Journal de la société statistique de Paris

Roger Congard

# L'élasticité d'arc

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 92 (1951), p. 142-152

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1951__92__142_0>

## L'élasticité d'arc

La méthode abstraite de la théorie économique nous permet d'élaborer, par la simple déduction logique, des instruments commodes d'analyse des phénomènes économiques concrets. Ces instruments peuvent être rangés en deux catégories : ceux qui aboutissent à une simplification par synthèse des éléments simples de l'analyse logique des phénomènes économiques et ceux qui, édifiés sur la base d'un faisceau d'hypothèses *a priori*, permettent de suivre jusqu'à son ultime conséquence logique le fonctionnement d'un système économique idéal ou modèle que l'on cherchera par la suite à rapprocher de plus en plus du système économique réel correspondant.

Nous désignons les premiers du terme de concepts, les seconds du terme de cadres.

Parmi les concepts il en est de plusieurs sortes suivant le degré de synthétisation qu'ils mettent en jeu. Nous pouvons tout d'abord distinguer les concepts qualitatifs qui sont des concepts ayant un degré de synthétisation égal à 1. Ces concepts qualitatifs permettent de délimiter le « secteur » d'observation; ils constituent l' « idée préalable » ou idée *a priori* nécessaire à toute recherche.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce type de concept connu de tous pour reporter notre attention sur les concepts quantitatifs ou symboles sur lesquels reposent les raisonnements d'économique.

Plus le degré de synthétisation du concept quantitatif sera élevé, plus il nous permettra d'introduire des simplifications dans nos raisonnements. Au symbole simple de degré de synthétisation « 1 » tel qu'un prix ou une quantité, nous opposerons le symbole évolué d'un degré de synthétisation supérieur à 1. Ainsi une variation de quantité ayant un degré de synthétisation égal à 2 sera dit symbole de second ordre, une variation relative de quantité sera un symbole de troisième ordre, etc... jusqu'à l'indice général de quantité qui est un symbole de $n^{\text{ième}}$ ordre.

La création de tels symboles évolués nous permet, en réalisant une synthèse de symboles élémentaires, de mettre à la disposition du chercheur des « outils d'analyse » de plus en plus efficaces.

L'un des plus intéressants de ceux-ci est sans conteste le concept d'élasticité ou dérivée élastique qui constitue un symbole évolué de $6^e$ ordre; c'est à l'étude de ce dernier que nous consacrerons le présent article.

Toutefois, afin de limiter nos développements et ne voulant pas reproduire ici les analyses bien connues du concept d'élasticité ponctuelle, nous nous bornerons à élargir quelque peu le domaine traditionnel d'analyse de ce concept en étudiant l'élasticité d'arc.

## I. — Coefficient d'élasticité ponctuelle et courbes isoélastiques.

Nous appellerons coefficient d'élasticité ponctuelle de la quantité « $x$ », par rapport à la quantité « $y$ », le rapport de la variation relative de « $x$ » à la variation relative de « $y$ » quand ces *variations* relatives sont *infinitésimales*, les quantités $x$ et $y$ étant liées entre elles par une relation fonctionnelle définie et continue.

En donnant à $x$ et $y$ une « signification économique » nous pourrons définir de multiples variétés d'élasticité.

Citons-en quelques-unes :

— élasticité de la quantité demandée par rapport au prix;

— élasticité de la quantité offerte par rapport au prix;

— élasticité du prix par rapport à la quantité demandée également dénommée (par H.-L. Moore) flexibilité du prix (1).

(1) Cf. H.-L. Moore : *Synthetic economics* et également M.-H. Guitton : *Essai sur la loi de King*, p. 15. M.-V. Rouquet la Garrigue, tome I, p. 78 et suiv. *Les problèmes de la corrélation et de l'élasticité.*

— **élasticité du prix par rapport à la quantité offerte également dénommée** expansibilité du prix;

— élasticité de la dépense par rapport au prix;

— élasticité de la dépense par rapport au revenu, etc...

