

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. TORTRAT

Les fonctions orthogonales d'Hermite et les relations d'incertitude

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 32 (1953), p. 85-128.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1953_9_32_85_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Les fonctions orthogonales d'Hermite
et les relations d'incertitude ;*

PAR A. TORTRAT.

INTRODUCTION.

Dans le livre de MM. Appell et Kampé de Fériet ⁽¹⁾ sont exposées les propriétés les plus simples des polynômes d'Hermite à plusieurs variables. Citons principalement :

Les propriétés d'orthogonalité, par la méthode d'Hermite (sans justification de la validité d'intégrations terme à terme);

• Des théorèmes de développement pour les polynômes, mais non pour une fonction quelconque ;

Les équations aux dérivées partielles satisfaites, écrites pour deux variables, avec intégration dans ce cas du système des quatre équations et remarque que la seule solution polynomiale est celle d'Hermite.

Dans un premier chapitre, nous notons tout d'abord, ou rappelons, et justifions, les formules concernant les fonctions génératrices et

Nota. — Ce travail, première partie d'une Thèse soutenue le 6 mars 1950 devant MM. J. Pérès, G. Darmon et P. Dubreil, constitue en presque totalité le développement de Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, présentées respectivement les 26 janvier et 16 février 1948 par M. J. Pérès, et le 22 décembre 1947 par M. Louis de Broglie.

(1) APPELL et KAMPÉ DE FÉRIET, *Sur les séries hypergéométriques et polynômes d'Hermite.*

Journ. de Math., tome XXXII.



leurs relations mutuelles, la plénitude du système des fonctions d'Hermite ψ_{n_i} ou χ_{n_i} , et les équations aux dérivées partielles ou autres formules de dérivation relatives aux polynômes, aux ψ_{n_i} , χ_{n_i} , ou aux fonctions génératrices.

Suivant alors le calcul formel de M. Norbert Wiener ⁽²⁾ (qui conduit cet auteur à la formule de Mehler exprimant $\Sigma t^n \psi_n(x) \psi_n(y)$ et qu'il applique ensuite à l'étude de la transformation de Fourier et du théorème de Plancherel (comme cas limite des formules établies), nous donnons, pour les différentes sommes $\Sigma t_i^n Y_{n_i}(y) X_{n_i}(x)$ au nombre de seize (X_{n_i} , par exemple étant une fonction ψ ou χ d'Hermite relative à la forme φ ou à sa réciproque), l'expression de deux d'entre elles et les formules de passage de celles-ci aux autres; puis justifions ces calculs par deux méthodes, dont l'une s'appuie sur un travail de M^{me} Lebedeff ⁽³⁾ dans le cas d'une variable et met en évidence certaines propriétés des noyaux ainsi obtenus. Cette formule de Mehler généralisée avait déjà été démontrée sans que nous le sachions, par deux autres voies ⁽⁴⁾, ⁽⁵⁾, aboutissant à une forme un peu différente dont nous établissons l'équivalence avec celle obtenue ici.

Il convient de noter des cas particuliers, comme par exemple la transformation de Fourier, et la généralisation des propriétés de développement uniformément convergent sur $(-\infty, +\infty)$ d'une fonction $f(x)$ suivant les $\psi_n(x)$.

Dans le deuxième chapitre, partant de relations aux dérivées partielles entre les $(e^{-\varphi} \mathcal{H}_{n_i})^2$ et $(e^{-\varphi} \mathcal{G}_{n_i})^2$, nous majorons la valeur absolue des fonctions d'Hermite, par les formules qui généralisent des résultats connus et très simples dans le cas d'une variable ⁽⁶⁾. Un lemme nous est nécessaire, sur la décomposition d'une forme

⁽²⁾ NORBERT WIENER, *The Fourier Integral and certain of its applications*.

⁽³⁾ W. MYLLER-LEBEDEFF, *Die theorie der Integral gleichungen in anwendung auf einige Reihenentwicklungen* (*Math. Ann.*, Bd. 64).

⁽⁴⁾ LOSCHMIEDER, *Math. Z.*, t. 43, 1938, p. 783-792.

⁽⁵⁾ ERDILYI, *Math. Z.*, t. 44, 1938, p. 201-211.

⁽⁶⁾ IYENGAR, *Proc. Ind. Acad. Sc.*, p. 211.



quadratique (ou bilinéaire) à discriminant non nul, en somme de deux formes quadratiques (ou bilinéaires).

Nous démontrons ensuite que le système d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre déjà indiqué, est complètement intégrable, faisant quelques remarques sur son intégration (connue pour $\eta = 2$).

Le troisième chapitre est lié aux relations d'incertitude de Heisenberg. Après justification du calcul d'expressions de la forme

$$\int x_i^{p_i} \psi_{n_i}^q(x_i) \chi_{n_i}^q(x_i) dx_i,$$

nous démontrons la relation

$$(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2} + \frac{h^2}{4\pi^2} \sum_0^\infty n |\alpha_n|^2$$

valable toutes les fois que $\sum n |\alpha_n|^2 < \infty$, la fonction d'onde étant $\sum \alpha_n \psi_n(x)$. Puis, étendons la relation $\Delta p \Delta q \geq \frac{h}{4\pi}$ aux quadriques de dispersion.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DE MEHLER ET ÉQUATIONS INTÉGRALES.

$\varphi(x_i)$ est une forme quadratique définie > 0 des variables x_1, x_2, \dots, x_r ,

$$\varphi(x_i) = \alpha_{ij} x_i x_j, \quad \psi(\xi_i) = \beta_{ij} \xi_i \xi_j$$

est la forme réciproque avec

$$\xi_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \alpha_{ij} x_j \quad (x_i = \beta_{ij} \xi_j).$$

Remarque. — Les sommations par rapport à un indice écrit deux fois seront presque toujours sous-entendues; si une sommation ne doit pas avoir lieu, cela sera toujours écrit explicitement.

x désignera souvent l'ensemble des variables x_i , quand il n'y aura aucune ambiguïté (de même, γ, ξ, η, \dots).

Aux formes φ et ψ sont attachés les fonctions et polynomes suivants :

$$(1) \quad \begin{aligned} \gamma_1^\varphi(x_i, h_i) &= e^{\varphi(x_i) - \varphi(x_i - h_i)} = \sum_0^\infty \left(\prod \frac{h_i^{n_i}}{n_i!} \right) H_{n_i}^\varphi(x_i) \\ &= \gamma_2^\varphi(x_i, k_i) = \sum_0^\infty \left(\prod \frac{k_i^{n_i}}{n_i!} \right) G_{n_i}^\varphi(x_i), \end{aligned}$$

avec

$$k_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial h_i}, \quad h_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial k_i}, \quad \gamma_2^\varphi(x_i, k_i) = e^{\varphi(x_i) - \varphi\left(x_i - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial k_i}\right)}.$$

Dans la suite, nous n'écrirons plus le signe Π ; n_i désigne toujours l'ensemble n_1, \dots, n_r , et $\frac{h_i^{n_i}}{n_i!}$ le produit de ces r facteurs.

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n_i}(x_i) G_{n_j}(x_i) e^{-\varphi(x_i)} = a_{n_i}^2 \delta_{ij},$$

c'est-à-dire = 0 si les deux suites n_i et n_j ne sont pas identiques.

$\frac{H_{n_i}(x_i)}{a_{n_i}} = \mathcal{H}_{n_i}(x_i)$ s'appelle le polynome normé, comme

$$\mathcal{G}_{n_i}(x_i) = \frac{G_{n_i}(x_i)}{a_{n_i}};$$

les $\psi_{n_i}^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}} \mathcal{H}_{n_i}$ et $\chi_{n_i}^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}} \mathcal{G}_{n_i}$ forment deux suites orthogonales l'une à l'autre sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, et normées (l'une par rapport à l'autre).

On a

$$(2) \quad \frac{1}{a_{n_i}^2} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi^{\frac{r}{2}}} \frac{1}{\prod r^{\mu_i} n_i!},$$

Δ est le déterminant $|\alpha_{ij}| > 0$ ($\Delta = \Delta_\varphi = \frac{1}{\Delta_\psi}$).

PASSAGE DE H^φ A G^ψ . — Remplaçant la forme φ par sa réciproque :

$$\gamma_1^\varphi(x_i, h_i) = e^{\psi(\xi_i) - \psi(\xi_i - h_i)} = e^{\psi(\xi_i) - \psi\left(\xi_i - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial h_i}\right)} = \gamma_2^\psi(\xi_i, h_i),$$

donc

$$(3) \quad \begin{cases} H_{n_i}^\varphi(x_i) = G_{n_i}^\psi(\xi_i), & \mathcal{H}_{n_i}^\varphi(x_i) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_\psi}} \mathcal{G}_{n_i}^\psi(\xi_i), \\ H_{n_i}^\psi(\xi_i) = G_{n_i}^\varphi(x_i), \end{cases}$$

ou, de même,

$$\psi_{n_i}^\varphi(x_i) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_\psi}} \chi_{n_i}^\psi(\xi_i).$$

Remarque. — On passe de H^φ à G^φ dans (1) en remplaçant h_i par k_i ; l'ensemble des termes de même degré total en h , $\sum_i n_i = \nu$ ne change alors pas, ou

$$\sum_{\Sigma n_i = \nu} \frac{h_i^{n_i}}{n_i!} H_{n_i}^\varphi(x) = \sum_{\Sigma n_i = \nu} \frac{k_i^{n_i}}{n_i!} G_{n_i}^\varphi(x),$$

d'où il résulte que $H_{n_i}^\varphi(x)$ est combinaison linéaire des $G_{n_i}^\varphi$ dont la somme des indices est la même, et réciproquement. Ainsi ψ_{n_i} est orthogonal à tout $\psi_{n'}$ avec $\sum_i n' \neq \sum_i n_i$. De même pour les χ . Ceci est lié aux propriétés des équations intégrales à noyaux symétriques (*cf.* plus loin), exposées par exemple dans Goursat (*Analyse*, t. III).

PLÉNITUDE DU SYSTÈME DES ψ_{n_i} . — La remarque précédente vaut aussi lorsqu'on fait sur les x une transformation linéaire, mais gardant invariante la forme φ .

Ramenons φ à ses axes :

$$\varphi_i^\varphi(x) = \varphi^0(X), \quad \gamma_i^\varphi = e^{\varphi(x_i) - \varphi(x_i - h_i)} = e^{\varphi^0(X_i) - \varphi^0(X_i - H_i)},$$

donc $H_{n_i}^\varphi(x)$ est combinaison linéaire des $H_{n_i}^{\varphi_0}(X)$ avec $\Sigma n'_i = \Sigma n_i$ et réciproquement.

Or, $\psi_{n_i}^{\varphi_0}(X)$ est le produit de ψ d'Hermite à une seule variable, et leur système est donc complet comme dans le cas d'une variable (*cf.*, par exemple, N. Wiener, *loc. citée*).

Soit alors $f(x)$ une fonction de carré sommable, continue par exemple, $f(x) = f^0(X)$ qui peut être approchée en moyenne d'aussi près que l'on veut par une combinaison linéaire de $\psi_{n_i}^{\varphi_0}(X)$, donc $f(x)$ par une autre combinaison de $\psi_{n_i}^\varphi(x)$ [dont les Σn_i ne dépassent pas les $\Sigma n'_i$ utilisés pour approcher $f^0(X)$].

Ceci suffit, d'après la définition même, pour démontrer que le système des $\psi_{n_i}^\varphi(x_i)$ est complet, ainsi que celui des $\chi_{n_i}^\varphi(x_i)$ qui lui est

orthogonal. Il est facile d'orthogonaliser une de ces suites, ce qui nous ramène aux χ^φ suivant des formules données dans le livre de MM. Appell et Kampé de Fériet.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — $\gamma_1^\varphi = e^{-\varphi(h_i) + 2h_i \xi_i}$ est développable en série absolument convergente en h_i , dans tout l'espace des h_i , donc

$$h_i \frac{\partial \gamma}{\partial h_i} = [n_i \gamma] \quad (i \text{ est donné}),$$

$[n_i \gamma]$ désigne la série (1) dans laquelle chaque terme est multiplié par le n_i correspondant (pour un seul i donné à l'avance).

D'autre part, $\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_i} = 2h_i \gamma$ est développable en série suivant les $h_i^{n_i}$ et cette série, comme γ est absolument et uniformément convergente dans tout domaine borné des x_i . On peut donc l'intégrer terme à terme, égaliser les coefficients de $h_i^{n_i}$ avec le même coefficient dans γ_1^φ et en déduire

$$(4) \quad \frac{\partial H_{n_i+1}}{\partial \xi_i} = 2(n_i+1)H_{n_i}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_i} = \sum \frac{h_i^{n_i}}{n_i!} \frac{\partial H_{n_i}}{\partial \xi_i};$$

de (1) on tire aussi

$$H_{n_i}(x_i) = e^\varphi (-1)^v \frac{\partial^v}{\partial x_i^{n_i}} e^{-\varphi(x_i)},$$

d'où

$$(5) \quad \frac{\partial H_{n_i}}{\partial x_i} = 2\xi_i H_{n_i} - H_{n_i+1}.$$

Dans toutes ces formules, comme dans celles qui suivront, seuls les indices explicitement écrits, valent n_i+1 , ceux non écrits ont les valeurs implicites faisant partie du groupe (n_1, n_2, \dots, n_r) .

