Journal de la société statistique de Paris

René Roy

# Les divers concepts en matière d'indices

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 82 (1941), p. 177-206

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1941__82__177_0>

# JOURNAL

DE LA

# SOCIÉTÉ DE STATISTIQUE DE PARIS

N° 9-10. — SEPTEMBRE-OCTOBRE 1941

## I

## LES DIVERS CONCEPTS EN MATIÈRE D'INDICES (1)

L'étude des variations de prix montre qu'à côté des facteurs agissant en propre sur le prix d'un article déterminé, il existe des causes de variation qui affectent l'ensemble des prix; on désigne sous le nom de phénomènes monétaires les influences qui agissent sur le mouvement de tous les prix.

Le problème qui se pose dans ces conditions consiste à éliminer l'influence de ces phénomènes monétaires, de manière à dégager le sens et l'importance des variations du prix d'un article déterminé; cette recherche constitue le problème de l'indice des prix, problème qui revient à déterminer un nombre traduisant les variations de l'ensemble des prix, en caractérisant le niveau général des prix par un indice rapporté à une situation de référence ou situation de base (2).

La solution de ce problème permet de préciser la notion courante de pouvoir d'achat de la monnaie, celui-ci variant en raison inverse de l'indice du niveau général des prix.

Pour fixer les idées, si nous considérons pour la situation de base zéro l'ensemble des prix $p_0$ et, d'autre part, à une situation quelconque l'ensemble des prix $p$ des mêmes articles, nous pouvons regarder l'indice des prix comme égal au quotient $\frac{m}{m_0}$ de la moyenne des prix $p$ par la moyenne des prix $p_0$. Le pouvoir d'achat de la monnaie variera en raison inverse de l'indice $i = \frac{m}{m_0}$, ainsi défini.

Bien entendu, le problème de l'indice des prix ne se trouve pas résolu par une telle définition, car les valeurs de cet indice dépendent au premier chef de la méthode utilisée pour définir les moyennes $m$ et $m_0$; c'est dans le choix de cette méthode que réside précisément tout le problème de l'indice des prix.

(1) Communication faite le 23 avril 1941 par M. René Roy.

(2) Nous employons à dessein l'expression « Situation de base » qui s'applique aux comparaisons dans l'espace comme aux comparaisons dans le temps.

Si ce problème a revêtu une importance particulière depuis l'apparition de perturbations monétaires présentant une ampleur exceptionnelle, on ne saurait toutefois prétendre qu'il s'agit là d'une question nouvelle, car même avant la guerre de 1914-1918, où la plupart des monnaies étaient stables, les indices de prix utilisés alors présentaient déjà d'une époque à l'autre, des fluctuations qui n'étaient nullement négligeables, atteignant 15 ou même 20 % pendant la seule période comprise entre 1900 et 1914.

Nous nous proposons d'exposer les diverses conceptions auxquelles il a été fait appel pour la détermination des indices de prix; l'examen critique de ces conceptions permettra de dégager certains enseignements pour le calcul pratique de ces indices et pour leur utilisation, devenue aujourd'hui courante.

Si l'on s'en tient aux traits essentiels des méthodes employées, il nous paraît possible de rattacher les diverses solutions admises à quatre conceptions principales :

1° Conception statistique;
2° Conception budgétaire;
3° Conception monétaire;
4° Conception fondée sur la notion d'équivalence.

## I — Conception statistique

La simple considération des moyennes $m$ et $m_0$ dont il vient d'être question exige pour les diverses marchandises le choix d'unités de quantité et pose en conséquence la question du système de pondération à utiliser pour le calcul des moyennes de prix pour la situation de base zéro et pour la situation considérée.

En vue d'éliminer cette difficulté, sur laquelle nous aurons à revenir en exposant les autres conceptions, nous pouvons définir l'indice des prix, non par le rapport des moyennes des prix, mais par la moyenne des rapports de prix d'une même marchandise, c'est-à-dire des quantités :

$$x = \frac{p}{p_0}.$$

Le vieil indice de Sauerbeck, utilisé pour le calcul de l'indice anglais des prix de gros, ainsi que pour l'indice non pondéré des prix de gros de la Statistique générale de la France est ainsi défini comme la moyenne arithmétique simple des valeurs de $x$ afférentes aux diverses marchandises; un tel indice répond ainsi à la formule :

$$a = \frac{1}{n} \Sigma x$$

$n$ désignant le nombre des articles entrant dans la composition de l'indice.

Dans quelle mesure pouvons-nous considérer cette moyenne arithmétique simple comme suffisamment représentative du niveau général des prix?

La seule condition à laquelle satisfasse la moyenne arithmétique est de rendre minimum la somme des carrés des écarts $\Sigma\ (a - x)^2$.

Est ce bien cette seule condition qui puisse légitimer le choix de la moyenne arithmétique simple? La question ainsi posée s'apparente étroitement à celle que l'on est amené à résoudre dans la théorie des erreurs d'observation, à propos de la mesure de toutes les grandeurs physiques.

Si, compte tenu de la précision que l'on veut obtenir, les variables $x$ présentent une faible dispersion autour de leur valeur moyenne, l'adoption de $a$ peut constituer une approximation suffisante; mais lorsque l'on considère une situation assez éloignée de la situation de base zéro, les valeurs de $x$ présentent une forte dispersion et l'adoption de $a$ ne peut être légitimée que par une étude de cette dispersion, c'est à dire par l'analyse de la distribution des variables $x$.

Or, en nous reportant à l'ouvrage de M. Ollivier sur les nombres indices de prix, nous constatons que pour la période 1920 1924, la courbe de distribution des variables $x$ présente une forte dissymétrie telle que les rapports de prix supérieurs à la moyenne arithmétique sont beaucoup moins nombreux que les rapports inférieurs à cette moyenne (environ 40 % contre 60 %).

Les observations systématiques de M. Ollivier n'ont d'ailleurs fait que confirmer les remarques faites antérieurement par les auteurs qui avaient abordé l'étude des indices de prix.

Dans ces conditions, le choix de la moyenne arithmétique est purement arbitraire et ne se justifie pas plus que celui de la valeur de $x$ correspondant au maximum de la courbe de distribution (mode) ou bien encore celui de la médiane, caractérisée par une égale quantité de valeurs qui lui sont inférieures et de valeurs qui lui sont supérieures; selon M. Fréchet, cette dernière grandeur, particulièrement facile à calculer, se justifie théoriquement dans bien des cas et présente des garanties comparables à celles que peut offrir une moyenne.

Pour qu'une moyenne $m$ des valeurs de $x$ puisse être considérée comme susceptible de caractériser le niveau d'ensemble, il serait nécessaire en effet que la courbe de distribution des valeurs de $x$ autour de cette moyenne $m$ satisfasse aux conditions suivantes :

1° Courbe symétrique par rapport à l'axe d'abscisses $m$ de manière qu'à tout écart $(x - m)$ réponde un écart de même valeur absolue et de signe contraire et qu'il y ait ainsi compensation entre les écarts de signes contraires;

2° Courbe telle que les écarts les plus faibles soient les plus nombreux, ce qui exige un tracé descendant à partir du maximum situé sur l'axe de symétrie, et ce qui exclut le cas d'une courbe à deux sommets, dont l'interprétation serait inconciliable avec le choix d'un seul nombre pour représenter le mouvement d'ensemble des prix;

3° L'ordonnée de la courbe tend vers zéro lorsque l'on s'écarte indéfiniment de l'axe de symétrie.

Tout revient ainsi à déterminer une fonction $f(x)$ dont la loi de distribution satisfait aux trois conditions posées ci dessus.

Lorsque $f(x)$ sera connu, la moyenne $m$ sera définie par la relation :

$$f(m) = \frac{1}{n} \Sigma f(x)$$

$f(m)$ sera la moyenne arithmétique simple de $f(x)$. Parmi la diversité des fonctions auxquelles on peut songer, nous devons mentionner la fonction logarithmique, qui définit la moyenne géométrique $g$ conformément à l'équation :

$$\operatorname{Log}(g) = \frac{1}{n} \Sigma \operatorname{Log}(x) \cdot$$

Or, l'étude de la distribution des valeurs effectivement observées pour log $(x)$ montre que l'on a précisément affaire à une courbe satisfaisant aux trois conditions définies ci-dessus; c'est ce qu'ont établi en particulier les recherches de M. Ollivier pour la période 1920-1924.

Cette constatation permet de rattacher le problème de l'indice des prix, conçu sous l'angle statistique, à la loi de l'effet proportionnel, dont M. Gibrat tira d'intéressantes conclusions dans son étude sur les inégalités économiques.

On peut en effet écrire :

$$\operatorname{Log}(x) - \operatorname{Log}(g) = \operatorname{Log}\left(\frac{x}{g}\right) \cdot$$

Si les écarts des logarithmes par rapport à leur valeur moyenne obéissent à la loi de compensation, cela signifie donc, en ce qui touche les prix eux-mêmes, qu'il y a lieu de considérer la distribution des rapports de prix à leur valeur moyenne et non celle des écarts de prix par rapport à leur valeur moyenne; nous retrouvons ainsi la loi de l'effet proportionnel, qui revient à considérer, non des valeurs absolues, mais des valeurs relatives et par conséquent des logarithmes au lieu des grandeurs elles mêmes ou bien pour les variations, des variations relatives au lieu de variations absolues.

Étant donné la parenté de la courbe de distribution de log $(x)$ relevée par M. Ollivier, avec une courbe en cloche, il est particulièrement tentant de se demander si cette distribution est voisine d'une distribution normale répondant à la loi de Laplace-Gauss envisagée dans la théorie des erreurs accidentelles.

En fait, il n'en est pas ainsi, sans que les écarts soient d'ailleurs considérables; cela peut s'expliquer par le fait que les conditions assignées à l'existence d'une loi de distribution normale ne sont pas compatibles avec la nature des problèmes relatifs aux mouvements des prix.

Ces conditions sont en effet les suivantes :

*a*) Les causes d'inégalité sont nombreuses;

*b*) L'effet de chacune d'entre elles est indépendant de celui des autres causes;

*c*) L'effet de chaque cause est petit vis à-vis de la somme des effets.

Pour la distribution des valeurs de $x$ ou d'une fonction de ces variables, telle que log $(x)$ il est bien certain que la condition $b$ n'est pas réalisée, puisqu'il existe un ensemble de causes agissant sur tous les prix, et désigné précisément sous le nom de phénomènes monétaires.

Aussi doit on renoncer à la loi normale qui aurait pour avantage de permettre la description de l'ensemble $x$ (population) par la seule donnée de l'axe de symétrie (moyenne) et de l'écart quadratique moyen (écart type) :

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\cdot\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

## II — Conception budgétaire

Dans la méthode précédente, il n'a été tenu aucun compte de l'importance respective des diverses marchandises, puisque les valeurs de $x$ n'étaient affectées d'aucun coefficient de pondération, et que l'on attribuait par conséquent la même valeur aux diverses observations de chaque rapport $x$.