La formule générale du coefficient d'élasticité sera :

$$\lambda_y^x = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dy}{y}} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x} = \frac{d\,\mathrm{L}\,x}{d\,\mathrm{L}\,y}.$$

L'avantage d'un tel coefficient est qu'il est indépendant des grandeurs absolues de $x$ et $y$. Il en résulte que les coefficients d'élasticité de divers biens sont directement comparables.

La formule même du coefficient d'élasticité nous conduit à la notion de courbes isoélastiques ou courbes d'élasticité constante. Le coefficient d'élasticité ponctuelle de $y$ par rapport à $x$ étant le quotient des dérivées logarithmiques de $y$ et $x$; pour que l'élasticité soit constante il suffit que l'une des variables soit une puissance de l'autre.

En effet si $y = x^\alpha$ l'élasticité $\lambda_x^y$ sera

$$\lambda_x^y = \lambda_x^{x^\alpha} = \frac{d\mathrm{L}x^\alpha}{d\mathrm{L}x} = \frac{d\ (\alpha\ \mathrm{L}x)}{d\mathrm{L}x} = \frac{\alpha\ d\mathrm{L}x}{d\mathrm{L}x} = \alpha.$$

Une courbe isoélastique d'élasticité constante $\lambda$ aura donc pour fonction représentative $y = x^\lambda$ à une constante près. A cette notion nouvelle de courbe isoélastique se rattache la notion d'élasticité d'arc. Par le fait même qu'elle a une élasticité constante en chacun de ses points, la courbe isoélastique aura une élasticité d'arc qui aura la même valeur que l'élasticité ponctuelle en chacun de ses points.

Une telle courbe constitue donc un cas limite pour lequel les deux notions d'élasticité d'arc et d'élasticité ponctuelle se rejoignent.

## II. — L'élasticité d'arc.

Nous étudierons successivement l'utilité du concept d'élasticité d'arc qui se dégage de la critique de la notion d'élasticité ponctuelle et ses caractéristiques principales, pour terminer par un exemple d'application de ce nouveau concept à la mesure des phénomènes de substitution.

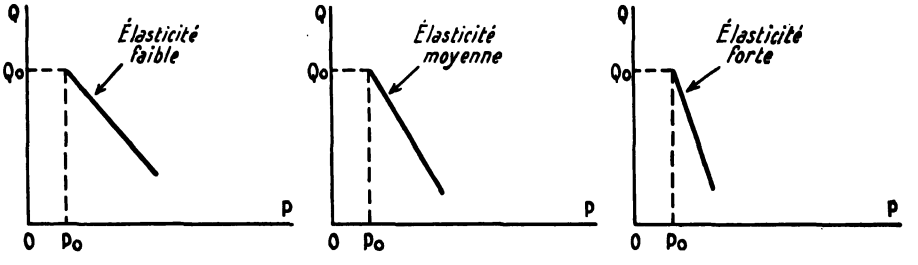
### 1° *Utilité du concept d'élasticité d'arc.*

#### A. Critique de la notion d'élasticité ponctuelle.

M. Murat, dans son ouvrage *Initiation à la théorie économique* (1) essaie de donner une représentation « concrète » du caractère plus ou moins élastique

(1) *op. cit.* p. 105.

de la demande. A cet effet il représente sur trois diagrammes des courbes de pentes différentes que nous reproduisons :




Comme nous l'avons fait ci-dessus, il indique les élasticités (ou du moins une appréciation grossière de ces élasticités) correspondant à chaque pente.

La manière dont sont tracées les courbes justifie pleinement cette représentation, mais cette dernière risque d'induire en erreur et de faire croire que tous les points des fragments de courbe tracée ont même élasticité, ou bien que l'élasticité serait à peu de chose près assimilable à la pente de la courbe. Or nous savons qu'il n'en est rien. Pour dissiper ce risque de fausse interprétation il eût suffi (comme nous l'avons fait sur nos figures) de mettre en évidence le fait que les courbes partent « de la même hauteur » en donnant aux fragments de courbe un même point de référence » ($P_0$ $Q_0$) (1).

