, *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique*, p. 91.

22. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de fonctions $f_i(x)$ soit orthogonal à droite à un système de noyaux symétriques $K_{ij}(x, y)$ est qu'il soit orthogonal à un système quelconque de fonctions fondamentales.*

Autrement dit, les deux systèmes d'équations

$$\sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s) f_p(s)\, ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

et

$$\sum_i \int_a^b f_i(x)\, \varphi_i^k(x)\, dx = 0 \qquad (k \text{ quelconque})$$

sont équivalents.

En effet, supposons vrai le premier système. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_i \int_a^b f_i(x)\, \varphi_i^k(x)\, dx &= \sum_i \int_a^b f_i(x) \left[\lambda_k \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s)\, \varphi_p^k(s)\, ds \right] dx \\
&= \lambda_k \sum_i \sum_p \int_a^b \int_a^b f_i(x)\, K_{pi}(s, x)\, \varphi_p^k(s)\, dx\, ds \\
&= \lambda_k \sum_i \sum_p \int_a^b \int_a^b f_p(s)\, K_{ip}(x, s)\, \varphi_i^k(x)\, dx\, ds \\
&= \lambda_k \sum_i \int_a^b \left[\sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s) f_p(s)\, ds \right] \varphi_i^k(x)\, dx = 0.
\end{aligned}$$

Inversement, supposons vérifié le second système. On a, d'après la démonstration précédente,

$$K_{ij}^{(4)}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^k(x)\, \varphi_j^k(y)}{\lambda_k^4}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\sum_i \sum_j \int_a^b \int_a^b K_{ij}^{(4)}(x, y) f_i(x) f_j(y)\, dx\, dy \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k \int_a^b \int_a^b \frac{\varphi_i^k(x)\, \varphi_j^k(y)}{\lambda_k^4} f_i(x) f_j(y)\, dx\, dy \\
&\qquad = \sum_k \frac{1}{\lambda_k^4} \left[\int_a^b \varphi_i^k(x) f_i(x)\, dx \right]^2 = 0.
\end{aligned}$$

En remplaçant $K_{ij}^{(4)}(x, y)$ par sa valeur, on obtient

$$
\begin{aligned}
o &= \sum_i \sum_j \int_a^b \int_a^b \left[\sum_p \int_a^b K_{ip}^{(2)}(x, s)\, K_{pj}^{(2)}(s, y)\, ds \right] f_i(x) f_j(y)\, dx\, dy \\
&= \sum_p \int_a^b \left[\sum_i \int_a^b K_{pi}^{(2)}(s, x) f_i(x)\, dx \right] \left[\sum_j \int_a^b K_{pj}^{(2)}(s, y) f_j(y)\, dy \right] ds \\
&= \sum_p \int_a^b \left[\sum_i \int_a^b K_{pi}^{(2)}(s, x) f_i(x)\, dx \right]^2 ds.
\end{aligned}
$$

On a donc

$$\sum_i \int_a^b K_{pi}^{(2)}(s, x) f_i(x)\, dx = o$$

ou, en changeant les notations,

$$\sum_p \int_a^b K_{ip}^{(2)}(x, s) f_p(s)\, ds = o.$$

On en déduit, comme au paragraphe **16**, les égalités à démontrer

$$\sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s) f_p(s)\, ds = o.$$

25. Développement de certaines fonctions. — Considérons maintenant un groupe de fonctions $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, définies par

$$f_i(x) = \sum_{p=1}^{r} \int_a^b K_{ip}(x, s)\, h_p(s)\, ds,$$

les $K_{ij}(x, y)$ formant un système de noyaux symétriques.

Les φ étant les fonctions fondamentales relatives à ce système de noyaux, si l'on représente par h^k et f^k les coefficients de Fourier des fonctions h_i et f_i relatifs aux φ, on établit facilement la relation

$$f^k = \frac{h^k}{\lambda_k}.$$

Considérons la série

$$S_i(x) = \frac{h^1}{\lambda_1} \varphi_i^1(x) + \ldots + \frac{h^n}{\lambda_n} \varphi_i^n(x) + \ldots.$$

En remarquant que $\frac{\varphi_i^n(x)}{\lambda_n}$ est le coefficient de Fourier pour les noyaux $K_{ij}(x, y)$ considérés comme fonctions de y, i étant fixe et j prenant les valeurs $1, 2, \ldots, r$, on peut appliquer la démonstration relative à une seule intégrale [7] et démontrer que les séries précédentes sont convergentes. Pour montrer qu'elles représentent bien les fonctions $f_i(x)$, on envisage les différences

$$R_i(x) = f_i(x) - S_i(x).$$

De

$$\sum_i \int_a^b f_i(x)\, R_i(x)\, dx = \sum_i \sum_p \int_a^b \int_a^b K_{ip}(x, s)\, h_p(s)\, R_i(x)\, dx\, ds$$
$$= \sum_i \int_a^b h_i(x)\, dx \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s)\, R_i(s)\, ds = 0,$$

on déduit

$$\sum_i \int_a^b [R_i(x)]^2\, dx = \sum_i \int_a^b f_i(x)\, R_i(x)\, dx - \sum_i \int_a^b S_i(x)\, R_i(x)\, dx = 0.$$

On a donc $R_i(x) = 0$, ce qui démontre la proposition.