On a alors

$$h_i \frac{\partial \gamma}{\partial h_i} = h_i \left(2\xi_i - \frac{\partial \varphi}{\partial h_i} \right) \gamma = (2h_i \xi_i - 2\alpha_{ij} h_i h_j) \gamma$$

et comme

$$(6) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_i} = 2h_i \gamma, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = 4h_i h_j \gamma, \quad \alpha_{ij} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial \xi_i},$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi_i \partial x_i} - 2\xi_i \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_i} + 2[n_i \gamma] = 0 \quad (i \text{ donné}) \quad (\gamma_1^\varphi)$$

qui est équivalente, car on peut dériver (1) terme à terme comme indiqué plus haut, à

$$\frac{\partial^2 H_{n_i}}{\partial x_i \partial \xi_i} - 2\xi_i \frac{\partial H_{n_i}}{\partial \xi_i} + 2n_i H_{n_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, r),$$

donc r équations.

On en tire, pour $\Gamma_i^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}} \gamma_i^\varphi$:

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} + \left(x_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} - \xi_i \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_i} \right) - x_i \xi_i \Gamma + [(2n_i + 1)\Gamma] = 0 \quad (i \text{ donné}),$$

car

$$\begin{aligned} \gamma &= \Gamma e^{\frac{\varphi}{2}}, & \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_i} &= \left(x_i \Gamma + \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_i} \right) e^{\frac{\varphi}{2}}, \\ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} &= \left(\Gamma + x_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} + x_i \xi_i \Gamma + \xi_i \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_i} \right) e^{\frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

On aurait, au contraire, pour γ_2^φ et $\Gamma_2^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}} \gamma_2^\varphi$:

$$(6') \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} - 2x_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + 2[n_i \gamma] = 0 \quad (i \text{ donné}) \quad (\gamma_2^\varphi),$$

$$(7') \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} + \left(\xi_i \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_i} - x_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \right) - x_i \xi_i \Gamma + [(2n_i + 1)\Gamma] = 0 \quad (\Gamma_2^\varphi),$$

formules qui résument les équations auxquelles satisfont tous les H_{n_i} et G_{n_i} ainsi que les $e^{-\frac{\varphi}{2}} H_{n_i}$ et $e^{-\frac{\varphi}{2}} G_{n_i}$.

En sommant ces équations par rapport à i , avec $\Sigma n_i = \nu$, on a

$$(6'') \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} - 2\xi_i \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_i} + 2[\nu \gamma] = 0 \quad (\gamma_1^\varphi \text{ et } \gamma_2^\varphi),$$

$$(7'') \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} - \varphi \Gamma + [(2\nu + 1)\Gamma] = 0 \quad (\Gamma_1^\varphi \text{ et } \Gamma_2^\varphi)$$

$$\left(\text{remarquer que } d\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_i} d\xi_i \text{ entraîne } x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right).$$

On remarquera le caractère invariant de ces équations dans un changement linéaire des x_i , et un changement des α_{ij} conservant la forme fondamentale φ , ce qui s'accorde avec l'invariance, déjà remarquée de la famille linéaire des H_{n_i} , $\Sigma n_i = \nu$, dans un tel changement.

A cause de cette invariance, l'équation d'onde d'un oscillateur à r dimensions avec force de rappel dépendant d'un potentiel « elliptique »

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - \alpha_{ij} x_i x_j] \psi = 0$$

ne peut être ramenée à ce type que si $\alpha_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, auquel cas les solutions choisies pour ψ en Mécanique ondulatoire sont les fonctions d'Hermite, mais dégénérées, avec séparation des variables.

Généralisation de la formule de Mehler.

CALCUL FORMEL. — Il s'agit de trouver les sommes de séries de la forme

$$\sum_0^{\infty} \Pi t_i^{n_i} \chi_{n_i}^{\varphi}(y_i) \psi_{n_i}^{\varphi}(x_i) = {}_{11}\mathbf{K}(x_i, y_i, t_i).$$

${}_{11}\mathbf{K}$ est le noyau d'une transformation intégrale

$$g(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}(x_i, y_i, t_i) f(y_i) dx_i$$

qui transforme

$$\psi_{n_i}^{\varphi}(x) \text{ en } t_i^{n_i} \psi_{n_i}^{\varphi}(x) \quad \text{ou} \quad \Gamma_1^{\varphi}(x_i, h_i) \text{ en } \Gamma_1^{\varphi}(x_i, h_i t_i).$$

Autrement dit, les ψ_{n_i} sont les fonctions propres de cet opérateur, solutions de l'équation intégrale homogène correspondante.

$${}_{11}\mathbf{L} = {}_{11}\mathbf{K} e^{-\frac{\varphi(y_i) + \varphi(x_i)}{2}} \text{ transforme } \gamma_1^{\varphi}(x_i, t_i) \text{ en } \gamma_1^{\varphi}(x_i, h_i t_i).$$

Il y a seize noyaux de ce genre; mais, appelons E la transformation consistant à échanger φ et ψ ; e, celle échangeant x et y , T le remplacement de x par ξ qui transforme

$$(T) \quad \mathcal{G}\psi \text{ en } \sqrt{\Delta_{\psi}} \mathcal{H}\psi \quad \text{et} \quad \mathcal{H}\psi \text{ en } \sqrt{\Delta_{\psi}} \mathcal{G}\psi,$$

(T') remplaçant y par η .

Alors de

$$e^{\varphi(y)} {}_{11}\mathbf{L} = \sum t_i^{n_i} \mathcal{G}_{n_i}^{\varphi}(y) \mathcal{H}_{n_i}^{\varphi}(x) \quad \text{et} \quad e^{\varphi(y)} {}_{21}\mathbf{L} = \sum t_i^{n_i} \mathcal{G}_{n_i}^{\varphi}(y) \mathcal{G}_{n_i}^{\varphi}(x),$$

on déduit, respectivement par e et $ET^{-1}T'^{-1}$, les fonctions

$$e^{\varphi(y)} {}_2L = \sum t_i^{n_i} \mathcal{H}_{n_i}^{\varphi}(y) \mathcal{G}_{n_i}^{\varphi}(x) \quad \text{et} \quad e^{\varphi(y)} {}_{12}L = \sum t_i^{n_i} \mathcal{H}_{n_i}^{\varphi}(y) \mathcal{H}_{n_i}^{\varphi}(x).$$

Par E , de ces quatre-là, on déduit 1L , 2L , 3L , 4L .

Par T^{-1} , des quatre premiers, ceux (à l'ordre près) obtenus en remplaçant φ par ψ dans $\mathcal{H}^{\varphi}(x)$ ou $\mathcal{G}^{\varphi}(x)$.

Enfin, par e (ou E), de ces quatre derniers, les quatre restants (à savoir de 1L , 2L , 3L , 4L ; 2L , 3L , 1L , 4L ; 3L , par exemple; transformant γ_i^{φ} en γ_i^{ψ}).

On peut donc se réduire à la recherche formelle de ${}_{11}L$ et ${}_{21}L$.

Pour cela, utilisons les fonctions génératrices et la formule

$$\int {}_{11}L(x_i, y_i) e^{\varphi(y_i) - \varphi(y_i - h_i)} dy_i = e^{\varphi(x_i) - \varphi(x_i - h_i)}$$

(comme M. Norbert Wiener pour une variable).

Or L ne comprend pas les h_i . Cherchons pour $-\log L$ une expression forme quadratique des x_i, y_i, t_i :

$$\int L e^{-[\varphi(h_i) - \varphi(h_i t_i)] + 2h_i(\eta_i - t_i \xi_i)} dy_i = 1 \quad \left(\eta_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}, \xi_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right).$$

Soit $\zeta(x_i, t_i)$ la forme

$$\zeta = \alpha_{ij}(1 - t_i t_j) x_i x_j = \varphi(x_i) - \varphi(t_i x_i),$$

τ sa forme réciproque et

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial h_i}, \quad h_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \lambda_i};$$

l'exposant de e est

$$\begin{aligned} -\zeta(h_i, t_i) + 2h_i(\eta_i - t_i \xi_i) &= -\tau(\lambda_i) + \frac{\partial \tau}{\partial \lambda_i}(\eta_i - t_i \xi_i) \\ &= -\tau[\lambda_i - (\eta_i - t_i \xi_i)] + \tau(\eta_i - t_i \xi_i). \end{aligned}$$

L est donc de la forme $A e^{-\tau(\eta_i - t_i \xi_i)}$, aux

$$A \int e^{-\tau[\lambda_i - (\eta_i - t_i \xi_i)]} d\eta_i = \Delta_{\varphi}, \quad \text{car} \quad dy_1 \dots dy_r = d\eta_1 \dots d\eta_r \frac{1}{\Delta}.$$

$$\text{Comme } \int e^{-\tau(\eta_i)} d\eta_i = \frac{r}{\sqrt{\Delta_\tau}},$$

$$A = \frac{\Delta_\varphi}{\pi^2 \sqrt{\Delta_\zeta}} \quad (A \text{ dépendant des } t_i),$$

tandis que

$$\int {}_2L(x_i, y_i, t_i) e^{-\varphi(h_i) + 2h_i \eta_i} dy_i = e^{-\psi(h_i t_i) + 2x_i h_i t_i},$$

d'où, formellement

$$(8) \quad {}_{11}L = \frac{\Delta_\varphi}{\pi^2 \sqrt{\Delta_\zeta}} e^{-\tau(\eta_i - t_i \xi_i)}, \quad {}_2L = \frac{\Delta}{\pi^2 \sqrt{\Delta_{\zeta'}}} e^{-\tau'(\eta_i - t_i \nu_i)}$$

τ et τ' sont les formes réciproques respectivement de

$$\zeta = \varphi(x_i) - \varphi(x_i t_i) \quad \text{et} \quad \zeta' = \varphi(x_i) - \psi(x_i t_i).$$

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AUXQUELLES SATISFONT CES NOYAUX. —
Posons $Z_{n_i} = t_i^{n_i} \mathcal{E}_{n_i}$. Comme

$$2 t_i \frac{\partial z_{n_i}}{\partial t_i} = 2 n_i \mathcal{E}_{n_i} \quad (i \text{ donné}),$$

(6) devient

$$(6_a) \quad \frac{\partial^2 z_{n_i}}{\partial x_i \partial \xi_i} - 2 \xi_i \frac{\partial z_{n_i}}{\partial \xi_i} + 2 t_i \frac{\partial z_{n_i}}{\partial t_i} = 0, \quad \text{donc } {}_{11}L = \Sigma \mathcal{G}_{n_i}(y_i) z_{n_i}(x_i)$$

doit vérifier la même équation.

Si l'on écrit

$${}_{11}L = \frac{\Delta_\varphi}{\pi^2 \sqrt{\Delta_\zeta}} e^{-\tau(u)} \quad (u_i = \eta_i - t_i \xi_i),$$

la nouvelle dérivée par rapport à t_i (provenant simplement du terme Δ_ζ et de la forme τ) vaut

$$\frac{\partial {}_{11}L}{\partial t_i} + \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{\partial \xi_i} = -t_i \frac{\partial z}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = t_i t_j \frac{\partial^2 z}{\partial u_i \partial u_j};$$

l'équation (6_a) devient

$$(9) \quad \alpha_{ij} t_j \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} + 2 \frac{\partial L}{\partial t_i} = 0 \quad [i \text{ donné}; L(u_i, t_i)].$$

Vérifions-le par un calcul direct sur ${}_1L(u_i, t_i)$,

$$L = \frac{1}{\sqrt{\Delta_\zeta}} e^{-\tau(u_i)} \text{ à un facteur constant près.}$$

Calculons $\frac{\partial \Delta_\zeta}{\partial t_i}$, en dérivant successivement chaque ligne et en appelant $\tau_{ij} \Delta_\zeta$ les mineurs (les τ_{ij} sont les coefficients de la forme τ).

La $j^{\text{ième}}$ ligne donne

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \alpha_{ij}(1 - t_i t_j) \Delta_\zeta \tau_{ij} = -\alpha_{ij} t_j \Delta_\zeta \tau_{ij} \quad (j \neq i);$$

La $j^{\text{ième}}$ ligne

$$-\alpha_{ij} t_j \Delta_\zeta \tau_{ij} \quad (j \neq i) \quad \text{et} \quad -2\alpha_{ii} t_i \Delta_\zeta \tau_{ii} \quad (j = i);$$

soit en tout

$$t_i \frac{\partial \Delta_\zeta}{\partial t_i} = -2\alpha_{ij} t_i t_j \tau_{ij} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{L} t_i \frac{\partial L}{\partial t_i} = \alpha_{ij} t_i t_j \tau_{ij} - t_i \frac{\partial \tau}{\partial t_i}.$$

Il faut encore $\frac{\partial \tau}{\partial t_i}$; or, considérant les x_i comme indépendants de t_i , $\zeta(x_i) = \tau(u_i)$,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t_i} = -2\alpha_{ij} t_j x_i x_j = \frac{\partial \tau}{\partial t_i} + \frac{\partial \tau}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial t_i} = \frac{\partial \tau}{\partial t_i} + 2x_j \frac{\partial u_j}{\partial t_i}$$

et

$$\frac{\partial u_j}{\partial t_i} = -\alpha_{ij} t_j x_i \quad (j \neq i)$$

et

$$-\alpha_{ik} x_k t_k - 2\alpha_{ii} x_i t_i \quad (k \neq i) \quad \text{pour} \quad \frac{\partial u_j}{\partial t_i},$$

d'où

$$t_i \frac{\partial \tau}{\partial u_i} = t_i \frac{\partial \zeta}{\partial t_i} + 4\alpha_{ij} t_i t_j x_i x_j = 2\alpha_{ij} t_i t_j x_i x_j$$

ou

$$\frac{1}{L} t_i \frac{\partial L}{\partial t_i} = \alpha_{ij} t_i t_j (\tau_{ij} - 2x_i x_j) \quad (i \text{ donné}).$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial u_i} &= -2x_i, & \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} &= -2\tau_{ij} + 4x_i x_j, \\ & & \alpha_{ij} t_j \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} + 2 \frac{\partial L}{\partial t_i} &= 0, \end{aligned}$$

ce que nous voulions démontrer.