La méthode budgétaire consiste, au contraire, à déterminer les variations d'un certain ensemble de dépenses et à définir pour une situation rapportée à la situation zéro l'indice I par le rapport des deux budgets, soit :

$$I = \frac{D}{D_0} = \frac{\Sigma\,(q\,p)}{\Sigma\,(q\,p_0)}.$$

Une telle expression équivaut à une moyenne arithmétique pondérée, ainsi qu'il est facile de le montrer par les équations suivantes :

$$\Sigma\,(q\,p) = \Sigma\,q\,p_0 \times \frac{p}{p_0} = \Sigma\,(q\,p_0\,.\,x).$$

En désignant par $\alpha$, $\beta$, ... les rapports $\frac{q\,p_0}{\Sigma\,q\,p_0}$, rapports tels que $\Sigma\,\alpha = 1$, on en déduit :

$$I = \Sigma\,\alpha\,x.$$

Si les quantités $q$ envisagées dans la composition du budget, ne subissaient aucune modification lorsqu'on s'écarte de la situation de base, le problème serait résolu, mais lorsque les deux situations à comparer sont assez éloignées l'une de l'autre, il n'est plus possible d'admettre cette hypothèse et le choix des quantités $q$ pose alors un problème fort délicat.

On le résout empiriquement soit par la formule de Laspeyre (quantités initiales), soit par celle de Paasche (quantités finales), soit par la formule idéale de Fisher (moyenne géométrique des deux précédentes), soit par la formule d'Edgeworth (moyenne arithmétique des quantités initiales et finales), soit par toute autre formule plus ou moins complexe.

Le choix entre ces diverses méthodes peut être fait au moyen d'épreuves reposant sur l'adoption de critères que l'on se fixe *a priori*. Parmi ces critères, certains sont presque unanimement admis par les auteurs qui, à la suite de M. Irving Fisher, professeur à l'Université de Yale, se sont particulièrement attachés à l'étude de ces questions; nous indiquons ci-après les plus importants d'entre eux :

1° *Critère d'identité*. — L'indice est égal à l'unité si la situation à étudier se confond avec la situation de base; cette propriété s'exprime symboliquement par l'expression :

$$I_{(0)\,(0)} = 1.$$

2° *Critère de reversibilité*. — L'indice de la situation zéro par rapport à la situation 1 prise comme base de référence, doit être égal à l'inverse de l'indice représentant la situation 1 par rapport à la situation zéro.

Ce critère a pour expression symbolique :

$$I_{(0),\,(1)} \times I_{(1),\,(0)} = 1.$$

3° *Critère circulaire.* — L'indice de la situation (2) par rapport à la situation zéro doit être égal au produit de l'indice de la situation 1 rapportée à la situation zéro par l'indice de la situation (2) rapportée à la situation 1. Ce critère a pour expression symbolique :

$$I_{(0),(2)} = I_{(0),(1)} \times I_{(1),(2)}$$

4° *Critère d'homogénéité.* — La valeur de l'indice ne doit pas être affectée par un changement des unités de mesure dans l'évaluation des quantités $q$.

5° *Critère de proportionnalité.* — Si tous les rapports de prix $x$, composant l'indice, ont la même valeur, l'indice doit être égal à cette valeur commune.

6° *Critère de détermination.* — L'indice ne peut devenir nul, infini ou indeterminé.

Chaque formule d'indice peut être appréciée en étudiant la manière dont elle satisfait aux critères que l'on s'est imposés; M. Irving FISHER a ainsi effectué un classement des formules en leur faisant subir des épreuves comparables à celles que l'on utilise en psychotechnique. La formule idéale qu'il a suggérée à la suite de ses travaux est représentée, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, par la moyenne géométrique des indices de LASPEYRE et de PAASCHE, soit :

$$I = \sqrt{L\,P}.$$

L'indice de LASPEYRE, L, a lui même pour expression :

$$L = \frac{\Sigma\, q_0\, p_1}{\Sigma\, q_0\, p_0} \text{ (quantités initiales).}$$

Quant à l'indice de PAASCHE, P, sa valeur est donnée par la formule :

$$P = \frac{\Sigma\, q_1\, p_1}{\Sigma\, q_1\, p_0} \text{ (quantités finales).}$$

Bien que M. Irving FISHER ait été guidé dans ses travaux par le constant souci d'apprécier la valeur de ses indices en considération de l'usage qui pouvait en être fait dans l'équation générale des échanges, c'est-à dire dans la théorie monétaire; ses recherches, ainsi d'ailleurs que celles de ses devanciers ou de ses continuateurs, sont fortement empreintes d'empirisme ou tout au moins de pragmatisme. Pour aussi précieux que soient certains des critères utilisés, fort peu s'imposent réellement à l'esprit et comme aucun indice ne peut les satisfaire à la fois, le choix qui s'établit entre les diverses formules demeure quelque peu arbitraire.

## III — CONCEPTION MONÉTAIRE

L'indice monétaire, dont la définition précise a été donnée par M. DIVISIA (1) est destiné à traduire les variations du pouvoir général d'achat de la monnaie; nous disons : pouvoir général d'achat de la monnaie, car il s'agit d'embrasser la totalité des biens et services ayant donné lieu à l'intervention directe ou indirecte de la monnaie.

---

(1) F. DIVISIA : *L'indice monétaire et la théorie de la Monnaie.* Librairie Sirey.

Si I désigne à un instant donné la valeur de l'indice monétaire, le pouvoir d'achat de la monnaie considéré comme équivalent à la notion de valeur de la monnaie pourra être caractérisé à ce même instant, par l'inverse de cet indice, soit :

$$V = \frac{1}{I}.$$

Tandis que les conceptions précédentes étaient fondées, soit sur l'hypothèse de la compensation des causes propres aux variations des prix de chaque bien ou service, conformément à la loi des grands nombres (conception statistique), soit sur la considération d'un ensemble de dépenses variables d'une situation à l'autre (conception budgétaire), la définition de M. Divisia repose sur la loi quantitative, dont l'expression simplifiée et, pour ainsi dire, intuitive, signifie que le pouvoir général d'achat de la monnaie est inversement proportionnel à la quantité Q de signes monétaires mise en circulation, soit :

$$V\,Q = \text{constante.}$$

En adoptant une définition qui satisfait à cette loi, il est possible, non seulement d'aboutir à une formule précise pour effectuer le calcul de l'indice I, mais encore de parvenir jusqu'à la structure intime des phénomènes monétaires.

En réalité, la définition que nous envisageons fait appel à un principe plus complexe; elle repose sur l'équation générale des transactions, qui en constitue la forme moderne exposée pour la première fois par le professeur Irving Fisher. Plus précisément, l'indice monétaire a été établi à partir de la loi circulatoire, qui n'est elle-même qu'une forme condensée de l'équation générale des transactions. Le principe de cette loi, tel qu'il a été formulé par M. Divisia peut être ainsi résumé :

L'expression susindiquée pour la loi quantitative suppose la permanence de certains facteurs qui, dans la réalité, sont appelés à subir des variations d'une importance non négligeable; telles sont notamment la rapidité moyenne de circulation de la monnaie et l'activité des transactions, grandeurs dont la considération permet de préciser l'expression de la loi quantitative en posant :

$$\frac{V_r\, Q.\, r}{A} = k$$

$r$ désignant la rapidité moyenne de circulation de la monnaie,
A, l'indice de l'activité des transactions,
$k$, un coefficient constant.

Si l'on désigne par C le produit Q $r$, appelé circulation et I l'indice monétaire égal à $\frac{1}{V}$, la loi quantitative devient :

$$C = k A I$$

A et I ne représentant pour le moment que des grandeurs exemptes de toute signification précise.

Or, il est aisé de montrer que le produit Q $r$, représentant la circulation, est égal au total des paiements effectués au cours de la période pendant laquelle a été mesurée la rapidité moyenne de circulation, c'est-à-dire le nombre moyen de fois qu'un même signe monétaire a été utilisé; la démonstration de cette propriété est analogue à celle d'un théorème reposant exclusivement sur les définitions des grandeurs en cause et sur les principes de la logique formelle.

$p$ représentant le prix d'un bien, objet de transaction, $q$, la quantité de ce bien échangée au cours de la période envisagée, la circulation se mesure par le total des paiements effectués, soit : $C = \Sigma\,(q\,p)$.

Au lieu d'envisager l'application de cette relation à une période de temps finie, il est possible de l'appliquer à une période de temps infiniment petite, de manière à faire intervenir des variations infiniment petites de tous les termes; il suffit de différencier la relation précédente, ce qui donne :

$$\frac{dC}{C} = \frac{\Sigma\,(p\,dq)}{\Sigma\,(pq)} + \frac{\Sigma\,(q\,dp)}{\Sigma\,(q\,p)}.$$

Le premier terme du second nombre correspond à la variation des quantités échangées pendant une période de temps déterminée, tandis que le second terme correspond à la variation des prix.

D'autre part, on déduit de l'expression primitive de C :

$$\frac{dC}{C} = \frac{dA}{A} + \frac{dI}{I}$$

équation où les deux termes du second membre correspondent eux-mêmes respectivement à la variation des quantités et à celle des prix, conformément au sens attribué aux termes A et I.

En identifiant terme à terme les seconds membres des deux équations différentielles ainsi obtenues, on définit les indices A et I par les relations :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dA}{A} &= \frac{\Sigma\,(p\,dq)}{\Sigma\,(pq)} \\ \frac{dI}{I} &= \frac{\Sigma\,(q\,dp)}{\Sigma\,(qp)} \end{aligned} \right.$$

De cette façon, l'indice A de l'activité des transactions, de même que l'indice monétaire I reçoivent une définition précise; en adoptant ces définitions qui sont imposées par la nature même des équations précédentes, on se trouve du même coup en mesure de donner une démonstration rigoureuse de la loi circulatoire; elle se présente ainsi, non comme une loi d'origine expérimentale, mais comme un principe rationnel.

Il importe de noter que la fonction circulatoire C doit comprendre, outre le terme $Q\,r$ correspondant à la monnaie proprement dite, un terme homologue $Q'r'$, afférent à l'usage de la monnaie scripturale (chèque, virement, crédit bancaire, effets de commerce); dans cette expression, $Q'$ représente le total des soldes créditeurs disponibles pour l'emploi de la monnaie scripturale et $r'$ la rapidité moyenne de circulation de ces soldes. La fonction circulatoire C devient alors :

$$C = Q\,r + Q'\,r'.$$

Il est possible de compliquer encore l'expression de C pour l'adapter plus complètement à la pratique bancaire; on sait au reste que dans la plupart des pays, les paiements effectués en monnaie scripturale dépassent largement ceux qui font exclusivement appel à la monnaie proprement dite.