24. Solution d'un système d'équations intégrales. — On déduit de ce qui précède, par une démonstration toute pareille à celle qui concerne une seule équation, que la solution du système à noyaux symétriques

$$\varphi_i(x) = \lambda \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s)\, \varphi_p(s)\, ds + f_i(x)$$

est donnée par la formule

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \lambda \sum_k \frac{f^k \varphi_i^k(x)}{\lambda_k - \lambda}.$$

25. Cas des intégrales de surface. — Considérons, de même, une équation de la forme

$$\varphi(P) = \lambda \int_{(S)} K(P, M)\, \varphi(M)\, d\sigma_M + f(P)$$

---

[7] Goursat, *loc. cit.*, p. 447.

à noyau symétrique, l'intégrale étant une intégrale double étendue à une surface S d'élément d'aire $d\sigma$.

On sait (8) que l'on peut développer la solution de cette équation en série de fonctions fondamentales.

Plus généralement, soit un ensemble de surfaces S_i ($i = 1, 2, \ldots, r$) sur chacune desquelles un point sera défini au moyen de deux paramètres u, v, les mêmes pour toutes. Nous ferons correspondre sur toutes ces surfaces les points définis par les mêmes valeurs de ces paramètres. Une fonction d'un point P de S_i sera désignée par une notation telle que $f_i(P)$, une fonction de P de S_i et de M de S_j par $f_{ij}(P, M)$.

Considérons alors le système

$$\varphi_i(P) = \lambda \sum_{k=1}^{r} \int_{(S_k)} K_{ik}(P, M)\, \varphi_k(M)\, d\sigma_M + f_i(P),$$

dont les noyaux vérifient les relations

$$K_{ik}(P, M) = K_{ki}(M, P).$$

Les fonctions fondamentales de ce système étant supposées normées, c'est-à-dire vérifiant les relations

$$\sum_i \int_{(S_i)} [\varphi_i^n(M)]^2\, d\sigma_M = 0, \qquad \sum_i \int_{(S_i)} \varphi_i^n(M)\, \varphi_i^{n'}(M)\, d\sigma_M = 0 \qquad (n \neq n'),$$

on démontre que la solution du système peut être développée sous la forme

$$\varphi_i(P) = f_i(P) + \lambda \sum_n \frac{\varphi_i^n(P)}{\lambda_n - \lambda} \sum_k \int_{(S_k)} f_k(M)\, \varphi_k^n(M)\, d\sigma_M.$$

26. Noyaux de Schmidt. — Considérons des noyaux de la forme

$$K_{ij}(x, y) = A(x)\, B(y)\, S_{ij}(x, y),$$

(8) Heywood et Fréchet, *loc. cit.*, p. 107.

le produit $A(x)B(x)$ gardant un signe constant dans l'intervalle (a, b) et les conditions

$$S_{ij}(x, y) = S_{ji}(y, x)$$

étant remplies.

On a

$$K_{ij}(x, y) = \sqrt{\frac{A(x)\,B(y)}{A(y)\,B(x)}}\,S'_{ij}(x, y),$$

avec

$$S'_{ij}(x, y) = S_{ij}(x, y)\sqrt{A(x)\,A(y)\,B(x)\,B(y)}.$$

Soit alors $\Gamma'_{ij}(x, y; \lambda)$ l'une des résolvantes relatives aux noyaux S'_{ij}. On a

$$\Gamma'_{ij}(x, y; \lambda) = S'_{ij}(x, y) + \lambda \sum_p \int_b^b S'_{ip}(x, s)\,\Gamma'_{pj}(s, y; \lambda)\,ds.$$

Si l'on pose

$$\Gamma_{ij}(x, y; \lambda) = \sqrt{\frac{A(x)\,B(y)}{A(y)\,B(x)}}\,\Gamma'_{ij}(x, y; \lambda),$$

on en déduit

$$\Gamma_{ij}(x, y; \lambda) = K_{ij}(x, y) + \lambda \sum_p \int_a^b K_{ip}(x, s)\,\Gamma_{pj}(s, y; \lambda)\,ds.$$

Donc les noyaux résolvants relatifs aux $K_{ij}(x, y)$ sont égaux aux produits

$$\sqrt{\frac{A(x)\,B(y)}{A(y)\,B(x)}}\,\Gamma'_{ij}(x, y; \lambda).$$

Nous avons démontré que les pôles des $\Gamma'_{ij}(x, y; \lambda)$ sont réels et simples; il en est donc de même pour les $\Gamma_{ij}(x, y; \lambda)$.

27. Application aux équations de la Physique mathématique. — Les résultats de Schmidt sont aussi valables pour les équations intégrales de la forme

$$\varphi(P) = \lambda \int_{(S)} K(P, M)\,\varphi(M)\,d\sigma_M.$$

Si $K(P, M)$ est une fonction réelle de la forme $R(P)\,S(M)\,G(P, M)$, où le produit $R(M)\,S(M)$ garde un signe constant, quel que soit le point M de S, et $G(P, M)$ est une fonction symétrique de M et P, bornée ou pouvant se ramener à un noyau borné par un nombre fini d'itérations, les pôles de la résolvante $\Gamma(P, M; \lambda)$ sont réels et simples et, s'il y a un nombre fini n de valeurs singulières, on aura une égalité de la forme

$$G(P, M) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^k(P)\,\varphi^k(M)}{\lambda_k}.$$

Si donc $G(P, M)$ n'est pas de cette forme, on est assuré que le nombre de valeurs singulières est infini.

Plus généralement, étant donné le système

$$\varphi_i(P) = \lambda \sum_k \int_{(S_k)} K_{ik}(P, M)\,\varphi_k(M)\,d\sigma_M,$$

où

$$K_{ik}(P, M) = G_{ik}(P, M)\,A_i(P)\,B_k(M),$$

avec

$$G_{ik}(P, M) = G_{ki}(M, P)$$

et $A_i(P)B_i(P)$ gardant un signe constant quel que soit P de S_i, on est assuré qu'il y a pour ce système de noyaux une infinité de valeurs singulières si tous les $G_{ik}(P, M)$ ne sont pas de la forme précédente.

