JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

E. KRUMMEICH

Contribution à l'étude du mouvement de la population

Journal de la société statistique de Paris, tome 68 (1927), p. 119-131
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1927__68__119_0>

III

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU MOUVEMENT DE LA POPULATION

PREMIÈRE PARTIE

GENÈSE ET GÉNÉRALISATION DE LA LOI DE VERHULST

1° *Théories anciennes de la population. Malthus.* — On attribue souvent à Malthus l'honneur des premières recherches relatives à la population. En réalité, son *Essay on the principle of population* date de 1798, et avant lui, nombre d'économistes avaient déjà signalé l'importance de ce problème. Nombreux étaient les travaux où l'on étudiait les rapports entre la population et les conditions économiques.

L'école des populationnistes, avec W. Temple (1672) et J. Tucker (1751), développe cette idée que la multiplication des hommes entraîne celle des richesses. Si l'Irlande est pauvre, c'est parce qu'elle n'est pas assez peuplée. Si la Hollande est riche, c'est parce qu'elle a une population nombreuse. Il en résulte que les encouragements à la nuptialité et à la natalité assurent un accroissement de la population sans qu'il soit nécessaire d'envisager les conditions économiques du problème. Les hommes d'État des XVIIe et XVIIIe siècles y trouvent un moyen théorique d'accroître les ressources en hommes, et partant, en puissance militaire et économique, en possibilités fiscales.

Cependant, Mirabeau le père (« *L'Ami des Hommes* » 1757) et Quesnay déclarent que c'est prendre l'effet pour la cause, et qu'en réalité la population se proportionne aux moyens de subsistance. Cette idée n'était d'ailleurs pas nouvelle, et elle avait même précédé les théories populationnistes. Dès 1589, Giovanni Botero avait signalé (*Delle cause della grandezza della citta*) qu'on ne saurait provoquer artificiellement l'accroissement de la population, mais qu'inversement (et cette idée est très intéressante pour l'étude qui suit) les pertes causées par quelque perturbation, guerre, épidémie, sont bien vite réparées. Walter Raleigh (1618) et Franklin abondaient dans le même sens. Townsend (1787) déclare que le nombre d'individus de toute espèce vivante tend vers la limite qui correspond à la quantité de subsistances disponibles. Deux facteurs règlent le nombre des hommes : la faim et l'appêtit sexuel, le premier de ces facteurs réglant l'autre.

Cantillon perfectionne cette théorie dès 1734. Non seulement il admet que le nombre d'habitants d'un État dépend des moyens de subsistance, mais il introduit de plus dans le problème le genre de vie des habitants : la consommation d'un Anglais étant plus considérable que celle d'un Chinois, des quantités comparables de subsistances ne permettront pas des chiffres de population comparables en Angleterre et en Chine. Dans les théories précédentes, le chiffre de la population est régularisé par la mortalité croissante ou décroissante suivant que les subsistances diminuent ou augmentent. Autrement dit, la quantité de subsistances disponibles détermine la population. Dans la théorie de Cantillon, au contraire, il est nécessaire de connaître le genre de vie du peuple étudié; de plus, l'adaptation du chiffre de la population aux subsistances s'effectue par l'action des taux de nuptialité et de natalité, la population se multipliant de manière à conserver aux gens le niveau d'existence qui leur est habituel.

Il semble qu'il y ait chez Malthus quelque confusion de ces deux écoles. Il admet d'une part qu'il existe un rapport constant entre la population et les subsistances, et que la condition de la classe inférieure ne varie pas d'un siècle à l'autre. L'accroissement de la population est limité par deux obstacles : le vice et la misère. D'autre part, dans la seconde édition de son essai, il dit que le genre de vie traditionnel influe sur les habitants, et que le taux de nuptialité s'annule pour un certain degré de misère.