Nous savons en effet que par ce point ne passe qu'une « courbe de déboursé constant » ou hyperbole équilatère isoélastique d'élasticité (marshallienne) égale à 1. Selon que la pente du fragment de courbe représenté sera supérieure, inférieure ou égale à celle de la tangente menée en ce point à l'hyperbole équilatère nous pourrons dire que l'élasticité sera supérieure, inférieure ou égale à 1 au point considéré (et suivant le cas aux environs immédiats de ce point).

Nous voyons donc qu'il n'est pas possible de parler d'élasticité (dans le sens marshallien du terme) d'un fragment de courbe ou arc.

Nous allons le prouver de façon plus concrète en traçant sur le même graphique le fragment de courbe et l'hyperbole équilatère.

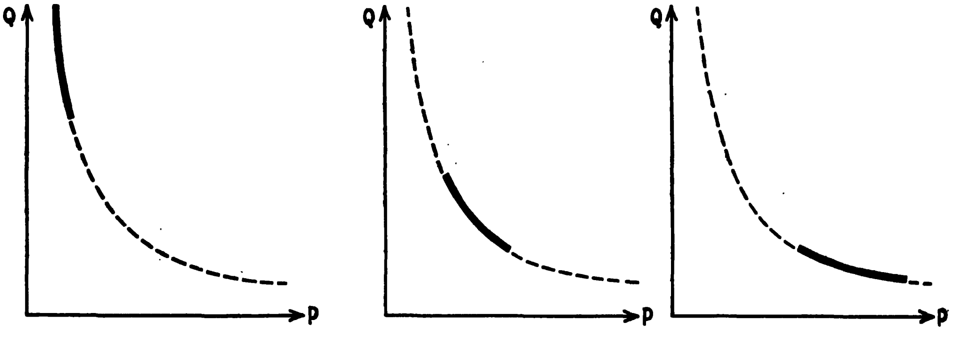



Figure A Figure B Figure C

(1) G. Pirou dans son ouvrage *La valeur et les prix*, a bien pris soin d'attirer l'attention du lecteur sur ce point. Cf. p. 219.

Nous voyons sur les figures ci-dessus que si l'on raisonnait par analogie aux figures de M. Murat on pourrait qualifier la portion de courbe tracée en trait plein de la figure A de portion de courbe d'élasticité forte, celle de la figure B de portion de courbe d'élasticité moyenne et celle de la figure C de portion de courbe de faible élasticité. Or ces 3 portions de courbes sont des fragments de l'hyperbole équilatère dessinée en pointillé, c'est-à-dire qu'ils ont tous une élasticité constante égale à 1.

Il n'est donc pas possible d'étendre la notion d' « élasticité ponctuelle » et de la rendre utilisable pour définir l'élasticité d'une courbe de demande (si celle-ci n'est pas isoélastique) ou d'un fragment d'une telle courbe. N'y aurait-il pas là une raison suffisante pour abandonner le concept d'« élasticité ponctuelle »?

Certains économistes en effet ont prétendu que l'élasticité à un point de la courbe, correspondant à une variation infinitésimale de la quantité demandée et du prix de demande, « ne nous apprend rien » sur l'élasticité correspondant à des variations finies. Comme les variations réelles des quantités (prix et demande par exemple) sont obligatoirement des quantités finies, l'inutilité du concept d' « élasticité ponctuelle » n'en résulte-t-elle pas?

Cette objection a été formulée en particulier par le professeur Dalton qui prétend que la distinction entre « élasticité ponctuelle » (point elasticity) et élasticité d'un bout à l'autre d'un arc fini (arc elasticity) revêt une grande importance au point de vue pratique (1).