28. Nous serons dans la suite amenés à considérer un système de la forme

$$\varphi_i(P) = \lambda \sum_{k=1}^{r} \int_{(S_k)} R_i(P)\,S_k(M)\,G_{ik}(P, M)\,\varphi_k(M)\,d\sigma_M + C_i R_i(P),$$

où les $G_{ik}(P, M)$ forment un système de noyaux symétriques et les C sont des constantes. Nous supposerons, de plus, que les $\varphi_i(P)$ sont assujetties aux conditions

$$\int_{(S_i)} \varphi_i(P)\,d\sigma_P = 0.$$

Nous allons montrer que ces conditions entraînent la nullité des constantes.

Supposons, ce qui se produira effectivement, que le produit

$R_i(P)\,S_i(P)$ reste toujours négatif, les R étant négatifs, les S positifs. Posons alors

$$\psi_i(P) = \varphi_i(P)\sqrt{-\frac{S_i(P)}{R_i(P)}}.$$

Nous avons, pour déterminer ces nouvelles fonctions, le système

$$\psi_i(P) = \lambda\sum_k \int_{(S_k)} \sqrt{R_i(P)\,S_i(P)\,R_k(M)\,S_k(M)}\,G_{ik}(P, M)\,\psi_k(M)\,d\sigma_M + C_i\sqrt{-R_i(P)\,S_i(P)}.$$

Ce système, étant à noyaux symétriques

$$G'_{ik}(P, M) = \sqrt{R_i(P)\,S_i(P)\,R_k(M)\,S_k(M)}\,G_{ik}(P, M),$$

admet une solution donnée par la formule

$$\psi_i(P) = C_i\sqrt{-R_i(P)\,S_i(P)} + \lambda\sum_n \frac{\psi_i^n(P)}{\lambda_n - \lambda}\sum_k \int_{(S_k)} C_i\sqrt{-R_k(M)\,S_k(M)}\,\psi_k^n(M)\,d\sigma_M,$$

où les $\psi_i^n(P)$ sont les solutions fondamentales du système

$$\psi_i(P) = \lambda\sum_k \int_{(S_k)} G'_{ik}(P, M)\,\psi_k(M)\,d\sigma_M.$$

On en déduit

$$\varphi_i(P) = C_i\left[-R_i(P) + \lambda\sum_n \frac{\psi_i^n(P)}{\lambda_n - \lambda}\sum_k \int_{(S_k)} \sqrt{-R_k(M)\,S_k(M)}\,\psi_k^n(M)\,d\sigma_M\right].$$

Les conditions imposées aux fonctions φ deviennent alors

$$C_i\int_{(S_i)}\left[-R_i(P) + \lambda\sum_n \frac{\psi_i^n(P)}{\lambda_n - \lambda}\sum_k \int_{(S_k)} \sqrt{-R_k(M)\,S_k(M)}\,\psi_k^n(M)\,d\sigma_M\right]d\sigma_P = 0.$$

La quantité entre crochets, fonction de λ, n'est pas identiquement nulle. On a donc $C_i = 0$, le système étudié est homogène et, en vertu des signes constants des fonctions R et S, admet une infinité de solutions.

DEUXIÈME PARTIE.

ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION.

29. Considérons l'ellipsoïde de révolution homogène E

$$f(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} - 1 = 0$$

tournant autour de l'axe des x avec une vitesse de rotation constante ω. L'axe de rotation étant le plus petit, posons

$$b^2 = a^2(1 + k^2).$$

On peut écrire, pour un point quelconque de l'ellipsoïde,

$$x = a \cos u,$$
$$y = b \sin u \cos v,$$
$$z = b \sin u \sin v,$$

u variant entre zéro et π, v entre zéro et 2π.

Cet ellipsoïde étant supposé figure d'équilibre, déformons-le en lui ajoutant une couche de même densité, de volume algébrique total nul, dont l'épaisseur au point (u, v) sera $\varepsilon(u, v)$. V' étant le potentiel de la couche sur elle-même, l'épaisseur au point $(u = \theta, v = \varphi)$ sera donnée [9] par la relation

$$V'(\theta, \varphi) - g\varepsilon(\theta, \varphi) = \text{const.} \tag{11}$$

où g représente la pesanteur.

Le volume de la couche qui couvre un élément de surface $d\sigma$ placé au point $M(u, v)$ de l'ellipsoïde étant $\varepsilon(u, v)\,d\sigma$, le potentiel de la couche au point $P(\theta, \varphi)$ est, en supposant le coefficient d'attraction, ainsi que la densité, égaux à l'unité,

$$V' = \iint_{(E)} \frac{\varepsilon(u, v)\,d\sigma}{MP} = \int_{(E)} \frac{\varepsilon(M)\,d\sigma_M}{MP}.$$

---

[9] APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. IV, p. 173.