C'est cependant chez Malthus qu'il faut chercher le premier essai d'étude rationnelle de la population, encore que sa conclusion ne soit qu'une négation : « si la population d'une étendue bornée croît sans limite en progression géométrique, bientôt des millions d'habitants seront sans subsistance ». Il commence par dire : « Nous pouvons tenir pour certain que, lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle va doublant tous les vingt-cinq ans, et croît de période en période suivant une progression géométrique... l'expérience la plus familière nous enseigne que les opérations de la nature sont soumises à des lois constantes; et il y a lieu de croire que depuis que le monde existe, celles qui président à la population n'ont pas éprouvé de changement ». Il admet ensuite que la production double au bout des vingt-cinq premières années, mais ne s'accroît plus ensuite qu'en progression arithmétique. Ce que nous voulons retenir dans la présente étude, c'est seulement la première hypothèse, celle que nous pouvons résumer ainsi : si aucun facteur ne vient modifier la natalité et la mortalité, le chiffre de la population varie en progression géométrique.

Précisons :

Soit y la population d'un pays à l'époque t ; soit y_0 sa population à un temps t_0 fixé. Si les conditions d'existence, la moralité, les coutumes ne varient pas, s'il n'y a ni émigrations ni immigrations, la population croîtra pendant le temps dt d'une quantité (positive ou négative) dy, évidemment proportionnelle à y et à dt, c'est-à-dire :

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{K}\,y$$

Ou :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \mathrm{K}.$$

Soit, en intégrant :

$$y = e^{k(t+c)}.$$

Comme au temps t_0 la fonction a la valeur y_0, on a finalement :

$$y = y_0\, e^{k(t-t_0)}$$

Qui est de la forme :

$$y = \mathrm{A} y_0\, e^{\mathrm{K}t}.$$

L'erreur consiste à croire que la population se trouve dans des conditions constantes de pouvoir d'accroissement à mesure qu'elle s'accroît, alors que le calcul précédent ne justifie que la *tendance* de l'accroissement à suivre une progression géométrique.

Par contre, il est difficile de concevoir un argument rationnel en faveur de la progression arithmétique des subsistances.

Remarquons que si l'on suppose un courant normal d'émigration et d'immigration, on peut écrire :

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{K}y + l$$

d'où :

$$y = e^{-\mathrm{K}t} \int e^{kt}\, l\, dt.$$

Si on suppose K et l constants, on a :

$$y = e^{-\mathrm{K}t}\left(e^{kt}\,\frac{l}{\mathrm{K}} + \mathrm{C}\right)$$

$$y = \mathrm{C}e^{-\mathrm{K}t} + h.$$

C et h étant des constantes.

On voit que $h = \frac{l}{k}$ permet de connaître l, mesure de la vitesse d'accroissement provenant des causes artificielles.

2º *Quételet et Verhulst.* — En résumé, la loi de Malthus ne nous fournit aucune précision sur la forme réelle de la loi d'accroissement de la population. Elle se borne à nous montrer l'impossibilité d'un accroissement en progression géométrique. Quételet, dans sa *Physique sociale* (1835), s'efforce d'établir le mode d'action des obstacles qui s'opposent au libre développement de la population, ce qui est évidemment le seul moyen d'en établir une théorie mathématique. Des recherches qu'il dit nombreuses, et que du reste il ne publie pas, le conduisent à poser les deux principes fondamentaux suivants :

1° La population tend à croître selon une progression géométrique;

2° La résistance, ou la somme des obstacles à son développement est, toutes choses égales d'ailleurs, comme le carré de la vitesse avec laquelle la population tend à croître.

Ce deuxième principe revient à comparer une population se développant au milieu d'obstacles divers, à un corps soumis à une force constante et se déplaçant dans un milieu résistant. Quételet déclare que la comparaison est parfaite si l'on suppose aux couches du milieu traversé une densité indéfiniment croissante. Sa conclusion est que la population tend à devenir stationnaire. Il ne fournit aucun document à l'appui de sa thèse.

Cédant aux instances de Quételet, Verhulst, professeur à l'école militaire belge, donne en 1838 sa *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement.* Malgré l'intérêt que présentaient ses recherches, l'absence de données permettant une vérification convenable de sa loi, lui en avaient fait différer jusqu'alors la publication. Il publie encore deux autres mémoires en 1844 et 1846.

