Journal de la société statistique de Paris

M. Dumas

L'introduction des probabilités dans les sciences concrètes

Journal de la société statistique de Paris, tome 89 (1948), p. 435-443

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1948__89__435_0>

II

L'INTRODUCTION DES PROBABILITÉS DANS LES SCIENCES CONCRÈTES (1)

I. — C'est la statistique qui nous réunit. C'est la statistique qui attire l'attention du technicien de la discipline qui a recours à elle, sur des particularités et qui se trouve de ce fait à l'origine d'études techniques. Mais ce n'est pas la statistique qui conduit à prendre telle décision plutôt que telle autre : on prend une décision dans un certain but et on la prend, par suite, d'après une *probabilité,* à savoir : d'après la probabilité que l'on croit devoir associer au fait que la décision conduira au but désiré.

Le chercheur et l'ingénieur qui bâtissent et utilisent des sciences concrètes ont donc constamment besoin de résoudre des problèmes de probabilités; ils le font d'ailleurs parfois, inconsciemment; quoi qu'il en soit, ils sont préoccupés par des événements qui sont relativement complexes; ils rattachent ces événements plus ou moins hypothétiquement à d'autres plus simples, susceptibles de donner lieu à une expérimentation. Qui dit « expérimentation » dit « série de résultats », à interpréter suivant les méthodes statistiques; et ces méthodes conduisent à rattacher l'événement caractérisé par le résultat à une loi de probabilité. Le chercheur et l'ingénieur ont alors à déduire de cette loi celle à laquelle doit être rattaché l'événement complexe qui les préoccupe; ils ont pour cela à faire des hypothèses techniques et à vaincre des difficultés mathématiques, mais ce ne sont pas là des questions qui intéressent particulièrement notre Société. Par contre, les quelques considérations que je vais exposer sur les résultats expérimentaux et sur leur interprétation statistique sont, je l'espère, de nature à retenir votre attention et même à susciter un fructueux échange de vues.

Comme par formation j'aime bien rester dans le concret et que je pense n'être pas seul ici dans cette disposition d'esprit, je vous offre un support concret pour vous aider à suivre mes quelques remarques. Veuillez donc penser à la résistance d'une construction : un édifice est construit pour résister à certains efforts; le technicien connaît pour chaque matière employée à la construction, les résultats statistiques concernant la résistance d'éprouvettes; en établissant son projet, il se pose pour chacune des parties de l'édifice, la question de savoir comment il doit la dimensionner pour qu'elle résiste, ou plutôt : pour que *le fait que cette partie résistera ait une grande probabilité.*

***

II. — Et tout de suite une petite digression. Ai-je eu raison de parler de *probabilité?* Il ne s'agit certainement pas ici de ce coefficient attaché à un événement idéal et grâce auquel on construit axiomatiquement le si bel édifice

(1) Communication présentée à la Société de Statistique le 19 mai 1948.

mathématique que vous connaissez; s'agit-il de quelque grandeur dont une évaluation expérimentale est fournie par la fréquence de l'événement dans un grand nombre d'épreuves? pour reprendre une expression de notre Président (1). Sans doute y a-t-il beaucoup de cela dans la probabilité dont je parle ici; mais à coup sûr, cette probabilité est ce qu'Estienne (2) appelait la *cote* de l'événement alors qu'il cherchait à introduire ainsi dans la science un mot du langage des courses de chevaux et des paris en général : la *cote* d'un événement est la mesure de la conviction que l'on a que l'événement se produira; le mot de cote évoque d'ailleurs que l'on ne fait pas impunément état d'une conviction : en donnant une cote c à un événement, on se déclare prêt à parier à c contre $1 - c$ que cet événement se produira; tout tiers peut se déclarer prêt à tenir le pari, et il n'y a plus alors qu'à convenir quelle somme totale sera en jeu, à verser les sommes et à attendre la désignation du gagnant.