*Propriétés de l'indice monétaire.*

De la définition donnée ci-dessus pour l'indice monétaire I, résultent certaines propriétés que nous résumons brièvement :

1° Dans un intervalle de temps suffisamment réduit pour que les coefficients $q$ puissent être regardés comme constants, l'indice est défini par une moyenne pondérée dont les poids sont égaux à ces mêmes quantités $q$.

Autrement dit, l'indice monétaire est une moyenne à poids variables,tandis que les nombres indicateurs habituellement utilisés comportent des coefficients invariables et le plus souvent arbitraires.

I et I′ désignant les valeurs de l'indice à deux instants voisins $t$ et $t'$, tels que les quantités de biens échangés pendant un intervalle de temps déterminé puissent être regardées comme constantes entre ces époques, on aura la relation :

$$\frac{I'}{I} = \frac{\Sigma\,(qp')}{\Sigma\,(qp)} = \alpha\,\frac{p'_1}{p_1} + \beta\,\frac{p'_2}{p_2} + \gamma\,\frac{p'_3}{p_3} + \ldots\ldots$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... désignant toujours les proportions dans lesquelles figurent les paiements relatifs à chacun des biens; $\frac{p'_1}{p_1}, \frac{p'_2}{p_2}, \frac{p'_3}{p_3}, \ldots$ les rapports des prix de chacun de ces biens aux instants $t'$ et $t$.

Tout en partant d'un autre principe, l'indice monétaire ainsi déterminé répondrait donc à la définition classique d'un indice budgétaire, faisant intervenir les prix de tous les biens et services ayant donné lieu à des transactions et par conséquent les prix de détail et les salaires aussi bien que les prix de gros, tandis que les indices les plus courants font intervenir uniquement soit les prix de gros soit les prix de détail; les coefficients de pondération ne sont autres que les quantités des divers biens échangés pendant un intervalle de temps déterminé;

2° L'indice, étant défini par une expression qui n'est pas une différentielle totale, est susceptible de prendre des valeurs différentes pour un même système de valeurs des prix et quantités; au cours d'un long intervalle de temps, la valeur de l'indice, à un instant quelconque $t$, rapportée à la valeur de base correspondant à l'instant initial $t_0$, peut être exprimée par une intégrale curviligne, le long des courbes représentatives des prix et quantités en fonction du temps.

Il en résulte que la valeur de l'indice à un instant quelconque $t$ dépend, non seulement de la valeur des termes en $q$ et $p$, à l'instant initial $t_0$ et à l'instant considéré $t$, mais encore des valeurs prises par ces termes dans tout l'intervalle de temps $t_0$, $t$.

Cette seconde propriété fait apparaître le lien qui existe entre les conditions économiques d'une époque et celles des époques antérieures, lien comparable à celui qui unit les anneaux d'une même chaîne; il traduit l'impossibilité d'effectuer la comparaison des indices de prix entre deux époques éloignées, sans passer par les périodes intermédiaires. C'est là un des aspects du principe de continuité historique, applicable aux sciences sociales et en particulier au domaine économique;

3° L'indice A de l'activité des transactions jouit de propriétés analogues à celles de l'indice monétaire, avec cette différence qu'il s'agit alors d'un indice de quantités, admettant les prix à titre de coefficients, tandis que l'indice monétaire est un indice de prix admettant les quantités comme coefficients.

Les variations de ces deux indices sont d'ailleurs liées par l'équation ci-après, qui se déduit aisément des équations de définition :

$$\frac{dI}{I} + \frac{dA}{A} = \frac{d\Sigma(q\,p)}{\Sigma(q\,p)}$$

ou encore :

$$\frac{I}{I_0} \times \frac{A}{A_0} = \frac{\Sigma(q\,p)}{\Sigma(q_0\,p_0)}$$

$I_0$, $A_0$, $p_0$, $q_0$, désignant respectivement, d'une part, les valeurs des indices, d'autre part, les valeurs des prix et quantités entrant en cause dans leur détermination à l'instant initial $t_0$.

*Les index économiques.*

A) Il est possible d'étendre l'équation qui définit l'indice monétaire à d'autres catégories de nombres indicateurs des prix, nombres auxquels nous donnons d'une façon générale le nom d'index économiques.

Si l'on considère l'ensemble des paiements $\Sigma\,(q\,p)$ qui figurent dans l'équation générale des transactions, on peut, en adoptant des règles suffisamment précises, effectuer une subdivision parmi l'ensemble de ces paiements qui embrasse la totalité des phénomènes monétaires.

Nous pouvons, par exemple, distinguer parmi ces paiements ceux qui sont effectués par les producteurs, ceux qui sont effectués par les intermédiaires et ceux qui sont effectués par les consommateurs; une telle subdivision n'a rien d'arbitraire puisqu'elle correspond aux trois phases classiques de la vie écono mique, à savoir : la production, la circulation et la consommation des richesses. $\Sigma_1\,(q\,p)$, $\Sigma_2\,(q\,p)$, $\Sigma_3\,(q\,p)$, désignant respectivement les paiements afférents à ces trois groupes de phénomènes, l'ensemble ci dessus envisagé $\Sigma\,(q\,p)$ est tel que l'on ait :

$$\Sigma\,(q\,p) = \Sigma_1\,(q\,p) + \Sigma_2\,(q\,p) + \Sigma_3\,(q\,p),$$

relation d'où l'on déduit la relation différentielle :

$$\Sigma\,(q\,d\,p) = \Sigma_1\,(q\,d\,p) + \Sigma_2\,(q\,d\,p) + \Sigma_3\,(q\,d\,p).$$

Si l'on caractérise maintenant chacun des trois groupes de paiements par un indice spécial, les trois nouveaux indices ainsi obtenus : I′, I″, I‴, étant définis par des relations identiques à celle qui définit l'indice monétaire, soit :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\,I'}{I'} &= \frac{\Sigma_1\,(q\,d\,p)}{\Sigma_1\,(q\,p)} \\ \frac{d\,I''}{I''} &= \frac{\Sigma_2\,(q\,d\,p)}{\Sigma_2\,(q\,p)} \\ \frac{d\,I'''}{I'''} &= \frac{\Sigma_3\,(q\,d\,p)}{\Sigma_3\,(q\,p)} \end{aligned}\right.$$

il existe à tout instant entre les valeurs de l'indice monétaire et de ces trois indices une relation qui résulte des équations de définition et se présente sous la forme :

$$(1) \qquad \frac{d\,\mathrm{I}}{\mathrm{I}} = \alpha \frac{d\,\mathrm{I}'}{\mathrm{I}'} + \beta \frac{d\,\mathrm{I}''}{\mathrm{I}''} + \gamma \frac{d\,\mathrm{I}'''}{\mathrm{I}'''}$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, désignant toujours les proportions dans lesquelles figurent, à l'instant considéré, les paiements relatifs à chacun des trois groupes par rapport à l'ensemble des paiements envisagés pour la définition de l'indice monétaire et tels par conséquent qu'on ait constamment :

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Nous reviendrons plus loin sur les propriétés et les applications de cette relation; mais nous pouvons dès maintenant noter que, sous réserve de rester constamment dans le cadre des faits observables, nous disposons de la plus grande latitude pour constituer d'autres subdivisions parmi les groupes de paiements considérés jusqu'à présent, en faisant correspondre à chacun des nouveaux groupes $\Sigma_k\,(p\,q)$ un index économique $\mathrm{I}_k$ répondant à la définition générale susindiquée :

$$\frac{d\,\mathrm{I}_k}{\mathrm{I}_k} = \frac{\Sigma_k\,(q\,d\,p)}{\Sigma_k\,(q\,p)}$$

Il existe entre ces index et celui du groupe à partir duquel ont été effectuées les nouvelles subdivisions une relation absolument identique à celle qui vient d'être indiquée pour l'indice monétaire dans ses rapports avec les trois index afférents à la considération des phénomènes de production, de circulation et de consommation. En adoptant une telle méthode, on obtient des index entrant dans le champ d'application de l'équation générale des transactions et subordonnés par conséquent à la valeur de l'indice monétaire; d'autre part, le fait d'utiliser la même définition générale permet d'étudier plus aisément les propriétés des index ainsi établis, et permet aussi d'apprécier l'ordre de grandeur des erreurs commises en utilisant pour les besoins de la pratique certaines formules simplifiées.

Enfin, par la voie de ces décompositions successives de l'ensemble des paiements, il est possible d'analyser le mécanisme des phénomènes économiques et d'apprécier numériquement par la variation des index, l'influence des variations d'un certain groupe de prix sur d'autres groupes; on est par exemple en mesure d'évaluer la répercussion d'une variation des salaires ou du loyer de l'argent sur le niveau des prix de certains biens.

La notion d'index économique permet donc d'élargir considérablement le champ d'application des nombres indicateurs du niveau des prix.

B) Il est possible, moyennant certaines hypothèses, d'aboutir à des relations simples entre un indice général et les indices partiels qui s'en déduisent par le procédé exposé ci dessus; nous analysons sommairement les divers types d'équations générales correspondant aux hypothèses les plus simples.

1° *Équation générale des variations.* — L'équation (1) mentionnée ci dessus :

$$(1) \qquad \frac{d\,\mathrm{I}}{\mathrm{I}} = \alpha \frac{d\,\mathrm{I}'}{\mathrm{I}'} + \beta \frac{d\,\mathrm{I}''}{\mathrm{I}''} + \gamma \frac{d\,\mathrm{I}'''}{\mathrm{I}'''}$$

relie les variations infiniment petites des trois indices partiels et de l'indice monétaire.

Elle peut être appliquée en première approximation à des variations finies exprimées par exemple en pourcentage des valeurs prises par les index, soit :

$$v = \alpha v' + \beta v'' + \gamma v''' + \ldots$$

l'application pouvant être étendue à un nombre quelconque d'index.

Cette équation, désignée sous le nom d'équation générale des variations, ne peut être pour le moment appliquée sans précaution, car nous ne connaissons pas l'ordre de grandeur de l'erreur commise en passant de variations infiniment petites à des variations finies. Aussi convient-il de transformer cette équation, moyennant certaines hypothèses permettant d'aboutir à des formes plus aisément utilisables en pratique.

2° *Équation générale logarithmique.* — En admettant que dans l'intervalle de temps considéré les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ne subissent que des modifications inappréciables, l'équation générale des variations (1) s'intègre aisément et conduit à une nouvelle relation désignée sous le nom d'équation générale logarithmique :

$$(2) \quad \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \alpha \log\left(\frac{I'}{I'_0}\right) + \beta \log\left(\frac{I''}{I''_0}\right) + \gamma \log\left(\frac{I'''}{I'''_0}\right).$$

Le calcul montre que l'erreur commise en substituant cette seconde équation à la première est d'autant plus faible que la dispersion des index partiels du second membre est elle-même plus réduite, les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$... ne subissant eux mêmes que des variations limitées.