Les travaux de Verhulst n'étaient pas oubliés de nos jours, comme on l'a prétendu, et M. Mansion les citait en 1916 dans ses *Leçons sur le calcul des Probabilités* en indiquant les limites assignées dès 1845 par Verhulst aux populations française et belge, et qui sont presque identiques à celles que fournissent les données actuelles. Toutefois, il semble que lorsque Pearl et Reed publièrent en 1920 leur étude : *On the rate of Growth of Population*, ils ignoraient les recherches effectuées trois quarts de siècle plus tôt et qui aboutissaient à la même loi d'accroissement; c'est là un argument sérieux en faveur de la valeur rationnelle de la loi de Verhulst.

3° *Facteurs qui déterminent la courbe d'accroissement.* — Toutes les théories de la population qui ont précédé la publication des principes de Quételet sont basées sur des considérations économiques et sociales. Il semble que celles-ci aient paru trop complexes pour permettre une étude rationnelle; on pouvait alors se demander s'il n'était pas possible d'établir auparavant une loi mathématique, exacte ou approchée, de la population, donnant sa valeur en fonction seulement du temps.

Dans ces conditions, le problème revient à chercher comment varie dans le temps la population d'une aire limitée. Précisons d'abord les facteurs qui définissent la population et l'aire considérées.

1° Il est indispensable de considérer une aire bien définie comme par exemple un État dont les frontières sont fixes. Pour que la méthode statistique puisse être appliquée avec fruit, il faut que la population soit en nombre suffisant, c'est-à-dire que le pays soit suffisamment vaste et peuplé. La limite des aires qu'on peut envisager est évidemment la surface de la terre. Encore la consi dération d'une surface aussi grande ne met-elle pas à l'abri de perturbations comme celle que produisit l'épidémie de grippe de 1918.

2° Pour une aire donnée, il existe une limite supérieure de la population. Les découvertes scientifiques futures permettront sans doute de multiplier beaucoup les subsistances, mais elles ne sauraient leur faire dépasser un maximum déterminé par les possibilités chimiques et naturelles du sol; elles peuvent seulement faire reculer l'estimation que nous pouvons faire aujourd'hui de ce maximum. Remarquons d'ailleurs que certains pays peuvent nourrir un nombre d'habitants supérieur à celui que détermineraient leurs ressources alimentaires; le fait est rendu possible par l'activité industrielle de ces pays et par l'existence d'autres contrées produisant plus qu'elles ne consomment; par contre on ne saurait concevoir une surpopulation industrielle étendue à la terre entière.

Nombreuses sont les estimations de la population limite du globe. De 1804 à 1914, le taux moyen d'augmentation de la population mondiale a été de 0,864 %; il a atteint 1,159 % pour vingt-six des pays les plus avancés en 1906-1911 (chiffres fournis par M. G. H. Knibbs). Avec le premier de ces taux, la population mondiale, estimée à 1 milliard 850 millions en 1924, atteindrait en l'an 2.004 le chiffre de 3 milliards 700 millions et en 2.165 celui de 14 milliards 800 millions. Les évaluations contemporaines du maximum possible pour la population varient de 2 milliards 942 millions (en étendant au monde entier l'accroissement possible d'après O. E. Baker, des États-Unis), à 9 milliards 792 millions (si toute la terre arable nourrissait trois personnes à l'acre).

On ne peut guère leur accorder de valeur, car le nombre possible dépend essentiellement de l'organisation économique et sociale, des possibilités minérales du globe, de l'état des connaissances humaines permettant leur exploitation. Leur extrême discordance montre combien elles sont précaires. D'ailleurs le développement de la présente théorie ne fait nullement appel à ces évaluations, mais seulement à l'existence d'une population limite.

3° La population admet évidemment zéro comme limite inférieure.

4° On entrevoit dès lors la forme générale que doit avoir la courbe de population. Au début, le chiffre de la population croît lentement (comme le fait la fonction a^x pour $a > o$ pour les grandes valeurs négatives de x); il croît de plus en plus vite jusqu'au moment où l'on dépasse la relation optima entre le chiffre de la population et les ressources qui sont à sa disposition. Les habitants éprouvent alors des difficultés croissantes à se procurer les subsistances, et à partir de ce moment, la raison d'accroissement diminue sans cesse. La courbe de population tend vers sa valeur limite en tournant sa concavité vers le bas.