Sans doute si la distinction était faite systématiquement entre la *probabilité* des mathématiciens et la *cote* qui intéresse les applications des probabilités mathématiques, le langage y gagnerait-il en clarté. Quoi qu'il en soit, pour me conformer aux errements actuels, je vais parler de *probabilités* même lorsqu'il s'agira en fait de *cotes.*

Je me dépêche maintenant d'aborder enfin le cœur de mon sujet.

***

III. — A l'origine de toute loi de probabilité utilisée dans une science concrète, il y a, je l'ai dit, les données expérimentales; ces données se présentent sous la forme d'une série de résultats qualitatifs ou d'une série de résultats numériques, c'est-à-dire, d'une série de mesures, ce dernier mot étant pris ici dans un sens un peu plus étendu que celui qu'il a normalement.

Cette série peut être obtenue à la suite d'une expérimentation convenable, faite spécialement, avec toutes garanties relativement à la constance pratique des conditions des essais. Bien entendu, par essais préliminaires, l'expérimentateur a cherché à déterminer quelles étaient les conditions à la constance desquelles il devait veiller et quelles corrections il devait apporter aux indications lues pour tenir compte d'une condition qu'il ne pouvait maintenir constante. Finalement, il se place dans les conditions *les meilleures* pour recueillir une série de résultats ou de mesures.

Mais qu'est-ce au juste que ces conditions que j'ai qualifiées de *meilleures* sans préciser autrement? Ce sont les conditions grâce auxquelles l'outillage servant aux essais ne vicie pas les résultats; et grâce auxquelles la dispersion des résultats expérimentaux est aussi faible que possible dans l'état d'alors de la technique expérimentale; ce sont celles dans lesquelles on sait le mieux ce que l'on fait; ce sont celles grâce auxquelles on aborde avec le plus de confiance le temps suivant qui est le temps caractérisé par le passage de la série expérimentale à une loi de probabilité.

***

(1) M. Fréchet, *Revue philosophique*, 1946 CXXXVI.
(2) Estienne, *Loisirs d'artilleur*, Berger-Levrault. 1906.

IV. — Admettons que les résultats dont nous disposons soient des mesures. Le problème est de passer de la série de mesures à une loi de probabilité; c'est un problème de statistique mathématique qui, sous réserve de quelques variantes, se résout ainsi :

— on *admet* que la série de mesures connue est une image à peu près fidèle de la loi cherchée;

— on retient à *titre de première hypothèse* une certaine expression mathématique comprenant un ou plusieurs paramètres et définissant une loi de probabilité;

— on estime *au mieux* le ou les paramètres inconnus;

— on s'assure par les méthodes dites *de vérification d'une hypothèse* et pour, au besoin, revenir sur la première hypothèse faite, qu'il n'est pas *absurbe de penser* que la loi précisée comme il vient d'être dit aurait pu donner naissance à la série de mesures connue, au cours d'opérations assimilables à un tirage au hasard dans une urne dont la composition aurait schématisé cette loi.

J'ai souligné à dessein la part d'arbitraire qui intervient dans chacune des opérations élémentaires qui précèdent; cette part est considérable : on commence par admettre que la série de mesures est l'image fidèle de la loi cherchée et cependant elle peut n'être que la manifestation d'une sorte de tirage au sort, et l'on sait combien les prélèvements peuvent être trompeurs, surtout s'ils n'ont pas un effectif important; on applique finalement les méthodes dites *de la vérification d'une hypothèse*, mais ces méthodes conduisent non pas à proprement parler à vérifier que l'hypothèse en cause est exacte, mais à *constater qu'il n'est pas absurde de penser* que cette hypothèse est exacte : la nuance, vous le voyez, est sérieuse.

Quoi qu'il en soit, c'est plus spécialement de l'opération intermédiaire, celle de l'estimation des paramètres que je désirerais vous entretenir maintenant.

***

V. — A proprement parler, l'estimation d'un paramètre est l'opération conduisant à mettre une valeur à la place de la lettre qui désigne le paramètre; la valeur en cause doit être choisie entre beaucoup d'autres, qui sont plus ou moins voisines les unes des autres, et qui toutes donneraient lieu à la même réponse positive à la suite de l'opération de vérification d'hypothèse qui doit suivre l'estimation du paramètre.