JUSTIFICATION DES FORMULES. — C'est-à-dire du développement de ${}_{11}L$ en $t_i^{n_i} \mathcal{G}_{n_i}^\varphi(y) \partial \mathcal{E}_{n_i}^\varphi(x)$.

Nous partons de

$$\int {}_{11}L e^{\varphi(y_i) - \varphi(y_i - h_i)} dy_i = e^{\varphi(x_i) - \varphi(x_i - h_i t_i)}$$

que nous pouvons dériver sous le signe \int , par rapport à h_i , sous condition que la dérivée soit absolument et uniformément convergente dans un certain domaine des h_i .

Or, l'exposant de e , sous le signe \int est $-\tau(\eta_i - t_i \xi_i) - \varphi(h_i) + 2h_i \eta_i$, qu'il est facile de majorer pour η_i assez grand et les h_i, t_i , assez petits, par exemple

$$|\eta_i - t_i \xi_i| > \frac{|\eta_i|}{2}, \quad \text{soit } h_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial l_i}(l_i), \quad -\tau\left(\frac{|\eta_i|}{2} - 2l_i\right) + \tau(2l_i),$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial h_i} \int {}_{11}L e^{\varphi(y_i) - \varphi(y_i - h_i)} dy_i \quad \text{majoré par } K \int 2|\eta_i| e^{-\tau\left(\frac{|\eta_i|}{4}\right)} dy_i.$$

Une telle majoration vaudra pour une dérivation quelconque $\frac{\partial^v}{\prod \partial h_i^{n_i}}$, puis faisant $h_1 = \dots = h_r = 0$,

$$\int {}_{11}L(x_i, y_i, t_i) \partial \mathcal{E}_{n_i}(y_i) dy_i = t_i^{n_i} \partial \mathcal{E}_{n_i}(x_i)$$

qui vaut dans tous les cas où la forme τ est définie positive.

Les fonctions propres de l'équation intégrale homogène de noyau ${}_{11}L$ sont donc les \mathcal{E}_{n_i} . Pour x_i fixe, ${}_{11}K$, continue et de carré sommable (en y_i) égale son développement suivant le système des $\chi_{n_i}(y_i)$; et le coefficient de $\chi_{n_i}(y_i)$ est, d'après ce qui vient d'être vu, $t_i^{n_i} \psi_{n_i}(x_i)$.

Rappelons que

$${}_{11}K = e^{-\frac{\varphi(x_i)}{2}} e^{\frac{\varphi(y_i)}{2} - \tau(\eta_i - t_i \xi_i)}$$

à un coefficient près; et la formule de Mehler se prolonge dans tout le domaine des $|t_i|$ où ${}_{11}K$ admet un développement absolument convergent, c'est-à-dire $\Delta_i > 0$.

M. Wiener, pour une variable, n'emploie pas un tel argument et

étudie directement le développement du noyau ${}_1L$ par une méthode plus longue et difficile à généraliser.

Notons aussi que les théorèmes généraux de Hilbert ne s'appliquent pas à un noyau qui, comme ${}_1L$, n'est pas de carré doublement sommable (par rapport aux x_i et aux y_i).

MÉTHODE DE M^{me} LEBEDEF ET THÉORÈMES DE DÉVELOPPEMENT (*loc. citée*). — Rappelons le principe de la méthode classique de Hilbert⁽⁷⁾, Schmidt pour établir des théorèmes de développement d'une fonction suivant la suite orthogonale ψ_i .

Les ψ sont solutions de l'équation du type de Sturm-Liouville

$$(a) \quad \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + [q(x) + \lambda u] = 0$$

avec des conditions limites (pour $x = 0$, $x = l$) homogènes, et pour les valeurs propres $\lambda = \lambda_i$. Appelons $\mathcal{L}u$ le premier membre de (a) pour $\lambda = 0$; si $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre, la solution de

$$(b) \quad \mathcal{L}(u) = \varphi(x)$$

est

$$(c) \quad u = \int_0^l K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

$K(x, \xi)$ est la fonction de Green, solution de $\mathcal{L}K = 0$ à la fois par rapport à x et ξ , satisfaisant aux conditions limites imposées, mais dont la dérivée admet la discontinuité $-\frac{1}{p(\xi)}$ pour $x = \xi$ ($\mathcal{L}K = 0$ n'étant pas satisfaite en ce point).

C'est la relation (c), jointe à (b) qui sert de base aux théorèmes de développement, mais n'est applicable que si la fonction de Green existe. Si non, il faut trouver par une autre méthode le noyau K ; c'est ce que fait W. Lebedeff appliquant la formule de Green

$$\iint_v [v \mathcal{L}(u) - u \mathcal{L}'(v)] = \int_s \left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) dt + uv dx$$

(7) COURANT und HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, Bd. § 14.



à u et v telles que $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}'(v) = 0$, \mathcal{L} et \mathcal{L}' étant les deux opérateurs adjoints

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Les u sont des fonctions de x et t liées de près aux polynômes d'Hermite et v , soumise à certaines conditions limites fournira le noyau cherché. Nous allons utiliser la même méthode, généralisée à n variables, et connaissant déjà le noyau, pour justifier une deuxième fois les propriétés de nos noyaux $L(x_i, y_i, t_i)$, et obtenir de nouvelles formules.

Introduisons des τ_i pour homogénéiser l'expression de τ et L :

$${}_{11}L = \frac{\Delta_\varphi}{\pi^2 \sqrt{\Delta_\zeta}} e^{-\tau(\tau_i \eta_i - t_i \xi_i)},$$

avec

$$\zeta = \alpha_{ij}(\tau_i \tau_j - t_i t_j) x_i x_j \quad (\tau \text{ forme réciproque de } \zeta),$$

${}_{11}L(u_i, \tau_i, t_i)$ satisfait aux équations, déduites de (9),

$$(9') \quad \alpha_{ij} \tau_j \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} - 2 \frac{\partial L}{\partial \tau_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r; u_i = \tau_i \eta_i - t_i \xi_i),$$

système d'équations adjoint à (9) (les τ_j remplaçant les t_j).

Appliquons la formule de Green, avec ces deux systèmes d'opérateurs adjoints :

$$\mathcal{L}_i = \alpha_{ij} \tau_j \frac{\partial^2}{\partial \eta'_i \partial \eta'_j} + 2 \frac{\partial}{\partial \tau_i}, \quad \mathcal{L}'_i = \alpha_{ij} \tau_j \frac{\partial^2}{\partial \eta'_i \partial \eta'_j} - 2 \frac{\partial}{\partial \tau_i}$$

à la fonction $L(\eta'_i, \tau_j)$ d'une part, et à des fonctions $f(\eta'_i, \tau_j)$ satisfaisant à (9)

$$(9) \quad \alpha_{ij} \tau_j \frac{\partial^2 f}{\partial \eta'_i \partial \eta'_j} + 2 \frac{\partial f}{\partial \tau_i} = 0;$$

pour f nous pouvons prendre les $\tau_i^{n_i} \mathcal{H}_{n_i}(y_i)$ exprimées en $\eta'_i = \tau_i \eta_i$ ou y'_i (définies par $\eta'_i = \alpha_{ij} y'_j$), car (6a) devient (9) par un tel changement de variables.

(9) est donc aussi satisfaite par

$$\gamma_i^{\varphi} = e^{-\varphi(h_i \tau_i) + 2 h_i \tau_i},$$

Nous intégrons dans le volume ν à $r + 1$ dimensions limité par

$$\eta_j' = \pm \eta_j^0, \quad \tau_i = \tau_i^0 \quad \text{ou} \quad \tau_i^1.$$

Il suffit d'intégrer par parties, par rapport à η_i' et τ_i pour le premier terme du premier membre et η_j' et τ_i pour le deuxième pour obtenir

$$\int_{\nu} [f \mathcal{L}'_i L - L \mathcal{L}_i f] d\eta_j' d\tau_i = \int_s f \alpha_{ij} \tau_j \frac{\partial L}{\partial \eta_j'} \frac{d\eta_1' \dots d\eta_r'}{d\eta_i'} d\tau_i - \int_s L \alpha_{ij} \tau_j \frac{\partial f}{\partial \eta_i'} \frac{d\eta_1' \dots d\eta_r'}{d\eta_j'} d\tau_i - \int_s 2 f L d\eta_j';$$

j doit être sommé de 1 à r , une intégrale sur s n'est étendue qu'à deux faces opposées de s . Il reste finalement, si nous faisons tendre les η_j^0 vers l'infini, vu la forme de L :

$$\int_{\tau_i = \tau_i^1} f L d\eta_j' = \int_{\tau_i = \tau_i^0} f L d\eta_j' \quad \text{qui vaut pour tout } i,$$

où, $\int_{\tau_1 \dots \tau_r} L f dy_j$ est indépendant de τ . On peut prendre L égal à $\frac{\Delta_\varphi}{\pi^{\frac{r}{2}} \sqrt{\Delta_\varphi}} e^{-\tau(\tau_i \eta_i - t_i \xi_i)}$; tout ceci vaut tant que τ est une forme définie > 0 .

Posons $\tau_i = \lambda t_i$, λ tendant vers 1 par valeurs supérieures. On a

$$\zeta(x) = (\lambda^2 - 1) \alpha_{ij} t_i t_j \alpha_{ij} x_j = (\lambda^2 - 1) \zeta'$$

et $\tau(u) = \frac{\tau'(u)}{\lambda^2 - 1}$ devient infinie quand $\lambda \rightarrow 1$, mais reste toujours définie > 0 .

On a

$$u_i = t_i (\lambda \eta_i - \xi_i) = \eta_i' - t_i \xi_i.$$

Recherchons la limite de

$$\tau_1 \dots \tau_r \int L f dy_j = \frac{1}{\pi^{\frac{r}{2}} \sqrt{\lambda^2 - 1} \pi^r \sqrt{\Delta_\varphi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau'(\lambda t_i \eta_i - \tau_i \xi_i)}{\lambda^2 - 1}} f d\eta_j' \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow 1.$$

Pour vérifier que c'est $f(x_i, t_i)$, ramenons τ' à ses axes

$$\tau'(u_i) = \sum_1^r (u_i^0)^2, \quad u_i = \delta_{ij} u_j^0, \quad u_i^0 = \delta_{ij} u_j = \lambda \eta_i^0 - \xi_i^0,$$

soit

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sum \frac{(\lambda \eta_i^0 - \xi_i)^2}{\lambda^2 - 1}}}{\pi^{\frac{r}{2}} \sqrt{\Delta_{\tau_i}}} f \frac{D(u_i)}{D(u_i^0)} \frac{du_i^0}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} = f(x_i, t_i),$$

car

$$u_i^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_i}{\partial u_j} \delta_{ij} \quad \text{entraîne} \quad \frac{D(u_i^0)}{D(u_i)} = \Delta_{\tau_i} \frac{D(u_i)}{D(u_i^0)}$$

et l'intégration se sépare en r intégrations par rapport à une variable; et la formule se réduit à

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \int e^{-u^2} f(x + \sqrt{\lambda^2 - 1} u) du = \sqrt{\pi} f(x).$$

Faisant $\tau_i = 1$, nous démontrons ainsi à nouveau que les $\mathcal{H}_{n_i}(x_i)$ sont fonctions propres pour la valeur propre $\lambda = \Pi t_i^{n_i}$.

Nous voyons que les noyaux trouvés ici ne sont autres que les noyaux de la forme $e^{-(y-x)^2}$, singuliers, généralisés au cas de r variables.

PROPRIÉTÉS DE DÉVELOPPEMENT. — Sur la base de relations généralisant (b) et (c) au cas où la variable t intervient dans u , φ et \mathcal{L} , M^{mo} Lebedeff obtient le théorème suivant :

Toute fonction $f(x)$ continue ainsi que ses deux premières dérivées, sur $-\infty, +\infty$, telle que

$$A f = f''(x) + (1 - x^2) f(x)$$

soit, ainsi que son carré, sommable sur $(-\infty, +\infty)$ est développable en une série absolument et uniformément convergente sur $(-\infty, +\infty)$ suivant les $\psi_n(x)$ d'Hermite.

Il est facile de passer de là à un théorème semblable, relatif à l'uniformité du développement, pour r variables. Nous le ferons pour $r = 2$.

Supposant $A_y f(x, y)$ sommable ainsi que son carré, $f(x, y)$ est approchable d'aussi près que voulu par $\sum_1^N \alpha_n(x) \psi_n(y)$, à ε près, et uniformément par rapport à y dans $(-\infty, +\infty)$.

$$\alpha_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \psi_n(y) dy$$

est dérivable sous le signe \int si, par exemple, f et ses dérivées des deux premiers ordres sont bornées et

$$A \alpha_n(x) = \int \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + (1 - x^2) f(x, y) \right] \psi_n(y) dy.$$

Si donc $\int A_x f(x, y) dx$ et $\int [A_x f(x, y)]^2 dx$ existent et tendent, pour $y \rightarrow \infty$, vers l'infini comme y^k , k étant fini, le théorème de développement s'applique pour chaque $\alpha_n(x)$

$$(d) \quad \left| \alpha_n(x) - \sum_1^{P_n} \alpha_{mn} \psi_m(x) \right| \leq \eta$$

et M_n étant la borne supérieure de ψ_n sur $(-\infty, +\infty)$,

$$\left| f(x, y) - \sum_{n=1}^N \sum_1^{P_n} \alpha_{mn} \psi_m(x) \psi_n(y) \right| \leq \varepsilon + \eta \sum_1^N M_n,$$

quels que soient x et y .