Calculons g. Le potentiel intérieur de l'ellipsoïde est

$$V = 2\pi \frac{1+k^2}{k^3}\left[k^2 a^2 \operatorname{arc\,tg} k - (k - \operatorname{arc\,tg} k)x^2 - \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} k - \frac{k}{1+k^2}\right)(y^2+z^2)\right],$$

et la fonction de forces est

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(y^2+z^2) \equiv K\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} - 1\right) + \text{const.},$$

d'où, pour la pesanteur,

$$g = -K\frac{\partial f}{\partial n} = -K\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = -2K\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2+z^2}{b^4}}.$$

Pour calculer la constante K, plaçons-nous au pôle. On a alors

$$y = z = 0, \qquad U = V,$$
$$g = -\frac{2K}{a} = -\frac{\partial V}{\partial x} = 4\pi a \frac{1+k^2}{k^3}(k - \operatorname{arc\,tg} k),$$

d'où

$$K = -2\pi a^2 \frac{1+k^2}{k^3}(k - \operatorname{arc\,tg} k),$$

d'où, enfin, au point (θ, φ) de l'ellipsoïde,

$$g = 4\pi a\sqrt{1+k^2}\,\frac{k - \operatorname{arc\,tg} k}{k^3}\sqrt{1+k^2\cos^2\theta}.$$

La relation (11) devient donc

$$\int_{(E)} \frac{\varepsilon(M)\,d\sigma_M}{MP} - 4\pi b\,\frac{k - \operatorname{arc\,tg} k}{k^3}\sqrt{1+k^2\cos^2\theta}\,\varepsilon(P) = C,$$

équation de la forme

$$\varepsilon(P) = \lambda\int_{(E)} R(P)\,G(P, M)\,\varepsilon(M)\,d\sigma_M + C'R(P),$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{4\pi b}\,\frac{k^3}{k - \operatorname{arc\,tg} k}, \qquad R(P) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2\cos^2\theta}} \qquad G(P, M) = \frac{1}{MP}.$$

L'hypothèse de la nullité de la masse donne d'ailleurs

$$\int_{(E)} \varepsilon(M)\,d\sigma_M = 0.$$

D'après la proposition établie au paragraphe **28**, la constante C' ne peut être que nulle. Nous obtenons donc l'équation homogène

$$\varepsilon(\mathrm{P}) = \lambda \int_{(\mathrm{E})} \mathrm{R}(\mathrm{P})\, \mathrm{G}(\mathrm{P}, \mathrm{M})\, \varepsilon(\mathrm{M})\, d\sigma_{\mathrm{M}},$$

où R(P) garde un signe constant.

Les pôles de la résolvante sont donc réels et simples et, étant donné la forme de la fonction G(P, M), il y a une infinité de valeurs singulières. Nous obtenons donc pour l'équation intégrale une infinité de solutions.

Pour que ce soit une solution du problème proposé, il faut que d'une des valeurs de λ ainsi obtenues on puisse déduire une valeur pour l'aplatissement. Or, l'étude de la variation de λ, fonction de k, montre que, lorsque k croît de zéro à $+\infty$, λ croît de $\frac{3}{4\pi}$ à $+\infty$.

Considérons alors une valeur singulière. Il lui correspond une solution $\varepsilon(\mathrm{P})$ de l'équation intégrale et l'on a

$$\mathrm{V}' - g\varepsilon = 0.$$

g étant positif, V' et ε sont de même signe; cela exige que la valeur singulière λ soit positive. Comme, d'autre part, les modules des valeurs singulières croissent au delà de toute limite, on est assuré qu'il existe une infinité de valeurs singulières supérieures à $\frac{3}{4\pi}$. Chacune de ces valeurs fournit une solution pour le problème proposé.

Nous retrouvons ainsi l'infinité de figures infiniment voisines de l'ellipsoïde indiquée par Poincaré.

TROISIÈME PARTIE.

ELLIPSOÏDES HOMOFOCAUX.

30. Considérons maintenant un ellipsoïde formé de couches homogènes comprises entre des ellipsoïdes homofocaux de révolution en nombre fini n. Soient $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$ les ellipsoïdes de séparation,

E_1 étant l'ellipsoïde extérieur. Si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ sont les densités respectives des couches, posons

$$\eta_1 = \rho_1 - 0, \qquad \eta_2 = \rho_2 - \rho_1, \qquad \ldots, \qquad \eta_n = \rho_n - \rho_{n-1}.$$

Nous supposons toutes ces quantités positives, les densités allant en croissant de la surface vers l'intérieur.

L'équation d'un ellipsoïde E_i étant

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_i} + \frac{y^2+z^2}{b^2+\lambda_i} - 1 = 0 \qquad (a < b),$$

nous poserons

$$b^2 + \lambda_i = (a^2+\lambda_i)(1+k_i^2).$$

Les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipsoïde E_i sont

$$\begin{aligned} x_i &= \sqrt{a^2+\lambda_i}\cos u,\\ y_i &= \sqrt{b^2+\lambda_i}\sin u \cos v,\\ z_i &= \sqrt{b^2+\lambda_i}\sin u \sin v. \end{aligned}$$

Partons d'une figure pour laquelle tous les points situés sur un même ellipsoïde sont animés d'une même rotation (figures de Hamy). Déformons-la en ajoutant à chaque couche une masse algébriquement nulle, de densité uniforme, égale à η_i pour la masse ajoutée à E_i.