Je fais remarquer en passant que c'est bien exactement cela qui est désirable dans le cas qui nous occupe et que nous ne nous trouvons pas en présence, comme dans le cas de la vérification d'une hypothèse, d'une expression quelque peu improprement utilisée.

***

VI. — Si le paramètre est une variable aléatoire, il n'y a pas deux manières de résoudre le problème de l'estimation d'un paramètre; il n'y en a qu'une; c'est celle qui consiste à considérer la loi de probabilité de cette variable comme une loi à priori et, à l'aide du théorème de Bayes-Laplace, à calculer la loi de probabilité à posteriori correspondant à la fois à la loi à priori et à la série de mesures.

Ensuite, il suffit de choisir une valeur typique de cette loi à posteriori et de retenir cette valeur typique comme estimation du paramètre; de plus un indice de précision de cette même loi à posteriori — l'écart moyen centré quadratique par exemple — servira à donner une idée de la confiance que l'on peut accorder à cette estimation. Le problème est ainsi résolu aussi complètement que l'on peut espérer le faire et sans aucun arbitraire qui ne soit dans la nature des choses.

***

VII. — Bien entendu, en pratique et sauf exception, on ne peut guère suivre une telle méthode qu'en faisant une *hypothèse de probabilités à priori*, et le résultat se ressentira alors dans une certaine mesure de cette hypothèse.

Mais est-ce là une circonstance qui doit *empêcher* l'utilisation de probabilités à priori; certes non, et je n'en veux pour preuve qu'un écrit de la plus haute autorité que nous reconnaissions tous, je veux dire de notre président lui-même. M. le professeur Fréchet a provoqué dernièrement une enquête internationale sur un problème d'estimation de paramètres et après avoir dépouillé bien des réponses sur lesquelles on relevait notamment certains des plus grands noms français et étrangers en matière de probabilité et de statistique, il a écrit dans son rapport :

Pour arriver dans le problème posé à une affirmation mathématique démontrable, il faut : soit modifier les hypothèses, soit modifier la question posée, soit faire intervenir à côté de la théorie axiomatique, une interprétation de la probabilité, interprétation qui peut varier d'un mathématicien à un autre.

Or, j'ai dit plus haut (§ V) que dans le cas qui nous occupe ici, il n'est pas question de ruser avec la réalité et de ne pas répondre à la question qui fait l'objet *propre* de l'estimation des paramètres. Dans ces conditions, d'après M. Fréchet, il n'y a d'affirmation démontrable que si l'on modifie les hypothèses, que si par suite l'on fait état d'une connaissance qui ne figure pas dans les données : l'on ne peut guère d'ailleurs faire état d'une telle connaissance supplémentaire qu'à titre d'hypothèse.

Il y a cependant un cas, et ce cas est, je pense, unique, où il n'est pas besoin d'hypothèse supplémentaire : c'est celui, évoqué tout à l'heure, où l'on connaît de façon certaine une loi de probabilité à priori et où alors, il suffit d'ajouter aux données cette connaissance certaine pour arriver à une affirmation démontrable. Ce cas, il est vrai, est beaucoup plus théorique que pratique mais doit-il, de ce fait, être complètement négligé? Je ne le crois pas, car, du moins, il montre la voie; il montre que puisqu'il y a une hypothèse à faire, il est logique de faire une hypothèse de probabilités à priori et non pas une hypothèse de nature autre.

D'ailleurs quelles sont donc les hypothèses que la statistique mathématique nous propose?