Choissant N assez grand, puis les P_n assez grands pour satisfaire à (d), avec η arbitrairement petit, $f(x, y)$ peut ainsi être développée en série uniformément convergente suivant les $\psi_m(x) \psi_n(y)$; il en est donc de même quand on remplace les $\psi_m(x) \psi_n(y)$ par les $\psi_{m,n}^\varphi$ relatifs à la forme quadratique $\varphi(x, y)$, pour les mêmes raisons que celles invoquées à propos de la plénitude du système des ψ_{n_i} (p. 89).

D'une façon générale, il faut supposer que

$$\int A_{x_i} f(x_1, \dots, x_r) dx_i \quad \text{et} \quad \int [A_{x_i} f(x_1, \dots, x_r)]^2 dx_i$$

n'augmentent pas quand $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r$ tendent vers l'infini, plus vite qu'un polynôme déterminé par rapport à ces variables.

AUTRES MÉTHODES. — Loschmieder a utilisé, pour $r = 2$, l'expression intégrale des H_{mn} , sous forme d'une intégrale double

$$H_{mn} = \frac{(-i)^{m+n}}{2\pi\sqrt{\Delta}} e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\psi(u,v) + i(xu+yv)} u^m v^n du dv.$$

Erdélyi procède directement, à partir des fonctions génératrices et à l'aide de formules donnant $\Sigma a_n b_n z^n$ en fonction de $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma b_n z^n$ et obtient la formule

$$\sum \frac{t_i^{n_i}}{n_i!} H'_{n_i}(y) H'_{n_i}(x) = \frac{1}{\prod t_i \sqrt{\Delta'_1 \Delta'_2}} e^{\frac{\psi'_1(\xi' + \eta) - \psi'_2(\psi' - \eta)}{4}},$$

avec

$$\sum \frac{h_i^{n_i}}{n_i!} H'_{n_i}(x) = e^{-\frac{\varphi'(h_i)}{2} + \frac{1}{2} h_i \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i}}, \quad \xi' = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i},$$

ψ'_1 en ψ'_2 étant les formes réciproques de

$$\varphi'_1 = \frac{x_i^2}{t_i} + \varphi', \quad \varphi'_2 = \frac{x_i^2}{t_i} - \varphi'$$

de déterminants Δ'_1 et Δ'_2 .

Posons $\varphi' = 2\varphi$, $t_i = \frac{t_i}{2}$; les $H'_{n_i}(x)$ sont alors les $H_{n_i}^\varphi(x)$ avec nos notations et il vient

$$\begin{aligned} \varphi'_1 = 2\varphi_1, \quad \psi'_1 = \frac{1}{2}\psi_1, \quad \xi' = 2\xi; \\ \psi_1(\xi') = 2\psi_1(\xi), \\ \sum \frac{\left(\frac{t_i}{2}\right)^{n_i}}{n_i!} H_{n_i}(y) H_{n_i}(x) = \frac{1}{\prod t_i \sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} e^{\frac{b_1(\xi - \eta) - \psi_2(\xi - \eta)}{2}}, \end{aligned}$$

tandis que nous avons obtenu

$$\Sigma t_i^{n_i} \mathcal{H}_{n_i}(y) \mathcal{H}_{n_i}(x) = \Sigma \pi^{-\frac{r}{2}} \frac{\sqrt{\Delta}}{n_i!} \left(\frac{t_i}{2}\right)^{n_i} H_{n_i}(y) H_{n_i}(x) = e^{\varphi(y)} {}_{12}\mathbf{L}$$

et

$$e^{\varphi(y)} {}_{21}\mathbf{L} = \frac{\Delta e^{\varphi(y)}}{\pi^{\frac{r}{2}} \sqrt{\Delta'_y}} e^{-\tau'(\eta_i - t_i x_i)}.$$

Par la transformation T et le changement de φ en ψ , on en déduit ${}_{12}\mathbf{L}$:

$$\Sigma t_i^{n_i} \mathcal{H}_{n_i}^\varphi(y) \mathcal{H}_{n_i}^\varphi(x) = \Delta \Sigma t_i^{n_i} \mathcal{G}_{n_i}^\psi(\eta) \mathcal{G}_{n_i}^\psi(\xi) = \frac{\Delta e^{\varphi(y)}}{\Delta \pi^{\frac{r}{2}} \sqrt{\Delta'_\xi}} e^{-\tau(\eta_i - t_i \xi_i)},$$

donc

$$\sum \left(\frac{t_i}{2}\right)^{n_i} \frac{1}{n_i!} H_{n_i}(y) H_{n_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta \Delta_\zeta}} e^{-\tau(y_i - t_i \xi_i) + \varphi(y)},$$

τ étant réciproque de $\zeta = \psi(x_i) - \varphi(t_i x_i)$.

On vérifie bien que

$$t_1^2 \dots t_r^2 \Delta_1 \Delta_2 = \Delta \Delta_\zeta,$$

car, soit A l'opérateur

$$A x = \xi \quad (\varphi(x) = (x, A x))$$

et t l'opérateur

$$t(x_i) = (t_i x_i),$$

alors $t_1, \dots, t_r, \Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_\zeta$ sont respectivement les déterminants des transformations linéaires :

$$t, \quad A, \quad \frac{1}{t} + A, \quad \frac{1}{t} - A, \quad A^{-1} - t A t = A^{-1} \left(A + \frac{1}{t} \right) t \left(-A + \frac{1}{t} \right) t,$$

donc

$$\Delta_\zeta = \frac{1}{\Delta} \Delta_1 \Delta_2 t_1^2 \dots t_r^2.$$

Vérifions aussi que

$$-\tau(y_i - t_i \zeta_i) = \frac{1}{2} [\psi_1(\xi + \eta) - \psi_2(\xi - \eta) - \varphi(y)],$$

le premier membre s'écrit

$$-(y_i - t_i \zeta_i) u_i, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial u_i} = y_i - t_i \zeta_i,$$

le deuxième

$$\frac{1}{2} [(x'_i + y'_i)(\xi_i + \eta_i) - (x''_i - y''_i)(\xi_i - \eta_i) - 2y_i \eta_i],$$

avec

$$\begin{aligned} \left(A + \frac{1}{t} \right) x' &= A x, & \left(A + \frac{1}{t} \right) y' &= A y; \\ \left(-A + \frac{1}{t} \right) x'' &= A x, & \left(-A + \frac{1}{t} \right) y'' &= A y, \end{aligned}$$

soit

$$\frac{\zeta_i}{2} (x'_i - x''_i + y'_i + y''_i) + \eta_i \left[\left(\frac{x'_i + x''_i}{2} + \frac{y'_i - y''_i}{2} \right) - y_i \right]$$

qui, compte tenu de

$$\left(y, A \frac{x' + x''}{2} \right) = \left(\eta, \frac{x' + x''}{2} \right)$$

et

$$A \frac{x' + x''}{2} = -\frac{1}{t} \left(\frac{x' - x''}{2} \right), \quad A \left(\frac{y' - y''}{2} - y \right) = -\frac{1}{t} \left(\frac{y' + y''}{2} \right),$$

devient

$$-(y_t - t_i \xi_t) \left(\frac{x' - x'' + y' + y''}{2t} \right).$$

Il suffit finalement de vérifier que

$$(A^{-1} - tA) \left(\frac{x' - x'' + y' + y''}{2t} \right) = y - t\xi,$$

or c'est

$$\begin{aligned} A^{-1} \left(\frac{x' - x'' + y' + y''}{2t} \right) - tA \left(\frac{x' - x'' + y' + y''}{2} \right) \\ = -\frac{x' + x''}{2} - \left(\frac{y' - y''}{2} - y \right) + \frac{x' + x''}{2} - tAx + \frac{y' - y''}{2} = y - t\xi. \end{aligned}$$

La forme que nous utilisons a l'avantage de montrer que le noyau ne dépend en réalité que de r variables et non de $2r$. Par contre, il y aura avantage à définir le domaine des $|t_i|$ où nos formules de développement sont valables comme celui où φ_2 est défini > 0 plutôt que celui où ζ l'est; ces domaines sont identiques mais la forme φ_2 est définie beaucoup plus simplement.

CAS PARTICULIERS. — Faisons $t_1 = t_2 = \dots = t_r = t$, alors

$${}_{11}K = e^{\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{2}} {}_{11}L = \frac{\sqrt{\Delta}}{[\pi(1-t^2)]^{\frac{r}{2}}} e^{\frac{4t\varphi(x,y) - (1+t^2)[\varphi(x) + \varphi(y)]}{2(1-t^2)}} = \sum t^{\sum n_i} \chi_{n_i}(y) \psi_{n_i}(x).$$

Il est symétrique, donc admet aussi bien les ψ_{n_i} que les χ_{n_i} comme fonctions propres. Ceci illustre les propositions classiques sur la décomposition des noyaux symétriques (Cf. GOURSAT, t. III du *Cours d'Analyse*).

Pour obtenir la transformation de Fourier, prenons

$$\sum t_i^{n_i} \mathcal{G}_{n_i}^\varphi(y) \mathcal{G}_{n_i}^\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum t_i^{n_i} \mathcal{G}_{n_i}^\varphi(y) \mathcal{H}_{n_i}^\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} e^{\varphi(y)} {}_{11}L,$$

remplaçant ξ par x , on a donc

$$\sum t_i^{n_i} e^{\frac{-\varphi(y) + \psi(x)}{2}} \chi_{n_i}^\varphi(y) \chi_{n_i}^\psi(x) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi^{\frac{r}{2}} \sqrt{\Delta_r}} e^{-\tau(\eta_i - t_i x_i)}.$$

Faisons $t_1 = \dots = t_r = t$,

$$\tau(\eta_i - t x_i) = \frac{\psi(\eta_i - t x_i)}{1 - t^2} = \frac{\varphi(y) - 2 t x_i y_i + t^2 \psi(x)}{1 - t^2},$$

$$\sum t^v \chi_{n_i}^\varphi(y) \chi_{n_i}^\psi(x) = \frac{1}{[\pi(1 - t^2)]^{\frac{r}{2}}} e^{+\frac{2 t x_i y_i}{1 - t^2} - \frac{1 + t^2}{2(1 - t^2)} [\varphi(y) + \psi(x)]};$$

pour $t = i$ c'est, formellement, la transformation de Fourier et

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{r}{2}}} \int e^{i x_i y_i} \psi_{n_i}^\varphi(y_i) = \chi_{n_i}^\psi(x_i),$$

la justification donnée plus haut étant toujours valable, mais le développement en série multiple absolument convergente ne vaut plus.

Ajoutons enfin que dans le domaine des $|t_i|$ où ζ est une forme définie > 0 , vaut une relation d'itération

$$\int \dots \int {}_{11}L(x_i, y_i, \tau_i, t_i) {}_{11}L(y_i, z_i, \tau_i, t_i) dy_i = {}_{11}L(x_i, z_i, \tau_i, t_i),$$

il suffit de développer ${}_{11}L(y_i, z_i, \tau_i, t_i)$ et d'intégrer terme à terme pour obtenir le deuxième membre.

CHAPITRE II.

LIMITATION DU MODULE DES FONCTIONS D'HERMITE ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Nous voulons tout d'abord généraliser les relations

$$\frac{d}{dx} [(\psi_n^2 + \psi_{n-1}^2) e^{x^2}] = 4x e^{x^2} \psi_{n-1}^2 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} [(\psi_n^2 + \psi_{n-1}^2) e^{-x^2}] = -4x e^{-x^2} \psi_n^2$$

à partir desquelles Iyengar obtient $\psi_n^2(x) < \frac{k e^{x^2}}{\sqrt{n+1}}$ valable pour tout n et tout x .

De (1), (4) et (5), nous tirons

$$\frac{\partial H_{n_i}^2}{\partial x_i} = 4\xi_i H_{n_i}^2 - \frac{1}{2(n_i+1)} \frac{\partial H_{n_i+1}^2}{\partial \xi_i};$$

or

$$\mathcal{H} = \frac{H}{a}, \quad \frac{a_{n_i+1}^2}{a_{n_i}^2} = 2(n_i+1),$$

d'où

$$(1) \quad \begin{cases} 4\xi_i \mathcal{H}_{n_i}^2 = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathcal{H}_{n_i+1}^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}_{n_i}^2 & (i \text{ donné}), \\ -4x_i f_{n_i}^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} f_{n_i+1}^2 + \frac{\partial}{\partial \xi_i} f_{n_i}^2 & (f_{n_i} = e^{-\varphi} \mathcal{H}_{n_i}), \end{cases}$$

car

$$\begin{aligned} e^{-2\varphi} \frac{\partial}{\partial \xi_i} e^{2\varphi} f_{n_i+1}^2 &= \frac{\partial}{\partial \xi_i} f_{n_i+1}^2 + 4x_i f_{n_i+1}^2, \\ e^{-2\varphi} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{2\varphi} f_{n_i}^2 &= \frac{\partial}{\partial x_i} f_{n_i}^2 + 4\xi_i f_{n_i}^2. \end{aligned}$$

Les formules (1) sont liées aux formules de récurrence suivantes, connues

$$(1') \quad \begin{cases} H_{n_i+1} - 2\xi_i H_{n_i} + 2n_k \alpha_{ik} H_{n_k-1} = 0, \\ \beta_{ik} H_{n_k+1} - 2x_i H_{n_i} + 2n_i H_{n_i-1} = 0. \end{cases}$$

Cherchons des formules analogues à (1), mais portant sur les produits $\mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i}$; de même que (4) et (5) du chapitre I, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}_{n_i+1}(x)}{\partial x_i} &= 2(n_i+1) \mathcal{G}_{n_i}(x) \quad \text{ou} \quad \mathcal{H}_{n_i} \frac{\partial \mathcal{G}_{n_i+1}}{\partial x_i} = \mathcal{G}_{n_i} \mathcal{H}_{n_i}, \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{n_i}(x)}{\partial \xi_i} &= 2x_i \mathcal{G}_{n_i}(x) - \mathcal{G}_{n_i+1}(x) \end{aligned}$$

et les relation de récurrence

$$(2') \quad \begin{cases} \mathcal{G}_{n_i+1} - 2x_i \mathcal{G}_{n_i} + 2n_k \beta_{ik} \mathcal{G}_{n_k-1} = 0, \\ \alpha_{ik} \mathcal{G}_{n_k+1} - 2\xi_i \mathcal{G}_{n_i} + 2n_i \mathcal{G}_{n_i-1} = 0, \end{cases}$$

qu'on peut déduire directement de (2).