Nous désignerons par $\varepsilon_i(u, v, \lambda_i)$ ou $\varepsilon_i(M)$ la hauteur de cette masse additive placée au point M de E_i. $d\sigma_i$ étant un élément de surface placé en ce point, le volume élémentaire de cette masse sera $\varepsilon_i d\sigma_i$, et le potentiel en un point P de E_p de toute la masse placée sur E_i sera

$$V'_{i,P} = \int_{(E_i)} \frac{\eta_i \varepsilon_i(M)\, d\sigma_i}{MP}.$$

Si l'on désigne par α_P, β_P, γ_P les cosinus directeurs de la demi-normale extérieure à E_p au point P, par $V_{i,P}$ et $V'_{i,P}$ ou, plus simplement, par V_i et V'_i, les potentiels respectifs au même point de l'ellipsoïde E_i, auquel on attribue la densité $\eta_i = \rho_i - \rho_{i-1}$, et de la masse additive d'ordre i, la hauteur ε_P (ou, plus simplement, ε) de la couche en P est donnée par la relation

$$(12) \quad \varepsilon\left[\sum_i \left(\alpha_P \frac{\partial V_i}{\partial x} + \beta_P \frac{\partial V_i}{\partial y} + \gamma_P \frac{\partial V_i}{\partial z}\right) + \omega_p^2(\beta y + \gamma z)_P\right] + \sum_i V'_i = \text{const.}$$

Dans cette équation, ω_p représente la rotation des points de l'ellipsoïde E_p, et l'on a [10], en posant $c^2 = b^2 - a^2$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega_p^2}{2\pi} = & \sum_{r=1}^{p} \eta_r \sqrt{a^2+\lambda_r}\, \frac{b^2+\lambda_r}{c^2} \left[\frac{1}{c}\, \frac{2(a^2+\lambda_p)+(b^2+\lambda_p)}{b^2+\lambda_p} \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{\sqrt{a^2+\lambda_r}} \right. \\
& \left. \qquad - \frac{(a^2+\lambda_r)(b^2+\lambda_p) + 2(a^2+\lambda_p)(b^2+\lambda_r)}{(b^2+\lambda_p)(b^2+\lambda_r)\sqrt{a^2+\lambda_r}} \right] \\
& + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{c}\, \frac{2(a^2+\lambda_p)+(b^2+\lambda_p)}{b^2+\lambda_p} \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{\sqrt{a^2+\lambda_p}} - 3\frac{\sqrt{a^2+\lambda_p}}{b^2+\lambda_p} \right] \\
& \qquad \times \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q \sqrt{a^2+\lambda_q}\,(b^2+\lambda_q) \\
= & \sum_{r=1}^{p} \eta_r \frac{1+k_r^2}{k_r^3} \left[\frac{3+k_p^2}{1+k_p^2} \operatorname{arc\,tg} k_r - \frac{k_r}{1+k_r^2} - \frac{2k_r}{1+k_p^2} \right] \\
& + \frac{1}{1+k_p^2} [(3+k_p^2) \operatorname{arc\,tg} k_p - 3k_p] \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q \frac{1+k_q^2}{k_q^3}.
\end{aligned}
$$

Si les valeurs des paramètres u, v, correspondant à P sont θ, φ, on a, pour les cosinus directeurs de la normale en P,

$$
\alpha_P = \frac{\sqrt{1+k_p^2}\cos\theta}{\sqrt{1+k_p^2\cos^2\theta}}, \qquad \frac{\beta_P}{\cos\varphi} = \frac{\gamma_P}{\sin\varphi} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+k_p^2\cos^2\theta}},
$$

d'où

$$
\alpha_P x_P = \frac{\sqrt{b^2+\lambda_p}\cos^2\theta}{\sqrt{1+k_p^2\cos^2\theta}}, \qquad (\beta y + \gamma z)_P = \frac{\sqrt{b^2+\lambda_p}\sin^2\theta}{\sqrt{1+k_p^2\cos^2\theta}}.
$$

P étant intérieur à l'ellipsoïde E_r, le potentiel de celui-ci en P est

$$
\begin{aligned}
V_r(x, y, z) = & 2\pi \frac{1+k_r^2}{k_r^3} \eta_r \\
& \times \left[k_r^2 (a^2+\lambda_r) \operatorname{arc\,tg} k_r \right. \\
& \left. \qquad - \frac{1}{2}(y^2+z^2)\left(\operatorname{arc\,tg} k_r - \frac{k_r}{1+k_r^2} \right) - x^2 (k_r - \operatorname{arc\,tg} k_r) \right],
\end{aligned}
$$

(10) *Voir* Mémoire cité.

et l'on a

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} = -4\pi \frac{1+k_r^2}{k_r^3} \eta_r (k_r - \operatorname{arc\,tg} k_r) x,$$

$$\frac{\frac{\partial V_r}{\partial y}}{y} = \frac{\frac{\partial V_r}{\partial z}}{z} = -2\pi \frac{1+k_r^2}{k_r^3} \eta_r \left(\operatorname{arc\,tg} k_r - \frac{k_r}{1+k_r^2} \right),$$

d'où

$$\left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{r,P} = -2\pi \frac{1+k_r^2}{k_r^3} \frac{\sqrt{b^2+\lambda_p}}{\sqrt{1+k_p^2 \cos^2\theta}} \eta_r$$
$$\times \left[2(k_r - \operatorname{arc\,tg} k_r) \cos^2\theta + \left(\operatorname{arc\,tg} k_r - \frac{k_r}{1+k_r^2} \right) \sin^2\theta \right].$$

P étant extérieur à l'ellipsoïde E_q, le potentiel de celui-ci en P a des dérivées partielles vérifiant

$$\frac{\partial V_q}{\partial x} = -2\pi (b^2+\lambda_q) \sqrt{a^2+\lambda_q}\, \eta_q x \int_{\lambda_p-\lambda_q}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda_q+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}},$$

$$\frac{\frac{\partial V_q}{\partial y}}{y} = \frac{\frac{\partial V_q}{\partial z}}{z} = -2\pi (b^2+\lambda_q) \sqrt{a^2+\lambda_q}\, \eta_q \int_{\lambda_p-\lambda_q}^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda_q+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}},$$

où

$$\varphi(\lambda) = (a^2+\lambda_q+\lambda)(b^2+\lambda_q+\lambda)^2,$$

d'où, tous calculs faits,

$$\frac{\partial V_q}{\partial x} = 4\pi \frac{1+k_q^2}{k_q^3} \eta_q x (\operatorname{arc\,tg} k_p - k_p),$$

$$\frac{\frac{\partial V_q}{\partial y}}{y} = \frac{\frac{\partial V_q}{\partial z}}{z} = 2\pi \frac{1+k_q^2}{k_q^3} \eta_q \left(\frac{k_p}{1+k_p^2} - \operatorname{arc\,tg} k_p \right).$$