Il y a M. de Finetti qui écrit que le *problème et les méthodes d'estimation des* *paramètres n'ont de sens qu'en s'appuyant sur le raisonnement de Bayes, même s'il est sous-entendu, déguisé ou refusé.*

Il y a la méthode d'estimation par le *maximum de vraisemblance*; elle est basée sur un sens restrictif qui est donné au mot vraisemblance; elle se justifie par ceci que l'on est assez bien disposé à admettre ses règles; mais en regardant de près ces règles, on se rend compte qu'elles conduisent *identiquement* aux opérations qui seraient faites dans le cas où l'on admettrait l'hypothèse de l'égalité des probabilités à priori de toutes les valeurs possibles du paramètre à estimer, et où comme valeur typique de la loi de probabilité à posteriori, on retiendrait la valeur dominante; cette méthode du maximum de vraisemblance est donc une méthode de probabilité à priori qui s'ignore, ou qui ne veut pas dire son nom; et un des résultats de cette situation est que le développement de cette méthode ne profite pas de tous les renseignements que l'on pourrait tirer de la connaissance d'une loi de probabilité à posteriori, notamment du point de vue de la confiance à accorder à la détermination de l'estimation retenue.

Il y a encore une autre méthode dont je puis dire deux mots; c'est celle des *arguments fiduciaires* de Fisher. Le mieux que l'on puisse dire de cette méthode est qu'elle est basée sur une interprétation personnelle que son auteur donne plus ou moins obscurément et pour cet usage spécial au mot de probabilité; sous cette réserve, elle met en possession de deux limites entre lesquelles la valeur du paramètre à estimer a une « probabilité » donnée de se trouver; on ne pourrait guère faire mieux de ce point de vue si l'on disposait d'une loi de probabilité à posteriori; mais en fait dans le cas particulier, très important, de l'estimation des paramètres de la loi de Laplace-Gauss, j'ai pu rattacher (1) les résultats déduits de la théorie des arguments fiduciaires à une loi de probabilité à priori, laquelle d'ailleurs n'est pas, comme plus haut, celle de l'égalité des probabilités à priori de toutes les valeurs possibles de l'un et de l'autre des paramètres en cause. Ne puis-je donc pas conclure de cela que la méthode des arguments fiduciaires est, elle aussi, une méthode de probabilités à priori qui s'ignore?

IX. — Dans de telles conditions, pourquoi ne pas prendre délibérément le parti de baser l'estimation d'un paramètre sur une hypothèse de probabilités à priori? Agir ainsi ne serait pas plus critiquable que l'emploi de toute autre méthode, et procurerait au moins l'avantage que la solution des problèmes beaucoup plus complexes que celui de l'estimation d'un paramètre, deviendrait aisée : problèmes de *présomption* sur une nouvelle série de résultats; problèmes de *comparaison* de deux séries de résultats; problèmes de la détermination de *variables indépendantes* l'une de l'autre etc...

Il est vrai que la méthode d'estimation d'un paramètre au moyen d'une hypothèse de probabilités à priori a contre elle la grande liberté dont on semble disposer pour choisir cette hypothèse. Que faut-il donc penser de cela?

Il y a d'abord ce résultat certain que si l'on dispose pour estimer un paramètre d'une série de résultats à effectif important, n'importe quelle loi de probabilité à priori conduit très sensiblement à la même estimation : le choix de l'hypothèse est donc, dans ce cas, sans conséquence pratique.

(1) *Revue Scientifique*, 1er fascicule de 1947.

Il y a aussi que l'hypothèse doit être choisie — c'est là une simple question de bon sens — de manière à ne pas avantager sans raison valable certaines valeurs possibles du paramètre par rapport aux autres; de ce fait, beaucoup ont cru et d'autres croient encore qu'il convient de faire l'hypothèse de l'égalité des probabilités à priori de toutes les valeurs possibles du paramètre; mais je ne pense pas que ce choix soit toujours le bon, car il conduit parfois à des contradictions qui sont choquantes et dont certaines ont été mises en évidence par Lhoste (dont nous regrettons la mort récente) il y a quelques 25 ans dans un mémoire (1) malheureusement peu connu : par exemple dans le cas de l'estimation du paramètre de précision d'une loi de Gauss-Laplace, *on n'obtient pas le même résultat si l'on applique la loi de l'égalité des probabilités à priori à l'écart moyen centré quadratique de la loi, ou à son module de précision.* Y a-t-il donc moyen de faire mieux? Oui, car il est possible de trouver une loi simple de probabilités à priori évitant la contradiction dont il vient d'être parlé; il est vrai que cette loi simple ne peut guère être considérée que comme une loi *virtuelle* mais cela ne soulève aucune véritable difficulté mathématique ni en théorie (2), ni dans des applications que j'ai pu développer, il y a plus de dix ans (3), autant qu'il m'a paru désirable de le faire.