En résumé, la courbe représentant l'évolution doit posséder deux asymptotes horizontales parallèles qui la comprennent entièrement, et un point d'inflexion.

4° *Hypothèse de MM. Pearl et Reed.* — Dans la théorie de Verhulst, on admet que la population se développe dans un milieu fermé pouvant fournir une quantité déterminée de subsistances (sauf l'exception des pays industriels). On y admet aussi implicitement que les gens ont des besoins identiques aux diverses époques. En réalité, il n'en est pas ainsi, car non seulement l'humanité a traversé des cycles de civilisation où ses besoins différaient de l'un à l'autre cycle, mais aussi les possibilités de rendement du terrain ont profondément varié à chacun de ces cycles.

Dans un premier cycle, l'homme se nourrit de sa chasse, une étendue donnée de terrain nourrit peu d'hommes dans ces conditions. Il lui succède un cycle pastoral permettant un développement plus grand de la population, puis un cycle agricole où l'accroissement devient bien plus grand et atteint sa valeur limite; il est suivi du cycle industriel auquel correspond l'énorme accroissement de la population européenne au cours du XIX^e^ siècle. Pour chacun de ces cycles nous assistons à une évolution de la population suivant une courbe de Verhulst suivie d'un palier, puis d'une autre courbe correspondant au cycle suivant, etc...

Il convient toutefois de remarquer que dans cette nouvelle hypothèse le cadre du problème s'élargit, la population considérée vivant toujours dans une aire limitée, mais les subsistances mises à sa disposition n'étant plus uniquement celles que produit cette terre.

Au fond, l'hypothèse de Pearl et Reed revient à introduire implicitement dans le problème les conditions économiques et sociales du pays étudié, ce que ne permet pas la théorie de Verhulst.

Elle ne permet donc par suite que d'étudier un cycle économique en cours, mais non les suivants, à moins qu'on ne puisse prévoir leur situation économique et sociale, le type de vie des futurs habitants, les taux futurs de mortalité, de natalité etc., aux prix d'extrapolations condamnables.

5° *Exposé des travaux de Verhulst. Équation réduite.*

PREMIER MÉMOIRE DE VERHULST (1838).

On peut résumer comme suit le contenu de ce premier mémoire, du reste très court.

Le taux d'accroissement d'une population ne rencontrant aucun obstacle à son développement est, si on appelle y le chiffre de la population au temps t :

$$\frac{dy}{dt} = my\cdot$$

Mais des obstacles croisant avec la population s'opposent à ce libre accroissement. La valeur ainsi modifiée du taux d'accroissement pourra s'écrire :

$$\frac{dy}{dt} = my - \Phi(y)$$

$\Phi(y)$ étant une fonction de la population. A défaut de la fonction exacte, inconnue, on prendra la fonction la plus simple possible :

$$\Phi(y) = ny^2.$$

L'intégration de cette équation différentielle nous donne :

$$y = \frac{\frac{m}{n} e^{mt+c}}{1 + e^{mt+c}}.$$

Si y_0 est la population au temps 0, on trouve :

$$e^c = \frac{ny_0}{ny_0 - m}$$

et y devient :

$$y = \frac{my_0\, e^{mt}}{ny_0\, e^{mt} + m - ny_0}.$$

On voit que y s'annule si on fait tendre t vers l'infini négatif. Il tend vers la limite $K = \frac{m}{n}$ si l'on fait tendre T vers l'infini positif.

Nous appellerons cette valeur K, *population limite.*

Verhulst généralise sa fonction en posant $\Phi(y) = ny^p$.

Il fait remarquer que ces hypothèses, compatibles avec les faits conduisent à des valeurs limites de la population très différentes. Ensuite, sans montrer comment il détermine les constantes, il fournit des tables pour la France, la Belgique et le Comté d'Essex, comparant l'ajustement par sa formule avec les faits, et indiquant que le peu d'étendue des statistiques dont il dispose ne lui permet pas de fournir un critérium parfait de sa théorie.

DEUXIÈME MÉMOIRE DE VERHULST (1844).