Or, la dispersion des index partiels sera faible en particulier dans le cas où ceux ci présentent certains liens de mutuelle dépendance tels que les variations de l'un d'entre eux entraînent des variations en général de même sens et d'un ordre de grandeur comparable pour les autres; tel est le cas des trois index envisagés au début de cet exposé et correspondant à la production, à la circulation et à la consommation des richesses.

En désignant respectivement ces trois index par : indice général des prix de la production, indice général des prix de gros, indice général des prix de détail, leurs valeurs $I'$, $I''$, $I'''$ permettent à tout instant de calculer la valeur de l'indice monétaire selon la formule (2) :

$$(2) \quad \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \alpha \log\left(\frac{I'}{I'_0}\right) + \beta \log\left(\frac{I''}{I''_0}\right) + \gamma \log\left(\frac{I'''}{I'''_0}\right).$$

L'indice monétaire est ainsi défini comme une moyenne géométrique pondérée des trois indices généraux de la production, du commerce et du détail.

L'application de la formule logarithmique peut être étendue à une période au cours de laquelle les index utilisés s'écartent fortement de leurs valeurs initiales, sous réserve de rester dans le champ d'application de l'hypothèse sur laquelle repose la formule (invariance des coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$).

3° *Équation générale linéaire.* — *a*) Supposons maintenant que les variations des index au cours de la période étudiée soient assez petites pour qu'on puisse négliger le carré de l'écart entre l'unité et le rapport de la valeur des index à leur valeur de base. Cela revient à négliger les seconds termes du développement des logarithmes entrant dans la formule (2); soit :

$$\frac{I}{I_0} = 1 + v; \frac{I'}{I'_0} = 1 + v'; \frac{I''}{I''_0} = 1 + v'', \text{ etc.....}$$

L'équation (2) devient :

$$\log(1 + v) = \alpha \log(1 + v') + \beta \log(1 + v'') + \gamma \log(1 + v''') + \ldots$$

D'après l'hypothèse faite, elle se réduit à :

$$v = \alpha v' + \beta v'' + \gamma v''' + \ldots$$

Ce n'est autre que la relation déduite de l'équation générale des variations, mais nous sommes ici en mesure d'apprécier l'ordre de grandeur de l'erreur commise en faisant appel à cette relation simplifiée; elle peut d'ailleurs se mettre sous la forme :

$$(3) \quad \left(\frac{I}{I_0}\right) = \alpha \left(\frac{I'}{I'_0}\right) + \beta \left(\frac{I''}{I''_0}\right) + \gamma \left(\frac{I'''}{I'''_0}\right), + \ldots\ldots$$

Nous désignons cette nouvelle équation sous le nom d'équation générale linéaire; c'est elle qui est constamment utilisée en pratique, et elle ne diffère d'ailleurs pas de l'expression d'une moyenne arithmétique pondérée.

*b*) Il est possible d'aboutir à cette équation en partant d'une autre hypothèse.

Si l'on suppose en effet que les quantités $q$ figurant dans les paiements qui concourent à la définition des index, varient proportionnellement à leurs valeurs de base $q_0$, il est aisé de voir que la relation générale qui définit les index permet d'aboutir à une équation absolument identique à l'équation générale linéaire dans laquelle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ... représentent les valeurs de ces coefficients à l'instant initial $t_0$.

Cette hypothèse est notamment applicable à la décomposition tripartite des groupes de paiements relatifs à la production en général; cette répartition tripartite qui joue un rôle extrêmement important dans la pratique distingue parmi les charges assumées par les producteurs celles qui sont destinées à rémunérer les capitaux, celles qui correspondent au paiement des salaires, et celles qui visent le paiement des matières premières et des services autres que celui du capital et de la main d'œuvre. Dans un intervalle de temps peu étendu, on peut admettre en première approximation que les quantités afférentes à ces trois groupes varient dans le même rapport, ce qui permet d'appliquer la relation linéaire.

Il existe ainsi à tout instant une relation linéaire et homogène entre l'indice général des prix de la production d'une part, l'indice général du loyer de l'argent, l'indice du niveau des salaires, l'indice général du prix des matières, d'autre part.

Chacun de ces trois derniers index économiques peut d'ailleurs être lui même décomposé en plusieurs éléments, si l'on veut analyser de plus près le jeu des phénomènes de production; la décomposition de l'indice général du prix des matières permet en particulier d'aboutir à la notion de paramètres économiques tels qu'un groupe de marchandises ou de services puisse être remplacé au point de vue des prix par une seule catégorie de biens. D'autre part, une décomposition tripartite analogue s'applique aussi bien à un groupe d'entreprises ou à une entreprise individuelle, en vue d'étudier la répercussion des variations propres aux divers agents de la production sur le prix de revient.

En résumé, la formule générale linéaire peut s'appliquer, soit dans le cas où les prix ne subissent dans l'ensemble que des variations assez faibles, limitées par exemple à 20 % de leurs valeurs initiales, soit pendant une période au cours de laquelle les modifications de la situation économique sont assez restreintes pour que les quantités des biens et des services échangés varient dans une proportion comparable.

Si l'on sort du champ d'application de ces deux hypothèses, il est nécessaire de procéder de temps à autre à une revision des coefficients entrant dans la formule linéaire et de poursuivre la détermination des index en appliquant cette formule à partir de nouvelles valeurs de base, selon la méthode des chaînes mentionnée à propos de l'indice monétaire.

## IV — Indices fondés sur la notion d'équivalence

A. — *Le principe.* — 1° En exposant le principe des indices budgétaires, nous avons insisté sur les problèmes soulevés, pour le choix d'une pondération, rationnelle, par le fait que d'une situation de base zéro à une situation donnée 1, les quantités figurant au budget ne peuvent être tenues pour invariables lorsqu'on passe de la situation de base à la situation donnée. Nous avons indiqué à ce propos les diverses solutions plus ou moins empiriques auxquelles il a été recouru pour aborder la solution pratique du problème. Aucune de ces solutions ne faisait appel aux liaisons qui existent entre prix et quantités des articles entrant dans la composition du budget.

A la suite de Pigou, Konüs, Haberler, qui ont abordé le problème des indices par une autre voie, certains auteurs se sont précisément proposé de tenir compte des liaisons que présentent les prix et les quantités. Le problème ainsi posé peut s'énoncer comme il suit :

Si nous considérons pour la situation zéro un « complexe de biens » (1) $q_0, q'_0, q''_0.....$, soit $Q_0$, la satisfaction ou l'utilité totale qu'il procure à son détenteur est représentée par la valeur de la fonction d'utilité totale, soit :

$$U_0 = U\,(q_0, q'_0, q''_0.....) = U\,(Q_0).$$

Les prix étant respectivement pour cette situation $p_0, p'_0, p''_0.....$, le budget ou dépense totale correspondant à cette situation sera défini par l'expression :

$$\rho_0 = q_0\,p_0 + q'_0\,p'_0 + q''_0\,p''_0 + ..... = \Sigma\,q_0\,p_0.$$

Pour la situation 1, les prix et quantités sont devenus respectivement :

$$p_1, p'_1, p''_1..... \quad q_1, q'_1, q''_1.....$$

définissant un nouveau complexe $Q_1$.

Les complexes $Q_0$ et $Q_1$ sont dits équivalents, lorsqu'ils procurent à leur

(1) Nous entendons par « complexe de biens » un ensemble de marchandises dont chacune d'entre elles est caractérisée par une quantité qui varie d'une situation à l'autre.

détenteur une égale utilité totale, c'est-à dire lorsque se trouve réalisée la condition :

$$U_1 = U(q_1, q'_1, q''_1 \ldots\ldots) = U_0.$$

Si nous considérons alors la valeur du budget pour la situation 1, soit :

$$\rho_1 = \Sigma\, q_1\, p_1,$$

l'indice de prix fondé sur la notion d'équivalence sera défini par le rapport :

$$I = \frac{\rho_1}{\rho_0}.$$

Autrement dit, un tel indice n'est autre que le rapport de deux budgets répondant à des complexes équivalents. Sa valeur dépend naturellement du niveau de satisfaction procuré par les budgets en cause.

Le seul fait d'invoquer cette notion d'équivalence et de recourir par conséquent à la fonction d'utilité, démontre le caractère abstrait de l'indice ainsi défini; il laisse également prévoir les difficultés qui se poseront inévitablement pour appliquer cette définition à des éléments extraits d'observations concrètes.

2° Quelques remarques s'imposent avant d'aborder la détermination théorique de l'indice I.

*a*) Du moment que nous recourons à la fonction d'utilité U, nous admettons qu'il s'agit d'un consommateur en particulier, puisque la fonction d'utilité présente un caractère strictement individuel; pour les applications pratiques toutefois, il n'est pas interdit de considérer des groupes de consommateurs pourvu que ceux ci appartiennent à un milieu social bien défini et qu'ils puissent être regardés comme ayant des goûts et des habitudes assez analogues.

D'autre part, la notion d'équivalence implique évidemment la constance de la fonction U lorsqu'on passe de la situation zéro à la situation 1. Pour les comparaisons dans le temps, il est donc nécessaire de n'embrasser qu'une période assez limitée; pour les comparaisons dans l'espace, qui ont pu être abordées par cette méthode, de plus grandes restrictions s'imposent.

*b*) Presque tous les auteurs qui ont abordé ce genre de problème ont admis explicitement (ou implicitement) que les prix correspondant à une situation déterminée constituaient des données pour le consommateur qui répartissait alors ses achats, compte tenu du prix de chaque article, de ses besoins ou de ses goûts et naturellement aussi de l'importance de son revenu. Bien que cette indépendance des prix vis-à-vis des quantités restreigne la généralité du problème, nous pensons que, sauf cas particulier, elle peut être admise sans difficulté; il s'agit, en effet, d'un problème de consommation qui ne fait intervenir que des groupes de consommateurs dont les achats restent sans influence sur la situation des prix, lesquels résultent de l'ensemble du marché.