D'ailleurs tout récemment, notre collègue, M. l'inspecteur général Baticle (4) a pu rattacher la loi de probabilité à priori des paramètres d'une loi de Gauss-Laplace à ce que doit être la loi de probabilité à priori des paramètres d'une droite dans un plan pour que cette droite ne soit aucunement particularisée, et il a établi que dans ces conditions la loi virtuelle dont je vous entretenais il y a un instant, s'imposait.

Si maintenant j'ajoute que cette loi virtuelle est précisément celle qui conduit à regarder comme des probabilités mathématiques, les probabilités à la mode de Fisher, citées à l'occasion de la méthode des arguments fiducaires, je pense que la cause est entendue et que pour les paramètres d'une loi de Gauss-Laplace c'est cette loi virtuelle (5) que l'on doit retenir comme hypothèse de probabilités à priori lorsque l'on n'a aucune raison de faire autrement.

***

X. — Abandonnons le cas particulier des paramètres de la loi de Gauss-Laplace et revenons au cas général.

En tout état de cause, l'hypothèse de probabilités à priori que l'on envisage doit être soumise au crible du bon sens; c'est là le moment de se rappeler quelques lignes qu'écrivait Estienne (op. cit.) :

On invoque sans cesse la nécessité des grands nombres, pour éviter les incohérences qui choquent le plus vulgaire bon sens dès qu'on en emploie de petits.

---

(1) Le calcul des probabilités appliqué à l'artillerie. *Revue d'artillerie.* Berger-Levrault. 1923.

(2) Dumas : *Congrès de 1945 de l'Association française pour l'avancement des sciences.*

(3) *Mémorial de l'Artillerie française,* 1937.

(4) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, tome 226, séance du 5 janvier 1948.

(5) Si α et h désignent respectivement les paramètres valeur centrale et module de précision de la loi de Gauss-Laplace, la probabilité élémentaire à priori de cette loi virtuelle est proportionnelle non pas à $d\alpha\, dh$ comme si l'on prenait l'égalité des probabilités à priori de toutes les valeurs possibles de α et de h, mais à $d\alpha\, dh/h$.

Une formule de conjecture est vraie ou fausse : c'est avec de petits nombres que le bon sens la vérifie; on l'applique ensuite avec confiance aux nombres moyens de la pratique, pour lesquels la formule est surtout utile. Le bon sens se passe souvent fort bien de calcul quand les nombres sont ou très grands ou très petits; *sa solution intuitive lui suffit.*

Je puis dire sans entrer dans des détails qui nous mèneraient trop loin, que les lois virtuelles de probabilité à priori parfaitement cohérentes du point de vue envisagé plus haut, m'ont toujours conduit à des résultats que le bon sens vérifiait dans le cas des petits nombres comme dans celui des grands nombres; je pense donc que ces lois virtuelles mériteraient d'être l'objet de recherches approfondies pour que toutes leurs conséquences soient enfin bien connues, même si cela, devait entraîner la création d'une nouvelle école de statisticiens.

***

XI. — Certains d'entre vous pensent peut-être que je me suis laissé entraîner bien loin de mon sujet, bien loin du titre de ma communication; ils ont certainement raison; je m'en excuse auprès de vous tous et je ressens la nécessité de faire le point avant de vous permettre enfin d'exposer vos observations.

Pour introduire des probabilités (ou mieux des cotes) dans des sciences concrètes, il faut se baser sur des expériences. On prépare ces expériences avec tout le soin désirable, en éliminant soigneusement toute cause qui pourrait vicier les résultats du fait de l'outillage servant aux essais ou augmenter la dispersion du fait des éléments soumis aux essais.