Dans ce second mémoire, Verhulst considère une population au moment où elle éprouve pour la première fois des difficultés à se procurer des subsistances, c'est-à-dire au moment où l'effet de la fonction retardatrice commence à se faire sentir. Si nous considérons le taux proportionnel d'accroissement $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$, et si nous appelons b le chiffre de la population à ce moment, la fonction retardatrice est une fonction de y-b qui doit s'annuler pour $y = b$, et devenir infinie en même temps que y :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = l - f(y - b).$$

La forme la plus simple qu''on puisse donner à $f(y\text{-}b)$ est évidemment la forme linéaire $n(y\text{-}b)$.

Alors :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = l - n(y - b).$$

Si on pose $m = l + nb$, on retrouve l'équation déjà obtenue dans le premier mémoire :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = m - ny.$$

Posons $m = \frac{1}{\alpha}$ en nous rappelant que nous avons posé $\frac{m}{n} = K$, population limite. Nous avons :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

qui admet comme solution :

$$y = \frac{K}{1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}}.$$

C'est sous cette forme préconisée par M. Yule que nous étudierons la loi de Verhulst.

β est un temps séparant le point d'inflexion du zéro de l'échelle des temps. M. Yule a appelé α l'intervalle type.

On voit que pour :

$$t = \beta,\ y = \frac{K}{2}.$$

Lorsque t devient infini, y tend vers K.

Il est facile de construire cette courbe qui est asymptote à l'axe des temps et à la droite $y = K$.

On peut du reste déterminer facilement le point d'inflexion.

ÉTUDE DE LA COURBE DE VERHULST

On a :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{\alpha} - \frac{y^2}{\alpha k}$$

d'où :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{l}{\alpha} - \frac{2y}{\alpha K} = \frac{l}{\alpha}\left(l - \frac{2y}{K}\right).$$

On voit que $\frac{d^2y}{dt^2}$ s'annule pour $y = \frac{K}{2}$.

L'abscisse correspondante est $t = \beta$.

Le point d'inflexion est donc équidistant des deux asymptotes.

La courbe est symétrique par rapport à son point d'inflexion. On a en effet, h étant une constante quelconque :

$$Y_{\beta + h} = \frac{K}{1 + e^{-\frac{h}{\alpha}}} = \frac{K e^{\frac{h}{\alpha}}}{e^{\frac{h}{\alpha}} + 1}$$

$$= K - \frac{K}{1 + e^{\frac{h}{\alpha}}} = K - Y_{\beta - h}.$$

ÉQUATION RÉDUITE

Il est possible de simplifier l'équation de la courbe en prenant le point d'inflexion comme origine des temps, α comme unité de temps, K comme unité de population. Elle devient alors :

$$y = \frac{1}{1 + e^{-t}}.$$

Il est facile de vérifier sous cette forme que le taux proportionnel d'accroissement $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$ est égal au complément à l de l'ordonnée correspondante de la courbe.

On a en effet :

$$\frac{dy}{dt} = y\,(1 - y)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 1 - y.$$

Un autre intérêt de cette forme réduite est de permettre le tracé d'une courbe valable pour toutes les populations, la graduation des axes de coordonnées seule étant différente.

APPROXIMATION DES PETITES VALEURS DE Y

Remarquons que lorsque y est très petit par rapport à K, l'équation différentielle :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

diffère de très peu la forme approchée :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\alpha}$$

admettant comme solution la courbe exponentielle $y = Ae^{\frac{t}{\alpha}}$ représentative d'une progression géométrique. Verhulst aurait donc pu se dispenser dans son second mémoire, d'imaginer le passage d'une population suivant la loi exponentielle, à la loi nouvelle, puisqu'au début les deux lois donnent pratiquement les mêmes valeurs de y.

Dans son deuxième mémoire, Verhulst tente de généraliser sa formule par l'emploi de l'équation :

$$\frac{dy}{dt} = my - ny^{\mu}\,\cdot$$

Il obtient une solution dans le cas particulier de :

$$\frac{l}{y}\frac{dy}{dt} = l - n\,(y - b)^2$$

Mais il ne peut déterminer les constantes que par approximations successives.

M. Yule fait remarquer à ce sujet que les données sont, à cette époque, trop peu nombreuses pour montrer que la fonction retardatrice n'est pas une droite, et qu'il en est encore de même aujourd'hui.