De (4), (5) et des analogues, on tire

$$2 \xi_i \mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} = \mathcal{G}_{n_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}_{n_i} + \mathcal{H}_{n_i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{G}_{n_i+1},$$

$$2 x_i \mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} = \mathcal{H}_{n_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathcal{G}_{n_i} + \mathcal{G}_{n_i+1} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathcal{H}_{n_i+1}$$

ou

$$2 \xi_i \mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} = \mathcal{H}_{n_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{G}_{n_i} + \mathcal{G}_{n_i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}_{n_i+1}.$$

donc

$$(2) \quad \begin{cases} 4 \xi_i \mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} + \mathcal{H}_{n_i+1} \mathcal{G}_{n_i+1}), \\ 4 x_i \mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} + \mathcal{H}_{n_i+1} \mathcal{G}_{n_i+1}). \end{cases}$$

Nous devons nous servir du deuxième groupe d'équations (1) pour arriver à une relation de la forme

$$d[\quad] = -T \quad (T \geq 0),$$

le crochet étant une combinaison à coefficients positifs de $f_{n_i}^2$.

Il est difficile *a priori* de savoir entre quelles équations procéder à l'élimination pour obtenir cette formule; pour $n = 3$, on peut trouver huit des équations (1), dont les premiers membres sont linéairement dépendants par rapport aux huit inconnues en $\frac{\partial}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial \xi}$. d'où une relation entre les f^2 et leurs $\frac{\partial}{\partial \xi}$ qui en sommant par rapport à ξ , η , ζ , nous a conduit à la formule cherchée.

Il nous faut tout d'abord démontrer :

LEMME. — *Toute forme quadratique à r variables $\varphi(x) = \alpha_{ij} x_i x_j$ définie positive est décomposable sous la forme*

$$(3) \quad \varphi_{1,2,\dots,h}(x_{h+1}, \dots, x_r) + \psi_{1,\dots,h}(\xi_1, \dots, \xi_h),$$

d'une somme de deux formes > 0 , aux variables respectives x_{h+1}, \dots, x_r et ξ_1, \dots, ξ_h ;

$$\varphi(x) = \psi(\xi), \quad \xi = \alpha_{ij} x_j.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2,\dots,h} & \text{ est réciproque de } \psi(0, \dots, 0; \xi_{h+1}, \dots, \xi_r), \\ \psi_{1,2,\dots,h} & \text{ est réciproque de } \varphi(x_1, \dots, x_h; 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit dans l'espace euclidien à r dimensions, un système d'axes Ox_i , tels que

$$\overline{OM}^2 = \varphi(x_i).$$

Appelons P le plan $Ox_1, \dots, Ox_h (x_{h+1} = \dots = x_r = 0)$; Π le plan mené en O perpendiculairement à P ($\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_h = 0$).

On a d'une façon unique

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Op} + \overrightarrow{O\omega}, \quad \overline{OM}^2 = \overline{Op}^2 + \overline{O\omega}^2,$$

\overrightarrow{Op} et $\overrightarrow{O\omega}$ étant respectivement dans P et Π .

p a mêmes coordonnées ξ_1, \dots, ξ_h que M , et \overline{Op}^2 est une forme

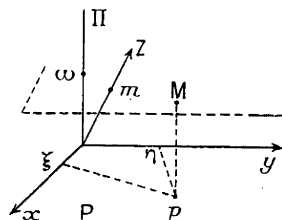


Fig. 1.

positive des ξ_1, \dots, ξ_h . Parallèlement à P , M se projette en m sur $Ox_{h+1}, \dots, x_r = O$ et en ω sur Π et $\overline{O\omega}^2$ ne dépend donc que de m ou x_{h+1}, \dots, x_r .

Cette propriété algébrique est ainsi démontrée géométriquement en supposant φ définie positive; elle vaut donc pour φ quelconque non dégénérée ($\Delta = |\alpha_{ij}| \neq 0$), et aussi pour la forme bilinéaire symétrique $\varphi(x_i, y_i)$. On verra plus loin une démonstration par le calcul, montrant que la propriété s'étend à toute forme bilinéaire non dégénérée à $2r$ variables.

La formule à démontrer s'écrit

$$\begin{aligned} & -2 \left[f_{n_i}^2 d\varphi + \sum_i \delta_i f_{n_{i-1}}^2 d\varphi_i + \dots + \sum_{i,j,\dots,l} \delta_{i,j,\dots,l} f_{n_{i-1},\dots,n_{l-1}}^2 d\varphi_{i,j,\dots,l} + \dots \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i,\dots,i_{r-1}} \delta_{i,\dots,i_{r-1}} f_{n_{i-1},\dots,n_{i_{r-1}-1}}^2 d\varphi_{i,\dots,i_{r-1}} \right] \\ & = d \left[f_{n_i}^2 + \sum_i \delta_i f_{n_{i-1}}^2 + \dots + \sum_{i,j,\dots,l} \delta_{i,j,\dots,l} f_{n_{i-1},\dots,n_{l-1}}^2 + \dots + \Delta f_{n_{i-1},\dots,n_{r-1}}^2 \right]. \end{aligned}$$

Une fois écrite, il est relativement facile de la démontrer.

$\delta_{i_1, \dots, i_h} = \delta$ désignant le déterminant formé des lignes et colonnes i_1, i_2, \dots, i_h , et $A_{i_t}^{i_t}$ les mineurs algébriques de δ , les $\frac{A_{i_t}^{i_t}}{\delta}$ sont les coefficients de $\psi_{i_1, \dots, i_h}(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_h})$, t et τ appartenant au groupe $g = (1, \dots, h)$ de nombres, g' étant le groupe complémentaire $g' = (h+1, \dots, r)$.

On a

$$d\varphi_{i_1, \dots, i_h} = d\varphi - d\psi_{i_1, \dots, i_h} = 2x_j d\xi_j - 2 \frac{A_{i_t}^{i_t}}{\delta} \xi_{i_t} d\xi_{i_t} \quad \text{d'après (3)}.$$

Posons $f^2 = X$,

$$- 2 \delta_{i_1, \dots, i_h} X_{n_{i_1}-1, \dots, n_{i_h}-1} d\varphi_{i_1, \dots, i_h} \quad \text{vaut d'après (1),}$$

$$\delta dX_{n_{i_g}-1} + \delta \frac{\partial}{\partial x_i} X_{n_{i_g}-1, n_{i-1}} d\xi_i - \alpha_{i_t}^{i_t} A_{i_t}^{i_t} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} X_{n_{i_g}-1, n_{i-1}} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} X_{n_{i_g}-1} \right] d\xi_{i_t},$$

$n_i - 1$ doit être remplacé par $n_i - 2$ quand $i \in i_g$.

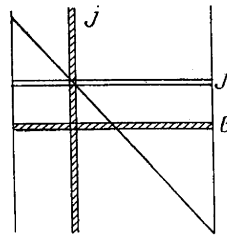


Fig. 2.

Le premier terme est celui qu'il faut trouver au deuxième membre, il en reste trois; le troisième vaut $- A_{i_t}^{i_t} \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} X_{n_{i_g}-1} d\xi_{i_t}$, le deuxième se réduit quand $i \in i_g$ à $-\delta \frac{\partial}{\partial x_i} X_{n_{i_g}-1, n_{i-2}}$ et se détruit avec la partie correspondante du 2° terme; il reste

$$(\delta d\xi_i - \alpha_{i_t}^{i_t} A_{i_t}^{i_t} d\xi_{i_t}) \frac{\partial}{\partial x_i} X_{n_{i_g}-1, n_{i-1}} - A_{i_t}^{i_t} \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} X_{n_{i_g}-1} d\xi_{i_t}, \quad \text{avec } i \in i_{g'};$$

le troisième terme, pris pour $g^1 = 1, 2, \dots, h, j$, avec les mineurs A' dans $\delta' = \delta_{i_1, \dots, i_h, i_j}$, vaut

$$- A_{i_t}^{i_t} \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} X_{n_{i_g}-1, n_{i_j}-1} d\xi_{i_t},$$

son terme en $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ a pour coefficient de $-\frac{\partial}{\partial x_{ij}} X_{n_{i_g}-1, n_{i_j}-1} d\xi_{i_t}$.

$A_{i_t}^{tj}$ mineur de $\alpha_{i_t}^{tj}$ dans δ' , et développé suivant la ligne j , il vaut

$$(-1)^{t+j} \alpha_{i_t}^{tj} A_{i_t}^{tj} (-1)^{t-j+1} = -\alpha_{i_t}^{tj} A_{i_t}^{tj}$$

(car les α_i coefficients de φ sont symétriques, et les A sont pris dans un déterminant diagonal), les signes étant rapportés au seul déterminant $\delta_{i_1, \dots, i_h, i_j} = \delta'$.

Ceci vaut pour $j \neq t$, mais t peut également j dans les termes en A' , ce qui donne

$$-\delta \frac{\partial}{\partial x_{ij}} X_{n_{i_j-1}} d\xi_{ij} \quad (j \in g'),$$

finalement tous les termes se détruisent.

Pendant pour $h = n$, il n'y a plus de termes au premier membre pour détruire les termes pour $h = n - 1$, mais ces derniers donnent alors, les A' étant les mineurs $\Delta \beta_{i_t}^{tj}$ de Δ ,

$$\Delta [\beta_{ij}^{tj} d\xi_{ij} + \beta_{i_t}^{tj} d\xi_{i_t}] = \Delta dx_{ij} \quad \text{comme coefficient de } \frac{\partial}{\partial x_{ij}} X_{n_1-1, \dots, n_r-1},$$

c'est bien le terme $\Delta dX_{n_1-1, \dots, n_r-1}$.

GÉNÉRALISATION DU LEMME PRÉCÉDENT. — $\varphi(x, y) = \alpha_{ij} x_i y_j$ est une forme bilinéaire à déterminant Δ des α_{ij} , $\neq 0$,

$$\varphi = x_i \eta_i = \xi_i y_i,$$

avec

$$\eta_i = \alpha_{ij} y_j, \quad \xi_i = \alpha_{ji} x_j$$

ou

$$y_j = \beta_{ij} \eta_i, \quad x_j = \beta_{ji} \xi_i;$$

la forme réciproque est

$$\psi(\xi_i, \eta_i) = \varphi(x_i, y_i) = \beta_{ij} \xi_j \eta_i.$$

Comme plus haut, g représente le groupe des entiers de 1 à h , g' de $h+1$ à r .

Démontrons que

$$(3') \quad \varphi(x, y) = \varphi_g(x_g, y_g) + \psi_{g'}(\xi_{g'}, \eta_{g'});$$

$\psi(\xi_{g'}, \eta_{g'})$ a pour coefficients les $\beta_{ij} [i, j \in (g)]$ qui forment un δ mineur de Δ { on fait $\xi_{i'} = \eta_{i'} = 0 [i' \in (g')]$ }.

La forme réciproque φ_g a pour coefficients les $\delta_{i,j}$ mineurs algébriques normés de δ .

Corrélativement $\varphi(x_g = y_g = 0, x_{g'}, y_{g'})$ a une forme réciproque $\psi_{g'}$ dont les coefficients sont les mineurs algébriques normés, soient $\frac{\varepsilon_{i',j'}}{\varepsilon}$, du déterminant ε des $\alpha_{i',j'}$, pour $i', j' \in (g')$ (mineur de Δ) (l'accent sur ε indique que ce mineur est pris avec son signe).

Alors

$$\varphi_g = \sum_{i=1}^h x_i \bar{\eta}_i, \quad \bar{\eta}_i = \delta_{ij} y_j = \delta_{ij} \beta_{lj} \eta_l = \eta_i + \delta_{ij} \beta_{lj} \eta_l \quad [l \in (g')];$$

$$\psi_{g'} = \sum_{h+1}^r \eta_{l'} \bar{x}_{l'}, \quad \bar{x}_{l'} = \frac{\varepsilon'_{i',j'}}{\varepsilon} \xi_{j'} = \frac{\varepsilon'_{i',j'}}{\varepsilon} \alpha_{lj'} x_l = x_{l'} + \frac{\varepsilon'_{i',j'}}{\varepsilon} \alpha_{lj'} x_l \quad [l \in (g)].$$

En portant dans (3') et identifiant en $x_i \eta_{l'}$ (après échange de i, i' et l, l' dans le deuxième terme)

$$(4) \quad \delta_{ij} \beta_{lj} + \frac{\varepsilon'_{i',j'}}{\varepsilon} \alpha_{lj'} = 0 \quad [i, j \in (g); l', j' \in (g')].$$

Remarquons que $\delta_{ij} \beta_{lj}$, où $l \in (g)$ est nul, sauf pour $l = i$, valant alors 1.

Mais dans Δ , les δ_{ij} sont des mineurs à $h - 1$, lignes et colonnes; et leur signe par rapport à Δ est le même que par rapport à δ (parce que les lignes et colonnes de δ sont les h premières; ceci simplifie seulement un peu la discussion des signes); un tel mineur, non normé, pris dans le déterminant des mineurs non normés de Δ , c'est-à-dire des $\beta_{ij} \Delta$ vaut

$$\Delta^{h-1}(\delta_{ij}, \delta) = \Delta^{h-2} \varepsilon,$$

d'après les théorèmes généraux sur les déterminants, ε étant le mineur complémentaire, arithmétique, formé dans Δ , donc avec les lignes $(g + i)$ et les colonnes $(g' + j)$.