On en déduit

$$\left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{q,P}$$
$$= 2\pi \frac{1+k_q^2}{k_q^3} \frac{\sqrt{b^2+\lambda_p}}{\sqrt{1+k_p^2\cos^2\theta}} \eta_q \left[(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) \operatorname{arc\,tg} k_p - k_p \left(\frac{\sin^2\theta}{1+k_p^2} - 2\cos^2\theta \right) \right].$$

L'hypothèse de la nullité des masses ajoutées, qui se traduit par les relations

$$\int_{(E_i)} \varepsilon_i(M)\, d\sigma_M = 0,$$

entraîne la nullité des constantes entrant dans les équations (12), et l'on obtient les équations

$$
\begin{aligned}
\mathrm{o} = \sum_{i=1}^{n} \int_{(\mathrm{E}_i)} \frac{\eta_i \varepsilon_i(\mathrm{M})\, d\sigma_{\mathrm{M}}}{\mathrm{MP}} + \varepsilon_p(\mathrm{P}) \frac{\sqrt{b^2+\lambda_p}}{\sqrt{1+k_p^2\cos^2\theta}} \\
\times \Bigg\{ \omega_p^2 \sin^2\theta - 2\pi \sum_{r=1}^{p} \frac{1+k_r^2}{k_r^3} \eta_r \Big[2(k_r - \operatorname{arc\,tg} k_r)\cos^2\theta \\
+ \left(\operatorname{arc\,tg} k_r - \frac{k_r}{1+k_r^2}\right)\sin^2\theta \Big] \\
- 2\pi \sum_{q=p+1}^{n} \frac{1+k_q^2}{k_q^3} \eta_q \Big[2(k_p - \operatorname{arc\,tg} k_p)\cos^2\theta \\
+ \left(\operatorname{arc\,tg} k_p - \frac{k_p}{1+k_p^2}\right)\sin^2\theta \Big] \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Ce système est de la forme

$$
\sum_{i=1}^{n} \int_{(\mathrm{E}_i)} \frac{\eta_i \varepsilon_i(\mathrm{M})\, d\sigma_{\mathrm{M}}}{\mathrm{MP}} + \varepsilon_p(\mathrm{P})[f(p)\sin^2\theta + \varphi(p)\cos^2\theta] \frac{\sqrt{b^2+\lambda_p}}{\sqrt{1+k_p^2\cos^2\theta}} = \mathrm{o},
$$

ou

$$
\varepsilon_p(\mathrm{P}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_{(\mathrm{E}_i)} \mathrm{K}_{pi}(\mathrm{P}, \mathrm{M})\, \varepsilon_i(\mathrm{M})\, d\sigma_{\mathrm{M}},
$$

avec

$$
\begin{gathered}
\mathrm{K}_{pi}(\mathrm{P}, \mathrm{M}) = \mathrm{R}_p(\mathrm{P})\, \mathrm{S}_i(\mathrm{M})\, \mathrm{G}_{pi}(\mathrm{P}, \mathrm{M}), \qquad \lambda = 1, \\
\mathrm{R}_p(\mathrm{P}) = -\frac{\sqrt{1+k_p^2\cos^2\theta}}{\sqrt{b^2+\lambda_p}} \, \frac{1}{f(p)\sin^2\theta + \varphi(p)\cos^2\theta}, \\
\mathrm{S}_i(\mathrm{M}) = \eta_i, \qquad \mathrm{G}_{pi}(\mathrm{P}, \mathrm{M}) = \frac{1}{\mathrm{MP}}.
\end{gathered}
$$

Nous avons donc un système de Schmidt si $\mathrm{R}_p(\mathrm{P})$ garde un signe constant.

Or on a

$$
\frac{\varphi(p)}{4\pi} = \sum_{r=1}^{p} \frac{1+k_r^2}{k_r^3} \left(\operatorname{arc\,tg} k_r - k_r\right)\eta_r + (\operatorname{arc\,tg} k_p - k_p) \sum_{q=p+1}^{n} \frac{1+k_q^2}{k_q^3}\, \eta_q.
$$

Comme $\operatorname{arc\,tg} x - x$ est une fonction de x essentiellement négative, on voit que l'on a $\varphi(p) < \mathrm{o}$.

On a, d'autre part,

$$f(p) = \omega_p^2 + 2\pi \sum_{r=1}^{p} \eta_r \frac{1+k_r^2}{k_r^3}\left(\frac{k_r}{1+k_r^2} - \operatorname{arc\,tg} k_r\right)$$
$$+ 2\pi\left(\frac{k_p}{1+k_p^2} - \operatorname{arc\,tg} k_p\right) \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q \frac{1+k_q^2}{k_q^3}.$$

On obtient immédiatement

$$f(p) = \frac{\varphi(p)}{1+k_p^2} < 0.$$

En définitive, $R_p(P)$ est négatif pour toute position de P. Le système

$$\varepsilon_p(P) = \lambda \sum_i \int_{(E_i)} K_{pi}(P, M)\, \varepsilon_i(M)\, d\sigma_M$$

admet donc une infinité de valeurs exceptionnelles réelles dont les modules vont en croissant indéfiniment. Ces racines en λ de la fonction déterminante sont d'ailleurs des fonctions homogènes, de degré *zéro*, des densités des différentes couches, en même temps que des aplatissements. En égalant à l'unité ces valeurs de λ, on obtient une infinité de conditions. Si l'une d'elles est vérifiée, la solution correspondante du système fournit la hauteur de la couche à ajouter en chaque point des ellipsoïdes de séparation.