Dans ces conditions, les quantités $q$ répondant à une situation donnée sont déterminées :

en premier lieu, par l'équation du budget, soit :

$$\rho = \Sigma\, pq$$

en second lieu, par les relations exprimant que la fonction U est maxima. Cette dernière condition peut s'exprimer ainsi :

Si nous désignons par $u$, $u'$, $u''$ les dérivées partielles de la fonction U par rapport à chacune des quantités $q$, $q'$, $q''$..., soit :

$$\frac{\partial U}{\partial q} = u\,; \quad \frac{\partial U}{\partial q'} = u'\,; \quad \frac{\partial U}{\partial q''} = u'' \cdots\cdot$$

les prix sont respectivement proportionnels à ces dérivées partielles, et l'on a en conséquence :

$$\frac{p}{u} = \frac{p'}{u'} = \frac{p''}{u''} = \cdots\cdot$$

Ces $(n—1)$ équations jointes à l'équation du budget, définissent chacune des quantités $q$ en fonction des prix $p$ et de la dépense totale $\rho$.

Les quantités ainsi déterminées constituent un complexe Q que l'on désigne sous le nom de « complexe adapté » à la situation considérée.

Pour une situation donnée où les prix sont invariables, chaque quantité $q$ dépend du revenu $\rho$; la fonction qui exprime cette liaison est dite fonction d'Engel, soit :

$$q = e\,(\rho).$$

En considérant la dépense $\rho$ comme un paramètre, les diverses quantités $q$ entrant dans le complexe pour une situation donnée, définissent une courbe désignée par R. Frisch « sentier d'expansion ». Chaque point du sentier correspond à une valeur donnée de $\rho$, ainsi qu'à une valeur bien définie U de l'indice de satisfaction caractérisant le niveau de la surface d'indifférence qui passe par le point considéré. U définit le niveau d'existence.

Si l'on pose en principe que sur un sentier déterminé, le revenu afférent à chaque point varie dans le même sens que le niveau des surfaces d'indifférence, on en déduit que le revenu $\rho$ peut être directement utilisé comme indice fondé sur le principe d'équivalence.

3° La détermination théorique de l'indice est la suivante :

A la situation zéro, correspondent un budget $\rho_0$ et un ensemble de prix $P_0$ qui sont les données de base. La connaissance de la fonction d'utilité totale U permet de déterminer le complexe $Q_0$ adapté à cette situation, c'est-à-dire les $n$ quantités $q_0$ qui procurent le maximum de satisfaction. Ces quantités étant déterminées, la valeur $U_0$ de la fonction d'utilité en résulte immédiatement. Pour la situation 1, les prix $P_1$ sont donnés, ainsi que la valeur de la fonction d'utilité, égale par hypothèse à $U_0$, soit :

$$U_1 = U\,(q_1, q'_1, q''_1 \ldots\ldots) = U_0.$$

En exprimant que les quantités inconnues $q_1$, $q'_1$, $q''_1$... satisfont aux équations générales d'équilibre, soit :

$$\frac{p_1}{u_1} = \frac{p'_1}{u'_1} = \frac{p''_1}{u''_1} = \cdots\cdot$$

nous disposons au total de $n$ équations qui permettent de déterminer les $n$ quantités $q_1$ et par conséquent le revenu $\rho_1$ nécessaire à leur acquisition au prix $P_1$.

L'indice est alors défini par :

$$I = \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

Il est possible d'interpréter géométriquement cette solution :

*a*) Dans l'espace à $n$ dimensions, où chacun des axes représente un des éléments du complexe Q, les surfaces d'utilité ou d'indifférence sont définies par :

$$U(q, q', q'', \ldots\ldots) = \text{Constante.}$$

Pour un système de prix et une dépense totale donnés, la surface de budget se trouve définie par l'équation :

$$\rho = \Sigma\,(q\,p).$$

Les quantités $q$ définissant le point d'équilibre sont les coordonnées du point de contact de la surface du budget et de la surface d'utilité à laquelle est tangente cette surface de budget; le niveau d'existence répondant à cette position d'équilibre est défini par l'indice de satisfaction qui caractérise le niveau de la surface en cause.

Dans le cas particulier de prix indépendants des sentiers d'expansion, les surfaces de budget se réduisent à des plans. Nous admettrons qu'il en est ainsi pour l'exposé de la solution géométrique.

Les équations générales de l'équilibre expriment que les prix définissent en chaque point la direction de la normale à la surface d'indifférence passant par ce point.

Pour la situation O, le plan de budget $B_0$ est tangent à une surface d'utilité $S_0$ qui définit la satisfaction ou le niveau d'existence $U_0$ répondant au point de contact $Q_0$.

Dans la situation 1, le plan de budget $B_1$ est défini par le système des prix $P_1$ et la nouvelle position d'équilibre est représentée par le point de contact $Q_1$ du plan $B_1$ parallèle à cette direction et tangent à la même surface d'indifférence $S_0$ que dans la situation O.

La position de ce plan $B_1$ définit la valeur du budget $\rho_1$ procurant le même niveau d'existence que dans la situation O.

*b*) Si l'on envisage le cas particulier d'un complexe constitué par deux articles seulement, les plans de budget deviennent des droites et les surfaces d'indifférence deviennent des courbes d'indifférence qui, nous le rappelons, jouissent des propriétés ci-après :

Aucune ligne du faisceau n'a de point commun avec une autre ligne de ce même faisceau.

Toute courbe d'indifférence a une allure descendante lorsqu'on envisage des quantités croissantes.

La concavité de chaque courbe est opposée à l'origine des coordonnées.

Pour une situation zéro, où les prix sont donnés, ainsi que le budget, les quantités $q_0$, $q'_0$ sont définies par les coordonnées du point de contact $Q_0$ de la droite de budget $D_0$ avec la courbe d'indifférence $C_0$ qui lui est tangente; et le niveau $U_0$ de cette courbe définit le niveau d'existence de la situation O.

Lorsque nous passons à la situation 1, c'est-à-dire à un nouveau système de prix $p_1$, $p'_1$, le point d'équilibre $Q_1$ est le point de contact de la courbe d'indifférence $C_0$ considéré dans la situation zéro, et de la droite $D_1$ parallèle à la direction définie par les prix $p_1$, $p'_1$. La valeur $\rho_1$ du budget résulte alors des prix $p_1$, $p'_1$ et des quantités $q_1$, $q'_1$. L'indice I est le rapport de ces deux budgets, soit :

$$I = \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

B. — *Les limites de l'indice fondé sur la notion d'équivalence.* — Si nous envisageons les complexes $Q_0$ et $Q_1$ effectivement consommés dans les situations zéro et 1, ces complexes définissent des niveaux d'existence $U_0$ et $U_1$ qui sont, en général, différents, soit :

$$U_0 = U(Q_0) \qquad U_1 = U(Q_1)$$

A chacun de ces niveaux d'existence, correspond ainsi un indice. Nous désignerons chacun de ces indices par $I_0$ et $I_1$ respectivement, ces indices étant calculés pour la situation 1, rapportée à la situation de base O. Les indices ainsi définis satisfaisant à la condition circulaire, leurs inverses, c'est-à-dire :

$$I'_0 = \frac{1}{I_0};\ I'_1 = \frac{1}{I_1}$$

représentent les indices de la situation zéro rapportée à la situation 1, respectivement pour les niveaux d'existence $U_0$ et $U_1$.

Ainsi que nous l'avons fait observer, le calcul des indices de la forme :

$$I = \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

se heurte en pratique aux plus grandes difficultés, puisque nous n'avons pas la possibilité d'apprécier exactement la mesure dans laquelle un revenu $\rho_1$ répondant à la situation 1 permet d'obtenir le niveau d'existence $U_0$ qui était obtenu avec le revenu $\rho_0$ pour la situation zéro. Il est malgré tout possible d'assigner aux indices $I_0$ et $I_1$ définis ci-dessus, certaines limites qui ont fait l'objet en particulier des travaux de Konüs; nous exposerons succinctement le raisonnement auquel cet auteur fut le premier à recourir.

*a*) Supposons qu'un consommateur disposant pour la situation zéro d'un revenu $\rho_0$ qui lui permet d'acquérir le complexe $Q_0$ adapté à cette situation, dispose, pour la situation 1 du revenu $\rho_1$ qui lui garantirait l'acquisition du même complexe. En réalité, ce consommateur fait choix du complexe $Q_1$ adapté à la situation 1. Le niveau d'existence $U_1$ réalisé par le complexe $Q_1$ est donc supérieur au niveau $U_0$, puisque chacun de ces niveaux répond à un optimum pour la situation à laquelle il s'applique (prix et revenu).

Cette proposition peut s'exprimer d'une autre manière, si l'on admet, comme nous l'avons fait antérieurement, que pour une situation donnée, le niveau d'existence varie dans le même sens que le revenu : nous pouvons aussi bien dire que la dépense $\rho_1$ nécessaire pour maintenir avec la situation 1 le niveau d'existence $U_0$ obtenu avec le revenu $\rho_0$ pour la situation zéro, est inférieure au revenu $\rho'_1$ qui permettrait de conserver le complexe $Q_0$.

Nous aboutissons ainsi à l'inégalité :

$$\rho_1 = \Sigma\, p_1\, q_1 \quad < \rho'_1 = \Sigma\, q_0\, p_1.$$

En divisant les deux membres de cette inégalité par $\rho_0 = \Sigma\, q_0\, p_0$, nous obtenons :

$$\frac{\Sigma\, q_1\, p_1}{\Sigma\, q_0\, p_0} = \mathrm{I}_0 < \frac{\Sigma\, q_0\, p_1}{\Sigma\, q_0\, p_0} = \mathrm{L}_0.$$

Dans cette inégalité, $\mathrm{L}_0$ désigne l'indice de LASPEYRE, c'est-à-dire l'indice budgétaire de la situation 1 par rapport à la situation zéro, obtenu en utilisant comme coefficients de pondération les quantités $\mathrm{Q}_0$ consommées au cours de la situation zéro.

Nous pouvons en définitive énoncer le principe suivant :

L'indice des prix de la situation 1, rapporté à la situation zéro et calculé sur la base du niveau d'existence de cette même situation zéro, est inférieur à l'indice budgétaire calculé en prenant comme coefficients de pondération les quantités consommées au cours de la situation zéro (indice de LASPEYRE).

Ce résultat est fort important pour la pratique, car il démontre que tout revenu garantissant le maintien d'une certaine consommation permet en réalité d'élever constamment le niveau d'existence, grâce aux facultés d'adaptation résultant du libre choix des consommateurs. Ce principe constitue en outre un argument de plus en faveur de la révision périodique des coefficients de pondération pour le calcul des indices budgétaires.

*b*) Par un raisonnement analogue à celui qui précède, il est facile de constater que l'indice $\mathrm{I}_1$ calculé comme rapport des revenus $\rho_1$ et $\rho'_0$ permettant d'obtenir la même satisfaction totale $\mathrm{U}_1$ qu'avec le complexe $\mathrm{Q}_1$ effectivement consommé pour la situation 1, est supérieur à l'indice budgétaire de la situation 1 par rapport à la situation zéro calculé en prenant comme coefficients de pondération les quantités $\mathrm{Q}_1$ (indice de PAASCHE $\mathrm{L}_1$).