δ , d'après la règle précédente, vaut $\frac{\varepsilon}{\Delta}$, donc $\delta_{ij} = \frac{j\varepsilon}{\varepsilon}$ et (4) devient

$$(4') \quad j\varepsilon \beta_{lj} + \varepsilon'_{i',j'} \alpha_{lj'} = 0.$$

Ajoutons à (4') les équations auxquelles elles se réduisent si $l \in (g)$

$$j\varepsilon \beta_{ij} = 0 \quad (l \neq i), \quad j\varepsilon \beta_{ij} = \varepsilon$$

comme remarqué plus haut sur les δ_{ij} .

Multipliant par $\alpha_{l'k}$ et sommant ces équations de 1 à r pour l' (ou l), on a le système équivalent

$$\begin{aligned} {}^k_i \varepsilon + \varepsilon'_{l',j} \alpha_{ij'} \alpha_{l'k} &= \alpha_{ik} \varepsilon & [k \in (g)], \\ \varepsilon'_{l',j} \alpha_{ij'} \alpha_{l'k} &= \alpha_{ik} \varepsilon & [k' \in (g')]; \end{aligned}$$

le deuxième groupe se vérifie immédiatement et le premier presque aussitôt.

Développons ${}^k_i \varepsilon$, deux fois, suivant la ligne i , puis la colonne k , on obtient

$${}^k_i \varepsilon = \alpha_{ik} \varepsilon - \alpha_{ij'} \alpha_{l'k} \varepsilon'_{l',j};$$

le signe — dû à ce que le rang de j' doit être pris dans ${}^k_i \varepsilon$, et non dans ε , le premier possédant la colonne k toujours placée avant la colonne j' .

C. Q. F. D.

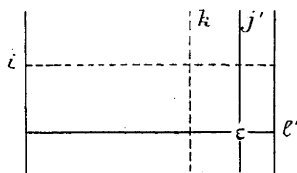


Fig. 3.

MAJORATION DES $\mathcal{H}_{n_i}^2(x_i)$. — A l'aide de la formule précédente, commençons par la limitation des $f_{n_i}^2(o) = \mathcal{H}_{n_i}^2(o)$. On a

$$e^{-\varphi(h_i)} = \frac{h_i^{n_i}}{n_i!} \mathcal{H}_{n_i}(o) r^{\frac{n_i}{2}} n_i!^{\frac{1}{2}} \sqrt{A} \quad \left(A = \frac{\sum n_i}{\sqrt{\Delta}} \right).$$

Développons $e^{-\alpha_{ij} h_i h_j}$ en $\sum \frac{(\alpha_{ij} h_i h_j)^{\frac{\nu}{2}}}{\frac{\nu}{2}!} (-1)^{\frac{\nu}{2}}$.

Le terme homogène de degré 2ν , nous donne

$$\sum \frac{1}{t_i! t_{ij}!} \alpha_{ii}^{t_i} (2\alpha_{ij})^{t_{ij}} h_i^{2t_i + \sum_j t_{ij}} \quad \text{au signe près.}$$

Avec

$$n_i = 2t_i + s_i, \quad s_i = \sum_{j \neq i} t_{ij},$$

les s_i sont quelconques à condition que $n_i - s_i$ soit > 0 pair, ce qui s'écrit

$$\frac{\alpha_{ii}^{\frac{n_i}{2}}}{t_i! t_{ij}!} \frac{(2\alpha_{ij})^{t_{ij}}}{\sqrt{\alpha_{ii}\alpha_{jj}}^{t_{ij}}}, \quad \text{puisque } \alpha_{ii}\alpha_{jj} > \alpha_{ij}^2 \text{ et } \sum_{j \neq i} \frac{t_{ij}}{2} = \frac{s_i}{2},$$

ou encore, posant $\gamma_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ii}\alpha_{jj}}}$,

$$\frac{\left(\sum \frac{n_i - s_i}{2}\right)!}{\prod \left(\frac{n_i - s_i}{2}\right)!} \alpha_{ii}^{\frac{n_i}{2}} \frac{\gamma_{ij}^{t_{ij}}}{t_{ij}! \left(\frac{\nu}{2} - \sum t_{ij}\right)!};$$

la dernière fraction est de beaucoup majorée par

$$\frac{(1 + \sum |\gamma_{ij}|)^{\frac{\nu}{2}}}{\frac{\nu}{2}!} = \frac{\sigma^{\frac{\nu}{2}}}{\frac{\nu}{2}!}.$$

On peut aussi majorer la première fraction :

$\sum s_i$ est pair, les s_i impairs vont donc par couples, les n_i correspondants étant eux-mêmes impairs. On voit alors qu'on peut toujours

majorer par $\frac{\frac{\nu}{2}!}{\left(\frac{n_1}{2} + \frac{1}{2}\right)! \left(\frac{n_2}{2} - \frac{1}{2}\right)! \dots}$, par exemple, si n_1 et n_2 sont

impairs; soit, en élevant au carré, avec $M = \max |\alpha_{ij}|$,

$$A 2^\nu \frac{n_i!}{[n_i!]^2} \mathcal{H}_{n_i}^2(0) \leq \frac{(M\sigma)^\nu}{\left[\frac{n_i!}{2}\right]^2} \quad \text{ou} \quad \mathcal{H}_{n_i}^2(0) \leq \frac{1}{A} \frac{n_i!}{\left[\frac{n_i!}{2}\right]^2} \left(\frac{M\sigma}{2}\right)^\nu \quad (\nu = \sum n_i),$$

$\left[\frac{n_i!}{2}\right]^2$ signifiant, si n_i est impair, $\frac{n_i - 1}{2}! \frac{n_i + 1}{2}!$

Si ν est impair $\mathcal{H}_{n_i}^2(0) = 0$. Soit B_{n_i} cette borne.

LIMITATION DE $[\mathcal{H}_{n_i}^2(0) + \sum \delta_i \mathcal{H}_{n_i-1}^2(0) + \dots]$ qui est

$$\geq [\mathcal{H}_{n_i}^2(x_i) + \sum \delta_i \mathcal{H}_{n_i-1}^2(x) + \dots],$$

Si $n_i = 2p$,

$$\frac{B_{n_i-1}}{B_{n_i}} = \frac{2 \cdot (2p-1)!}{M\sigma p!(p-1)!} \frac{[p!]^2}{2p!} = \frac{1}{M\sigma},$$

mais si $n_i = 2p + 1$,

$$\frac{B_{n_i-1}}{B_{n_i}} = \frac{2}{M\sigma} \frac{2p!}{[p!]^2} \frac{p!(p+1)!}{(2p+1)!} = \frac{1}{M\sigma} \left(1 + \frac{1}{2p+1}\right).$$

Nous multiplierons donc B_{n_i} par $\prod \left(1 + \frac{1}{2p_i+1}\right)$ pour tous les $n_i = 2p_i + 1$, soit B'_{n_i} .

Le crochet est majoré par

$$\begin{aligned} B'_{n_i} \left[1 + C_r^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)^2 + C_r^4 \left(\frac{\sqrt{4}}{\sigma}\right)^4 + \dots \right] & \quad \text{si } \Sigma n_i = 2\nu, \\ B'_{n_i} \left[r \frac{1}{\sigma} + C_r^3 \left(\frac{\sqrt{3}}{\sigma}\right)^3 + \dots \right] & \quad \text{si } \Sigma n_i = 2\nu + 1. \end{aligned}$$

[Nous avons majoré δ_{i_1, \dots, i_h} par $(hM^2)^{\frac{h}{2}} = (\sqrt{h}M)^h$].

Limitant chacun de ces deux crochets par $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)^2 = KA$, on a

$$e^{-2\varphi} \mathcal{E}_{n_i}^2(x_i) \leq K \left(\frac{M\sigma}{2}\right)^{\Sigma n_i} \prod \left(1 + \frac{1}{n_i}\right) \frac{n_i!}{\left[\frac{n_i!}{2}\right]^2} \quad \text{pour tous } n_i \text{ et tous } x_i.$$

On peut en déduire une limitation asymptotique analogue à celle indiquée pour $r = 1$ au début de ce chapitre, car la formule de Stirling donne

$$\frac{n_i!}{\left[\frac{n_i!}{2}\right]^2} \sim \frac{2^{n_i}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n_i}}, \quad \text{soit la borne } \sim \frac{K'(M\sigma)^\nu}{\sqrt{n_1 n_2 \dots n_r}}$$

et il est certain que la série $\Sigma t_i^{n_i} \mathcal{E}_{n_i}(y) \mathcal{E}_{n_i}(x)$ est absolument convergente à l'intérieur du cercle $|t_i| \leq \frac{1}{M\sigma}$.

COMPLÈTE INTÉGRABILITÉ DU SYSTÈME AUQUEL SATISFAIT $H_{n_i}(x_i)$. — C'est (1.6).

Posons

$$\begin{aligned} f_{n_i} &= a_{n_i} e^{-\frac{\varphi}{2}} \psi_{n_i} = e^{-\varphi} H_{n_i} & e^{-\varphi} \frac{\partial H_{n_i}}{\partial \xi_i} &= 2x_i f_{n_i} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} f_{n_i}, \\ e^{-\varphi} \frac{\partial^2 H_{n_i}}{\partial x_i \partial \xi_i} &= \left[2f_{n_i} + 2x_i \frac{\partial f_{n_i}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \xi_i} f_{n_i} \right] + 2\xi_i \left[2x_i f_{n_i} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} f_{n_i} \right]; \end{aligned}$$

(6) devient alors

$$(6') \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial \xi_i} + 2x_i \frac{\partial f_{n_i}}{\partial x_i} + 2(n_i + 1)f_{n_i} = 0 \quad (i \text{ donné}).$$

Si nous posons $f_{n_i} = \frac{\partial^v F}{\partial x_i^{n_i}}$, F est définie à un polynome ϖ_{v-1} près ($\frac{\partial^v \varpi}{\partial x_i^{n_i}} \equiv 0$) et satisfait à

$$(7) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_i} + 2x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + 2F = 0, \quad \text{car} \quad x_i \frac{\partial^v}{\partial x_i^{n_i}} = \frac{\partial^v}{\partial x_i^{n_i}} x_i - n_i \frac{\partial^v}{\partial x_i^{n_i}},$$

système qui ne dépend plus des n_i , et qui définit à partir de toutes ses solutions, des fonctions telles que $e^{\varphi} \frac{\partial^v F}{\partial x_i^{n_i}}$, qui égalent H_{n_i} pour $F = e^{-\varphi}$.

C'est (7) dont nous allons montrer qu'il est complètement intégrable; soit z la fonction inconnue; les équations (7) donnent $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}$ en fonction des $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ ($i \neq j$).

Par dérivation de l'équation (i) par rapport à j , et de (j) par rapport à i . On déduira

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i^2 \partial x_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x_j^2 \partial x_i} \quad \text{en fonction de} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad (i \neq j \neq k \neq i)$$

et ainsi de suite jusqu'aux dérivées de

$$T = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \dots \partial x_r};$$

désignons par

$$r_{ij} = \frac{\partial^{r-2} z}{\partial x_k \dots} \quad (k \neq i, k \neq j) \quad \text{et} \quad r_i = \frac{\partial^{r-1} z}{\partial x_k \dots} \quad (k \neq i),$$

$$s_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \quad (s_{ii} = T), \quad X_i = \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

on a, de (7),

$$(7') \quad \beta_{ij} X_j + 2x_i T + 2r_i = 0,$$

$$(7'') \quad \beta_{ij} s_{kj} + 2x_i r_k + 2r_{ik} = 0 \quad (i \neq k),$$

d'où l'on tire les $\frac{\partial r_i}{\partial x_j}$ en fonction de r_i , r_{ij} , T et les X_j en fonction de r_i , T.

On peut alors, avec les inconnues

$$u_1 = z, \quad u_2 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad u_{2^r} = T = \frac{\partial^r z}{\partial x_1 \dots \partial x_r},$$

en nombre 2^r écrire 2^r équations aux différentielles totales ne faisant intervenir que ces inconnues

$$\begin{aligned} du_1 &= u_2 dx_1 + \dots + u_{r+1} dx_r, & du_2 &= f_i \left[u_1, \dots, u_{r+1 + \frac{r(r-1)}{2}} \right] dx_i, & \dots, \\ dT &= X_i dx_i. \end{aligned}$$

Les $2^r - 1$ premières équations sont, de par leur nature complètement intégrables (la différentielle d'une dérivée d'ordre h , fait intervenir les dérivées d'ordre $h + 1$, inconnues, et il n'y a pas de condition de compatibilité à exprimer), mais pour la dernière, on a

$$X_j = -\alpha_{ij}(2x_i T + 2r_i) = -(2\zeta_j T + 2\alpha_{ij} r_i),$$

d'où

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = -\alpha_{ij}(2x_i X_k + 2s_{ik} + 2T \delta_{ik}).$$

On doit avoir identiquement en $x_i, r_i, r_{ik}, \frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_j}$, après avoir tiré les Δ_{ij} de (7''), soit

$$\left(\frac{\partial X_j}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) = 2(2\alpha_{ij} r_i \zeta_k - \alpha_{ik} s_{ij}) - 2(2\alpha_{ik} r_i \zeta_j - \alpha_{ij} s_{ik}) = 2(u_{jk} - u_{kj}),$$

d'où

$$\beta_{ij} u_{jk} = 2r_i \zeta_k - \beta_{ij} \alpha_{ik} s_{ij} = 2r_i \zeta_k + \alpha_{ik}(2x_i r_l + 2r_{il}) - \alpha_{ik} \beta_{lj} s_{lj} \quad \text{d'après (7'')}$$

et

$$\beta_{ij} u_{kj} = 2\alpha_{ik} r_i x_l - s_{lk},$$

soit

$$\beta_{ij}(u_{jk} - u_{kj}) = 2\alpha_{ik} x_l r_l + 2\alpha_{ik} r_{il} - \alpha_{ik} \beta_{lj} s_{lj} + s_{lk}.$$

Or, sommant toutes les équations (7'') multipliées par $\alpha_{il} (i \neq k)$,

$$\sum_{i \neq k} \alpha_{il} \beta_{ij} = \delta_{ij} - \alpha_{kl} \beta_{kj},$$

et il vient

$$s_{kl} - \alpha_{kl} \beta_{kj} s_{kj} + 2\alpha_{il} x_l r_k + 2\alpha_{il} r_{lk} = 0,$$

donc (échanger l et k , $r_{il} = r_{li}$)

$$u_{jk} = u_{kj}.$$

Des systèmes du type (7) (plus généraux) ont, supposés complètement intégrables, été étudiés par Lauricella (8) qui montre que leur solution générale dépend de 2^r constantes arbitraires. Les résultats sont rapportés dans l'Ouvrage cité de MM. Appell et Kampé de Fériet qui les utilisent pour $r = 2$. Nous pourrions regarder d'un peu plus près la nature de ces 2^r solutions linéairement indépendantes.