Nous retrouvons ainsi l'infinité de solutions indiquée dans notre Mémoire précédent.

QUATRIÈME PARTIE.

ELLIPSOÏDES HOMOTHÉTIQUES.

31. Nous allons reprendre le problème précédent, en supposant que les ellipsoïdes de séparation des couches, supposés toujours de révolution, sont homothétiques et concentriques.

L'ellipsoïde E_i a alors pour équation

$$\frac{x^2}{\lambda_i^2 a^2} + \frac{y^2+z^2}{\lambda_i^2 b^2} - 1 = 0.$$

Nous poserons

$$b^2 = a^2(1 + k^2).$$

Les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipsoïde E_i sont

$$x_i = \lambda_i a \cos u,$$
$$y_i = \lambda_i b \sin u \cos v,$$
$$z_i = \lambda_i b \sin u \sin v,$$

u variant entre zéro et π, v entre zéro et 2π.

Le potentiel au point $P(x_P, y_P, z_P)$ correspondant à $u = \theta$, $v = \varphi$, de la masse ajoutée à l'ellipsoïde E_i est

$$V'_{i,P} = \int_{(E_i)} \frac{\eta_i \varepsilon_i(M)\, d\sigma_M}{MP}.$$

On doit écrire les mêmes conditions (12) que dans le cas précédent, et l'on voit encore qu'en vertu de la nullité de la masse ajoutée à chaque ellipsoïde, les constantes des seconds membres doivent être prises égales à zéro.

On a ici

$$\frac{\omega_P^2}{2\pi} = \left(\frac{3 + k^2}{k^3} \operatorname{arc\,tg} k - \frac{3}{k^2}\right)\rho_p$$
$$+ \sum_{q=p+1}^{n} \left[\frac{3 + k^2}{k^3} \operatorname{arc\,tg} k\,\varepsilon_{q,P} - \frac{\varepsilon_{q,P}}{k^2}\, \frac{3 + k^2(1 + 2\varepsilon_{q,P}^2)}{1 + k^2\varepsilon_{q,P}^2}\right]\eta_q,$$

avec

$$\varepsilon_{q,P} = \frac{\lambda_q a}{r_{q,P}},$$

$r_{q,P}$ étant le demi-axe porté par l'axe des x de l'ellipsoïde homofocal à E_1 passant en P.

Les ellipsoïdes homofocaux à E_q étant

$$\frac{x^2}{\lambda_q^2 a^2 + u} + \frac{y^2 + z^2}{\lambda_q^2 b^2 + u} - 1 = 0,$$

la valeur de u correspondant à celui d'entre eux passant par P est donnée par la racine positive de cette équation où l'on remplace x, y, z par les coordonnées de P.

On trouve pour cette racine

$$u = a^2 \frac{\lambda_p^2(1 + k^2 \sin^2\theta) - (2 + k^2)\lambda_q^2 + \sqrt{\Delta_q}}{2},$$

$$\Delta_q = [k^2\lambda_q^2 - (1 + k^2 \sin^2\theta)\lambda_p^2]^2 + 4k^2\lambda_p^2\lambda_q^2 \cos^2\theta.$$

On en déduit

$$\frac{r_{q,P}^2}{a^2} = \frac{\lambda_q^2 a^2 + u}{a^2} = \frac{\lambda_p^2(1 + k^2 \sin^2\theta) - k^2\lambda_q^2 + \sqrt{\Delta_q}}{2},$$

d'où

$$\varepsilon_{q,P}^2 = \frac{k^2\lambda_q^2 - (1 + k^2 \sin^2\theta)\lambda_p^2 + \sqrt{\Delta_q}}{2k^2\lambda_p^2 \cos^2\theta}.$$

D'autre part, les cosinus directeurs de la demi-normale extérieure à l'ellipsoïde E_p portant P, en ce point, ont les mêmes expressions que précédemment, k étant mis à la place de k_p. On en déduit, en ce point,

$$\beta y + \gamma z = \frac{\lambda_p b \sin^2\theta}{\sqrt{1 + k^2 \cos^2\theta}}.$$

Le potentiel d'un ellipsoïde E_r au point P intérieur est donné par la formule

$$\begin{aligned} V_r(x, y, z) = 2\pi \frac{1 + k^2}{k^3} \eta_r \Big[& a^2k^2\lambda_r^2 \operatorname{arc\,tg} k - (k - \operatorname{arc\,tg} k)x^2 \\ & - \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} k - \frac{k}{1 + k^2}\right)(y^2 + z^2)\Big], \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} = -4\pi \frac{1 + k^2}{k^3}(k - \operatorname{arc\,tg} k)\lambda_p a \eta_r \cos\theta,$$

$$\frac{\frac{\partial V_r}{\partial y}}{\cos\varphi} = \frac{\frac{\partial V_r}{\partial z}}{\sin\varphi} = -2\pi \frac{1 + k^2}{k^3}\left(\operatorname{arc\,tg} k - \frac{k}{1 + k^2}\right)\lambda_p b \eta_r \sin\theta.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z}\right)_{r,P} \\ & = -2\pi\lambda_p b \frac{1 + k^2}{k^3\sqrt{1 + k^2 \cos^2\theta}} \eta_r \left[2(k - \operatorname{arc\,tg} k)\cos^2\theta + \left(\operatorname{arc\,tg} k - \frac{k}{1 + k^2}\right)\sin^2\theta\right]. \end{aligned}$$