Ensuite, on passe des fréquences observées à une loi de probabilité de laquelle on déduit, à l'aide d'hypothèses techniques et d'astuces mathématiques (dont j'ai eu l'occasion (1) de donner une idée dans le cas particulier de la résistance des matériaux) la loi de probabilité correspondant non plus comme la loi initiale aux éprouvettes de résistance soumises aux essais, mais aux parties de construction réalisées dans la même matière que les éprouvettes.

Pour terminer, voici deux remarques concernant la loi de probabilité initiale, déduite directement des fréquences observées et à laquelle on a abouti, comme je l'ai montré, après bien de l'arbitraire et bien des hypothèses.

La première remarque est que cette loi de probabilité ne peut être relative qu'aux conditions dans lesquelles ont été faits les essais : pourquoi au cours d'essais de résistance prend-on soin de polir la surface extérieure des éprouvettes? C'est parce que l'on sait que des irrégularités de surface auraient de l'influence sur la résistance; or les matières employées en construction présentent des irrégularités de surface; donc il faut tenir compte de l'influence de ces irrégularités de surface lorsque l'on passe de la loi initiale à la loi relative à la construction elle-même, ou bien démontrer expérimentalement que cette influence qui n'est pas négligeable dans le cas des essais sur éprouvettes, le devient lorsque la matière est employée en construction.

La seconde est que si la loi initiale peut *parfois* être considérée comme bien déterminée dans le voisinage de la valeur équiprobable, c'est-à-dire dans la

(1) *Annales des Ponts et chaussées*, Septembre-octobre 1947.

région où l'on dispose *parfois* d'un nombre assez grand de résultats expérimentaux, on peut penser qu'elle ne l'est *pratiquement jamais* dans le voisinage des valeur 0 et 1 de ses probabilités intégrales : est-ce que 1.000 essais peuvent donner une idée de quelque chose qui ne se produirait, en moyenne, qu'une fois sur dix mille? Évidemment non. Alors je crois prudent de mettre en garde contre une signification trop précise que l'on serait tenté de donner aux troisièmes décimales des probabilités intégrales voisines de 0 ou de 1 qui sont indiquées par une loi de probabilité, du moins lorsque cette loi a été déduite d'une série de résultats expérimentaux à faible effectif, en suivant la marche que je viens d'avoir l'honneur et le plaisir de passer en revue devant vous.

M. Dumas.

DISCUSSION

M. Baticle fait observer que dans le dimensionnement des parties d'une construction interviennent deux considérations. D'une part, la probabilité de la rupture d'un élément donné sous un effort connu et d'autre part, l'évaluation de l'effort auquel cet élément aura à résister. Or, si la probabilité de rupture sous un effort connu peut être déterminée avec une certaine précision par l'ajustement des résultats d'essais, on se trouve beaucoup plus embarrassé pour l'effort auquel l'élément doit résister : il y a une grande incertitude du fait des hypothèses sur lesquelles repose le calcul et d'autre part sur les circonstances qui peuvent se produire dans l'utilisation de l'ouvrage envisagé.

Dans le cas particulier des câbles de téléfériques, par exemple, on a pu cependant appliquer la statistique mathématique en définissant la « résistance escomptée » du câble au moyen des résultats d'essais exécutés dans des conditions déterminées (moyenne empirique diminuée de trois fois l'écart moyen quadratique). C'est à partir de cette résistance escomptée qu'on évalue la sécurité par rapport aux efforts calculés dans les hypothèses les plus défavorables.

M. Dumas souligne l'intérêt de toute spécification qui, comme celle dont vient de parler M. Baticle, fait intervenir, de façon logique, à la fois une valeur typique et un indice de dispersion de la série de mesures dont on dispose. Il croit d'ailleurs savoir que l'origine de la spécification concernant les câbles de téléfériques se trouve dans ses propres travaux.

M. Fréchet. — Je félicite M. Dumas de son intéressante communication. Bien qu'il tienne à rester dans le concret, il n'a pu manquer de s'apercevoir de ce fait paradoxal que dans ces questions si éminemment concrètes soulevées par le contrôle statistique des produits manufacturés, on se trouve nécessairement amené à soulever les questions philosophiques les plus délicates des fondements du calcul des probabilités, et il n'a pas hésité à les aborder.