(7) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i} + 2x_i F \right) = 0, \quad \text{soit } f_i = \frac{\partial F}{\partial \xi_i} + 2x_i F,$$

f_i ne dépend pas de la variable x_i .

En écrivant $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_i}$, on obtient

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} - 2x_i \frac{\partial F}{\partial \xi_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \xi_i} - 2x_j \frac{\partial F}{\partial \xi_i},$$

où

$$\frac{\partial f_j}{\partial \xi_i} + 2x_i f_j = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} + 2x_j f_i$$

ne dépendent ni de x_i , ni de x_j , donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f_j}{\partial \xi_i} + 2x_i f_j \right) = 0,$$

et ainsi de suite.

Posons

$$F e^\varphi = \Phi, \quad f_i e^\varphi = \Phi_i, \quad f_{ij} e^\varphi = \Phi_{ij}, \quad \dots$$

alors

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} = f_i e^\varphi = \Phi_i$$

et, d'une façon générale,

$$\frac{\partial \Phi_{i_1, \dots, i_k}}{\partial \xi_{i_{k+1}}} = \Phi_{i_1, \dots, i_{k+1}} = e^\varphi f_{i_1, \dots, i_{k+1}}$$

ce f ne contenant aucune des variables d'indices i_1, \dots, i_{k+1} .

(8) LAURICELLA, *R. C. M. P.*, t. VII, 1893, p. 122-129.

A partir de là, il est facile de former des solutions linéairement indépendantes.

Pour une combinaison donnée i_1, \dots, i_h , nous choisissons $\Phi_{i_1, \dots, i_h} = e^\varphi$; on fera le premier pas de l'intégration en écrivant

$$\varphi = \psi(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_h}) + \frac{x_{i_1}^2}{\beta_{i_1, i_1}}, \quad \int e^\varphi d\xi_{i_1} = e^{\psi(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_h})} \int e^{\frac{x_{i_1}^2}{\beta_{i_1, i_1}}} dx_{i_1} \alpha_{i_1, i_1}.$$

Les différentes fonctions intervenant comme constantes d'intégration seront déterminées par les conditions ci-dessus.

h variant de 0 à r , et en prenant toutes les combinaisons des indices, on obtient $1 + r + \frac{r(r-1)}{2} + \dots = 2^r$ solutions, linéairement indépendantes. Pour $\Phi = 1$, on obtient $F = e^{-\varphi}$ qui engendrera par dérivation les polynômes d'Hermite et vu la forme des solutions pour Φ , autres que 1, il n'y a pas d'autres solutions polynomiales au système (7).

CHAPITRE III.

LES RELATIONS D'INCERTITUDE DE HEISENBERG.

COMPLÈMENTS SUR LES $\mathcal{H}_{n_i}(x_i)$. — Des définitions résulte que toute expression $P(x_i)\psi_{n_i}(x_i)$ est de carré sommable sur $(-\infty, +\infty)$, en particulier $x_i^{p_i}\psi_{n_i}(x_i)$, $P(x_i)$ étant un polynôme. On obtient les relations d'orthogonalité entre ces fonctions et les $x_i^{q_i}\chi_{n_i}(x_i)$ par la même méthode que pour $p_i = q_i = 0$.

Posant $x_i = z_i + h_i + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial k_i}$, on a en effet

$$e^{-\varphi} \gamma_{\frac{1}{2}}^\varphi(x_i, h_i) \gamma_{\frac{1}{2}}^\varphi(x_i, k_i) = e^{2h_i k_i - \varphi(z_i)}.$$

On peut donc calculer

$$e^{2h_i k_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(z_i + h_i + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial k_i} \right)^{p_i} e^{-\varphi(z_i)} dz_i$$

et le résultat se développe en série absolument convergente en h_i, k_i .

On identifie alors ce développement et celui obtenu en intégrant terme à terme

$$e^{-\varphi} \gamma_1^\varphi \gamma_2^\varphi = e^{-\varphi} \sum \sum \frac{h_i^{m_i}}{m_i!} \frac{k_i^{n_i}}{n_i!} H_{m_i} G_{n_i}.$$

C'est la méthode utilisée par Hermite, et que rapportent MM. Appell et Kampé de Fériet (*loc. cit.*), pour démontrer l'orthogonalité des suites ψ_{n_i} et χ_{n_i} , mais sans justifier l'intégration terme à terme, ce qu'il nous reste à faire.

Posons

$$\gamma_1^\varphi = s_n + \rho_n, \quad s_n = \sum^n \frac{h_i^{m_i}}{m_i!} H_{m_i}$$

(c'est-à-dire m_1, \dots, m_r variant de 1 à n).

Le développement de γ_1^φ est majoré par celui, γ_1^φ obtenu en remplaçant dans $e^{-\varphi(h_i) + 2\varphi(h_i, x_i)}$ les coefficients de l'exposant par leurs valeurs absolues. $\int e^{-\frac{\varphi}{2}} \rho_n$ est arbitrairement petit, car $\left| \int_{|x| \geq X} e^{-\frac{\varphi}{2}} \rho_n \right|$ majoré par $\int_{|x| \geq X} e^{-\frac{\varphi}{2}} \gamma_1^\varphi$ l'est pour X assez grand ($-\frac{\varphi}{2} + \alpha_{ij} h_i x_j$ étant $\leq -\frac{\varphi}{k}$, $k = 4$, par exemple, si X est assez grand), et $\left| \int_{|x| \leq X} e^{-\frac{\varphi}{2}} \rho_n \right|$ l'est aussi pour n assez grand, comme on le vérifie avec la série majorante, en majorant de la façon classique $\sum_{n+1}^\infty \frac{w^p}{p!}$.

De même $\int e^{-\varphi} \rho_n^2$ est arbitrairement petit pour n assez grand, donc ⁽⁹⁾ $\int e^{-\varphi} (\rho_n^2 + 2\rho_n s_n)$ l'est aussi ($e^{-\frac{\varphi}{2}} s_n$ est borné par le maximum de $e^{-\frac{\varphi}{2}} \gamma_1^\varphi$, quel que soit n).

On a donc bien

$$\int e^{\alpha h_i k_i - \varphi(z_i)} dz_i = \sum \int e^{-\varphi} \frac{h_i^{m_i}}{m_i!} \frac{k_i^{n_i}}{n_i!} h_{m_i} G_{n_i} dx$$

⁽⁹⁾ Nous montrons, pour simplifier, que l'intégration terme à terme de $e^{-\varphi} [\gamma_1^\varphi(h_i)]^2$ est licite, mais le même argument vaut pour $e^{-\varphi} \gamma_1^\varphi(h_i) \gamma_2^\varphi(k_i)$.

et le même raisonnement, donc le même processus d'identification, vaut aussi si l'on intègre $x_i^{p_i} e^{-\varphi} \gamma_1^{\varphi} \gamma_2^{\varphi} (p_i \neq 0)$.

Les relations de récurrence (II.1') nous permettraient aussi d'obtenir, de proche en proche, les valeurs des différentes expressions

$$\int x_i^{p_i} \Psi_{m_i} \chi_{n_i} dx_i.$$

Soit $r = 1$,

$$\varphi = \frac{x^2}{2\sigma^2}, \quad \frac{h^n}{n!} H_n^\varphi(x) = e^{-\frac{h^2 + 2hx}{2\sigma^2}} = e^{-h^2 + 2hx'} \quad \text{si} \quad h' = \frac{h}{\sqrt{2\sigma}}, \quad x' = \frac{x}{\sqrt{2\sigma}}.$$

H désignant le polynome relatif à $\varphi = x^2$, on a

$$H_n^\sigma(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\sigma})^n} H\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma}}\right),$$

mais si l'on norme $e^{-\varphi} H_n^{\sigma^2}$ et non $e^{-\varphi} H_n G_n$, on obtiendra le coefficient a'_n avec

$$a'_n{}^2 = \frac{2^n n!}{(2\sigma^2)^n} \sqrt{2\pi\sigma}$$

au lieu de $a_n^2 = 2^n n! \sqrt{2\pi\sigma}$.

Soit

$$\varphi_n^\sigma(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma}}\right)}{(\sqrt{2\pi\sigma} 2^n n!)^{\frac{1}{2}}};$$

d'autre part

$$e^{-\varphi} \gamma_h \gamma_k = e^{\frac{2hk}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(x-h-k)^2}{2\sigma^2}},$$

donc

$$\int x e^{-\varphi} \gamma_h \gamma_k dx = e^{\frac{2hk}{2\sigma^2}} (h+k) \int e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \sqrt{2\pi\sigma} (h+k) e^{\frac{hk}{\sigma^2}},$$

car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = 0, \quad a'_n a'_{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \varphi_n^\sigma(x) \varphi_{n+1}^\sigma(x)}{n! (n+1)!} dx = \sqrt{2\pi\sigma} \frac{1}{n! \sigma^{2n}},$$

$$\int x \varphi_{n-1}^\sigma \varphi_n^\sigma dx = \sigma \sqrt{n}, \quad \int x \varphi_p \varphi_q dx = 0 \quad \text{si} \quad |p-q| \neq 1.$$

Ces résultats vont nous servir pour évaluer la dispersion d'une variable q , sa loi de probabilité étant une fonction $\psi(q)$ de carré du module sommable sur $(-\infty, +\infty)$.

CALCUL DE Δq . — q est une variable d'espace, rapportée à sa valeur moyenne, c'est-à-dire que $\int q|\psi|^2 dq = 0$. Soit $\Delta q = \sigma$ l'écart moyen, c'est-à-dire $\sigma^2 = \int q^2|\psi|^2 dq = \|q\psi\|^2$, par définition, $\|f\|$ désignant la norme de la fonction f ou la racine carrée de l'intégrale de $ff^* = |f|^2$.

La fonction d'onde ψ , la plus simple, telle que $\bar{q} = 0$, $\bar{q}^2 = \sigma^2$ (\bar{x} désigne $\int x|\psi|^2 dq$, moyenne de x) est $\frac{e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}}{(2\pi\sigma)^{\frac{1}{2}}} = \varphi_0^\sigma(x)$ et il est tout naturel de calculer $(\Delta q)^2$ en développant ψ suivant les φ_n .

Soit

$$\psi = \sum_0^\infty \alpha_n \varphi_n, \quad \sum \alpha_n \alpha_n^* = 1,$$

ψ appartenant à L^2 et normé.

Supposons $q\psi \in L^2$. Les coefficients de son développement suivant les φ_i sont ⁽¹⁰⁾

$$c_n = (\varphi_n, q\psi) = (q\varphi_n, \psi) = \sigma(\sqrt{n}\alpha_{n-1} + \sqrt{n+1}\alpha_{n+1}),$$

puisque (comme vu ci-dessus)

$$q\varphi_n = \sigma(\sqrt{n}\varphi_{n-1} + \sqrt{n+1}\varphi_{n+1}),$$

donc

$$\begin{aligned} \|q\psi\|^2 &= \sigma^2 \sum_0^\infty |\sqrt{n}\alpha_{n-1} + \sqrt{n+1}\alpha_{n+1}|^2 \\ &= \sum_0^\infty [(2n+1)|\alpha_n|^2 + 2\sqrt{(n+1)(n+2)}\Re\alpha_n\alpha_{n+2}^*]. \end{aligned}$$

⁽¹⁰⁾ (f, g) désigne le scalaire $\int f^* g dq$.

Si $\sum n |\alpha_n|^2$ converge, $\sum \sqrt{(n+1)(n+2)} \mathcal{R} \alpha_n \alpha_{n+2}$ est borné par

$$\sqrt{s(s+1)} = \sqrt{\sum_0^{\infty} (n+1) |\alpha_n|^2} \sqrt{\sum_0^{\infty} n |\alpha_n|^2},$$

et $q\psi$ appartient bien à L^2 ; cette seule hypothèse suffit pour que la formule de développement soit valable.

PASSAGE A Δp . — Un calcul analogue quoique de justification moins facile pourrait être fait pour l'opérateur adjoint à la variable conjuguée p .

$$\|p\psi\| = \left\| \frac{\partial \psi}{\partial q} \right\|,$$

mais il est beaucoup plus simple d'utiliser la relation, classique en Mécanique ondulatoire, entre les lois de probabilité de deux variables conjuguées,

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h} pq} \psi(q) dq.$$

C'est à peu près la transformation de Fourier, que l'on peut appliquer (dans l'espace de Hilbert) à toute fonction de carré sommable. Elle transforme $\varphi_n(x)$ en $i^n \varphi_n(p)$, pour $\sigma = 1$.