Le potentiel d'un ellipsoïde E_q au point P extérieur, avec

$$\varphi(\lambda) = (\lambda_q^2 a^2 + \lambda)(\lambda_q^2 b^2 + \lambda)^2,$$

admet des dérivées vérifiant

$$\frac{\partial V_q}{\partial x} = -2\pi a b^2 \lambda_q^3 \eta_q x \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda_q^2 a^2 + \lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}},$$

$$\frac{\dfrac{\partial V_q}{\partial y}}{y} = \frac{\dfrac{\partial V_q}{\partial z}}{z} = -2\pi a b^2 \lambda_q^3 \eta_q \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda_q^2 b^2 + \lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

On trouve, tous calculs faits,

$$\frac{\partial V_q}{\partial x} = 4\pi \frac{1 + k^2}{k^3} \lambda_p a \eta_q \cos\theta (\operatorname{arc\,tg} k\varepsilon_{q,P} - k\varepsilon_{q,P}),$$

$$\frac{\dfrac{\partial V_q}{\partial y}}{\cos\varphi} = \frac{\dfrac{\partial V_q}{\partial z}}{\sin\varphi} = -2\pi \frac{1 + k^2}{k^3} \lambda_p b \eta_q \sin\theta \left(\operatorname{arc\,tg} k\varepsilon_{q,P} - \frac{k\varepsilon_{q,P}}{1 + k^2 \varepsilon_{q,P}^2}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z}\right)_{q,P} &= 2\pi \lambda_p b \eta_q \frac{1 + k^2}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2\theta}} \Big[(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) \operatorname{arc\,tg} k\varepsilon_{q,P} \\ &\qquad - 2k\varepsilon_{q,P} \cos^2\theta + \frac{k\varepsilon_{q,P}}{1 + k^2 \varepsilon_{q,P}^2} \sin^2\theta\Big].\end{aligned}$$

Reportant ces diverses expressions dans (12), on obtient le système

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{n} \int_{(E_i)} \frac{\eta_i \varepsilon_i(M)\, d\sigma_M}{MP} &+ \varepsilon_p(P) \frac{\lambda_p b}{\sqrt{1 + k^2 \cos^2\theta}} \\ \times \Big\{ \omega_P^2 \sin^2\theta - 2\pi \frac{1 + k^2}{k^3} &\Big[2(k - \operatorname{arc\,tg} k)\cos^2\theta + \left(\operatorname{arc\,tg} k - \frac{k}{1 + k^2}\right)\sin^2\theta\Big]\rho_p \\ &+ 2\pi \frac{1 + k^2}{k^3} \sum_{q=p+1}^{n} \eta_q \Big[(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) \operatorname{arc\,tg} k\varepsilon_{q,P} \\ &\qquad - 2k\varepsilon_{q,P} \cos^2\theta + \frac{k\varepsilon_{q,P}}{1 + k^2 \varepsilon_{q,P}^2} \sin^2\theta\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

Nous aurons démontré, comme dans le cas précédent, l'existence d'une infinité de solutions, si nous démontrons que les coefficients $\varphi(p)$

de $\cos^2\theta$ et $f(p)$ de $\sin^2\theta$ dans le coefficient de $\varepsilon_p(\mathrm{P})$ sont de signe constant négatif.

Il en est bien ainsi pour le coefficient de $\cos^2\theta$ égal, à un coefficient positif près, à

$$\rho_p(\operatorname{arc\,tg} k - k) + \sum_q \eta_q(\operatorname{arc\,tg} k\varepsilon_{q,\mathrm{P}} - k\varepsilon_{q,\mathrm{P}}).$$

Quant au coefficient de $\sin^2\theta$, il est égal à

$$f(p) = \frac{\varphi(p)}{1+k^2},$$

d'où l'inégalité à démontrer

$$f(p) < 0.$$

Nous obtenons donc bien encore ici une infinité de solutions.

32. Conclusion. — En résumé, *nous avons obtenu, à partir des figures de révolution, composées de couches homogènes de densités croissant de la surface vers l'intérieur, séparées par des ellipsoïdes, soit homofocaux, soit concentriques et homothétiques, des figures infiniment voisines, obtenues en ajoutant à chaque couche une masse infiniment mince de volume algébrique nul, avec conservation de la rotation lorsqu'on passe d'un point à son dérivé.*

ADDITION.

Errata au Mémoire précédent.

Page 51, ligne 11, *au lieu de* $\rho_1 - 0$, $\rho_2 - \rho_1$, $\dots$, $\rho_n - \rho_{n-1}$, *lire* $\delta_1 - 0$, $\delta_2 - \delta_1$, $\dots$, $\delta_n - \delta_{n-1}$.

Page 63, dans les deux dernières formules, remplacer ρ_p et ρ_{p-1} par δ_p et δ_{p-1}.

Page 65, ligne 15, *au lieu de* 6, *lire* σ.

Page 69, rétablir la seconde formule de la façon suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{-\left(\frac{R_1}{R_4}\right)_p\left[\sum_r \eta_r T_r\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_r+\left(\frac{S_1}{R_1}\right)_p\sum_q \eta_q T_q\right](\beta_k)_p\right.$$
$$\left.+\sum_r \eta_r(\alpha_k)_r(S_k)_r(R_k)_p+\sum_q \eta_q(\alpha_k)_q(R_k)_q(S_k)_p\right\}Y_k = \text{const.}$$