Laissant de côté les nombreux points où je suis d'accord avec lui, j'émettrai quelque doute sur le point suivant. Peut-on affirmer que l'emploi de la formule de Bayes-Laplace (1), conduisant, par l'emploi d'une loi de probabilité à priori

(1) Je répète ici que, contrairement à certaines assertions :
1° La formule publiée par Bayes était, selon Molina, limitée au cas de probabilités à priori égales, tandis que,
2° On peut montrer en différents passages de l'œuvre de Laplace, la généralisation de la formule de Bayes au cas de probabilités à priori inégales. (Références à ces passages dans mon rapport à Washington cité plus loin).

convenable, aux mêmes résultats que ceux qui sont obtenus par une des méthodes qui prétendent ne pas faire usage de cette formule, il en résulte la preuve que :

1° Ces méthodes ont fait un usage déguisé de cette formule;

2° La vraie loi de probabilité à priori est celle qu'on a employée?

Dans mon rapport sur ce sujet à l'Institut international de Statistique de septembre 1947, j'ai fait observer que plusieurs partisans de l'emploi de la formule de Bayes-Laplace ont aussi avancé la même affirmation sans indiquer explicitement des passages de raisonnement où cet emploi déguisé apparaîtrait. Sans contredire leur affirmation, je tiens qu'elle n'est pas appuyée de preuves suffisantes.

Maintenant, changeant de tablier, je vais appuyer ceux que je viens de combattre et apporter un argument en faveur de l'emploi de la formule de Bayes-Laplace. On sait que plusieurs auteurs : Poincaré, Edgeworth, von Mises, entre autres, ont montré qu'on pouvait parer à l'insuffisance de notre connaissance de la loi de probabilité à priori, en augmentant le nombre n des épreuves. Quand n tend vers l'infini, la probabilité à posteriori cherchée devient indépendante de la loi de probabilité à priori pourvu que celle-ci satisfasse à certaines conditions simples. Je signale maintenant que j'ai pu obtenir le même résultat pour un nombre *quelconque* d'épreuves, *même petit*, même réduit *à une seule*. Quand il s'agit de déterminer la probabilité inconnue P d'un événement, il suffit de se placer dans le cas où l'on sait d'avance qu'il est peu probable que cette probabilité P soit petite ou voisine de l'unité (le sens de cette hypothèse pouvant être donné d'une façon précise) (1).

Il a été dit dans la discussion que, pour l'ingénieur, l'incertitude sur les efforts mécaniques auxquels la construction doit résister, a beaucoup plus d'influence sur ses plans que l'incertitude sur la qualité des produits employés. Je voudrais ici l'opinion de Le Chatelier suivant laquelle l'incertitude sur la qualité des ciments de son époque était la source de très grosses et inutiles dépenses.

M. Dumas estime qu'il y a bien emploi déguisé, volontaire ou non, des probabilités à priori dans le cas de la méthode du maximum de vraisemblance puisbue cette méthode est basée sur une définition qui peut s'énoncer ainsi : « on appelle vraisemblance d'un événement lié à une loi faisant partie d'une famille de lois à un paramètre, une quantité proportionnelle à la densité de probabilité à posteriori de ce paramètre lorsque l'on admet l'égalité des probabilités à priori de toutes les valeurs possibles du paramètre. »

La question n'est pas aussi simple en ce qui concerne les arguments fiduciaires de Fisher puisqu'on ne dispose d'aucune définition nette de ce qu'il faut entendre par argument fiduciaire; en tout état de cause, de l'identité des formules auxquelles conduisent d'une part les arguments fiduciaires et d'autre part la loi virtuelle de probabilités à priori en cause dans l'exposé, M. Dumas ne conclut nullement que cette loi virtuelle s'impose : il conclut simplement que cette loi conduit à des résultats qui ne doivent pas choquer ceux qui sont habitués à se laisser guider par les arguments fiduciaires.

---

(1) Voir mon article « L'estimation statistique » dans le prochain numéro des Annales de la Société Mathématique polonaise.