Il suffit de remarquer à cet effet :

En premier lieu, que l'indice $\mathrm{I}_1$ calculé par rapport à la base zéro est l'inverse de l'indice $\mathrm{I}'_1$ calculé par rapport à la base 1, soit :

$$\mathrm{I}_1 = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{\mathrm{I}'_1}.$$

En second lieu, que l'indice $\mathrm{I}'_1$ calculé en prenant la situation 1 comme base et en se rapportant au niveau d'existence $\mathrm{U}_1$ de cette situation, est inférieur à l'indice de LASPEYRE calculé à partir de la situation 1, soit :

$$\mathrm{I}'_1 = \frac{\rho'_0}{\rho_1} = \frac{\Sigma\, q_1\, p_0}{\Sigma\, q_1\, p_1} < \mathrm{L}'_1 = \frac{\Sigma\, q_1\, p_0}{\Sigma\, q_1\, p_1}.$$

d'où l'on déduit enfin :

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{\mathrm{I}'_1} > \mathrm{L}_1 = \frac{1}{\mathrm{L}'_1}.$$

*c*) Tenant compte de l'existence des deux limites précédentes, nous constatons en définitive qu'entre les niveaux d'existence définis par les consommations effectives des situations zéro et 1, il existe toujours un niveau d'existence intermédiaire pour lequel l'indice de prix se trouve compris entre les indices de LASPEYRE et de PAASCHE de la situation 1 par rapport à la situation zéro.

Outre la remarque déjà faite au sujet de la portée qui doit être attribuée en pratique à l'existence de ces limites, notamment de la limite supérieure $L_0$, nous pouvons observer que si deux situations zéro et 1 sont telles que les indices de LASPEYRE $L_0$ et de PAASCHE $L_1$ ne présentent qu'un faible écart, on peut en conclure que l'indice fondé sur la notion d'équivalence a une valeur approximativement égale à chacune de ces limites, sous réserve bien entendu que les niveaux d'existence définis par chacun des complexes $Q_0$ et $Q_1$ puissent être considérés comme sensiblement équivalents. Toute la difficulté réside évidemment dans l'appréciation de cette équivalence, mais il est déjà très précieux d'avoir une indication sur les limites à l'intérieur desquelles se tient vraisemblablement l'indice à déterminer.

Bien-que la difficulté soit seulement déplacée, puisqu'elle porte sur l'appréciation de niveaux d'existence, au lieu de porter sur la détermination des quantités, nous pouvons en définitive considérer la théorie précédente comme un progrès.

*d*) Dans le cas de deux articles seulement, la représentation plane utilisée précédemment permet de démontrer l'existence de limites pour l'indice fondé sur la notion d'équivalence.

Partant d'un point d'équilibre $Q_0$, défini comme le point de contact de la droite de budget $D_0$ et de la courbe d'indifférence $C_0$, nous constatons que pour une nouvelle situation de prix $p_1$, $p'_1$, la dépense

$$\rho'_1 = q_0\, p_1 + q'_0\, p'_1.$$

nécessaire au maintien du niveau d'existence $U_0$ correspondant au complexe $Q_0$ $(q_0, q'_0)$ permet en réalité d'obtenir un complexe représenté par le point $Q_1$ où la droite $D'_1$ représentant le budget $\rho'_1$ est tangente à une courbe d'indifférence. Or, d'après les propriétés du faisceau constitué par les courbes d'indifférence, le niveau d'existence $U'_1$ défini par le point $Q'_1$ est supérieur au niveau d'existence $U_0$.

Le raisonnement peut être alors poursuivi comme il a été indiqué ci-dessus; il s'applique également à la limite inférieure $L_1$.

C. — *Calcul approché.* — Parmi les méthodes imaginées pour calculer à partir d'observations statistiques une valeur approchée de l'indice précédemment défini, nous ne ferons que mentionner la méthode d'égale dépense imaginée par STAEHLE, puis celle de BOWLEY corrigée par R. FRISCH; nous nous arrêterons plus longuement à la méthode de la double dépense qui est due à R. FRISCH.

1° *Méthode d'égale dépense.* — Se fondant sur les limites de l'indice I qui résultent des travaux de KONÜS et d'HABERLER, STAEHLE observe que la proposition d'HABERLER fournit une limite supérieure dans le cas où celle de KONÜS fournit une limite inférieure et vice-versa.

Si l'on suppose données deux situations de prix zéro et 1, avec les fonctions d'ENGEL qui leur correspondent (sentiers d'expansion zéro et 1), la surface de budget passant par un point zéro du premier sentier, coupe le second sentier en un point 1. En menant la surface de budget passant par ce dernier point, on obtient un second point zéro′ sur le sentier zéro et ainsi de suite.

L'application successive des limites de KONÜS et d'HABERLER aux deux séries de points ainsi définies permet d'obtenir une suite de limites et, par conséquent, de valeurs approchées d'autant plus précises que les sentiers sont plus voisins et que les conditions imposées à l'existence de ces limites se trouvent mieux vérifiées.

2° *Méthode de* BOWLEY. — Partant d'une situation zéro et d'un complexe adapté $Q_0$ qui définit un budget $\rho_0$, BOWLEY considère le complexe $Q'_1$ qui, sur le sentier d'expansion correspondant à la situation 1, est équivalent à $Q_0$. Si $\rho'_1$ désigne le budget afférent à $Q'_1$, l'indice est défini par le rapport :

$$I = \frac{\rho'_1}{\rho_0}.$$

Cet indice est déterminé pour le niveau d'existence $U_0$, commun aux complexes $Q_0$ et $Q'_1$. Le complexe adapté à la situation 1 est désigné comme à l'ordinaire par $Q_1$.

En appliquant le développement de TAYLOR limité aux éléments du second ordre et en annulant la variation d'utilité totale éprouvée par le consommateur lorsqu'il passe du complexe $Q_0$ à $Q_1$ puis à $Q'_1$, il est possible d'aboutir pour I à l'expression :

$$I = \frac{\Sigma\, p_1\,(q_0 + \lambda\, q_1)}{\Sigma\, p_0\,(q_0 + \lambda\, q_1)}.$$

Dans cette formule, $\lambda$ désigne le rapport $\lambda = \frac{\omega'_1}{\omega_1}$ des utilités finales de la monnaie en $Q'_1$ et en $Q_1$ respectivement.

La formule à laquelle aboutit BOWLEY peut être rapprochée de l'indice d'EDGEWORTH :

$$E = \frac{\Sigma\, p_1\,(q_0 + q_1)}{\Sigma\, p_0\,(q_0 + q_1)}.$$

Cependant, la valeur approchée de I ne saurait être confondue avec l'indice d'EDGEWORTH, car l'influence du coefficient de pondération $\lambda$ n'y est nullement négligeable : ainsi que le fait remarquer R. FRISCH, si les quantités $q_1$ figurant dans le complexe $Q_1$ sont en moyenne beaucoup plus élevées que les quantités correspondantes $q_0$ de $Q_0$, leur importance augmentera encore du fait de la pondération, car, dans ce cas, le coefficient :

$$\lambda = \frac{\omega'_1}{\omega_1}$$

sera supérieur à l'unité :

Dans la formule d'EDGEWORTH, au contraire, l'importance de ces termes aurait été atténuée.

La formule approchée offre en outre l'inconvénient de ne pas conduire à une détermination correcte lorsque les deux complexes $Q_0$ et $Q_1$ sont équivalents.

Enfin, par son mode d'établissement même, la formule n'est applicable qu'au cas de deux complexes assez peu différents l'un de l'autre.

3° *Méthode de la double-dépense.* — La méthode de la double dépense, imaginée par R. FRISCH, constitue à la vérité un critérium permettant d'apprécier l'équivalence de deux complexes $Q_0$ et $Q_1$.

Si nous désignons par $\rho_0$ et $\rho_1$ les dépenses correspondant à l'acquisition des complexes $Q_0$ et $Q_1$, c'est-à-dire :

$$\rho_0 = \Sigma\, p_0\, q_0;\ \rho_1 = \Sigma\, p_1\, q_1,$$

l'équivalence de ces deux complexes est approximativement exprimée par l'équation

$$\omega_1\, \rho_1 = \omega_0\, \rho_0.$$

Dans cette équation, $\omega_0$ et $\omega_1$ désignent l'utilité finale de la monnaie en $Q_0$ et $Q_1$ respectivement.

La condition d'équivalence peut alors s'écrire, dans la limite d'approximation indiquée pour la valeur approchée de BOWLEY :

$$\Sigma\, p_1\, q_1 \cdot \Sigma\, p_0\, q_1 = \Sigma\, p_0\, q_0 \cdot \Sigma\, p_1\, q_0.$$

Les produits figurant dans chacun des membres de cette équation ont été désignés par R. FRISCH *double dépense le long de chacun des sentiers zéro et 1.* La notion abstraite d'équivalence se trouve ainsi réduite à l'égalité d'éléments accessibles à l'observation.

Ce résultat tout à fait remarquable est pratiquement atténué par le fait qu'on ne connaît en réalité que des points isolés sur chaque courbe d'ENGEL définissant les sentiers zéro et 1 ; il est donc nécessaire de procéder à des interpolations pour obtenir des couples équivalents. De plus, on n'est en possession de données que pour un nombre limité de denrées. Mais ce ne sont là que des difficultés susceptibles d'apparaître avec n'importe quel procédé.

Deux remarques peuvent être faites à propos de la méthode exposée ci-dessus :

*a*) Ainsi qu'il est aisé de l'établir, égaler les doubles dépenses le long de deux sentiers revient à définir l'équivalence par l'égalité des indices de quantité $Q_l$ et $Q_p$ calculés soit par la formule de LASPEYRE (coefficients de pondération égaux à $p_0$), soit par celle de PAASCHE (coefficients de pondération égaux à $p_1$), respectivement avec les indices $Q'_l$ et $Q'_p$, obtenus en permutant les situations zéro et 1.

*b*) L'indice obtenu par la méthode de la double dépense se confond avec la formule idéale de FISHER, lorsqu'on suppose que les sentiers d'expansion zéro et 1 sont constitués par des droites issues de l'origine. Dans ce cas, les quantités $q_0$ comme les quantités $q_1$ varient toutes dans le même rapport lorsque le revenu se trouve modifié.

## V. — LES COMPARAISONS DANS L'ESPACE.

Abstraction faite de l'indice monétaire qui fait directement appel aux variations des prix et quantités dans le temps, les concepts analysés dans les pages précédentes s'appliquent en principe aux comparaisons dans l'espace comme aux comparaisons dans le temps. Il importe néanmoins de signaler quelques difficultés particulières aux comparaisons dans l'espace.