« Supposons, nous dit-il, une « courbe de déboursé constant » (hyperbole équilatère) telle que, quel que soit le prix du bien il en sera vendu pour 1200 dollars. L'équation de cette courbe est $xy = 1200$ dollars où $x$ est la quantité vendue et $y$ le prix unitaire. Nous avons vu que, tant que nous nous confinions aux variations infinitésimales, l'élasticité à chaque point de la courbe est égale à 1. De plus, comme c'est une « courbe de déboursé constant » toute (faible) chute de prix provoquera un accroissement proportionnel de la quantité achetée.

« Mesurons maintenant l'élasticité correspondant à des variations finies. En d'autres termes, déterminons les élasticités correspondant à des arcs (non plus à des points) variés de la courbe de demande.

« Par l'équation de la courbe de demande nous savons que lorsque le prix unitaire est 4 dollars, la quantité demandée est de 300 unités. Si le prix s'élève de 4 à 6 dollars soit de 50 %, la quantité demandée tombe de 300 à 200 unités soit de 33 1/3 % et l'élasticité de la demande est $-\frac{33^1/_3}{50} = -\frac{2}{3}$ $\left(\frac{2}{3}\right.$ si l'on adopte le concept marshallien$\left.\right)$. Si par ailleurs le prix tombe de 4 dollars à 2 dollars soit de 50 % la quantité demandée s'élève de 300 à 600 unités soit de 100 % et l'élasticité de la demande est $-\frac{100\ \%}{50\ \%} = -2$. Maintenant supposons que le prix revienne à son premier niveau c'est-à-dire que le prix s'élève de 2 à 4 dollars soit de 100 %, la quantité demandée tombera de 600 à 300 soit de 50 %; ici l'élasticité de la demande est $-\frac{50\ \%}{100\ \%} = -\frac{1}{2}$.

(1) Cf. H. Schultz *Statistical laws of demand and supply*, p. 6.

« Ces exemples montrent que, malgré que l' « élasticité-point » de cette courbe soit — 1, l'élasticité d'arc n'est jamais égale à — 1, c'est-à-dire qu'un pourcentage fini de variation de prix ne produit pas une variation d'un même pourcentage de la quantité demandée. De plus la grandeur de l' « élasticité d'arc » dépend de l'extrémité de l'arc qui est prise pour base, ou, ce qui revient au même, de la direction dans laquelle le prix est supposé varier. Elle est toujours supérieure à 1 pour une chute du prix et un accroissement de la demande et toujours numériquement inférieure à 1 pour une élévation du prix et une diminution de la demande. »

Et le professeur Dalton en conclut que la « courbe de déboursé constant » telle qu'elle est caractérisée par Marshall « contient une erreur mathématique définie ».

### B) **Valeur de la critique.**

Henry Schultz a montré que la critique du professeur Dalton ne pouvait être retenue (1). En effet si l'on peut admettre avec ce dernier qu'il y a une distinction valable et utile à faire entre l'« élasticité ponctuelle » et l' « élasticité d'arc » et que les formules basées sur l'hypothèse de faibles modifications des variables ne doivent pas être appliquées aux problèmes relatifs à de larges variations, nous ne pouvons cependant aller jusqu'à y voir le résultat d'une « erreur mathématique définie ».

Il n'y a pas véritablement de différence entre l' « élasticité ponctuelle » et l' « élasticité d'arc » d'une courbe de déboursé constant (ou courbe isoélastique quelconque). La caractéristique d'une courbe de déboursé constant c'est qu'une variation du prix provoque une variation inversement proportionnelle de la quantité achetée. Dalton suppose que les variations proportionnelles sont mieux mesurées par les pourcentages d'augmentation ou de diminution, et en rendant ces pourcentages de variation suffisamment importants (comme c'est le cas dans les 3 exemples numériques présentés par lui) il obtient pour son « coefficient d'élasticité d'arc » des valeurs très largement variables. Mais les pourcentages de variation ne donnent pas une bonne mesure des variations proportionnelles quand les bases sur lesquelles ils sont calculés ne sont pas constantes.