Comme $\varphi_n^\sigma(x) = \varphi_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$, à un coefficient près, on en déduit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma y} \varphi_n^\sigma(y) dy = \sqrt{2}\sigma i^n \varphi_n^\sigma(2\sigma^2 x)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h} pq} \varphi_n^\sigma(q) dq = \frac{i^n}{\sqrt{h}} \sqrt{2\pi} \sqrt{2}\sigma \varphi_n^\sigma\left(-\frac{4\pi\sigma^2}{h} p\right) = \varphi(p).$$

$\psi = \sum \alpha_n \varphi_n$, soit $\psi' = \sum i^n \alpha_n \varphi_n$,

$$\int p' \varphi(p) \varphi^*(p) = -\left(\frac{-h}{4\pi\sigma^2}\right)^3 \int t^2 \psi'(t) \psi'^*(t) dt, \quad t = -\frac{4\pi\sigma^2}{h} p.$$

On passe de ψ à ψ' en multipliant par $\sqrt{\frac{4\pi\sigma^2}{h}}$ et α_n par i^n ,

$$\|\Delta p\|^2 = \frac{h^2}{16\pi^2\sigma^2} \left[1 + 2 \sum_0^{\infty} n |\alpha_n|^2 - 2 \sum_{\substack{\infty \\ 2}} \sqrt{n(n-1)} \mathcal{R} \alpha_n \alpha_{n-2}^* \right],$$

formule valable dans les mêmes conditions que la précédente (convergence de $\sum n |\alpha_n|^2$).

De

$$\|q\psi\|^2 = \sigma^2 \sum_0^\infty n |\alpha_{n-1}|^2 \left| 1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n-1}} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right|^2$$

et

$$\|p\psi\|^2 = \frac{h^2}{16\pi^2\sigma^2} \sum_0^\infty n |\alpha_{n-1}|^2 \left| 1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n-1}} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right|^2,$$

on déduit que l'existence simultanée des moments d'ordre 2 pour p et q entraîne la convergence de $\sum n |\alpha_n|^2$ (car sinon $1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n-1}} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ et $1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n-1}} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ tendraient simultanément vers zéro, ce qui est impossible).

Mais Δq peut exister (c'est-à-dire $q\psi \in L^2$) sans que Δp existe; il suffit de prendre

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \text{mais alors } \sum n |\alpha_n|^2 = \infty$$

(et réciproquement Δp peut exister et non Δq).

D'où, puisque $\|\Delta q\|^2 = \sigma^2$,

$$-2 \sum \sqrt{n(n-1)} \mathcal{R} \alpha_n \alpha_{n-2}^* = 2 \sum n |\alpha_n|^2,$$

soit

$$(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2} + \frac{h^2}{4\pi^2} \sum_1^\infty n |\alpha_n|^2$$

sous l'hypothèse que ces deux moments d'ordre 2 existent; p est aussi rapporté à sa valeur moyenne. Le produit des écarts est minimum pour la loi de Gauss, comme nous le savons bien, et pour une autre loi, augmente d'autant plus que l'on « s'écarte » plus de cette loi.

Les mêmes formules valent pour r variables d'espace, relativement à deux variables conjuguées de cet espace, il suffit si

$$\psi = \sum \alpha_{n_1, \dots, n_r} \varphi_{n_1, \dots, n_r}$$

de remplacer $|\alpha_n|^2$ par $\sum_{j \neq i} |\alpha_{n_1, \dots, n_r}|^2$, soit

$$|\Delta p_i|^2 |\Delta q_i|^2 = \frac{h^2}{16\pi^2} + \frac{h^2}{4\pi^2} \sum n_i |\alpha_{n_1, \dots, n_r}|^2$$

la sommation étant étendue à tous les indices.

On a rapporté ψ aux

$$\varphi_{n_1, \dots, n_r} = \varphi_{n_1}^{\sigma_1}(x_1) \dots \varphi_{n_r}^{\sigma_r}(x_r) \quad (\sigma_1 = \Delta q_1, \dots, \sigma_r = \Delta q_r).$$

Supposons que nous rapportions ψ à des φ^σ de base σ quelconque par rapport à Δq et soit $\frac{\Delta q}{\sigma} = k$. On a alors

$$(\Delta p)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2 \sigma^2} (2 - k^2 + 4 \sum n |\alpha_n|^2)$$

ou

$$(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2} k^2 (2 - k^2) + \frac{h^2}{4\pi^2} k^2 \sum n |\alpha_n|^2.$$

Si $k \neq 1$ le premier terme au deuxième membre est diminué, mais les termes suivants ne peuvent jamais être nuls. Prenons, par exemple, le cas où $\psi = \varphi_p^\sigma$,

$$(\Delta q)^2 = \sigma^2 (2p + 1), \quad (\Delta p)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2 \sigma^2} (2p + 1),$$

$$(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2} + \frac{h^2}{4\pi^2} p(p + 1) \quad \text{ou} \quad \Delta p \Delta q = \frac{h}{2\pi} \left(p + \frac{1}{2} \right).$$

Ce résultat s'applique au $p^{\text{ième}}$ état stationnaire de l'oscillateur harmonique linéaire, et précise dans ce cas l'équivalence présumée par Heisenberg comme valable dans tous les cas pour le $p^{\text{ième}}$ niveau stationnaire :

$$\Delta p \Delta q \sim p \frac{h}{2\pi}.$$

Relations d'incertitude exprimées par les quadriques de dispersion.

Rappelons l'origine mathématique de ces relations. Soient A et B deux opérateurs hermitiens [c'est-à-dire $(\psi, A\varphi) = (A\psi, \varphi)$]. $A\psi = f$, $B\psi = g$. (f, g) et (g, f) sont deux nombres complexes conjugués.

L'inégalité de Schwartz s'écrit

$$|(f, g)|^2 = \left[\frac{(f, g) + (g, f)}{2} \right]^2 + \left[\frac{(f, g) - (g, f)}{2i} \right]^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2,$$

ou comme $(f, g) = (\psi, AB\psi) = \overline{AB}$, c'est-à-dire moyenne de AB (pour la fonction d'onde ψ)

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left[\frac{AB + BA}{2} \right]^2 + \left[\frac{AB - BA}{2i} \right]^2,$$

pour $A = q$, $B = p$,

$$\frac{AB - BA}{2} = -\frac{h}{4\pi i}, \quad \text{d'où} \quad \Delta p \Delta q \geq \frac{h}{4\pi}.$$

QUADRIQUES DE DISPERSION. — Celle relative aux coordonnées d'espace, q_i , a pour équation $f(u_i) = 1$,

$$f(u_i) = \int \psi^*(\sum u_i q_i)^2 \psi \, d\tau = \overline{(u_i q_i)^2} \quad (d\tau = dq_1 \dots dq_n),$$

Nous appellerons $G(x_i) = 1$ celle relative aux coordonnées p_i (à un coefficient près), soit

$$\frac{h^2}{16\pi^2} G(x_i) = \left\| \sum x_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right\|^2 \frac{h^2}{4\pi^2} = \frac{h^2}{4\pi^2} \int \left| \sum x_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right|^2 d\tau.$$

Ces quadriques sont évidemment du type > 0 , c'est-à-dire ellipsoïde,

Dans un changement linéaire de coordonnées, les u_i et x_i doivent être considérées comme coordonnées de variances contraires : u_i covariantes et x_i contrevariantes, c'est-à-dire subissant la même transformation que les q_i , alors $G(x_i) \frac{h^2}{16\pi^2}$ représente $\left\| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\|^2 \frac{h^2}{4\pi^2}$, l'axe des z ayant pour vecteur unitaire le vecteur de composantes contre-

variantes x_i et $f(u_i)$ représente $\|(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OQ})\psi\|^2$, \overrightarrow{OQ} ayant les u_i pour composantes covariantes. Si l'on fait $u_i = x_i$ la quantité $f(u_i) G(u_i)$ n'a de signification physique que relativement à des changements unitaires de coordonnées, les axes q_i étant supposés primitivement orthogonaux. De toutes façons, on a (cette hypothèse pouvant toujours être faite)

$$f(u_i) G(u_i) \geq (\Sigma u_i^2)^2$$

qui exprime que la relation $\Delta p \Delta q \geq \frac{h}{4\pi}$ vaut pour toute variable d'espace et sa conjuguée; l'égalité n'aura lieu identiquement que si la loi pour q est toujours celle de Gauss, soit

$$\psi = e^{-\frac{\Sigma q_i^2}{4\sigma^2}} (\sqrt{2}\sigma)^{-r}$$

Pour obtenir une forme plus précise et s'exprimant géométriquement au moyen des quadriques de dispersion, il faut donc introduire la forme $F(x_i)$, réciproque de $f(u_i)$.

CAS DE LA LOI DE GAUSS :

$$\psi_0 = \frac{1}{a_0} e^{-\frac{1}{4}\varphi(q_i)}, \quad a_0^2 = \frac{(2\pi)^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\Delta}}$$

Δ déterminant de φ .

Si f est la forme réciproque de φ , la quadrique de dispersion de ψ_0 est $f(u_i) = 1$. Le plus simple est, pour le voir, de ramener φ à des axes qui lui soient conjugués, soit

$$\int (u_i q_i)^2 |\psi_0|^2 d\tau = \int (u_i' q_i')^2 \frac{e^{-\frac{\Sigma q_i'^2}{4}}}{(2\pi)^{\frac{r}{2}}} dq_i' = \Sigma u_i'^2, \quad \text{car } \sqrt{\Delta} dq_i = dq_i'$$

Comme u_i et q_i sont de variances contraires, $\Sigma u_i'^2 =$ forme réciproque de $\Sigma q_i'^2$, $f(u_i)$ est celle de $\varphi(q_i)$.

De même,

$$4 \left\| \Sigma x_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right\|^2 = 4 \left\| \Sigma x_i' \frac{\partial \psi}{\partial q_i'} \right\|^2 = \|(\Sigma x_i' q_i') \psi\|^2 = \Sigma x_i'^2$$

et les x_i et q_i ayant même variance,

$$G(x_i) = \varphi(x_i).$$

Donc pour la loi de Gauss,

$$G(u_i) - F(u_i) \equiv 0,$$

remarquons que si $\psi = \prod (\sqrt{2} \sigma_i)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\sum q_i^2}{4\sigma_i^2}}$,

$$f(u_i) G(u_i) = (\sigma_i^2 u_i^2) \left(\frac{u_i^2}{\sigma_i^2} \right) = (\sum u_i^2)^2 + \sum_{(i,j)} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_j} - \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \right)^2 u_i^2 u_j^2$$

qui ne se réduit au premier terme que si tous les σ_i sont égaux entre eux.

Dans le cas général, il est naturel de poser, supposant $f(u_i)$ connue, donc $F(x_i)$,

$$\psi = \psi_0 \chi(q_i), \quad \psi_0 = \frac{1}{a_0} e^{-\frac{1}{4} F(q_i)}, \quad a_0^2 = \frac{(2\pi)^r}{\sqrt{\Delta}}$$

avec les notations habituelles $\xi_i = \alpha_{ij} q_j$, $F(q_i) = f(\xi_i)$, posant

$$\frac{1}{4} G(x_i) = \int \left| \sum x_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right|^2 d\tau = \int \left| \sum x_i \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \xi_i \chi \right) \right|^2 |\psi_0|^2 d\tau$$

Soient trois termes; le premier est

$$\int \left| \sum x_i \frac{\partial \chi}{\partial q_i} \right|^2 |\psi_0|^2 d\tau,$$

le troisième

$$\frac{1}{4} \int \left| \sum x_i \xi_i \right|^2 |\psi|^2 d\tau = \frac{1}{4} \int \left| \sum u_i q_i \right|^2 |\psi|^2 d\tau = \frac{1}{4} f(u_i) = \frac{1}{4} F(x_i);$$

les termes rectangles s'annulent car, par exemple :

$$\int \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_i} \chi^* + \frac{\partial \chi^*}{\partial q_i} \chi \right) \xi_j |\psi_0|^2 d\tau = \int |\psi_0|^2 \frac{\partial}{\partial q_i} (\chi \chi^*) \xi_j d\tau = - \int |\chi|^2 |\psi_0|^2 (\alpha_{ij} - \xi_i \xi_j) d\tau;$$

or de

$$\int |\psi|^2 (\sum u_i q_i)^2 d\tau = f(u_i) = F(x_i) = \int |\psi|^2 (\sum x_i \xi_i)^2 d\tau,$$

on tire

$$\overline{\xi_i \xi_j} = \int |\psi|^2 \xi_i \xi_j d\tau = \alpha_{ij}.$$

Il reste

$$G(x_i) \equiv F(x_i) + 4 \int \left| \sum x_i \frac{\partial \chi}{\partial q_i} \right|^2 |\psi_0|^2 d\tau,$$

le deuxième terme ne s'annulant identiquement que pour $\chi = \text{const.}$, ou loi de Gauss.

Ainsi la quadrique de dispersion relative aux $2 \frac{\partial}{\partial q_i}$, soit $G(x_i) = 1$, est entièrement intérieure à la quadrique polaire réciproque de $f(u_i) = 1$, quadrique de dispersion relative aux q_i . Ces deux quadriques ne se confondent que pour une loi de Gauss (c'est-à-dire en $e^{-\varphi}$), elles peuvent se toucher en 1, 2, ..., h points si $\frac{\psi}{\psi_0}$ ne dépend effectivement que de $r-1, \dots, r-h$ combinaisons linéaires des q_i .