Pour apprécier la difficulté d'un tel problème, il suffit de rappeler que l'indice des prix fondé sur la notion d'équivalence est défini par le rapport $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ de deux budgets considérés comme équivalents dans les deux situations zéro et 1. Or, l'équivalence de deux budgets implique le recours aux surfaces d'indifférence et circonscrit les applications, sinon à un seul consommateur comme l'exigerait une interprétation rigoureuse de la théorie, du moins à un groupe homogène de consommateurs pour lesquels se trouve admise l'identité des goûts et des habitudes. Lorsqu'il s'agit de consommateurs habitant des villes, des régions ou des pays différents, l'équivalence de deux budgets est particulièrement malaisée à définir, car il n'est plus possible d'admettre l'identité des goûts et des habitudes, sur laquelle repose la considération des surfaces d'indifférence; aussi, est-il nécessaire de ne comparer que des consommateurs habitant des régions assez peu différentes quant aux goûts et aux habitudes, pour que le principe d'équivalence puisse être valablement invoqué.

Nous nous bornerons à mentionner les méthodes utilisées en premier lieu par M. Staehle sous le nom d'indice de dissemblance et en second lieu par R. Frisch qui utilise la méthode de flexibilité.

1° *Indice de dissemblance.* — Désignons par Q un complexe arbitrairement choisi ($q, q', q''$ .....) et par $Q_0$ un complexe ($q_0, q'_0, q''_0$ .....) adapté à la situation tion zéro. Si les quantités $q$ étaient rigoureusement proportionnelles aux quantités correspondantes $q_0$, c'est-à-dire si les deux complexes présentaient une composition analogue, ils seraient qualifiés de semblables. Dans ce cas, les rapports $\frac{q}{q_0}$ seraient tous égaux à une commune valeur dénommée rapport de similitude.

Lorsque les deux complexes, sans être rigoureusement semblables, ont une composition presque analogue, les écarts entre les rapports $\frac{q}{q_0}$ et leur valeur moyenne restent faibles.

Mesurés par rapport à cette valeur moyenne, les écarts en question ont pour expression :

$$\frac{q}{q_0} \cdot \frac{\Sigma\, p_0\, q_0}{\Sigma\, p_0\, q} - 1$$

L'indice de dissemblance de Satehle est la moyenne pondérée des valeurs absolues de ces écarts, les coefficients de pondération étant les éléments correspondants $p_0\, q_0$ du budget zéro.

Cet indice de dissemblance est défini par la formule :

$$D = \frac{\Sigma\, p_0\, q_0 \left| \frac{q}{q_0} \cdot \frac{\Sigma\, p_0\, q_0}{\Sigma\, p_0\, q} - 1 \right|}{\Sigma\, p_0\, q_0}$$

soit encore :

$$D = \Sigma \left| \frac{p_0\, q}{\Sigma\, p_0\, q} - \frac{p_0\, q_0}{\Sigma\, p_0\, q_0} \right|$$

Il est facile de constater qu'avec cette définition, on a toujours :

$$O \leqq D \leqq 2.$$

Si nous considérons un point fixe $Q_0$ du sentier zéro et un autre point Q de ce sentier, la dissemblance est nulle lorsque Q se confond avec $Q_0$.

Si, partant de $Q_0$, Q se déplace dans un sens ou dans l'autre sur le sentier, il résulte des observations effectuées par STAEHLE, que l'indice D augmente pratiquement d'une façon uniforme. On en conclut que le long d'un sentier, le minimum de D, qui est alors nul, caractérise la position correspondant au revenu équivalent à celui du complexe $Q_0$.

La même constatation a lieu quand le point Q se déplace sur un autre sentier, le sentier 1 par exemple : STAEHLE a pu noter l'existence d'un minimum de D pour une position plus ou moins bien définie de Q, mais ce minimum, au lieu d'être nul comme dans le cas précédent, est une quantité positive. En désignant par $Q_1$ la position correspondant à ce minimum de D, STAEHLE admet que le complexe $Q_1$ peut être regardé comme équivalent au complexe $Q_0$. La valeur prise en cette position par la dissemblance caractérise la divergence irréductible des goûts et du mode d'existence qui existe entre les résidences zéro et 1.

En déplaçant le point origine $Q_0$ sur le sentier zéro, on établit une correspondance univoque entre les points des deux sentiers zéro et 1. Cette liaison peut être graphiquement traduite dans un diagramme à trois dimensions, sur lequel sont portés, d'une part, les revenus $\rho_0$ et $\rho_1$ correspondant à chacun des points des sentiers zéro et 1, d'autre part, la valeur de l'indice de dissemblance. Le lieu géométrique des points répondant à un minimum de D, constitue ce que STAEHLE appelle la « *vallée de dissemblance* ». La considération de cette vallée permet de déterminer les couples de combinaisons équivalentes $\rho_0$ et $\rho_1$.

En fait, la vallée dont il s'agit, qui n'a qu'une définition purement empirique, permet de déterminer avec une précision admissible le revenu équivalent à un revenu donné.

2° *Méthode de flexibilité.* — La méthode de flexibilité repose sur l'observation suivante :

Lorsqu'on veut exprimer l'équivalence de deux complexes, il est parfois difficile de le faire en se servant directement des fonctions d'utilité $U = U(Q)$; on peut alors se servir de grandeurs qui varient dans le même sens que ces utilités et qui, regardées comme fonctions uniformes de ces utilités, sont susceptibles d'être considérées comme des indicateurs du niveau d'existence, plus facilement accessibles à l'observation.

Pour mettre ce principe en œuvre, R. FRISCH recourt à la flexibilité de la monnaie, définie à partir du degré final d'utilité du revenu en monnaie que l'on considère dans les équations générales d'équilibre définissant le complexe adapté à une situation donnée. Cette grandeur offre l'avantage de n'être pas liée aux unités de mesure et, par conséquent, de garder son sens lorsqu'on passe d'une surface d'indifférence à une autre. La considération de la flexibilité permet ainsi d'échapper à la principale difficulté qui se présente pour les comparaisons dans l'espace.

## VI. — Résumé.

Il semble bien, en définitive, qu'aucune théorie ne s'impose vraiment et qu'il y ait lieu de définir au préalable le point de vue auquel on entend se placer; telle était déjà la conclusion à laquelle aboutissait M. Irving Fisher après ses importantes recherches sur les indices.

Qu'il s'agisse de la conception statistique ou de la conception budgétaire, chacune présente à des titres divers un large degré d'empirisme : la première, en définissant les conditions assignées à la loi de distribution des rapports de prix ou d'une fonction de ces rapports, la seconde en recourant à des critères *a priori* qui, tout en restant conformes aux principes rationnels que nous songeons naturellement à invoquer, demeurent sujets à controverses. Des quatre conceptions analysées, les plus satisfaisantes paraissent être la conception monétaire et celle qui repose sur la notion d'équivalence.

Cependant, ces deux conceptions se heurtent elles-mêmes dans les applications à de réelles difficultés :

1° L'usage de l'indice monétaire exige en principe l'intervention des prix et quantités de tous les biens; il implique ,au surplus, la revision fréquente des coefficients de pondération, ce qui est d'ailleurs le cas de tout indice à chaîne. Nous savons, au reste, que l'indice à chaîne peut présenter un écart systématiquement croissant avec l'indice à base fixe calculé au moyen des mêmes éléments, ce qui ne laisse pas de soulever des difficultés dans le domaine des applications.

2° Reposant sur la considération des fonctions d'utilité, l'indice fondé sur la notion d'équivalence exige le choix de milieu suffisamment homogènes pour y admettre l'identité de ces fonctions; il est, d'autre part, fort malaisé d'apprécier en fait l'équivalence de deux complexes.

S'il importe, en pratique, de ne pas s'arrêter à ces imperfections théoriques et s'il est nécessaire de choisir, en présence d'un problème concret à résoudre, la solution qui réponde le mieux au but poursuivi, il serait vain de nier l'intérêt de tout le travail spéculatif auquel a donné lieu depuis vingt ans le problème des indices. Il constitue sans aucun doute, l'un des domaines les plus féconds de la science, car, outre sa portée pratique et grandissante à raison même de l'ampleur des troubles monétaires, il est susceptible de retenir l'attention du statisticien, de l'économiste et même du mathématicien.

René Roy,

*Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,*
*Professeur à l'École Nationale*
*des Ponts et Chaussées,*
*et à l'Institut de Statistique*
*de l'Université de Paris.*

## DISCUSSION

M. Barriol fait observer que la différentiation totale de la fonction $\Sigma\, pq$ n'est valable que si $p$ et $q$ sont indépendants; or, la courbe de l'offre et de la demande, qui est à la base de l'économie politique, suppose justement cette dépendance de $p$ et $q$. Mais il convient cependant de remarquer que pour des périodes relativement courtes formant des chaînes telles que les a définies M. Roy, les formules de différentiation pourront devenir applicables.

M. d'Harcourt prend acte des divergences de doctrines relatives à la théorie des indices et il en conclut que c'était là une circonstance propre à justifier l'emploi des méthodes grossièrement approchées pour les applications pratiques telles que les index électriques.

M. Roy répond qu'il adhère volontiers à ce point de vue en constatant le caractère assez décevant des recherches théoriques, celles-ci ne permettant pas de faire prévaloir un principe unique pour le calcul des indices. En fait, c'est donc le point de vue utilitaire qui détermine la méthode et même la conception de l'index auquel on recourt dans chaque cas d'espèce. Toutefois, cette conclusion d'essence pragmatique ne condamne cependant pas les essais de synthèse portant sur les concepts.

M. Dugé de Bernonville dit que la communication de M. Roy constitue un effort remarquable en vue de clarifier ces notions d'indices qui ont donné lieu dans le passé à tant de controverses. Le principe d'une définition uniforme pour les divers indices des prix est particulièrement séduisant, mais il évite difficilement certaines des objections déjà formulées, notamment contre la formule idéale du professeur Fisher, à savoir que le calcul d'un indice peut être entrepris pour des buts quelque peu différents et que c'est la précision du but poursuivi qui détermine logiquement la formule à utiliser.

Quant à la définition commune par une différentielle, définition à laquelle on fait correspondre dans la pratique le système des indices pondérés à « bases enchaînées », elle paraît bien impliquer la convention préalable que les quantités et les prix sont des fonctions continues du temps, ce qui ne saurait être admis sans réserves puisqu'il y a des changements brusques dus aux crises économiques, aux guerres, etc... Supposons par exemple que la guerre actuelle se termine et que réapparaissent sur les marchés les denrées actuellement introuvables, si l'on voulait alors établir un indice du coût de la vie par rapport à l'avant-guerre dans le but de corriger les salaires pour rétablir leur pouvoir d'achat antérieur, il n'y aurait aucune raison de passer l'intermédiaire des périodes de rationnements et de succédanés.