Il est donc nécessaire d'introduire un nouveau type d'élasticité correspondant à des variations finies qui permette d'obtenir un résultat qui ne soit pas affecté par le sens de variation de la variable indépendante. Ce nouveau type d'élasticité que nous appellerons élasticité d'arc doit répondre principalement à 2 conditions :

*a*) La mesure de l'élasticité d'arc doit être indépendante de l'extrémité de l'arc qui est *prise comme point de départ.*

*b*) Le coefficient d'élasticité d'arc d'une portion de courbe isoélastique doit être égal à l'élasticité constante caractéristique de cette courbe.

Un moyen de mesure des variations proportionnelles répondant à ces conditions est obtenu en prenant la différence des logarithmes des valeurs extrêmes

(1) H. Schultz *op. cité* p. 13.

considérées pour chaque variable. Ainsi la variation proportionnelle d'une quantité $q$ dont la valeur passe de $q1$ à $q2$ sera $Lq1 - Lq2$.

L'élasticité étant le quotient de variations proportionnelles de 2 variables, soit par exemple quantités et prix, sera obtenue par la formule :

$$\overset{a \frown a'}{\lambda}{}^{q}_{p} = \frac{Lq1 - Lq2}{Lp1 - Lp2}$$

$a$ et $a'$ étant définis par les coordonnées

$$a\begin{cases} p1 \\ q1 \end{cases} \qquad a'\begin{cases} p2 \\ q2 \end{cases}$$

où $\overset{a \frown a'}{\lambda}{}^{q}_{p}$ sera appelée élasticité d'arc de $q$ par rapport à $p$; valable pour la partie de la courbe comprise entre $a$ et $a'$.

2° *Caractéristiques du nouveau concept d'élasticité d'arc.*

La notion d'élasticité d'arc telle qu'elle vient d'être définie se rapproche de celle d'élasticité ponctuelle en ce sens que les variations tant des quantités que des prix étant mesurées logarithmiquement, il n'y a pas la moindre différence entre l'élasticité ponctuelle et l'élasticité d'arc d'une courbe de déboursé constant.

Le fait que l'emploi des logarithmes est non seulement admissible mais qu'il s'impose presque, découle de la définition mathématique du coefficient d'élasticité.

$$\lambda^{q}_{p} = \frac{dq}{q} \Big/ \frac{dp}{p} = \frac{dLq}{dLp}.$$

Les avantages de notre définition (1) sont les suivants :

1° l'élasticité d'arc précédemment définie est indépendante des unités de mesure employées.

2° la formule donnant l'élasticité d'arc est symétrique c'est-à-dire indépendante de l'extrémité de l'arc que l'on choisit comme point de départ.

En effet

$$\overset{a \frown a'}{\lambda}{}^{q}_{p} = \frac{Lqa - Lqa'}{Lpa - Lpa'}$$

qui devient en multipliant le numérateur et le dénominateur par — 1 :

$$\frac{Lqa' - Lqa}{Lpa' - Lpa}$$

formule qui représente l'élasticité d'arc $\overset{a' \frown a}{\lambda}{}^{q}_{p}$. On a donc bien $\overset{a \frown a'}{\lambda}{}^{q}_{p} = \overset{a' \frown a}{\lambda}{}^{q}_{p}$;

3° le coefficient d'élasticité d'arc est égal à — 1 quand $p1\ q1 = p2\ q2$.

(1) Cette définition de l'élasticité d'arc est celle adoptée par H. Schultz : « *Statistical laws of demand and supply* ».