6° ***Forme linéaire du taux d'accroissement. Généralisation de Pearl et Reed. Formes réduites.***

FORME LINÉAIRE DU TAUX D'ACCROISSEMENT

Nous avons vu que :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{y}{K}\right).$$

Le taux instantané proportionnel d'accroissement est donc une fonction linéaire de la population. C'est la propriété fondamentale de la loi de Verhulst.

On peut du reste mettre en évidence une propriété analogue de l'accroissement proportionnel pour un intervalle de temps fini h.

L'accroissement proportionnel entre deux époques séparées par un intervalle de temps fini h est :

$$\frac{Y_{t+h}-Y_t}{Y_t}=\frac{\dfrac{K}{1+e^{\frac{\beta-t+h}{\alpha}}}-\dfrac{K}{1+e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}}}{\dfrac{K}{1+e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}}}=e^{\frac{\beta-t-h}{\alpha}}\frac{\left(e^{\frac{h}{\alpha}}-1\right)}{l+e^{\frac{\beta-t-h}{\alpha}}}$$

$$=\left(1-\frac{Y_{t+h}}{K}\right)\left(e^{\frac{h}{\alpha}}-1\right).$$

Par conséquent, si on prend pour abscisses les valeurs de Y_{t+h}, les valeurs correspondantes du taux proportionnel se trouvent sur une droite de pente $\frac{e^{\frac{h}{\alpha}}-1}{K}$ et passant par le point d'abscisse K.

Cette extension nous sera très utile, puisque les données statistiques dont nous disposons proviennent des recensements et sont séparées par des intervalles de temps finis.

GÉNÉRALISATION DE MM. PEARL ET REED

MM. Pearl et Reed sont partis de la propriété ci-dessus pour généraliser la formule de Verhulst. Il est commode dans ce but de transformer cette dernière en posant :

$$\begin{cases} e^{\frac{\beta}{\alpha}}=m \\ \alpha=\dfrac{-1}{Ka'}. \end{cases}$$

Il vient alors :

$$y=\frac{K}{1+me^{Ka't}}$$

Avec :

$$\frac{dy}{dt}=-a'y\,(K-y).$$

On voit nettement sous cette forme que $\frac{dy}{dt}$ varie directement comme les fonctions du temps $a'y$ et (K-y).

Donc si nous remplaçons — a' par une fonction du temps $f(t)$, nous obtenons une nouvelle expression plus générale :

$$\frac{dy}{dt} = f(t)\, y\,(K - y).$$

Les variables se séparent, et on obtient en intégrant :

$$y = \frac{K}{1 + me^{-K \int f(t)\, dt}}$$

Soit en posant :

$$-K \int f(t)\, dt = F(t),$$

$$y = \frac{K}{1 + me^{F(t)}}.$$

Si nous supposons que $F(t)$ peut se développer en série de Taylor on a :

$$y = \frac{K}{1 + me^{a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots}}.$$

On ne peut admettre pour K et m que des valeurs positives, car si K était négatif, on aurait des valeurs négatives de y, ce qui est inconcevable; et si m était négatif, la courbe pourrait admettre des discontinuités pour des valeurs finies de t, ce qui est également inconcevable.

Toutes les courbes répondant à cette formule générale sont comprises entre deux asymptotes parallèles d'ordonnées O et K. On obtient les maxima et minima éventuels en annulant la dérivée :

$$\frac{dy}{dt} = y\,(K - y)\, F'(t).$$

CAS OU F (x) EST UN POLYNÔME

Supposons que dans le développement de l'exposant de e on néglige les puissances de t supérieurs à n. Quatre types différents de courbes sont alors possibles.

On voit que c'est seulement dans le cas de n impair que nous obtiendrons une courbe réellement asymptote aux deux droites $Y = 0$, $Y = K$.

Le cas de $a > o$ sera alors le cas d'une population décroissante, et celui de $a < o$ celui d'une population croissante, seul le cas semble-t-il étudié d'une part par Verhulst et d'autre part par Pearl et Reed.