M. Charles Rist intervenant dans la discussion s'exprime comme suit :

« J'ai écouté avec un très vif intérêt l'exposé si complet et si clair que M. Roy vient de nous présenter. Il sera d'accord avec moi, je pense, pour constater qu'au fur et à mesure qu'un index des prix est construit sur une base théorique plus satisfaisante pour l'esprit, les difficultés de son application pratique pour le statisticien s'accroissent en même temps. Nous serons donc obligés longtemps encore de nous contenter d'index assez grossièrement construits, qu'il faudra utiliser avec toutes les réserves nécessaires. J'ai été particulièrement intéressé par la mention qu'il a faite, en terminant, de l'utilisation des index pour comparer les écarts des prix dans différents pays. Dans les problèmes monétaires, et en particulier lorsqu'il s'agit d'ajuster par un changement de l'unité des prix dans un pays donné son niveau des prix à celui des autres, il est nécessaire de prendre comme point de départ une période où l'écart absolu des niveaux des prix soit approximativement connu. Partant de là, et en utilisant les index de chaque pays, on peut conclure à l'écart existant au moment qui intéresse le praticien. Nous avons fait cette recherche pour une année et pour quelques grandes villes en France, en Allemagne, en Suisse, en Hollande et en Suède (1). Nous nous attendions bien à rencontrer des difficultés en ce qui concerne l'identité des produits pris comme éléments d'observation dans les différents pays. Mais nous ne pensions pas que ces difficultés seraient aussi grandes que celles que nous avons rencontrées en fait. Déjà, pour les produits agricoles et pour les matières premières où cependant le nombre des qualités n'est pas très considérable, on ne peut parler à aucun degré d'une identité parfaite des produits, ni pour le blé ni même pour le charbon. Mais dès qu'on aborde les produits de fabrication industrielle, textiles, cuirs, machines, etc... la variété des produits s'avère infiniment plus grande qu'on ne l'imagine *a priori*. En fait, les objets usuels dont se sert un Scandinave ou un Italien, un Autrichien ou un Français diffèrent profondément. Malgré l'aide que nous ont apportée les grands magasins, en nous aidant à préciser certaines qualités de produits à peu près identiques, nous avons dû par force limiter nos observations à un nombre bien plus petit d'objets que nous ne l'espérions. Or, il y a là une utilisation des index particulièrement fructueuse pour la solution de beaucoup de problèmes d'aujourd'hui. Je remercie M. Roy d'avoir attiré notre attention sur l'enquête de M. Staehle faite à la Société des Nations que je ne connaissais pas. »

M. Huber rend hommage au brillant exposé de M. Roy sur une question qui a donné lieu à de nombreux travaux et à de multiples controverses. Il précise que les travaux de M. Staehle sur la théorie économique des indices de prix, ont été entrepris lorsque leur auteur faisait partie du B. I. T. et comme suite des essais de ce bureau pour la comparaison des niveaux de vie des travailleurs dans les divers pays, question extrêmement difficile et lourde de conséquences.

Répondant à une interruption de M. Fréchet « qu'il vaut mieux avoir une solution insuffisante même très approximative de problèmes difficiles que rien du tout », M. Huber fait observer que si la discussion devait rester sur le plan académique, il serait tout à fait d'accord. Mais les résultats concernant le coût de la vie ont dans l'ordre pratique des répercussions quelquefois imprévisibles. Ils sont invoqués dans les discussions de salaires; souvent mal interprétés ils peuvent provoquer des conflits qui ne se seraient pas produits sans eux. Dans ces conditions, il est dangereux de répandre dans le public des conclusions qui ne sont pas fondées sur des bases certaines.

A propos de l'application des indices en chaîne pour les comparaisons entre les divers pays, M. Huber dit qu'il s'est occupé de cette question au Comité

(1) Cette enquête a été publiée sous le titre *Écarts de prix*. France Étranger.

d'experts statisticiens du B. I. T.; cette méthode a souvent donné des résultats assez décevants, quel que soit le soin pris pour ménager les transitions territoriales correspondant aux divers anneaux de la chaîne. Avec des cheminements différents, on peut aboutir à des résultats contradictoires ou peu concordants.

Répondant d'abord à M. HUBER, M. FRÉCHET pense qu'il était important d'être averti par un spécialiste aussi expérimenté, des dangers sociaux que peut présenter la diffusion de la comparaison des niveaux des prix. Nous nous souviendrons donc qu'il faut être prudent dans ce domaine. Toutefois, des objections analogues pourraient être adressées à la diffusion de toutes les statistiques et des conclusions parfois aventurées qui ont été tirées : c'est la rançon du progrès.

En ce qui concerne la communication si claire de M. ROY, M. FRÉCHET se bornera à des remarques d'ordre secondaire. Il se demande s'il y avait lieu de s'attendre à une ressemblance entre la loi de distribution des prix et la loi des erreurs d'observation. En effet, les erreurs d'observation sont des qualités de même nature, soumises au hasard. Quand j'effectue deux mesures, rien ne distingue à l'avance les opérations successives à accomplir. Au contraire, quand je note le prix du blé, puis le prix du café, je sais *à l'avance* qu'il s'agit de deux nombres d'origine différente. Les différents prix du blé sont bien soumis au hasard; mais à un instant donné, c'est ma volonté et non le hasard qui me fait passer successivement de la catégorie blé à la catégorie café.

Bien entendu, il aurait pu arriver (en fait, d'après M. Roy ce n'est pas ce qui a lieu) que les deux lois de distribution (des erreurs d'observation et des prix) fussent très semblables; mais ç'aurait été pour des raisons très différentes de celle de l'analogie des erreurs d'observation et des prix.

D'autre part, M. FRÉCHET estime que, *a priori*, on peut s'attendre à une dissymétrie de la loi de distribution d'une variable qui, par nature, est positive. C'est ce qui explique le succès fréquent de la substitution à une variable positive de son logarithme.

Fréquemment, cette substitution conduit à une loi de distribution notablement moins dissymétrique que la loi primitive. Le succès de cette transformation serait souvent maintenu si on remplaçait le logarithme par une autre fonction croissant aussi de $-\infty$ à $+\infty$. Le succès de la transformation logarithmique sera plus justifié et plus significatif s'il s'appuie sur une appropriation particulière du logarithme à la nature concrète de la variable aléatoire envisagée. Par exemple, si l'on étudie la distribution des revenus, il est clair que cette distribution devrait être dans sa forme générale, sinon dans sa position par rapport aux axes, indépendante de l'unité monétaire et du nombre total des individus considérés.

L'emploi du logarithme, réduit l'intervention de ces deux éléments à une translation de la figure. C'est une des raisons qui ont pu ou auraient pu conduire Pareto à une loi qui porte son nom.

M. René ROY répond qu'il est bien évident que la distribution des prix constitue un problème essentiellement différent de la distribution des erreurs d'observation; il n'est cependant pas interdit de comparer la loi de distribution des prix à la loi normale concernant les erreurs d'observation et la tâche du statisticien se trouve grandement facilitée lorsqu'il dispose d'une fonction simple. des rapports de prix qui suit une loi de distribution présentant les caractères généraux de la loi normale. Dans ce cas, en effet, le choix de la moyenne définie par cette fonction se trouve pour ainsi dire imposé par la nature même de la distribution.

D'autre part, le fait que les logarithmes des prix se distribuent selon une loi symétrique présentant les caractères généraux de la loi normale, peut être rattaché à la loi de l'effet proportionnel exposé par Gibrat dans son ouvrage sur les inégalités économiques; dans ce cas, la compensation des écarts porte sur les logarithmes des prix et par conséquent sur les variations relatives des prix au lieu de porter sur leurs valeurs absolues.

M. LUTFALLA fait quelques remarques sur la conclusion du lumineux exposé de M. ROY. Il la considère assez décevante pour la théorie économique, puisque les quatre méthodes conduisent à un arsenal d'indices variés. Un choix ne peut être dès lors tenté qu'en faisant appel à des préoccupations pratiques. Cette situation risque de miner l'édification d'une dynamique *macroscopique ;* ce point mérite quelques commentaires.

Le modèle de Léon WALRAS est présent à la mémoire de chacun : il suppose connues les quantités $x_{ij}$ de chacun des $i$ biens ($i = 1,2.....,m$) détenues par chacun des $j$ individus ($j = 1,2.....,n$) présents sur un marché de libre concurrence. Quoique le nombre des $x_{ij}$, égal à $mn$, soit en général très grand, un tel modèle est facile à étudier du point de vue de l'analyse mathématique. Ainsi s'est édifiée la statique de l'École de Lausanne.

Mais ce même modèle est peu maniable dans des applications économétriques. Tout d'abord, parce que dans les équations de Walras figurent les fonctions individuelles d'utilité, et puis ensuite parce que nous sommes dans l'ignorance des $x_{ij}$ (point de vue atomique ou microscopique). Les relevés statistiques ne fournissent que les quantités globales de *certains* biens $i$, apportées sur le marché, c'est-à-dire des $\Sigma X_i = \sum_j x_{ij}$ (point de vue macroscopique), ou encore les valeurs globales $\Sigma_j\ p_{ij}$, (les $p_{ij}$ étant les prix), c'est-à-dire des indices.

L'économètre, dans son constant souci d'en appeler à l'expérience, doit donc abandonner les psychologies individuelles et les quantités atomiques. Il se bornera à édifier des modèles macroscopiques où les indices jouent un rôle capital. Il est dès lors important de parvenir à des expressions analytiques définies et concordantes, soit par la méthode monétaire de M. DIVISIA, soit par la méthode d'équivalence de MM. BOWLEY, KONUS et FRISCH. Si l'on avait abouti dans cette voie, un pont aurait été jeté entre la statique microscopique et la dynamique macroscopique. Le résultat aurait été à lui seul d'une importance théorique incalculable. En dénombrant quatre méthodes discordantes dans leurs résultats, M. ROY nous a montré certains écueils présents de l'économique.

Faut-il désespérer de parvenir à une certaine unité? Il ne semble pas. La théorie de l'équivalence est encore fondée sur les équations des utilités élémentaires de WALRAS, donc sur un modèle statique. Il y a, sans doute, quelque illogisme à définir un indice, grandeur essentiellement chronologique, par deux états échelonnés dans le temps d'un modèle statique. A cet égard, la méthode de M. Divisia présente une incontestable supériorité sur la méthode de l'équivalence. Une grande part de nos difficultés actuelles disparaîtront peut-être lorsque les lois dynamiques de la valeur seront mieux connues (Voir les travaux de M. Tintner). Remercions M. Roy non seulement de nous avoir fait bénéficier de son effort de clarification et de ses travaux antérieurs, mais encore d'avoir signalé avec franchise l'impasse dans laquelle se trouve aujourd'hui l'économie théorique.