En effet le coefficient d'élasticité d'arc $\overset{1\frown 2}{\lambda}{}^{q}_{p}$ s'écrit :

$$\overset{1\frown 2}{\lambda}{}^{q}_{p} = \frac{Lq1 - Lq2}{Lp1 - Lp2} = \frac{L\left(\frac{q1}{q2}\right)}{L\left(\frac{p1}{p2}\right)}$$

or de $p1\, q1 = p2\, q2$ on tire

$$\frac{p1}{p2} = \frac{q2}{q1} = \frac{1}{\frac{q1}{q2}} \quad \text{et} \quad L\left(\frac{p1}{p2}\right) = -\, L\left(\frac{q1}{q2}\right)$$

ce qui donne pour valeur du coefficient d'élasticité :

$$\overset{1\frown 2}{\lambda}{}^{q}_{p} = \frac{L\left(\frac{q1}{q2}\right)}{-\,L\left(\frac{q1}{q2}\right)} = -\,1.$$

4° Enfin le coefficient d'élasticité d'arc est égal à $-m$ quand $p1^m\, q1 = p2^m\, q2$.

En effet cette égalité s'écrit :

$$\frac{q1}{q2} = \frac{p2^m}{p1^m} = \left(\frac{p2}{p1}\right)^m$$

et

$$L\left(\frac{q1}{q2}\right) = m\, L\left(\frac{p2}{p1}\right) = -\, mL\left(\frac{p1}{p2}\right)$$

on a bien :

$$\overset{1\frown 2}{\lambda}{}^{q}_{p} = \frac{L\left(\frac{q1}{q2}\right)}{L\left(\frac{p1}{p2}\right)} = -\, m.$$

**Remarquons enfin que l'élasticité d'arc ainsi définie correspond à une « valeur** moyenne » des élasticités ponctuelles de l'arc considéré. Ceci n'étant pas évident à priori, nous allons le démontrer.

soit $y = f\,(x)$ la fonction représentative de l' « arc logarithmique » où $y = Lq$ et $x = Lp$. Si la fonction $q = \varphi\,(p)$ est définie et continue dans l'intervalle AB correspondant à l'arc $\widehat{AB}$ la fonction $y = f\,(x)$ sera définie et continue dans l'intervalle $\widehat{ab}$ tel que $a = LA$, $b = LB$. Elle admet donc une dérivée en tout point de cet intervalle. A chaque combinaison $(x1,\ y1)$ correspondra donc une dérivée de $y$ par rapport à $x$ soit $y' = f'\,(x)$.

Cette dérivée est représentée par la tangente à l' « arc logarithmique » au point $(x1,\ y1)$ ou plutôt par la tangente trigonométrique de la pente de cette tangente. Elle est donc égale par définition à l'« élasticité ponctuelle » correspondant au point $(x1,\ y1)$.

Pour obtenir une « valeur moyenne » des élasticités ponctuelles en chaque point de la courbe nous prendrons la « moyenne arithmétique » des valeurs algébriques des élasticités ponctuelles. Autrement dit nous prendrons la moyenne arithmétique des valeurs algébriques de la dérivée $f'(x)$.

Cette moyenne est représentée par

$$m = \sum_{a}^{b} f'(x)\, dx / b - a$$

c'est-à-dire

$$m = [f(x)]_a^b / b - a = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En remplaçant $f(b)$, $f(a)$, $b$ et $a$ par leur valeur, on obtient :

$$m = \frac{\mathrm{L}qb - \mathrm{L}qa}{\mathrm{L}pb - \mathrm{L}pa}$$

c'est-à-dire la valeur que nous avons adoptée pour mesurer l'élasticité d'arc.

Notre coefficient d'élasticité d'arc présente donc un nouvel avantage :

5° Le coefficient d'élasticité d'arc est la moyenne arithmétique des valeurs algébriques des coefficients d'élasticité ponctuelle.

On pourrait être amené cependant à objecter qu'une moyenne arithmétique n'est pas « aussi représentative » qu'une médiane car cette dernière correspond à une valeur effective tandis que la moyenne est une quantité abstraite ».