On peut facilement déterminer les points d'inflexion de la forme générale :

$$Y = \frac{K}{1 + m^{F(t)}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\,Km \frac{e^{F(t)}\,F'(t)}{\left(1 + me^{F(t)}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Kme^{F(t)}\,[F'(t)]^2}{\left(1 + me^{F(t)}\right)^3}\left[\left(1 - mE^{F(t)}\right) + \frac{F''(t)}{[F'(t)]^2}\left(1 + me^{F(t)}\right)\right]$$

Ou, en remarquant que :

$$1 + me^{F(t)} = \frac{K}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{K\left(\frac{K}{y} - 1\right)[F'(t)]^2}{\frac{K^3}{Y^3}}\left[\left(1 - \frac{K}{y} + 1\right) + \frac{F''(t)}{[F'(t)]^2}\frac{K}{y}\right].$$

Ce produit de deux facteurs s'annule pour les valeurs de y qui annulent le deuxième facteur, soit :

$$y = \frac{K}{2} - \frac{K}{2}\frac{F''(t)}{[F'(t)]^2}.$$

Les points d'inflexion sont données par les solutions communes à cette équation et à celle de la courbe de la population.

FORMES RÉDUITES

Pratiquement, l'emploi d'un pylône de degré supérieur à 3 comme exposant de e ne serait pas justifié, car le nombre de recensements dont on dispose aujourd'hui pour déterminer les constantes est très réduit, et utiliser un nombre trop grand de constantes reviendrait à perdre le bénéfice de l'ajustement.

En se bornant à $n = l$, on obtient la forme réduite.

$$Y = \frac{K}{1 + me^{a_{,1}x + a_2 x^2 + a_3 x^3}}$$

Qui peut présenter un point d'inflexion, mais n'est pas symétrique autour de ce point.

En se bornant à $n = l$, on a la forme de Verhulst.

$$Y = \frac{K}{1 + me^{a_1 x}}$$

Chaque fois que l'accroissement est tel que la courbe soit à peu près symétrique, c'est cette dernière forme qu'il faudra adopter, car seule elle conduit à des calculs simples.

Si l'on admet la seconde hypothèse d'additivité des cycles successifs de MM. Pearl et Reed, il est plus commode et plus juste, au lieu d'utiliser de nombreuses constantes, de traiter séparément chaque cycle. On l'étudiera à l'aide d'une des équations :

$$y = p + \frac{K}{1 + me^{a_1 x}}$$

$$y = p + \frac{K}{1 + me^{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}}$$

p représentant l'accroissement total atteint dans tous les cycles précédents et l'asymptote inférieure du cycle considéré, tandis que $p + K$ est l'asymptote supérieure. L'asymptote inférieure est souvent au-dessous de l'asymptote supérieure du cycle précédent, car le cycle considéré a pu commencer avant que le précédent ait terminé son évolution (par exemple, l'apparition de l'industrie a eu lieu avant que le développement agricole soit complet).

REMARQUE

Il convient ici de formuler une remarque critique. Rien ne nous permet d'affirmer qu'une population est toujours croissante ou décroissante, et on pourrait par contre citer de nombreux exemples de populations ayant atteint un maximum, puis ayant ensuite décru jusqu'à complète disparition. Aucune raison *a priori* ne permet de rejeter le cas de n pair, si ce n'est l'hypothèse de Verhulst, admettant une population toujours croissante ou stationnaire. Le choix exclusif de n impair provient de ce qu'on admet que la courbe a deux asymptotes réelles, alors qu'une seule est réelle lorsque n est pair. L'étude des peuples de l'Antiquité nous conduirait sans doute au type de courbe : n pair et $a > o$ qui n'admet pas de valeur limite supérieure. Admettre cette valeur limite revient évidemment à identifier la notion rationnelle d'une valeur que la population ne saurait dépasser. à la notion hypothétique d'une valeur vers laquelle tend la population. Le fait que la population ne peut dépasser une certaine valeur n'implique nullement la nécessité de tendre vers cette valeur. Tout au plus peut-on affirmer que les populations de plusieurs nations contemporaines *semblent* admettre une asymptote horizontale correspondant à la population limite.

(*A suivre.*) E. Krummeich.