A cette objection nous pourrions répondre que, s'agissant d'une moyenne de valeurs variant par quantités infinitésimales, il se trouve nécessairement qu'une de ces valeurs est identique à la moyenne. Mais ceci n'est pas démontré d'une part, et d'autre part, si la démonstration en était faite, encore faudrait-il identifier cette valeur.

C'est à la résolution de ce problème que s'est attaché M.-J. Gallego-Diaz (1).

Celui-ci procède tout d'abord à une transformation de la courbe (ou arc de courbe) initiale en posant $x$ (quantité) $= e^u$ et $p$ (prix) $= e^v$.

Il obtient ainsi une nouvelle forme de la fonction de demande : $e^u = \mathrm{F}(e^v)$. Utilisant la formule des accroissements finis, dérivée de l'application du théorème de Rolle, en vertu de laquelle il existe dans l'intervalle $\widehat{\mathrm{AB}}$ une valeur $f'(c)$ de la fonction $f(x)$ telle que $f'(c) = \frac{f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A})}{\mathrm{B} - \mathrm{A}}$, il obtient : $\frac{e^{ub} - e^{ua}}{e^{vb} - e^{va}} = f'(e^{vc})$ et, en prenant les logarithmes népériens des 2 termes, il obtient :

$$\frac{\mathrm{U}b - \mathrm{U}a}{\mathrm{V}b - \mathrm{V}a} = \mathrm{U}'vc \ (2)$$

où $\mathrm{U}'vc$ est par définition la dérivée logarithmique de la fonction $f(x)$ au point

(1) Cf. M. Gallego Diaz *A note on the Arc elasticity of Demand.* The Review of Economic studies 1944-1945 n° 32 p. 114.

(2) En effet $\frac{e^{ub} - e^{ua}}{e^{vb} - e^{va}} = \frac{e^{ub - ua}}{e^{vb - va}} = f'(e^{vc})$ et, en prenant les logarithmes népériens :

$$\frac{\mathrm{U}b - \mathrm{U}a}{\mathrm{V}b - \mathrm{V}a} = \mathrm{L}\, f'(e^{vc}) = \mathrm{U}'\, vc.$$

$c\left[\lambda^{(c)y}_{x}\right]$. L'élasticité au point ($c$) se trouve donc égale à $\frac{\mathrm{U}b - \mathrm{U}a}{\mathrm{V}b - \mathrm{V}a} = \frac{\mathrm{L}qb - \mathrm{L}qa}{\mathrm{L}pb - \mathrm{L}pa}$, c'est-à-dire à l'élasticité d'arc telle que nous l'avons définie plus haut.

Nous aboutissons donc à la conclusion suivante : il existe sur l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ un point C ayant pour « élasticité ponctuelle » l'élasticité d'arc de $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$.

3° *Application à la mesure des phénomènes de substitution.* Dans son livre sur le mécanisme des prix M. Jean Marchal définit ainsi l'élasticité de substitution :

« On appelle élasticité de substitution l'expression de la facilité plus ou moins grande de la substitution en fonction du rapport des prix. Il faut, pour la décrire, supposer définis les besoins et les ressources des demandeurs, les désirs et les conditions de production des vendeurs ; l'élasticité de substitution de la demande d'un produit A par rapport à celle d'un produit B, c'est l'ampleur des réactions du rapport des quantités demandées de A et de B aux variations du rapport de leurs prix réciproques.

Si $a$ est la quantité demandée de A, $b$ la quantité demandée de B, $pa$ le prix de A, $pb$ le prix de B, $n$ l'élasticité de substitution on a :

$$n = \frac{\Delta\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)} : \frac{\Delta\left(\frac{pa}{pb}\right)}{\left(\frac{pa}{pb}\right)} \quad (1)$$

En désignant les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{pa}{pb}$ respectivement par $\alpha$ et $\beta$ nous aurons :

$$\lambda^{\alpha}_{\beta} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \Big/ \frac{\Delta\beta}{\beta}$$

ou en prenant les valeurs infinitésimales $d\alpha$ et $d\beta$

$$\lambda^{\alpha}_{\beta} = \frac{d\alpha}{\alpha} \Big/ \frac{d\beta}{\beta} = \frac{d\,\mathrm{L}\alpha}{d\,\mathrm{L}\beta}.$$

---

(1) Cf. J. MARCHAL *Le mécanisme des prix* p. 242 en note. Notons que dans la formule du coefficient d'élasticité de substitution, ce sont les variations relatives des rapports $\frac{pa}{pb}$, $\frac{a}{b}$ qui entrent en jeu et non le rapport des variations relatives $\left(\frac{\Delta\,pa}{pa} \Big/ \frac{\Delta\,pb}{pb}\right)\left(\frac{\Delta\,a}{a} \Big/ \frac{\Delta\,b}{b}\right)$.
Ces deux expressions conduisent à des résultats différents.
En effet :

$$\frac{d\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)} = d\,\mathrm{L}\,\frac{a}{b} = d\,(\mathrm{L}a - \mathrm{L}b) = d\,\mathrm{L}a - d\,\mathrm{L}b$$

$$= \frac{da}{a} - \frac{db}{b}$$

par contre $\frac{da}{a} \Big/ \frac{db}{b} = \frac{d\,\mathrm{L}a}{d\,\mathrm{L}b}$. En confondant ces deux expressions on remplacerait une différence par un quotient.

Si nous remplaçons maintenant $\alpha$ par sa valeur $\frac{a}{b}$ il vient :

$$\lambda_\beta^{\frac{a}{b}} = \frac{d\,L\left(\frac{a}{b}\right)}{dL\beta} = \frac{d\,La - d\,Lb}{d\,L\beta} = \lambda_\beta^a - \lambda_\beta^b.$$

Si nous remplaçons à son tour $\beta$ par sa valeur $\frac{pa}{pb}$ il vient :

$$\text{(I)} \qquad \lambda_{\frac{pa}{pb}}^{\frac{a}{b}} = \frac{dL\ (a/b)}{dL\ (pa/pb)} = \frac{d\ La - d\,Lb}{dL\ pa - dL\ pb}$$

Cette expression représente la pente de la corde de la transformée logarithmique de la courbe d'indifférence.

Signalons également qu'une autre formule peut être donnée pour l'élasticité de substitution de A par rapport à B. En effet de :

$$\lambda_{\frac{pa}{pb}}^{\frac{a}{b}} = \frac{d\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)} \Big/ \frac{d\left(\frac{pa}{pb}\right)}{\left(\frac{pa}{pb}\right)}$$

on tire la formule (I) ou, en remplaçant par leurs valeurs :

$$dLa = \frac{da}{a} \qquad dLb = \frac{db}{b} \qquad dLpa = \frac{dpa}{pa} \qquad dLpb = \frac{dpb}{pb}$$

on obtient :

$$\text{(II)} \qquad \lambda_{\frac{pa}{pb}}^{\frac{a}{b}} = \frac{\frac{da}{a} - \frac{db}{b}}{\frac{dpa}{pa} - \frac{dpb}{pb}}.$$

Remarquons enfin que la formule $\frac{dLa - dLb}{dLpa - d\,Lpb}$, qui représente la pente de la corde de la transformée logarithmique de la courbe d'indifférence, représente aussi l'élasticité d'arc de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe d'indifférence quand A est défini par les coordonnées $(a,\ pa)$ et B par les coordonnées $(b,\ pb)$.

L'élasticité de substitution de deux biens est donc mesurée par le coefficient d'élasticité d'arc de la courbe d'indifférence mettant en rapport ces deux biens.

Roger CONGARD.

***